

Édouard Thomas

Les mystérieux carnets de Ramanujan

Comité international des jeux mathématiques
Salon « culture et jeux mathématiques »

Samedi 28 mai 2016
Place Saint-Sulpice
75006 Paris



17^e Salon
Culture & Jeux
Mathématiques
2016

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets
- 2016 : enfin un film grand public !

Sommaire

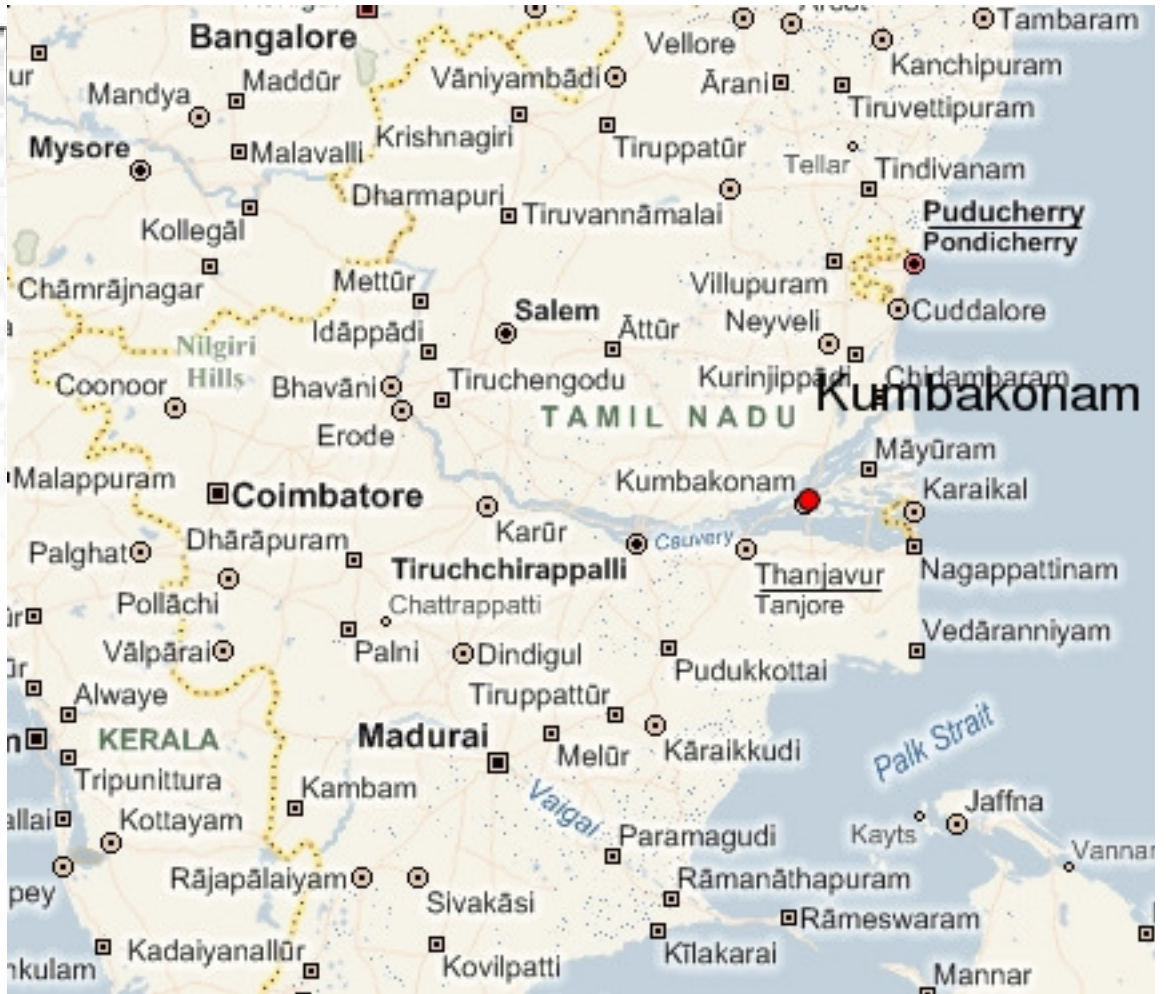
- L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Le voyage des carnets
- Un siècle d'édition
- Le « mystère » sur des exemples

L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle

- Capitale : Madras (aujourd'hui Chennai)
- La colonisation britannique jusqu'en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle encouragée (hindouisme...)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train opérationnel depuis 1877

Kumbakonam

- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennai
- « Chef-lieu de canton », district de Thanjavur
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent...)
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples majeurs)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis...)

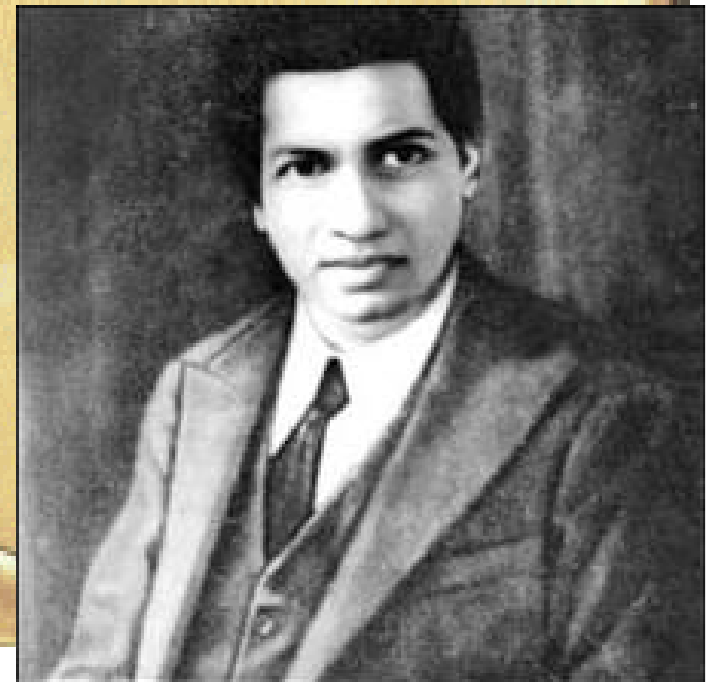
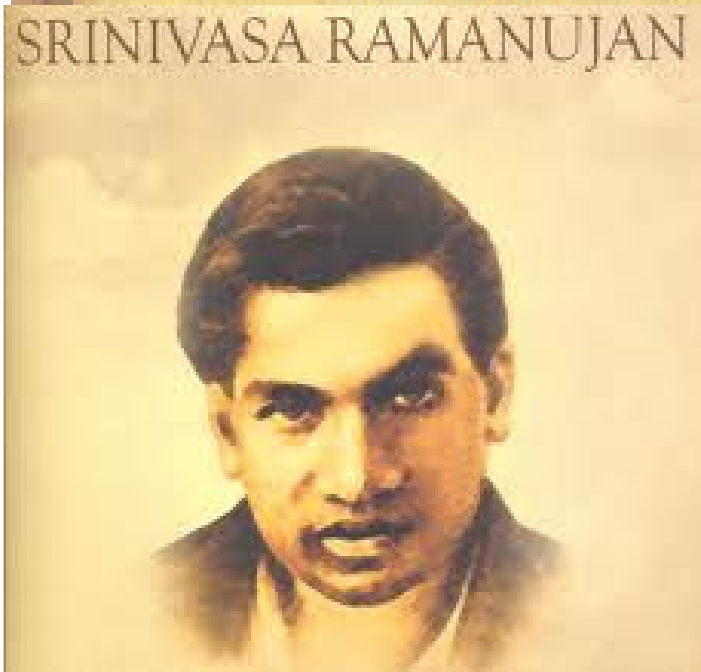


La Kâverî est un fleuve sacré

Ramanujan

- Né à Érode (Pallipalayam), 22 décembre 1887
- Vit avec sa famille à Kumbakonam
- Brahmane très observant (végétarien...)

SRINIVASA RAMANUJAN



Une enfance difficile

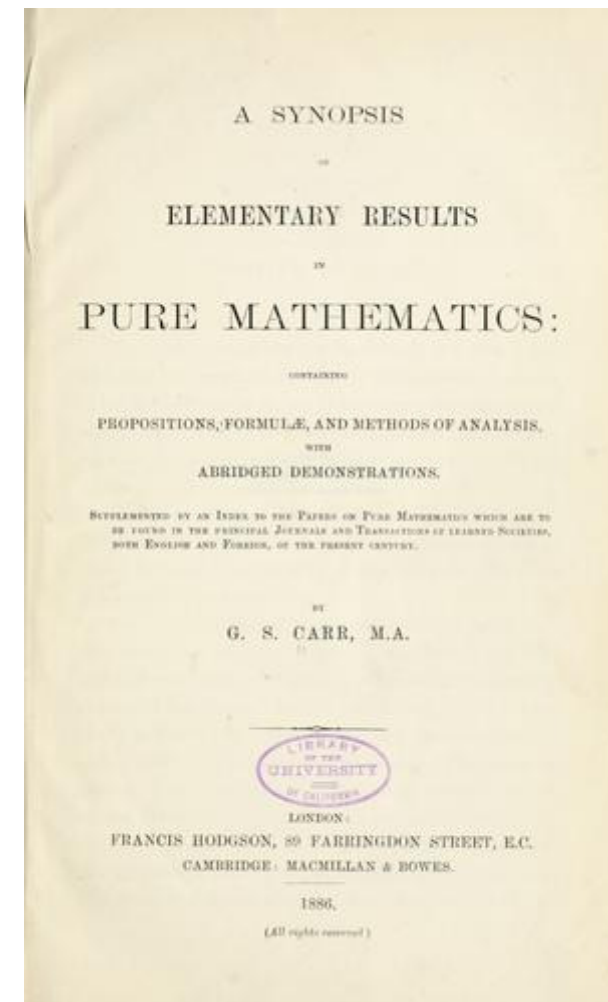
- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille



Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1^{er} du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr
décide de se consacrer aux maths
abandon des autres matières

A Synopsis Of Elementary Results In Pure Mathematics, George Shoobridge Carr, 1880 (deux volumes)



Conséquences...

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses **découvertes** dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'étude
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans)
pour l'obliger à s'assumer, petits boulots
 - Tente de faire reconnaître
la valeur de son travail

Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Chennai)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts...

Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker
(48 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson
(56 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

Godfrey Hardy (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



En 1913...

- 35 ans, 3 livres à son crédit
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Encourage les maths de son temps
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre...

Quelques
formules
(notations
modernes)
contenues
dans la lettre
de Ramanujan
à Hardy,
datée du
16 janvier 1913

$$1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 - \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right) \quad (1)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi} \quad (2)$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{3}{4})]^2} \quad (3)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{[\Gamma(\frac{3}{4})]^4} \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \dots dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(b+1) \Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b + \frac{1}{2}) \Gamma(b-a+1)} \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^5+r^7+\dots)} \quad (6)$$

$$\text{Si } \alpha\beta = \pi^2, \text{ alors } \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) \quad (7)$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{2}{2a + \frac{3}{a + \frac{4}{2a + \dots}}}}} \quad (8)$$

$$4 \int_0^\infty \frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots}}}}} \quad (9)$$

$$\text{Si } u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^{10}}1 + \dots}} \text{ et } v = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \dots}}}, \text{ alors } v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4} \quad (10)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}1 + \dots}} = \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{3}\pi} \quad (11)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{3}\pi} \quad (12)$$

L'invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Idée : le former aux maths **de son temps**
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé (le 14 avril 1914), la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :
Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture
- Accentués par la guerre :
Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés
- L'université de Cambridge :
Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique ?)

Terrible souffrance physique

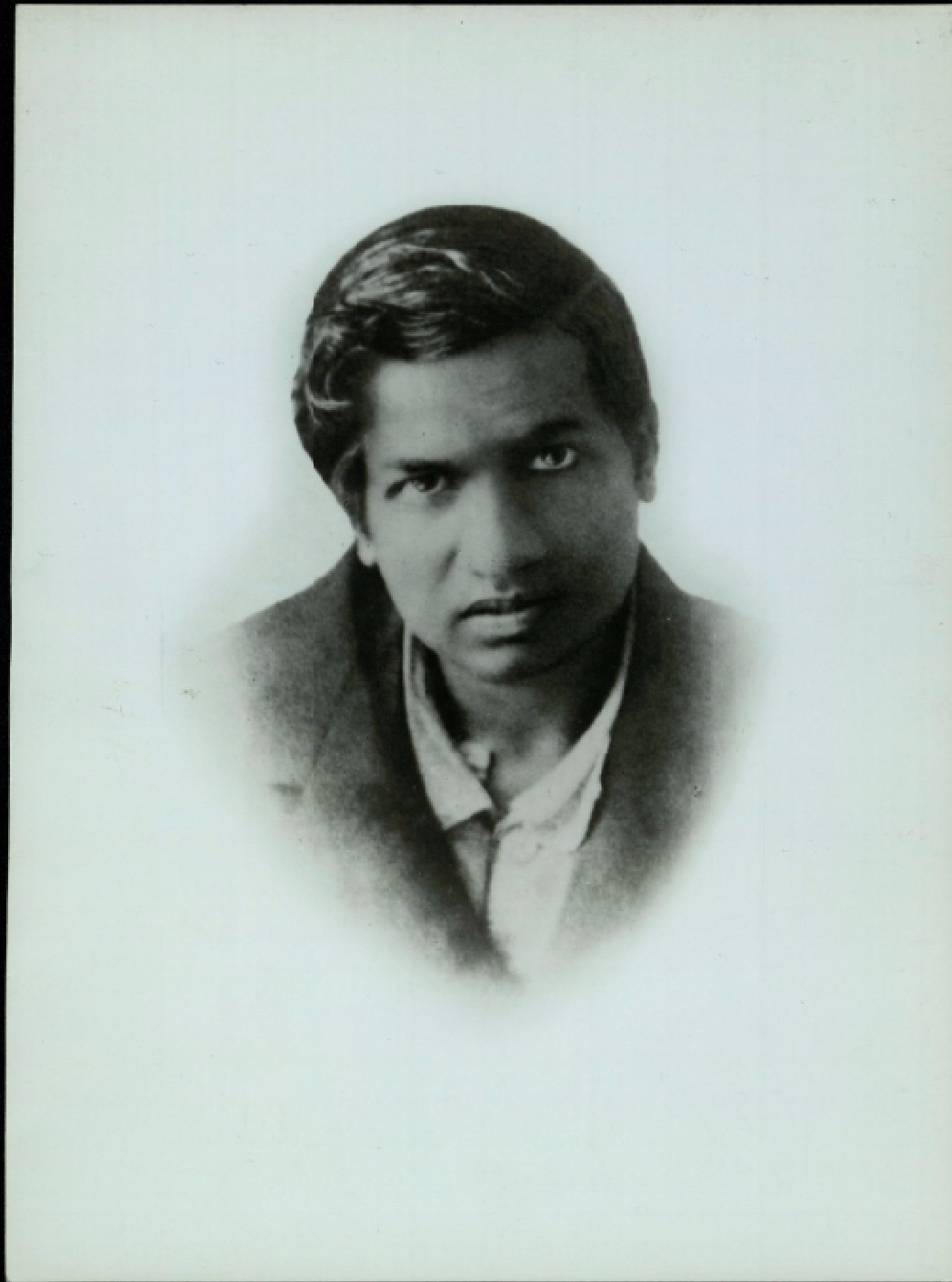
Diagnostics erronés (tuberculose...)

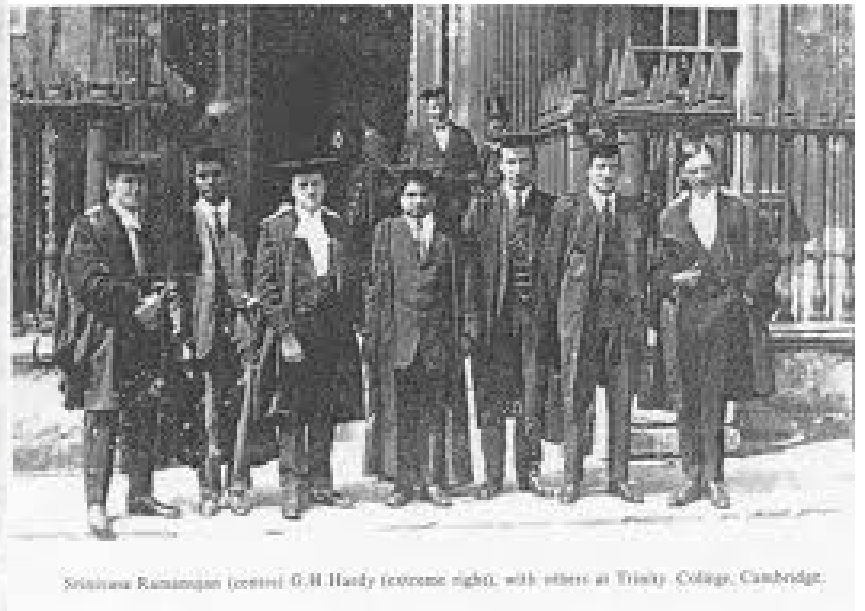
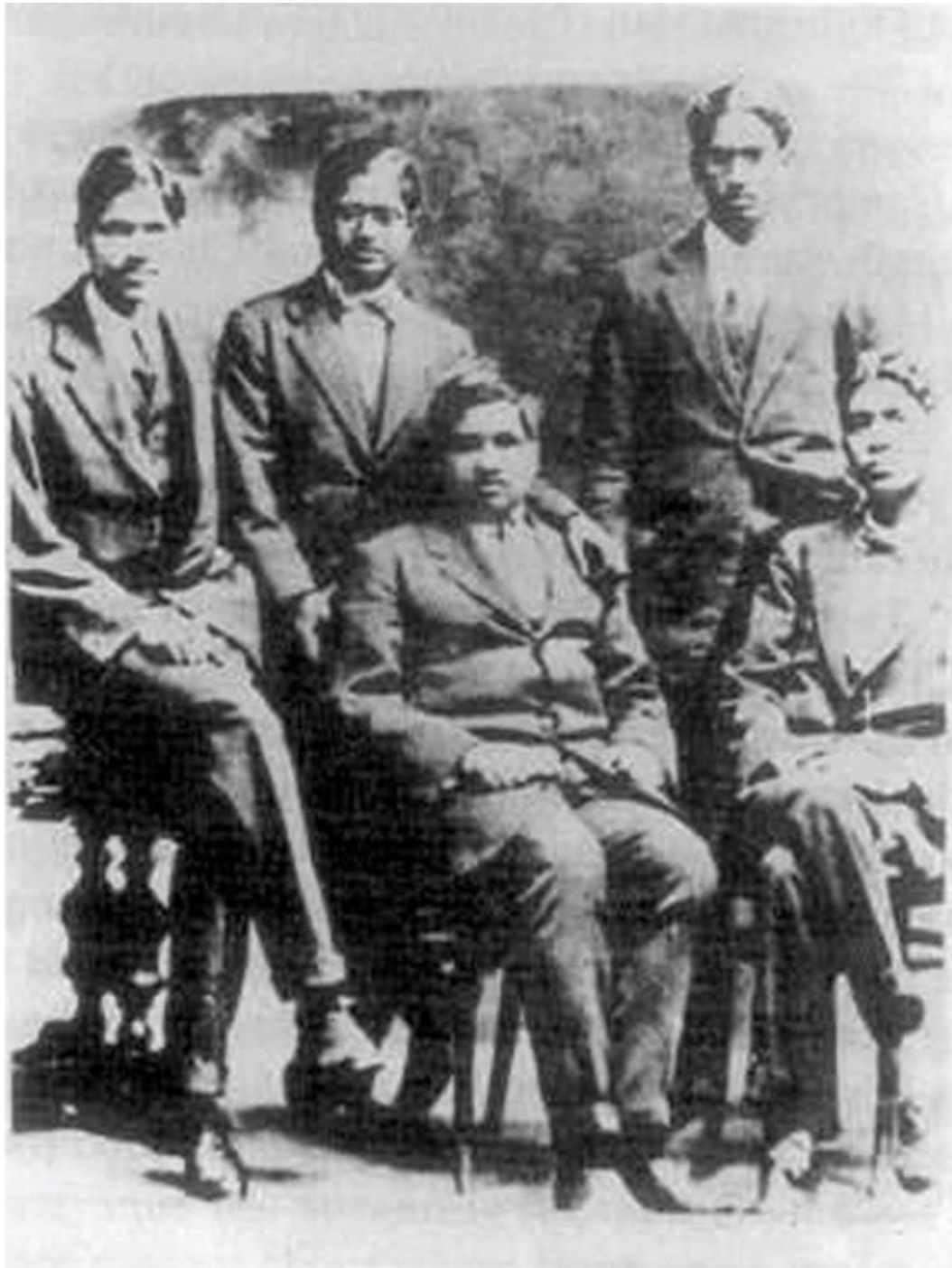
Tensions avec le corps médical

Aucun traitement ne semble efficace

Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums (Matlock, Fitzroy...)
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
Fellow of Trinity College, Cambridge
retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : de retour en Inde, c'est un héros national
la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
décès le 26 avril 1920 (32 ans)





Srinivasa Ramanujan (center), G.H. Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d'Eisenstein, bilatérales, q -séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard), trigonométrie, géométrie...

Points d'orgue

- Une théorie des séries divergentes
- Une théorie des fonctions elliptiques en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- De nouvelles formules pour approximer π
- Travaux et conjecture sur la fonction tau
- La théorie des partitions (partages d'entiers)

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- La correspondance avec Hardy
- 3 rapports trimestriels (université de Chennai)
formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal Of The Indian Mathematical Society*
- ... et **3 carnets**

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
 - Absence de développements, d'explications, de définitions, de conventions, de notations...
 - Calculs réalisés sur ardoise
 - Coût du papier
 - « Carte de visite », non destinés à publication

MANUSCRIPT BOOK 1
OF
SHRIVASA BHARUKHAN

MANUSCRIPT BOOK 2
OF
SHRIVASA BHARUKHAN

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$
 $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{6}{60} + \frac{5}{60} = \frac{11}{60}$
 $\frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4}{60} + \frac{3}{60} = \frac{7}{60}$
 $\frac{1}{25} + \frac{1}{30} = \frac{6}{150} + \frac{5}{150} = \frac{11}{150}$
 $\frac{1}{35} + \frac{1}{40} = \frac{8}{280} + \frac{7}{280} = \frac{15}{280}$
 $\frac{1}{45} + \frac{1}{50} = \frac{10}{450} + \frac{9}{450} = \frac{19}{450}$
 $\frac{1}{55} + \frac{1}{60} = \frac{12}{660} + \frac{11}{660} = \frac{23}{660}$
 $\frac{1}{65} + \frac{1}{70} = \frac{14}{910} + \frac{13}{910} = \frac{27}{910}$
 $\frac{1}{75} + \frac{1}{80} = \frac{16}{1200} + \frac{15}{1200} = \frac{31}{1200}$
 $\frac{1}{85} + \frac{1}{90} = \frac{18}{1530} + \frac{17}{1530} = \frac{35}{1530}$
 $\frac{1}{95} + \frac{1}{100} = \frac{20}{1900} + \frac{19}{1900} = \frac{39}{1900}$
 $\frac{1}{105} + \frac{1}{110} = \frac{22}{2310} + \frac{21}{2310} = \frac{43}{2310}$
 $\frac{1}{115} + \frac{1}{120} = \frac{24}{2760} + \frac{23}{2760} = \frac{47}{2760}$
 $\frac{1}{125} + \frac{1}{130} = \frac{26}{3250} + \frac{25}{3250} = \frac{51}{3250}$
 $\frac{1}{135} + \frac{1}{140} = \frac{28}{3780} + \frac{27}{3780} = \frac{55}{3780}$
 $\frac{1}{145} + \frac{1}{150} = \frac{30}{4350} + \frac{29}{4350} = \frac{59}{4350}$
 $\frac{1}{155} + \frac{1}{160} = \frac{32}{4960} + \frac{31}{4960} = \frac{63}{4960}$
 $\frac{1}{165} + \frac{1}{170} = \frac{34}{5610} + \frac{33}{5610} = \frac{67}{5610}$
 $\frac{1}{175} + \frac{1}{180} = \frac{36}{6300} + \frac{35}{6300} = \frac{71}{6300}$
 $\frac{1}{185} + \frac{1}{190} = \frac{38}{6930} + \frac{37}{6930} = \frac{75}{6930}$
 $\frac{1}{195} + \frac{1}{200} = \frac{40}{7800} + \frac{39}{7800} = \frac{79}{7800}$
 $\frac{1}{205} + \frac{1}{210} = \frac{42}{8580} + \frac{41}{8580} = \frac{83}{8580}$
 $\frac{1}{215} + \frac{1}{220} = \frac{44}{9240} + \frac{43}{9240} = \frac{87}{9240}$
 $\frac{1}{225} + \frac{1}{230} = \frac{46}{10140} + \frac{45}{10140} = \frac{91}{10140}$
 $\frac{1}{235} + \frac{1}{240} = \frac{48}{11160} + \frac{47}{11160} = \frac{95}{11160}$
 $\frac{1}{245} + \frac{1}{250} = \frac{50}{12250} + \frac{49}{12250} = \frac{99}{12250}$
 $\frac{1}{255} + \frac{1}{260} = \frac{52}{13410} + \frac{51}{13410} = \frac{103}{13410}$
 $\frac{1}{265} + \frac{1}{270} = \frac{54}{14640} + \frac{53}{14640} = \frac{107}{14640}$
 $\frac{1}{275} + \frac{1}{280} = \frac{56}{15940} + \frac{55}{15940} = \frac{111}{15940}$
 $\frac{1}{285} + \frac{1}{290} = \frac{58}{17310} + \frac{57}{17310} = \frac{115}{17310}$
 $\frac{1}{295} + \frac{1}{300} = \frac{60}{18750} + \frac{59}{18750} = \frac{119}{18750}$
 $\frac{1}{305} + \frac{1}{310} = \frac{62}{19260} + \frac{61}{19260} = \frac{123}{19260}$
 $\frac{1}{315} + \frac{1}{320} = \frac{64}{20840} + \frac{63}{20840} = \frac{127}{20840}$
 $\frac{1}{325} + \frac{1}{330} = \frac{66}{22530} + \frac{65}{22530} = \frac{131}{22530}$
 $\frac{1}{335} + \frac{1}{340} = \frac{68}{24340} + \frac{67}{24340} = \frac{135}{24340}$
 $\frac{1}{345} + \frac{1}{350} = \frac{70}{26270} + \frac{69}{26270} = \frac{139}{26270}$
 $\frac{1}{355} + \frac{1}{360} = \frac{72}{28320} + \frac{71}{28320} = \frac{143}{28320}$
 $\frac{1}{365} + \frac{1}{370} = \frac{74}{30490} + \frac{73}{30490} = \frac{147}{30490}$
 $\frac{1}{375} + \frac{1}{380} = \frac{76}{32780} + \frac{75}{32780} = \frac{151}{32780}$
 $\frac{1}{385} + \frac{1}{390} = \frac{78}{35190} + \frac{77}{35190} = \frac{155}{35190}$
 $\frac{1}{395} + \frac{1}{400} = \frac{80}{37720} + \frac{79}{37720} = \frac{159}{37720}$
 $\frac{1}{405} + \frac{1}{410} = \frac{82}{40370} + \frac{81}{40370} = \frac{163}{40370}$
 $\frac{1}{415} + \frac{1}{420} = \frac{84}{43140} + \frac{83}{43140} = \frac{167}{43140}$
 $\frac{1}{425} + \frac{1}{430} = \frac{86}{46030} + \frac{85}{46030} = \frac{171}{46030}$
 $\frac{1}{435} + \frac{1}{440} = \frac{88}{49040} + \frac{87}{49040} = \frac{175}{49040}$
 $\frac{1}{445} + \frac{1}{450} = \frac{90}{52170} + \frac{89}{52170} = \frac{179}{52170}$
 $\frac{1}{455} + \frac{1}{460} = \frac{92}{55420} + \frac{91}{55420} = \frac{183}{55420}$
 $\frac{1}{465} + \frac{1}{470} = \frac{94}{58790} + \frac{93}{58790} = \frac{187}{58790}$
 $\frac{1}{475} + \frac{1}{480} = \frac{96}{62280} + \frac{95}{62280} = \frac{191}{62280}$
 $\frac{1}{485} + \frac{1}{490} = \frac{98}{65890} + \frac{97}{65890} = \frac{195}{65890}$
 $\frac{1}{495} + \frac{1}{500} = \frac{100}{70620} + \frac{99}{70620} = \frac{199}{70620}$
 $\frac{1}{505} + \frac{1}{510} = \frac{102}{75470} + \frac{101}{75470} = \frac{203}{75470}$
 $\frac{1}{515} + \frac{1}{520} = \frac{104}{80440} + \frac{103}{80440} = \frac{207}{80440}$
 $\frac{1}{525} + \frac{1}{530} = \frac{106}{85530} + \frac{105}{85530} = \frac{211}{85530}$
 $\frac{1}{535} + \frac{1}{540} = \frac{108}{90740} + \frac{107}{90740} = \frac{215}{90740}$
 $\frac{1}{545} + \frac{1}{550} = \frac{110}{96070} + \frac{109}{96070} = \frac{219}{96070}$
 $\frac{1}{555} + \frac{1}{560} = \frac{112}{101520} + \frac{111}{101520} = \frac{223}{101520}$
 $\frac{1}{565} + \frac{1}{570} = \frac{114}{107090} + \frac{113}{107090} = \frac{227}{107090}$
 $\frac{1}{575} + \frac{1}{580} = \frac{116}{112880} + \frac{115}{112880} = \frac{231}{112880}$
 $\frac{1}{585} + \frac{1}{590} = \frac{118}{118890} + \frac{117}{118890} = \frac{235}{118890}$
 $\frac{1}{595} + \frac{1}{600} = \frac{120}{125120} + \frac{119}{125120} = \frac{239}{125120}$
 $\frac{1}{605} + \frac{1}{610} = \frac{122}{131570} + \frac{121}{131570} = \frac{243}{131570}$
 $\frac{1}{615} + \frac{1}{620} = \frac{124}{138240} + \frac{123}{138240} = \frac{247}{138240}$
 $\frac{1}{625} + \frac{1}{630} = \frac{126}{145130} + \frac{125}{145130} = \frac{251}{145130}$
 $\frac{1}{635} + \frac{1}{640} = \frac{128}{152240} + \frac{127}{152240} = \frac{255}{152240}$
 $\frac{1}{645} + \frac{1}{650} = \frac{130}{159570} + \frac{129}{159570} = \frac{259}{159570}$
 $\frac{1}{655} + \frac{1}{660} = \frac{132}{167120} + \frac{131}{167120} = \frac{263}{167120}$
 $\frac{1}{665} + \frac{1}{670} = \frac{134}{174890} + \frac{133}{174890} = \frac{267}{174890}$
 $\frac{1}{675} + \frac{1}{680} = \frac{136}{182880} + \frac{135}{182880} = \frac{271}{182880}$
 $\frac{1}{685} + \frac{1}{690} = \frac{138}{191090} + \frac{137}{191090} = \frac{275}{191090}$
 $\frac{1}{695} + \frac{1}{700} = \frac{140}{199520} + \frac{139}{199520} = \frac{279}{199520}$
 $\frac{1}{705} + \frac{1}{710} = \frac{142}{208170} + \frac{141}{208170} = \frac{283}{208170}$
 $\frac{1}{715} + \frac{1}{720} = \frac{144}{217040} + \frac{143}{217040} = \frac{287}{217040}$
 $\frac{1}{725} + \frac{1}{730} = \frac{146}{226130} + \frac{145}{226130} = \frac{291}{226130}$
 $\frac{1}{735} + \frac{1}{740} = \frac{148}{235440} + \frac{147}{235440} = \frac{295}{235440}$
 $\frac{1}{745} + \frac{1}{750} = \frac{150}{244970} + \frac{149}{244970} = \frac{299}{244970}$
 $\frac{1}{755} + \frac{1}{760} = \frac{152}{254720} + \frac{151}{254720} = \frac{303}{254720}$
 $\frac{1}{765} + \frac{1}{770} = \frac{154}{264690} + \frac{153}{264690} = \frac{307}{264690}$
 $\frac{1}{775} + \frac{1}{780} = \frac{156}{274880} + \frac{155}{274880} = \frac{311}{274880}$
 $\frac{1}{785} + \frac{1}{790} = \frac{158}{285290} + \frac{157}{285290} = \frac{315}{285290}$
 $\frac{1}{795} + \frac{1}{800} = \frac{160}{295920} + \frac{159}{295920} = \frac{319}{295920}$
 $\frac{1}{805} + \frac{1}{810} = \frac{162}{306770} + \frac{161}{306770} = \frac{323}{306770}$
 $\frac{1}{815} + \frac{1}{820} = \frac{164}{317840} + \frac{163}{317840} = \frac{327}{317840}$
 $\frac{1}{825} + \frac{1}{830} = \frac{166}{329130} + \frac{165}{329130} = \frac{331}{329130}$
 $\frac{1}{835} + \frac{1}{840} = \frac{168}{340640} + \frac{167}{340640} = \frac{335}{340640}$
 $\frac{1}{845} + \frac{1}{850} = \frac{170}{352370} + \frac{169}{352370} = \frac{339}{352370}$
 $\frac{1}{855} + \frac{1}{860} = \frac{172}{364320} + \frac{171}{364320} = \frac{343}{364320}$
 $\frac{1}{865} + \frac{1}{870} = \frac{174}{376490} + \frac{173}{376490} = \frac{347}{376490}$
 $\frac{1}{875} + \frac{1}{880} = \frac{176}{388880} + \frac{175}{388880} = \frac{351}{388880}$
 $\frac{1}{885} + \frac{1}{890} = \frac{178}{401490} + \frac{177}{401490} = \frac{355}{401490}$
 $\frac{1}{895} + \frac{1}{900} = \frac{180}{414320} + \frac{179}{414320} = \frac{359}{414320}$
 $\frac{1}{905} + \frac{1}{910} = \frac{182}{427370} + \frac{181}{427370} = \frac{363}{427370}$
 $\frac{1}{915} + \frac{1}{920} = \frac{184}{440640} + \frac{183}{440640} = \frac{367}{440640}$
 $\frac{1}{925} + \frac{1}{930} = \frac{186}{454130} + \frac{185}{454130} = \frac{371}{454130}$
 $\frac{1}{935} + \frac{1}{940} = \frac{188}{467840} + \frac{187}{467840} = \frac{375}{467840}$
 $\frac{1}{945} + \frac{1}{950} = \frac{190}{481770} + \frac{189}{481770} = \frac{379}{481770}$
 $\frac{1}{955} + \frac{1}{960} = \frac{192}{495920} + \frac{191}{495920} = \frac{383}{495920}$
 $\frac{1}{965} + \frac{1}{970} = \frac{194}{510290} + \frac{193}{510290} = \frac{387}{510290}$
 $\frac{1}{975} + \frac{1}{980} = \frac{196}{524880} + \frac{195}{524880} = \frac{391}{524880}$
 $\frac{1}{985} + \frac{1}{990} = \frac{198}{539690} + \frac{197}{539690} = \frac{395}{539690}$
 $\frac{1}{995} + \frac{1}{1000} = \frac{200}{554720} + \frac{199}{554720} = \frac{399}{554720}$

Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd'hui à l'université de Chennai
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fundamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l'enfance (!)
- Peu d'organisation
- Gestion confuse des pages

Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

Remarques : Sur les trois carnets, moins d'une vingtaine de résultats sont accompagnés d'une quelconque indication
De nombreux résultats sont déjà connus

Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu'il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

Il faut les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher...

L'édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d'articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d'argent pour l'édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1929–1940 : travail d'édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d'abandonner

La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : documents transmis à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

que faire des documents retrouvés ?

- 1965, 1968, 1969 : envois à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque...

1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des q -séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson

découvre des manuscrits inattendus



Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 1 200 résultats (q -séries, fonctions thêta...)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie élargie rendue disponible

Un siècle d'édition

- Hardy : une vingtaine d'articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles, réalisés en 1957
- Fac-similé du carnet perdu, réalisé en 1987
- Andrews : une trentaine d'articles
- Travaux académiques épars

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an
lit deux articles de Grosswald
qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !
peut-il en prouver d'autres ?



Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, d'étudiants, de Springer, de fondations...

21 ans plus tard...

- L'édition des trois carnets est achevée !!!
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d'une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapters 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance

The Ramanujan Journal

essais, articles, ouvrages techniques

Quid du carnet perdu ?

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Édition systématique avec B. Berndt :
 - 2005, volume I, 440 pages
 - 2009, volume II, 420 pages
 - 2012, volume III, 446 pages
 - 2013, volume IV, 452 pages
 - Dernier volume attendu (en 2016 ?)

Citations 1

- *« Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans » (Berndt)*
- *« Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement "with more insight" que la majorité d'entre nous » (Berndt)*

Citations 2

- « *Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas* » (Berndt)
- « *Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués* » (Berndt)



Florilège

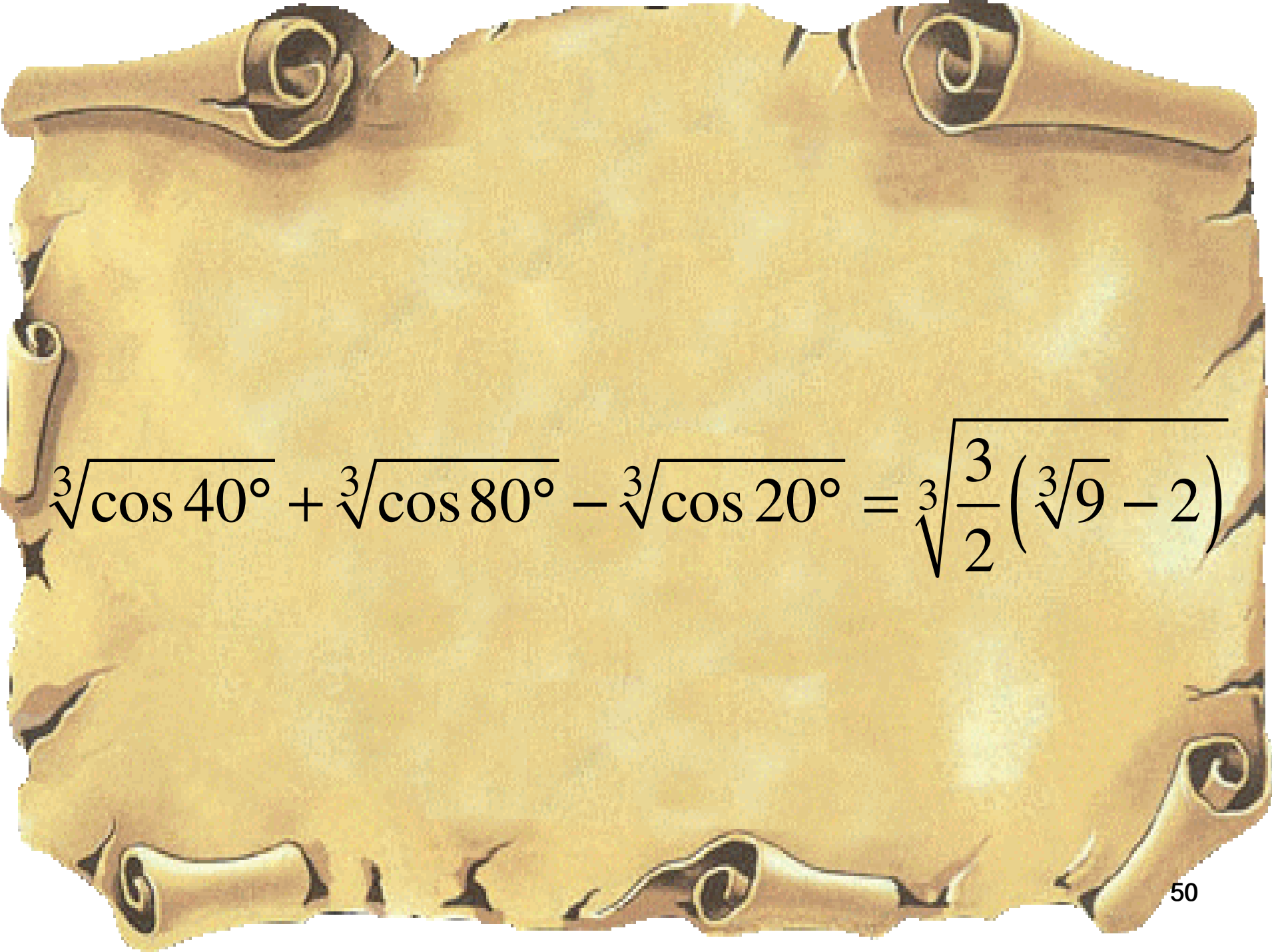
$$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3,1416\dots$$

370

- (i) $\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\dots = \pi + .00005$ (11)
- (2) $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 + \frac{19}{4^3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots$
- (3) $\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 + \frac{131}{64^3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots$ (Klein's)
- (4) $\frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi} = (6+\sqrt{5}) + (66+19\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 + \dots$ Sc. p. 1

$$2 \sin \frac{\pi}{18} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{\dots}}}}}$$

où la suite des signes $-$, $+$, $+$ a pour période 3


$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 2)}$$

Partitions

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3...$

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292...$

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6 sont pairs, et 49,96 % sont impairs...

La proportion des nombres pairs est-elle $1/2$?

- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle $1/3$?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5...
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Pas le moindre angle d'attaque...

Des réponses

- $p(5k + 4)$ est un multiple de 5
- $p(7k + 5)$ est un multiple de 7
- $p(11k + 6)$ est un multiple de 11

- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)

$$\frac{\sum_{n \geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m \geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28} \frac{\sqrt{13 + \sqrt{7}} + \sqrt{13 + 3\sqrt{7}}}{14}$$

Pour $0 < a < b + \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j \geq 1} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+j}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+j-1}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b+1) \Gamma\left(b - a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b - a + 1)}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{(1-q^{5j-1})(1-q^{5j-4})}$$

Soit q un complexe tel que $|q| < 1$.

On définit les fonctions suivantes :

$$\Psi(q) = \sum_{n \geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad f(-q) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad R(q) = \frac{q^{1/5}}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\ddots}}}}$$

On pose $\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\mathbf{R}\left(e^{-2\pi}\right) = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) e^{\frac{2\pi}{5}}$$

Une formule pour déterminer $\mathbf{R}\left(e^{-\pi\sqrt{n}}\right)$
pour tout rationnel positif n

Pour $n = 64$:

$$\mathbf{R}\left(e^{-8\pi}\right) = \sqrt{c^2 + 1 - c}, \quad \text{où} \quad 2c = 1 + \frac{a+b}{a-b}\sqrt{5},$$

$$\text{avec} \quad a = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[4]{20}$$

$$5^{3/5} \int_0^q \frac{f^2(-t) f^2(-t^5)}{\sqrt{t}} dt$$

$$= 2 \int_{\arccos\left(\left(\varepsilon R(q)\right)^{5/2}\right)}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^{-5} 5^{-3/2} \sin^2 \varphi}}$$

$$= \sqrt{5} \int_0^{2 \arctan\left(5^{1/4} \sqrt{q} \frac{f^3(-q^5)}{f^3(-q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^{-5} 5^{-3/2} \sin^2 \varphi}}$$

$$= \int_0^{2 \arctan\left(5^{3/4} \sqrt{q} \frac{\Psi(q^5)}{\Psi(q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon 5^{-1/2} \sin^2 \varphi}}$$

Page 209 du carnet perdu

Handwritten mathematical notes on a piece of aged paper. The page contains several lines of complex algebraic expressions and a large, stylized scribble.

At the top right, there is a circled number "50" and the text "Add me a 94".

The main body of the page is filled with dense, handwritten mathematical work, including:

- Large curly braces containing fractions and algebraic terms.
- Equations involving e^{π^2} and various algebraic expressions.
- Complex fractions and radicals, such as $\sqrt{\lambda^2 - 9\lambda^2 + 5}$.
- A large, dark, stylized scribble that partially obscures some of the text.
- Vertical text on the right side, possibly indicating page numbers or other notes.

Page 209
du carnet perdu

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}, \quad 0 < k < 1.$$

$$\left(\prod_{n \geq 0} \left(\frac{1 - (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}{1 + (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}} \right)^{2n+1} \right)^{\log q} \left(\prod_{m \geq 1} \left(\frac{1 + (-1)^m i q'^m}{1 - (-1)^m i q'^m} \right)^m \right)^{2i\pi} = \exp \left(\frac{\pi^2}{4} - k \frac{\sum_{r \geq 0} \frac{((r+1)!)^3 k^{2r}}{r! \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \dots \times \frac{2r+3}{2} \right)^2}}{\sum_{j \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2j+1}{2} \right)^2 k^{2j}}{j!(j+1)!}} \right)$$

Déchiffrage

- Formule presque illisible (copie médiocre)
- Seuls les trois premiers termes de chaque série sont écrits
- K et K' non définis
- Aucune telle formule dans la littérature
- Pas même dans les travaux de Ramanujan !

$$K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

Explication (?)

- Découle d'une connexion unique et presque miraculeuse entre séries hypergéométriques et fonctions elliptiques
- Cette connexion n'est pas comprise
- Accident, ou y en a-t-il d'autres ?
- Comment concevoir qu'une telle formule existe ?
- Comment en déterminer les éléments ?

Voici cette connexion :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{ch} \left(\frac{2n+1}{2} \frac{\operatorname{K}(\sqrt{1-k^2})}{\operatorname{K}(k)} \right)} = \frac{k \sum_{r \geq 0} \frac{r+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2r+3}{2}\right)^2} \frac{((r+1)!)^2 k^{2r}}{2 \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}{(m!)^2} \frac{k^{2m}}{m+1}}$$

Fonctions elliptiques

Séries hypergéométriques

On trouve cette formule dans le carnet 2...

En physique...

- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$
(Euler, Riemann, Ramanujan)
- Vingt-six dimensions en théorie des cordes
- Effet Casimir en électrodynamique quantique

- *String Theory* (volume 1). Joseph Polchinski, Cambridge University Press, 2005
- *L'incroyable addition $1+2+3+4+\dots = -1/12$* . Micmaths, bric-à-brac mathématique et ludique de Mickaël Launay, vidéo disponible en ligne, 16'39", 2014.

... mécanique statistique...

- Les q -séries (les identités de Rogers–Ramanujan)
- Les modèles sur réseaux exactement solubles (le modèle hexagonal dur)
- Le modèle d'Andrews–Baxter–Forrester
- *The Hard-Hexagon Model And The Rogers–Ramanujan Type Identities.* George Andrews, *Proceedings Of The National Academy Of Sciences* 78, 1981

... théorie conforme des champs...

- Algèbres de Lie (algèbres de Kac–Moody)
- Combinatoire (identités de Macdonald), représentations, partages d'entiers
- Identités de Rogers–Ramanujan et fonction tau de Ramanujan
- *Affine Lie Algebras And Combinatorial Identities*. James Lepowsky, *Proceedings Of The 1981 Rutgers Lie Algebras Conference*, Springer, 1982

... et supergravité

- Méthode du cercle
- Entropie et « aire » des trous noirs
- *On The Positivity Of Black Holes Degeneracies In String Theory.*
Kathrin Bringmann et Sameer Murty,
arXiv:1208.3476v2, 2012

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Tao)

Mystères...

« Ses méthodes pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice » (Berndt)

« Bien que des progrès considérables aient été réalisés, un rideau noir nous a empêchés de voir ce qui se passe sur la scène, à savoir quelles furent les idées de Ramanujan derrière ses découvertes » (Berndt, 2016)

Références

The Man Who Knew Infinity – A Life Of The Genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan. Bernard Randé, Cassini, 2002

Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés ! Édouard Thomas, *Maths Société Express*, brochure éditée par le CIJM, 2016.

Ramanujan. Letters And Commentary.

Bruce Berndt et Robert Rankin,
American Mathematical Society, 1995.

An Overview Of Ramanujan's Notebooks.

In: *Charlemagne And His Heritage:
1200 Years Of Civilization And Science
In Europe*, volume 2 (*Mathematical Arts*),
édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et
W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout, 1998

Ramanujan's Notebooks – Part I.

Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.

Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.

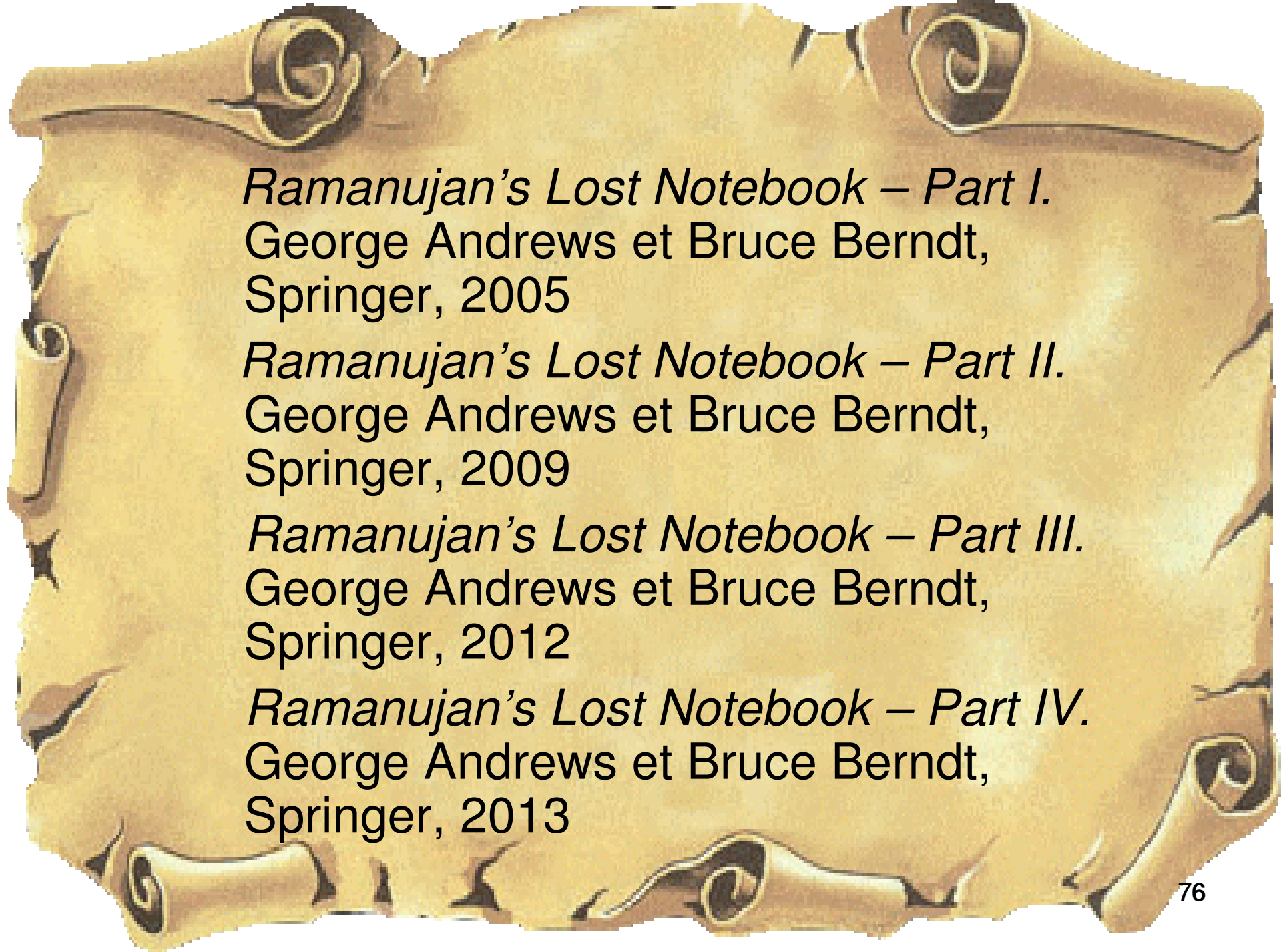
Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.

Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.

Bruce Berndt, Springer, 1998

A scroll with a yellowish, aged appearance, featuring several rolled-up sections at the top and bottom. The text is centered on the scroll.

Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009

Ramanujan's Lost Notebook – Part III.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2012

Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2013