Rallye des maths fantastiques, Paris

Présentation

Partenaires

Le rallye des maths fantastiques est organisé par le groupe « Les maths fantastiques » de l'IREM de Paris, en lien avec les laboratoires de mathématiques et les UMR des universités Paris Diderot et Sorbonne Université ainsi que du CNRS (IMJ-PRG, LDAR, LJLL, LPSM).

Fonctionnement

Ce rallye a lieu chaque année à Paris en octobre, à l'occasion de la fête de la science. Il est présenté sous la forme de trois stands, proposés à l'université Paris Diderot à des classes de collégiens à partir de la 3e et lycéens (un créneau de 2h pour une classe divisée en trois groupes, chaque tiers de classe tournant sur chaque stand, encadré par deux animateurs). Le même rallye est également proposé ensuite pendant une journée au grand public, sur le campus de Jussieu. Chaque stand est décliné en trois niveaux : le plus facile pour les plus jeunes, correspondant à peu près aux élèves de cycle 2 et 3, un niveau intermédiaire pour les collégiens, lycéens et grand public, ainsi qu'un niveau expert pour des personnes ayant fait des études supérieures de mathématiques.

Ces stands sont conçus chaque année de manière collective par des mathématiciens de Sorbonne Université et Paris Diderot (choix des thématiques et rédaction des questions, choix et fabrication du matériel, tests, organisation. . .). Les stands sont toujours prévus de telle sorte que les participants aient des manipulations à faire, avec du matériel, et travaillent accompagnés par des animateurs. Les organisateurs ont la volonté d'essayer de présenter les activités d'une manière ludique. Ce rallye ne présente aucun aspect compétitif.

Contacts

www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/rallye

Site web du rallye contenant les sujets et explications des années précédentes, le matériel à imprimer quand c'est possible, la procédure d'inscription d'une classe.

@ diffusion@math.univ-paris-diderot.fr

Stands décrits dans la suite

Nous présentons ici un niveau de chaque stand d'octobre 2017 :

— la version la plus simple du stand « Des carreaux pas carrés » (largement inspiré par des travaux de Maths à Modeler (Grenoble) et de l'IREM de Grenoble [1]),

— la version intermédiaire du stand « C'est vite plié ! »,

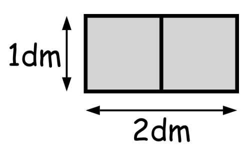
— la version expert du stand « Des maths en des tresses ». La plus grande partie de la version expert de ce stand est toutefois accessible dès le collège, jusqu'aux deux dernières questions.

Les deux autres versions de chaque stand sont disponibles sur le site web du rallye, ainsi que le matériel à imprimer.

Des carreaux pas carrés (année 2017, école élémentaire)

Énoncé

Pour carreler ma maison, j'ai à ma disposition des carreaux de ciment de taille 1×2 (toutes les mesures sont données ici en décimètres).

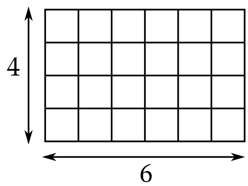


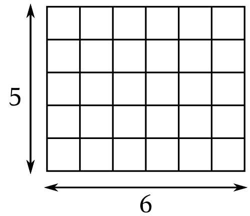
J'espère ne pas avoir à les couper, au risque d'en casser certains ! Heureusement, mes pièces sont toutes des rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers de décimètres. Vais-je pouvoir laisser ma scie au placard ?

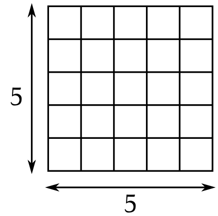
1. www.irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

Étape n° 1 : les chambres

1) Puis-je carreler sans couper de carreaux des chambres rectangulaires dont les dimensions sont les suivantes : 4×6**?** 5×6**?** 5×5**?**



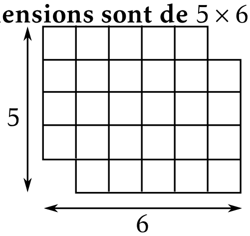


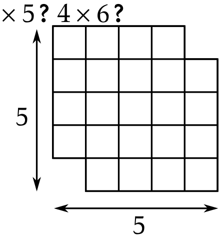


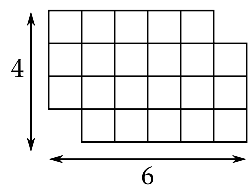
Étape n° 2 : la cuisine

Le plan de la cuisine est un petit peu plus compliqué à cause des tuyaux d'arrivée et d'évacuation d'eau de l'évier et du lave-vaisselle. Ces tuyaux sont encastrés dans deux colonnes carrées de taille 1×1 placées dans deux angles opposés de la cuisine.

2) Puis-je carreler ma cuisine sans couper de carreaux si ses dimensions sont de 5×6**?** 5×5**?** 4×6**?**



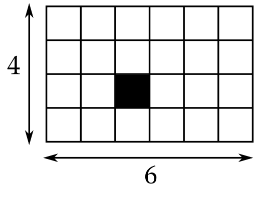


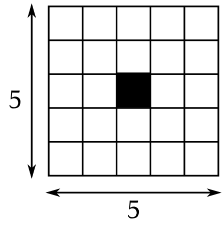


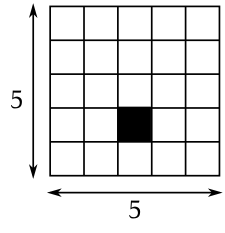
Étape n° 3 : le séjour

Le séjour quant à lui est rectangulaire, mais contient un pilier à base carrée de taille 1×1.

3) Puis-je carreler mon salon sans couper de carreaux si son plan est un de ceux-ci ?



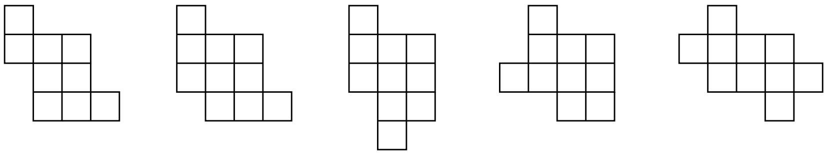




Étape n° 4 : les couloirs

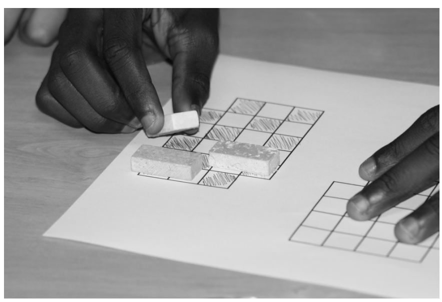
Les couloirs sont quant à eux plus biscornus...

4) Puis-je carreler sans couper de carreaux les couloirs dont les plans sont les suivants ?



Solution et analyse

Matériel fourni : des carreaux de carrelage au bon format à placer sur les « pièces à carreler » imprimées sur des feuilles. On peut bien sûr remplacer le carrelage par des rectangles en papier.



Notions abordées : parité, imparité, calculs d'aires, repérage dans le plan, démonstration, conditions nécessaires et conditions suffisantes.

Les versions plus difficiles de ce stand proposaient de généraliser les résultats à des pièces de tailles $n \times m$ quelconques, dont on enlevait un carré quelconque etc.

Étape n°1 : les rectangles

1) On peut carreler les pièces de taille 4×6 et 5×6, il est facile d'exhiber un pavage. Dans le premier cas on peut, par exemple, mettre tous les dominos (c'est-à-dire les carreaux de taille 1×2) horizontaux car 6 est pair, i.e. divisible par 2, ou tous verticaux car 4 est pair. Dans le deuxième cas, on peut les mettre tous horizontaux (toujours car 6 est pair) mais on ne peut pas les mettre tous verticaux. Cette question ne pose généralement aucun

souci, permet à chacun de comprendre le problème étudié, et de voir que plusieurs solutions différentes sont possibles.

On ne peut pas carreler la pièce de taille 5×5 sans couper de carreaux. Cependant, il faut bien comprendre que ne pas y arriver en tâtonnant n'est pas une preuve du fait que le pavage est impossible, ça veut juste dire qu'on n'y est pas arrivé, peut-être parce qu'on s'y est mal pris. On est donc amené à énoncer une *condition nécessaire* pour pouvoir paver la pièce par des carreaux de taille 1×2 : puisque chaque domino recouvre une aire de 2 unités (ici des décimètres carrés), toute surface pavée par des dominos doit avoir une aire divisible par 2, i.e. une aire paire. Or $5 \times 5 = 25$ est impair, donc la pièce de taille 5×5 ne peut pas être pavée.

Généralement, certains élèves pensent d'eux-mêmes à cette condition de parité. Certains disent « on peut carreler ce rectangle parce que son nombre de cases est pair » (ce qui est vrai, par ailleurs), en pensant que c'est équivalent à l'énoncé réciproque précédemment démontré.

Il peut être intéressant d'insister sur le fait que trouver une solution pour carreler une pièce donnée permet de démontrer que c'est possible, mais que ne pas en trouver n'est pas une preuve de l'impossibilité. On peut également poser la question pour un rectangle de grandes dimensions, comme 2468×1345 (parce que l'on vit dans un château) pour faire sentir les limites du raisonnement précédent en testant et pour motiver l'intérêt à savoir traiter le cas général.

La *condition nécessaire* pour que le rectangle de taille $n \times m$ soit pavable par des dominos que son aire $n \times m$ soit paire est également une condition suffisante. Pour cela supposons par exemple que m est pair. Alors chaque ligne de largeur m et de hauteur 1 peut être recouverte par $m/2$ dominos. Il suffit de paver chaque ligne l'une après l'autre pour obtenir un pavage du rectangle tout entier.

Si on le souhaite, on peut réfléchir à des reformulations de la condition, en regardant dans quel cas un produit d'entiers est pair.

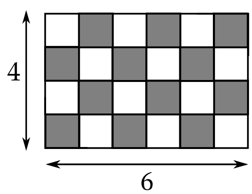
Étape n°2 : les rectangles dont on a enlevé 2 coins opposés

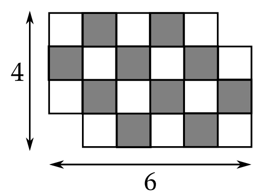
2) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle dont on a enlevé deux coins opposés s'il est de dimension 5×6 (voir plus loin pour une méthode générale de pavage) mais on n'arrive pas à paver ceux de taille 5×5 ni 4×6.

Nous pouvons ré-utiliser la condition nécéssaire énoncée à l'étape 1 pour conclure qu'il est effectivement impossible de réaliser un pavage par des dominos dans le cas d'un rectangle de taille 5×5 dont on a enlevé les coins : en effet, cette surface a une aire de $25 - 2 = 23$ unités, ce qui n'est pas divisible par 2. Cependant, cet argument ne permet pas de conclure dans le cas du rectangle de taille 4×6, car l'aire de la surface à paver est de 22 unités.

Il faut donc une nouvelle idée, pour introduire une nouvelle condition nécessaire : introduire un coloriage en gris et blanc des cases, en damier. C'est une idée qui n'émerge pas forcément naturellement, ne pas hésiter à suggérer de représenter un échiquier. Dans ce coloriage, toutes les cases voisines d'une case blanche sont grises, et vice et versa. Un domino recouvre deux cases voisines, donc automatiquement une case blanche et une case grise. Une *deuxième condition nécessaire* pour qu'une forme soit pavable par des dominos est que le nombre de cases blanches soit égal au nombre de cases grises.

Reprenons l'exemple du rectangle de taille 4×6. Colorions ses cases avant d'enlever les coins. Avant qu'on n'enlève les coins du rectangle, on constate que celui-ci contient 12 cases blanches et 12 cases grises - il est pavable par des dominos, rappelons-le. Cependant lorsqu'on enlève deux coins opposés, on enlève deux cases de même couleur - deux cases grises sur la figure. Ainsi la surface obtenue n'est plus pavable par des dominos car elle contient 12 cases blanches et seulement 10 cases grises.





Étape n°3 : les rectangles dont on a enlevé une case

3) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle 5×5 dont on a enlevé la case du milieu, mais pas les deux autres.

La première condition nécessaire que nous avons donnée porte sur le nombre de cases : un rectangle de taille $n \times m$ dont on a enlevé une case a une aire de $n \times m - 1$ unités, donc une condition nécessaire pour pouvoir paver cette forme avec des dominos est que $n \times m$ soit impair, c'est à dire n et m impairs. Ceci exclut qu'on puisse paver le rectangle 4×6 dont on a enlevé une case, où qu'elle soit située.

La deuxième condition nécessaire porte sur la couleur des cases. Colorions les cases du rectangle $n \times m$ avant d'en enlever une case, en coloriant par exemple en gris la case en bas à gauche. Puisque n et m sont impairs, la case en haut à gauche du rectangle est également grise, et le rectangle contient une case grise de plus que de cases blanches. Pour qu'on puisse paver notre forme avec des dominos, il faut donc nécessairement que la case qu'on retire soit grise. Cela démontre que le dernier rectangle 5×5 n'est pas pavable.

Étape n°4 : des formes bizarres

4) La première forme a une aire de 9 unités, donc ne satisfait pas la première condition nécessaire pour être pavée. Toutes les formes suivantes ont une aire de 10 unités et satisfont la première condition nécessaire.

Lorsqu'on colorie les cases en blanc et gris en damier, on voit que la deuxième forme n'a pas le même nombre de cases blanches que de cases grises, donc elle ne satisfait pas la deuxième condition nécessaire pour être pavable par des dominos. Les trois formes suivantes satisfont cette condition.

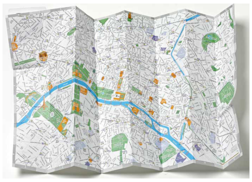
En tâtonnant on arrive à paver les troisième et quatrième formes par des dominos.

En revanche, la cinquième forme ne peut pas être pavée par des dominos, bien qu'elle satisfasse les deux conditions nécessaires déjà évoquées. Il s'agit bien de conditions nécessaires, mais pas de conditions suffisantes ! On peut se convaincre de l'impossibilité du pavage en regardant ce qu'il se passe dans le coin en haut à gauche : si la case tout en haut est pavée, alors la case juste en-dessous est elle aussi recouverte par le même carreau de carrelage, ce qui laisse la case la plus à gauche complètement isolée et donc impossible à paver.

Si l'on souhaite raccourcir cette activité, il est intéressant de garder cette dernière question et sauter plutôt celle des cuisines ou du séjour, parce que l'on y découvre que les conditions nécessaires trouvées précédemment ne sont pas suffisantes, alors qu'elles l'étaient ; cela pourrait laisser croire à tort que c'est vrai dans le cas général.

C’est vite plié ! (année 2017, collège-lycée, grand public)

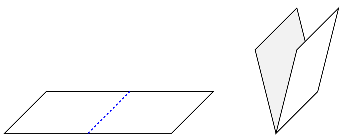
Énoncé



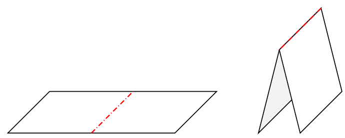
Vous ouvrez un plan et vous voulez ensuite le replier. Nous allons chercher un moyen d’y parvenir du premier coup, sans tâtonner...

Le problème du dépliage

Un modèle d’origami indique où faire les plis sur sa feuille de papier et dans quel ordre. Un trait marquant l’endroit d’un pli peut être plié de deux façons, que l’on appelle « pli vallée » et « pli montagne » :



Pli vallée



Pli montagne

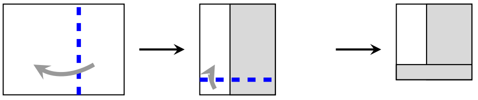
Nous marquons avec le symbole - - - - - en bleu les plis vallée, et avec le symbole - · - · - · en rouge les plis montagne.

1. **Regardez les trois notices pour réaliser des pliages. Votre but : essayer de deviner où seront les plis marqués sur la feuille une fois entièrement dépliée ! Dessinez-les en bleu (pour les plis vallée) et rouge (pour les plis montagne).**

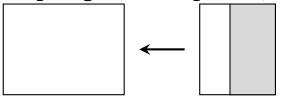
Sur les schémas, la feuille présentée est blanche au recto, grise au verso.

(a) Premier origami

Notice de pliage :

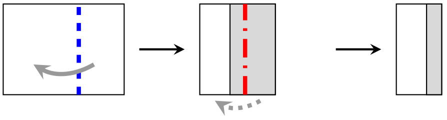


Dépliage (à compléter) :

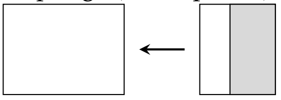


(b) Deuxième origami

Notice de pliage

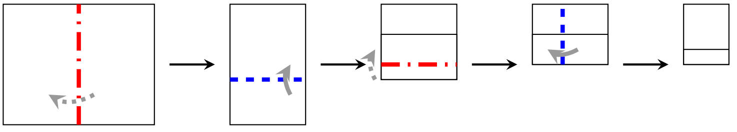


Dépliage (à compléter) :

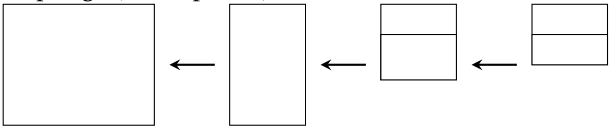


(c) Troisième origami, plus difficile !

Notice de pliage



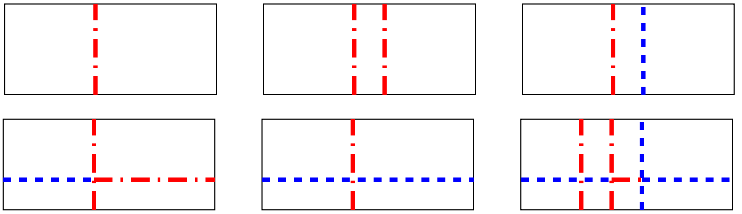
Dépliage (à compléter) :



Le problème du pliage

Voici le problème que nous nous posons maintenant : on a des marques de plis sur notre carte routière. Peut-on toujours la replier en les respectant ? Y a-t-il une méthode pour savoir dans quel ordre faire les plis ?

2. **Parmi les pliages suivants, lesquels sont réalisables et lesquels ne le sont pas ?**



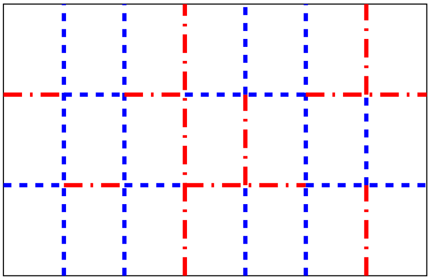
3. **Le premier pli effectué a toujours une caractéristique particulière, laquelle ?**

4. **Peut-il aussi y avoir d'autres plis monochromes dans la même direction (horizontale/verticale) que ce premier pli ? Dans l'autre direction ?**

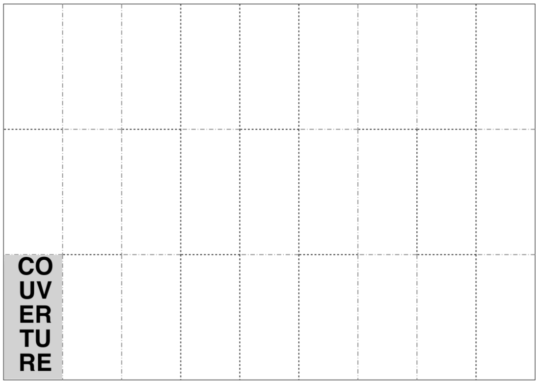
5. **Pouvez-vous expliquer pourquoi l'on doit nécessairement plier dès le début tous les plis monochromes ?**

6. **À quelle condition peut-on plier un pli monochrome ?**

7. **En déduire un algorithme pour replier une carte, et l'essayer pour replier la carte suivante, ou une des autres fournies :**



8. **La dernière carte a en plus une couverture, qui doit se retrouver sur le dessus à la fin, quand elle est repliée. Arrivez-vous à la replier correctement ?**



Solution et analyse

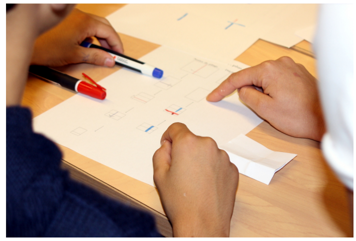
Matériel fourni : différents modèles de « cartes routières », c'est-à-dire de canevas à plis orthogonaux, à essayer de replier. Les plis sont marqués de chaque côté de la feuille (vallée d'un côté, montagne de l'autre et réciproquement), pour être visibles à chaque étape du pliage.
Notions abordées : symétries, mise en place d'un algorithme, raisonnement.

Quelques précisions sur les règles autorisées pour le pliage :

- on ne déplie pas des plis déjà pliés,
- à chaque nouveau pli, on plie l'intégralité du pliage précédent (on ne soulève pas juste une épaisseur de feuille),
- on plie à plat.

Le problème du dépliage

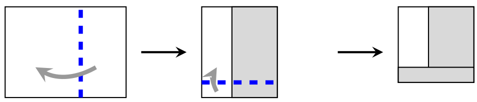
1. Encourager quand c'est possible à essayer de faire l'exercice en imaginant le pliage dans sa tête. Si c'est trop difficile (et pour les plus jeunes), réaliser vraiment les pliages avec une feuille de brouillon et voir ce qui se passe quand on les déplie.



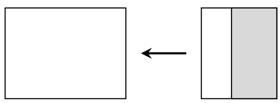
Souvent, après quelques pliages effectués et les marques de plis simplement recopiées, les élèves comprennent mieux comment savoir (sans faire le pliage) où les marques apparaîtront.

(a) Premier origami

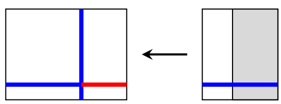
Notice de pliage :



Dépliage (à compléter) :

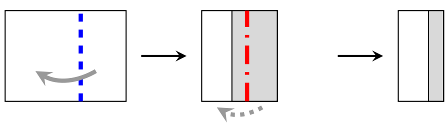


Réponse :

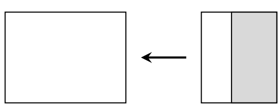


(b) Deuxième origami

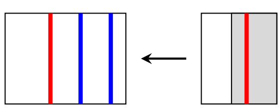
Notice de pliage :



Dépliage (à compléter) :

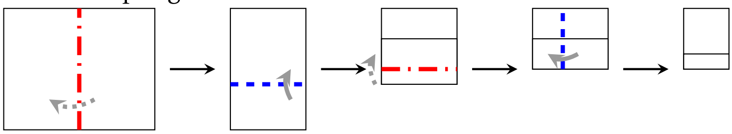


Réponse :

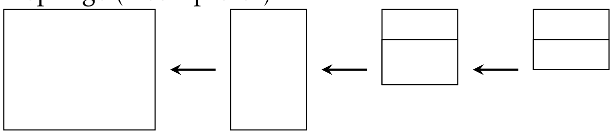


(c) Troisième origami, plus difficile !

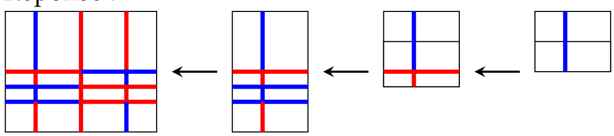
Notice de pliage



Dépliage (à compléter) :

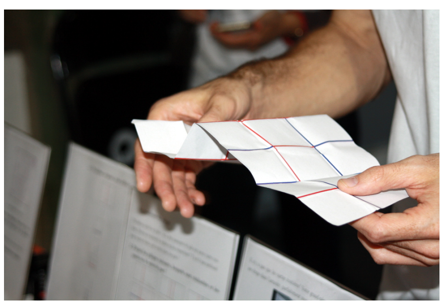


Réponse :

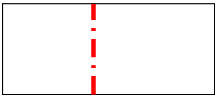


Il faut comprendre que chaque nouveau pli effectué donnera lieu à un pli « miroir » par rapport à chacun des plis déjà faits précédemment (où « miroir » signifie symétrique avec changement de couleur).

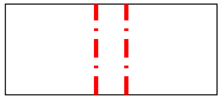
Le problème du pliage



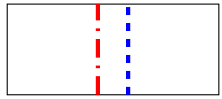
2.



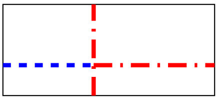
Oui



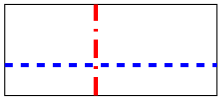
Non



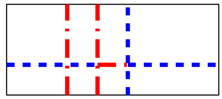
Non



Oui



Non

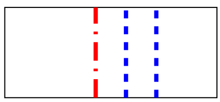


Non

Il est important de comprendre cette étape avant de passer à la suite, par exemple que le canevas au milieu de la première ligne n'est pas réalisable : on n'est pas autorisé à ouvrir un pli déjà fait avant d'en faire un nouveau et on ne peut pas non plus plier la feuille à 90° seulement.

3. Le premier pli effectué est toujours monochrome.

4. Il peut aussi y avoir d'autres plis monochromes dans la même direction (horizontale/verticale) que le premier pli, par exemple :



Par contre, il ne peut pas y en avoir dans les deux directions : une fois qu'on a effectué un pli dans le sens vertical, un pli fait par la suite horizontalement aura une partie vallée et une partie montagne. De même, si on commence par faire un pli horizontal, les plis faits ensuite verticalement ne peuvent être monochromes.

5. On doit nécessairement plier dès le début tous les plis monochromes : dès qu'on fait un pli orthogonalement à un pli déjà fait, il donne lieu à au moins une marque vallée et une marque montagne, de part et d'autre du pli précédent.

6. On peut plier un pli monochrome si et seulement si c'est un axe de symétrie « miroir » pour les autres plis sur la feuilles.

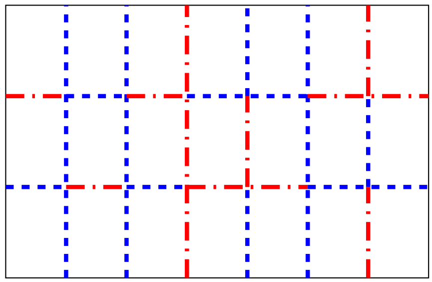
7. L'algorithme est le suivant.

Étape 1. Repérer les plis monochromes. (Ils sont tous dans le même sens)

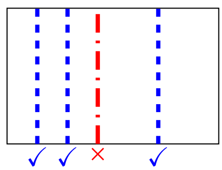
Étape 2. Plier les plis monochromes qui sont axes de symétrie « miroir ». (L'ordre ne compte pas : quand on en plie un, on peut imaginer que le plus petit côté plié est ensuite collé à l'autre ; on peut l'oublier pour la suite.) S'il reste des plis qui ne sont pas axes de symétrie, donc pas pliables, c'est que le pliage n'était pas possible !

Étape 3. On recommence avec les nouveaux plis monochromes (dans l'autre direction), etc.

Sur l'exemple suivant cela donne :

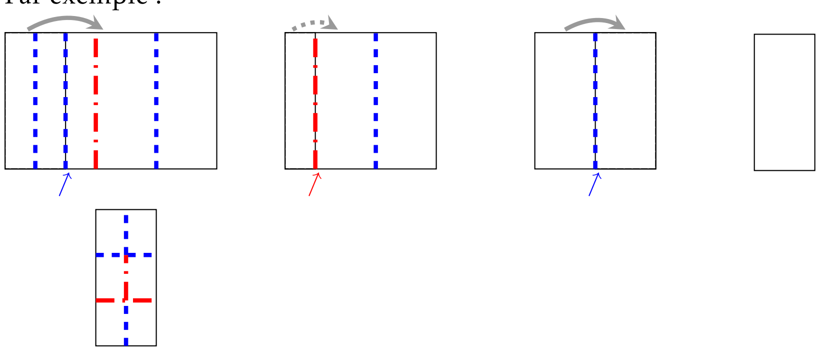


Les plis monochromes sont :

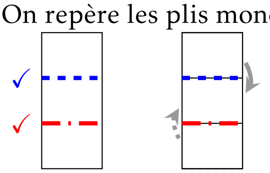


Ceux marqués ✓sont axes de « symétrie », celui marqué × ne l'est pas. On peut commencer par plier ceux marqués d'un ✓(dans l'ordre que l'on veut). On peut plier le rouge dès qu'on a plié le deuxième pli bleu en partant de la gauche.

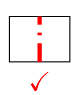
Par exemple :



On repère les plis monochromes, on les plie :



Il ne reste plus qu'à plier le dernier pli :



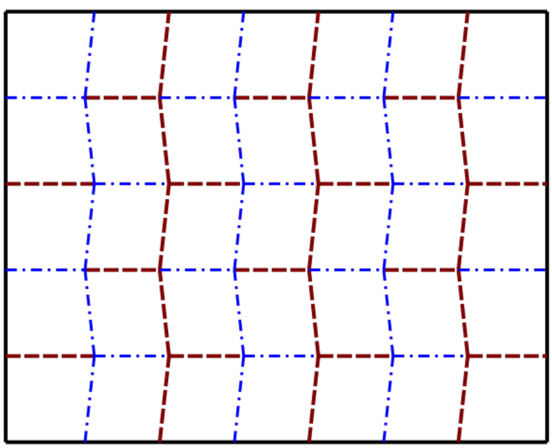
Remarque : plusieurs façons différentes de replier la carte sont parfois possibles (selon l'ordre dans lequel on plie les différents plis monochromes). Avoir le choix gêne parfois certains.

8. Cas de la couverture qui doit se retrouver sur le dessus à la fin du pliage : il ne faut jamais la faire disparaître à l'intérieur du pliage (comme on ne défait pas de plis déjà faits, elle ne pourrait plus réapparaître). Pour cela, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on plie les plis monochromes à l'étape 2 de l'algorithme (et faire attention aux plis vallée !).

Commentaires

— L'algorithme décrit permet de savoir si un canevas est pliable ou non, ainsi que de le plier dans le cas favorable. Dans des origamis plats plus complexes (avec des plis non nécessairement orthogonaux), on peut donner des conditions locales nécessaires et suffisantes pour qu'un canevas soit pliable, mais le problème global est beaucoup plus délicat (il est NP difficile).

— Il existe une très jolie façon de replier une carte routière (les plis ne sont pas orthogonaux), qui permet que la carte se replie automatiquement quand on saisit deux coins opposés ! On l'appelle pliage de Miura (ou miura-ori), du nom de son inventeur Koryo Miura, un astrophysicien japonais.



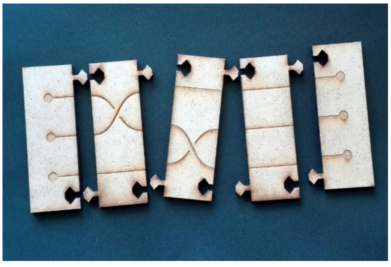
Ce pliage a des applications pratiques : en médecine (stents), pour les panneaux solaires de satellites spatiaux…

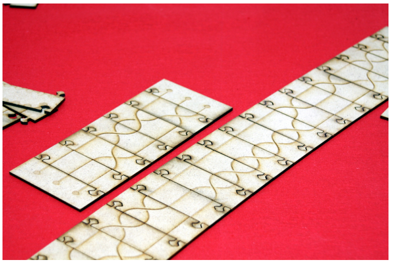
Des maths en des tresses (année 2017, post-bac)

Énoncé

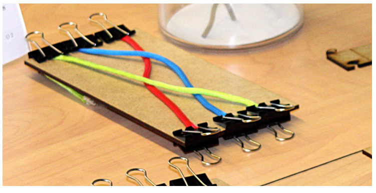
En tressant des brins de laine, on peut faire des bracelets. Nous vous invitons à découvrir comment les mathématiciens, en jouant avec cette idée de brins enlacés, ont inventé le *groupe des tresses*...

Nous allons jouer avec des cartes représentant des sortes de tresses. Sur chaque carte, on a dessiné trois brins, dont deux qui se croisent. En plaçant plusieurs cartes les unes sous les autres, on obtient des dessins de tresses de plus en plus compliquées. Ces dessins modélisent une tresse constituée de trois cordelettes souples qui sont attachées à leurs extrémités.



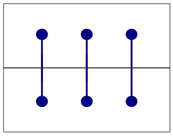


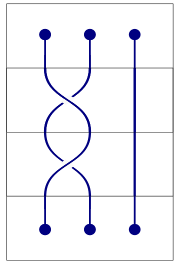
1. **Observez la tresse en cordelettes et représentez-la avec des cartes, en essayant d'utiliser le moins de cartes possible.**



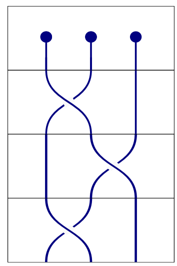
Vous avez le droit de déplacer les brins si ça vous arrange (sans détacher les extrémités). **Pouvez-vous trouver une deuxième succession de cartes qui représente la même tresse ?**

2. La tresse la moins intéressante est celle qui est dénouée. On peut la représenter de plusieurs façons, par exemple ainsi :





À la question précédente vous avez représenté une tresse qui, elle, est nouée. **Sauriez-vous la dénouer en lui ajoutant de nouvelles cartes ?**

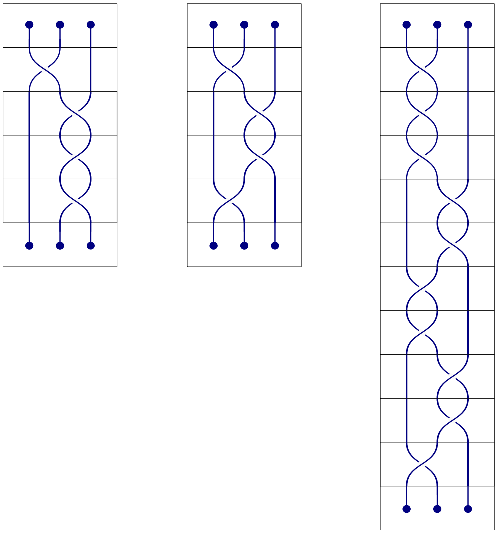


?

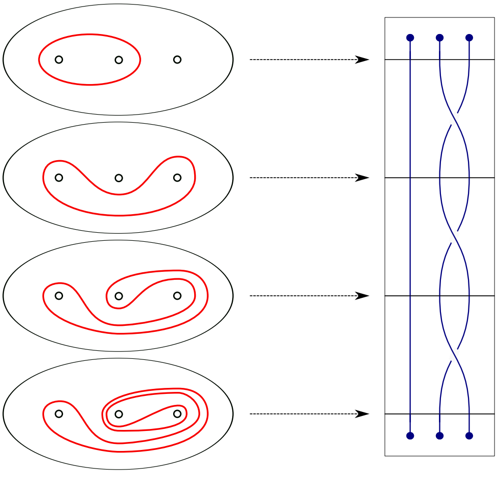
Sauriez-vous dénouer n'importe quelle tresse en lui ajoutant de nouvelles cartes ?

Lorsqu'on place deux tresses l'une sous l'autre, on obtient une nouvelle tresse ; cette opération s'appelle « multiplier des tresses ». N'importe quelle tresse peut être dénouée en ajoutant des cartes, autrement dit en la « multipliant » par une autre tresse qu'on appelle son inverse (ou son miroir). Les mathématiciens résument ces propriétés en disant que les tresses forment un *groupe*.

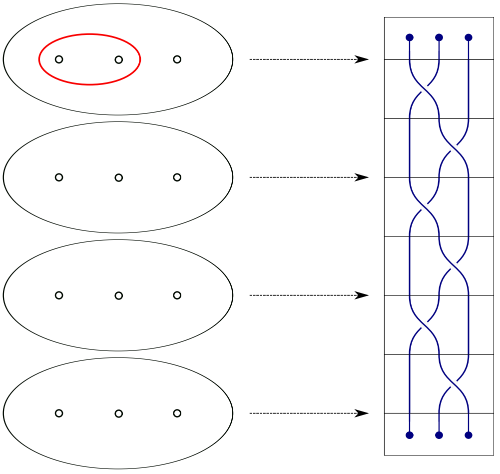
3. Un problème fondamental consiste à savoir reconnaître une tresse dénouée.
Les tresses suivantes sont-elles nouées ou dénouées ? Pouvez-vous donner un argument convaincant ?

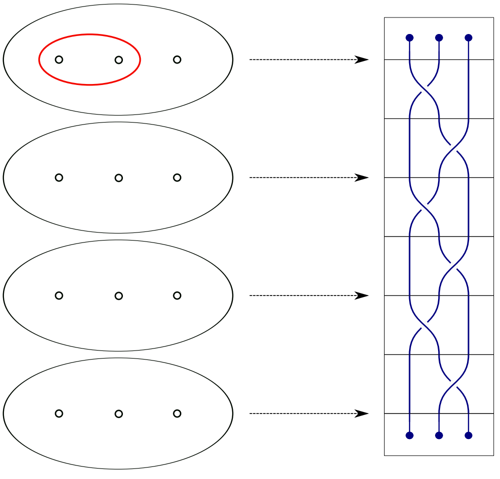


4. Parmi les tresses nouées, certaines sont nouées de façon particulièrement compliquée... Pour mesurer la complexité d'une tresse, on peut jouer au jeu suivant. On répète la même tresse plusieurs fois de suite, on place un élastique autour de deux des brins près des extrémités du haut, et on le fait glisser le long de la tresse. Voici un exemple avec trois fois la même carte : à gauche, on a représenté l'élastique vu du dessus, avec une coupe des trois brins.



Dans chacun des deux exemples qui suivent on a représenté trois fois la même tresse de deux cartes. **Pouvez-vous dessiner les déformations successives de l'élastique ?**



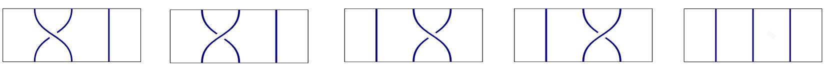


Dans ce dernier exemple, on constate que la longueur de l'élastique augmente de façon exponentielle lorsqu'on le fait glisser le long de copies successives de la tresse. En fait, avec cette tresse, c'est ce qui arrive à tout élastique qui est placé autour de deux de ses brins. Ce phénomène caractérise les tresses dites « pseudo-Anosov », ce sont celles que les mathématiciens considèrent comme les plus compliquées.

Comme application, on peut penser aux petits batteurs électriques que vous avez (peut-être) chez vous. Si les deux fouets de votre batteur tournaient dans le même sens, alors ils mélangeraient votre mousse au chocolat comme dans le premier exemple ! Heureusement, vous pouvez observer qu'ils tournent dans le sens opposé. La photo ci-contre montre des bonbons chinois faits sur le même modèle !

5. Une question courante en théorie des groupes est de savoir si deux éléments d'un groupe *commutent* : si on multiplie le premier avec le deuxième, est-ce qu'on obtient le même résultat que si l'on multiplie le deuxième avec le premier (*attention à l'ordre !*).
Essayez avec les cinq cartes qui vous sont proposées : lesquelles commutent entre elles ?

a A b B e

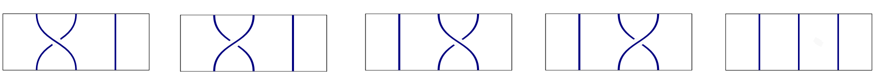


6. La tresse dénouée commute évidemment avec tout le monde. **Pouvez-vous trouver une autre tresse avec cette propriété ?** (*Indice : pensez à ce qu'il se passe si on fait faire un « tour complet » aux cordelettes attachées à la planche...*).

Solution et analyse

Pour les notations des cartes tresses, on utilise celles introduites à la fin de la fiche de questions :

a A b B e



1. La tresse en cordelette est *aba*. Cette tresse peu aussi s'écrire par exemple *aBbbaAa*, pour avoir en tête un exemple un peu idiot. Avec le même nombre de cartes, on peut l'écrire *bab* (c'est la célèbre « relation de tresse », *aba* = *bab*). C'est assez facile à voir en utilisant la tresse en cordelettes : on peut tirer un peu sur les brins pour que tel croisement de brins ait lieu avant ou après tel autre.

2. La tresse présentée est aba. Il y a deux solutions « optimales », c'est-à-dire deux inverses avec le nombre minimal de cartes :

— ABA est un inverse. Cela répond aussi à la question suivante : la recette c'est de prendre la tresse donnée et de mettre à la suite tous les inverses de chacune des cartes qui apparaissent, dans l'ordre inverse. Cela revient à multiplier la tresse par son image dans un miroir.

— BAB est aussi un inverse, voir la relation de tresse $aba = bab$ donnée précédemment.

3.

— La première tresse est nouée : elle permute les points de départ et d'arrivée.

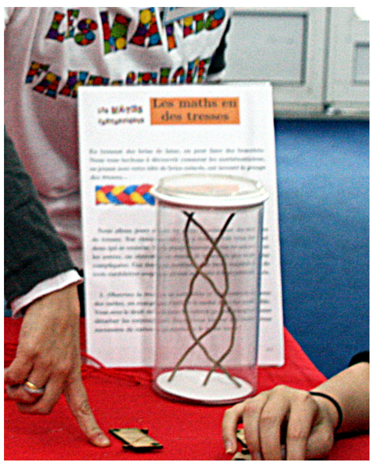
— La deuxième est également nouée, mais l'argument précédent n'est plus valable. Pour prouver que cette tresse est nouée, on peut remarquer que le deuxième brin n'est enlacé avec aucun des deux autres, mais les brins 1 et 3 sont enlacés. Formellement, la tresse s'écrit ab^2A, c'est un élément conjugué à b^2, donc il « suffit » de voir que b^2 n'est pas trivial. Encore plus formellement, on peut définir un morphisme du groupe des tresses vers $\mathbb{Z}$ en associant à un mot en a, b, a^{-1}, b^{-1} le nombre total algébrique de lettres (la somme des exposants). Cette formule est bien définie sur le groupe des tresses, parce que les mots qui sont identifiés (comme aba et bab) ont le même nombre algébrique de lettres (ici 3). Ce morphisme vaut 2 pour la tresse ab^2A, ce qui montre qu'elle n'est pas triviale. L'interprétation géométrique de ce morphisme est qu'il compte le nombre d'enlacements total des paires de brins (l'unité étant le demi-tour). La dernière tresse est dans le noyau de ce morphisme, ce qui rend le problème plus ardu.

— La troisième tresse est aussi nouée, mais ce n'est pas facile à montrer. Et c'est bien la seule réponse qui est attendue des participants : c'est une question difficile ! Pour se convaincre que la tresse est effectivement nouée, on pourrait réaliser la tresse avec des vrais brins (il y a des plaquettes avec des brins à disposition sur le stand) et essayer de passer les doigts entre les brins comme pour les peigner. Néanmoins pour une tresse assez longue, on se rend compte que si on n'y arrive pas c'est peut être juste parce que les brins se sont un peu emmêlés les uns aux autres...

  Pour satisfaire votre curiosité, voici quand même deux pistes de justifications. Un moyen de prouver à moitié que cette tresse est nouée est de remarquer que cette tresse est $a^3b^2A^2B^2A$ conjuguée à $a^2b^2A^2B^2$, qui est le commutateur de $[a^2, b^2]$. La tresse est donc triviale ssi a^2 et b^2 commutent. Si c'était le cas, on aurait un sous-groupe abélien d'indice fini du groupe de tresses et cela n'existe pas, mais ça n'est pas évident !

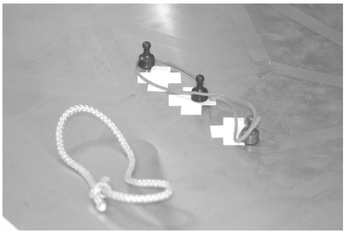
Un autre moyen est d'admettre la propriété dynamique suivante : une tresse est triviale si elle agit trivialement sur « tous les élastiques » (en fait il y a équivalence). Ce qu'on veut dire par là, c'est que si on passe un élastique, disons autour des deux premiers brins, et qu'on le « suit » le long de la tresse (voir la question 4 des versions orange et bleue du stand), il doit ressortir comme il était si la tresse est triviale. On vous laisse vérifier ici que ce n'est pas le cas !

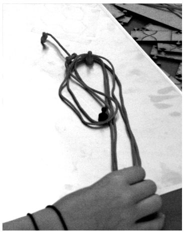
4. Dans cette question, il faut avoir une vision « verticale » de la tresse : une tresse dans un bocal était présente sur le stand pour cela et l'on pouvait sortir la tresse de son bocal pour montrer aux participants avec un bout de ficelle à quel endroit l'élastique serait positionné en haut de la tresse.



Il n'est pas toujours facile d'arriver à se représenter de tête la déformation de l'élastique. On pourra suggérer aux participants de dessiner l'élastique après mouvement élémentaire de la carte si ça les aide, et/ou de représenter directement l'élastique sur le dessin de la tresse à droite de la feuille de réponse.

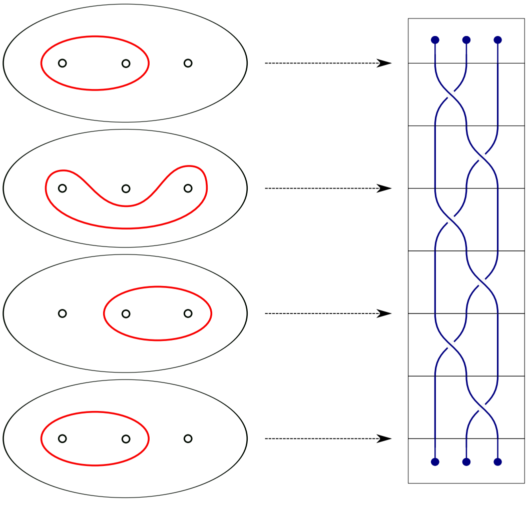
Il est également possible de faire la manipulation suivante. Des plaques métalliques étaient fournies sur le stand, avec des aimants et des ficelles fermées, de deux longueurs différentes. Les aimants représentent les brins vus du dessus. Trois croix apparaissent sur chaque plaque métallique, correspondant aux positions canoniques des trois brins vus du dessus. On peut « tresser » ces brins en déplaçant les aimants à la surface de la plaque (sans les soulever).



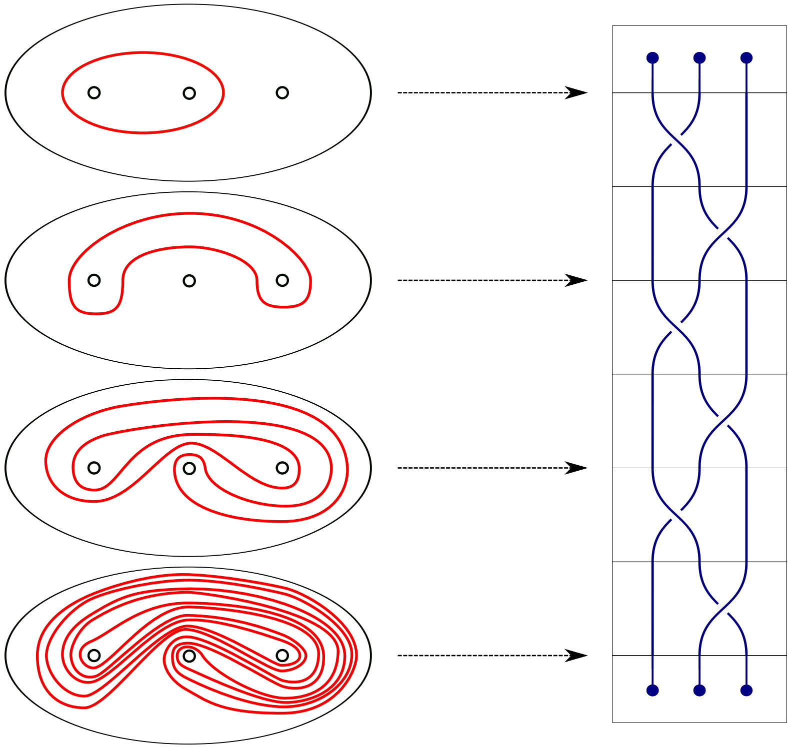


Les ficelles représentent les élastiques. Pour la première tresse présentée, utiliser les petites ficelles de petite longueur suffit. On constate que le mouvement de tressage qu'on effectue sur les brins déforme très peu l'« élastique » que représente la ficelle. Pour le deuxième tressage, il est vite évident quand on fait un essai que la ficelle doit être plus longue, sinon le mouvement est bloqué. Prendre alors une très longue ficelle, et commencer à tresser. On peut s'arrêter après chaque mouvement de tressage pour répartir la longueur de la ficelle plus uniformément autour des aimants, et dessiner sur sa feuille la position de l'« élastique ». Il faut toute la longueur de la ficelle pour arriver au bout des 3 itérations de la tresse. Peu importe si les participants n'obtiennent pas le dessin précis représentant la position de l'élastique au bout de ces 3 itérations, le but est qu'ils soient convaincus que l'élastique s'est alors considérablement allongé.

Voilà ce qu'on obtient pour la première tresse.



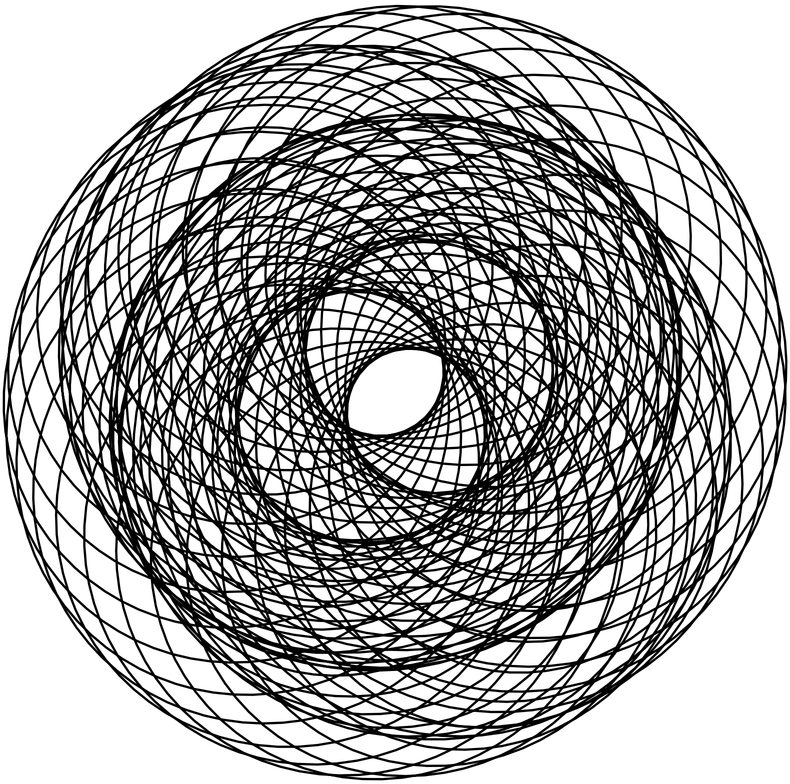
Et pour la deuxième, c'est un peu plus compliqué...



5. La tresse triviale e commute avec tout le monde. Sinon, parmi les 4 autres cartes, chacune commute avec elle-même et avec son inverse, et c'est tout ! Pour montrer par exemple que $ab \neq ba$, on peut se servir du fait qu'elles n'induisent pas la même permutation sur leurs extrémités.

6. Pour développer l'indication, imaginer qu'on prend la tresse triviale en cordelette, et qu'on fait faire une rotation de 360 degrés au plan où sont fixées les extrémités inférieures. La tresse obtenue est alors non triviale (les brins sont enlacés), c'est la tresse *ababab*. Pourquoi commute-t-elle avec tout le monde ? On peut le vérifier à la main à coup de « relation de tresse » $aba = bab$, mais c'est fastidieux. On peut aussi s'imaginer n'importe quelle tresse placée au-dessus, qu'on ferait glisser le long des brins ; elle finirait en dessous sans avoir changé !

Remarque : c'est essentiellement la seule tresse à avoir cette propriété, dans le sens où le centre du groupe de tresse est (librement) engendré par cette dernière, mais c'est autrement plus difficile...



$$\begin{cases} x(t) &= 48\cos(-16t+31)+26\cos(17t+141)-90\cos(-83t+33) \\ y(t) &= 48\sin(-16t+31)+26\sin(17t+141)-90\sin(-83t+33) \end{cases}$$