Panoramath 6

Cocktail de pistes et d'idées

Comité International des Jeux Mathématiques

www.cijm.org

Panora Math6

Réalisé par le CIJM

sous la direction de Martine Janvier, *Secrétaire Générale*

avec la collaboration de Marie José Pestel, *Présidente*

Michel Criton *Vice-président*

Martine Clément *Trésorière*

www.cijm.org

Nos remerciements vont
à Michèle Artigue pour sa préface,
à tous les contributeurs sans lesquels ce livre n'existerait pas,
à nos sponsors qui ont permis de l'imprimer,
à Martine Janvier pour ses photographies des fresques de Samarcande,
à Jean François Colonna pour ses illustrations fractales.

et
à Jasmine qui a bien voulu poser pour la couverture

Maquette de couverture et mise en page *Patrick Arrivetz*,
Imprimé par Cydergies - 9, rue de la Sabotte - 78160 Marly-le-Roi - Tél. 01 30 08 60 10

ISBN 978-2-9540431-1-1 Septembre 2015

PRÉFACE de MICHÈLE ARTIGUE

Professeur émérite
Université Paris Diderot - Paris 7

Le nouveau Panoramath, *Panoramath 6* est arrivé !

Deux cent soixante quatorze pages denses et passionnantes qui reflètent la vitalité des compétitions mathématiques, en France et au-delà de nos frontières, leur diversité, la qualité de la réflexion qui accompagne la conception de leurs sujets, le potentiel qu'ils offrent pour faire éprouver le plaisir de faire des mathématiques, non seulement aux amateurs de compétitions mathématiques mais aussi plus largement à tous ceux qui aiment les mathématiques, aiment à relever les défis qu'elles posent, et à tous ceux, encore plus nombreux, qui seraient prêts à les aimer si l'on arrivait à susciter leur intérêt !

Pour ceux qui vivent au contact des mathématiques actuelles, il ne fait pas de doute que les mathématiques sont une science vivante, dont les connexions s'étendent à un nombre toujours croissant d'activités humaines, une science sans laquelle il est impossible aujourd'hui de relever les nombreux défis auxquels l'humanité doit faire face. La didacticienne que je suis est aussi convaincue que c'est une science accessible à tous, que le plaisir de faire des mathématiques, de chercher et de trouver, n'est pas réservé à une petite élite de quasi extra-terrestres, que l'on peut en faire l'expérience très tôt, que l'on soit fille ou garçon, que l'on vive en France ou à l'autre bout du monde, et qu'une éducation mathématique réussie, c'est une éducation qui a su nourrir ce plaisir, le cultiver, d'une diversité de façons.

Ceci étant, je sais bien que la réalité nous confronte sans cesse, malgré nos efforts, à une image bien différente des mathématiques et de leur apprentissage. Nourrie d'un tout autre vécu et d'expériences souvent douloureuses, elle se transmet de génération en génération jusqu'à apparaître comme normale, naturelle. Rompre avec cette image ne va pas de soi, mais des ouvrages comme ce *Panoramath 6* et les très riches activités dont il rend compte peuvent, j'en suis convaincue, nous y aider.

En effet, que trouve-t-on dans ce *Panoramath 6* ? Pas moins de trente quatre contributions. Chacune présente les activités d'une organisation locale, régionale, nationale ou transnationale impliquée dans une forme ou une autre de compétition mathématique. Ces organisations ont des statuts institutionnels variés ; elles existent depuis des décennies ou ont été créées récemment ; elles sont depuis longtemps engagées dans ce type d'activités ou les ont investies plus récemment. Les compétitions organisées touchent des centaines ou des milliers de participants, et pour certaines d'entre elles beaucoup plus encore. Elles sont diverses tant dans le contenu des épreuves que leur organisation, les formes de travail qu'elles favorisent ou imposent.

A la lecture de cet ouvrage, on est impressionné par le foisonnement, le dynamisme et la qualité de ces multiples initiatives et cela seul en soi est un message d'espoir.

Ce que nous montre aussi clairement cet ouvrage, c'est que contrairement à ce qu'un lecteur peu averti pourrait penser, la majorité de ces initiatives n'ont pas pour but de repérer les futurs talents mathématiques et de les préparer à des compétitions hyper sélectives. Elles visent d'abord à donner au maximum d'élèves l'occasion de rencontrer des problèmes mathématiques de façon intéressante et ludique, en dehors de la pression et des contraintes scolaires usuelles, de prendre plaisir à les chercher et, régulièrement, d'arriver à les résoudre. Nombre de ces initiatives combinent d'ailleurs esprit de collaboration et de compétition. C'est le cas par exemple des rallyes divers auxquels la brochure accorde une large place. Les compétitions y sont souvent entre classes, nécessitant l'organisation de la collaboration en leur sein. Et les interactions sont parfois bien plus larges, traversant les frontières.

Les mathématiques y sont diverses, les statistiques et probabilités étant cependant assez peu présentes dans les exemples de sujets présentés. Elles sont engagées dans des contextes eux aussi variés et, dans les rallyes qui prennent la forme de balades urbaines, elles s'instancient dans des espaces géographiques, historiques et culturels. Tous les niveaux scolaires sont concernés, et l'enseignement général comme professionnel. Certaines compétitions s'ouvrent même au multilinguisme, une autre emprunte sa scénarisation aux jeux vidéos.

Il y a très certainement une mine d'idées à puiser dans la créativité dont font preuve les organisateurs de ces compétitions pour susciter l'intérêt des élèves, renforcer la dimension ludique du travail mathématique, tant par les formes de compétitions qu'ils créent que par le contenu des épreuves qu'ils imaginent et la mise en lumière des mathématiques qui s'y opère. Et, pour nous y aider, dans la lignée de *Panoramath 5*, les auteurs, à quelques exceptions près, ne se contentent pas de contributions descriptives. A travers les sujets qu'ils choisissent de présenter et la façon dont ils nous en parlent, les analyses et commentaires qu'ils fournissent au-delà des seules réponses aux questions posées, ils nous font rentrer un peu dans leur travail de conception ; ils explicitent des choix, nous en expliquent les raisons et nous en montrent la pertinence didactique. Un certain nombre de contributions proposent aussi des variantes, des prolongements, voire des pistes pour des exploitations en classe, dans un contexte plus standard.

Ce nouveau Panoramath est, vous l'aurez compris, un excellent cru et je tiens à féliciter tous ceux qui ont contribué à sa réalisation. Je souhaite vraiment qu'à le lire, vous prendrez autant de plaisir que j'en ai eu moi-même.

MA

TABLE DES MATIÈRES

ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES -A.T.S.M.

PRÉSENTATION

Fondée le 31 Janvier 1968, l'ATSM est membre fondateur depuis 1976 de l'Union Mathématique Africaine et membre depuis 1993 du Comité International des Jeux Mathématiques (C.I.J.M).

FICHE TECHNIQUE

• Structures :

Assemblée Générale - Bureau National - Régionales - Bureau National élargi.
Les activités de l'A.T.S.M. s'adressent à toux ceux qui s'intéressent à l'enseignement et à la culture scientifique, un large public de la Maternelle à l'Université, enseignants ou non.

• Activités :

L'A.T.S.M. organise annuellement les Journées Nationales, le Concours National de Mathématiques à l'intention des meilleurs élèves de 3e année de la section mathématiques et les phases éliminatoires des Jeux Mathématiques et logiques.

Elle participe régulièrement à Paris à la Finale Internationale des Jeux Mathématiques et Logiques organisée par la F.F.J.M., au Salon Culture et Jeux Mathématiques et à la Coupe inter-régionale Euromath organisés par le C.I.J.M..

Elle participe, en France, chaque année, aux Journées Nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public (A.P.M.E.P.).

Elle participe annuellement aux *Olympiades Internationales ou Africaines de Mathématiques* (I.M.O. , O.P.A.M.). Elle participe au *Kangourou Sans Frontières de Mathématiques* (K.S.F.).

L'A.T.S.M. organise aussi :

- des colloques et des rencontres à l'échelle nationale ou internationale, congrès, écoles d'été ou rencontres.
- des journées de formation sur la culture mathématique et les compétitions.

- **Publications :**
  - Revue *Miftah el Hissab* : bulletin de liaison et d'information à l'intention des adhérents.
  - Revue *Omar El Khayam* : revue spéciale à l'intention des élèves de l'Ecole de base et du Secondaire.
  - Livres d'analyse, d'algèbre, de géométrie et d'arithmétique à l'intention des enseignants et des étudiants.
  - Actes des colloques sur l'Histoire des Mathématiques Magrébines.

- **Contacts :**

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.
43, Rue de la liberté 2019 Le Bardo. Tunisie
B.P 286 Le Bardo 2000. Tunisie
☏et🖷 : **(+216) 71 588 198**

Président de l'A.T.S.M : Taoufik Charrada
☏ : **98446946**
🖰 : **tawfik.charrada@gmail.com**

Les TESTS DE SELECTION

- **Historique :**

L'A.T.S.M organise depuis trois ans un test national, afin de sélectionner des candidats pour les Olympiades Internationales ou Africaines de mathématiques. Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'association.

- **Compétition :**

Les élèves concernés par le test sont des élèves de 3ᵉ année secondaire de la section mathématique, sélectionnés par le commissariat régional de l'Éducation .

- **Parrains :**

Ministère de l'Éducation
Revue *Omar El Khayam* de l'A.T.S.M.

- **Épreuves :**

Individuelles
Durée : 3 heures
Contenu et difficulté : les énoncés sont choisis de façon à ce que les candidats puissent mobiliser leurs connaissances et les savoir-faire acquis en secondaire.

TEST PROPOSÉ LE 27 FÉVRIER 2015

Exercice 1

Soit a, b et c trois réels positifs. Montrer les inégalités suivantes :

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

2) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\,(a + b + c)$.

- **Domaine mathématique**

Opérations sur des nombres réels, inégalités usuelles.
Il s'agit de mobiliser des techniques opératoires sur les nombres réels en vue de prouver des inégalités.

- **Analyse de l'exercice**

Cet exercice repose sur un résultat trivial connu par des élèves des classes de seconde : pour tous réels $x^2 + y^2 \geq 2xy$

- **Solution**

1) On sait que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ et $a^2 + c^2 \geq 2ac$
Par addition de ces inégalités, on trouve la 1ère inégalité.

2) D'après 1) $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abbc + bcca + caab = abc(a + b + c)$

Exercice 2

Soit A = 9999...9 (2015 fois le chiffre 9).

Quelle est la somme des chiffres de A^2 ?

- **Domaine mathématique**

Arithmétique : opérations sur les entiers naturels, écriture décimale d'un entier naturel. Il s'agit de mobiliser des techniques opératoires sur les entiers naturels en vue de déterminer la valeur d'une expression numérique.

- **Analyse de l'exercice**

La recherche de la somme des chiffres de A^2 repose sur les écritures
$A=99...9 = 10^{2015} - 1$ et $A^2 = (10^{4030} + 1) - (2 \times 10^{2015} - 1)$.

- **Solution**

$A = 10^{2015} - 1$ et par suite $A^2 = 10^{4030} + 1 - 2 \times 10^{2015}$.
$10^{4030} + 1 = 1000...01$ (4029 fois le chiffre 0) et 2×10^{2015} (2015 fois le chiffre 0).
En posant l'opération, on trouve $A^2 = 1000...01 - 2000...0 =$
$999...9800 \times 00001$ (2014 fois le chiffre 9).

La somme des chiffres de A^2 est donc $2014 \times 9 + 8 + 1 = 18135$.

Exercice 3

> Soient x, y et z trois réels non nuls et distincts deux à deux .
>
> Montrer que si $x + \frac{3}{y} = y + \frac{3}{z} = z + \frac{3}{x} = p$, alors $xyz + 3p = 0$.

- **Domaine mathématique**

Opérations sur des nombres réels.
Il s'agit de mobiliser des techniques opératoires sur les nombres réels en vue de prouver un résultat.

- **Analyse de l'exercice**

Cet exercice ne présente pas de difficultés pour des élèves de secondaire. Le résultat à prouver exige uniquement l'exploitation judicieuse de l'hypothèse $x + \frac{3}{y} = y + \frac{3}{z} = z + \frac{3}{x} = p$ et que les nombres x, y et z jouent le même rôle dans cette hypothèse.

- **Solution**

La condition $x + \frac{3}{y} = y + \frac{3}{z}$ implique que $yz(x - y) = 3(y - z)$ *(1)*

On obtient de la même manière $zx(y - z) = 3(z - x)$ *(2)*

et $xy(z - x) = 3(x - y)$ *(3)*

En multipliant *(1)*, *(2)* et *(3)* on obtient $(xyz)^2 = 27$.

La condition $x + \frac{3}{y} = z + \frac{3}{x} = p$ implique que $py = xy + 3$ et $px = xz + 3$.

D'où $p(x - y) = x(z - y)$ *(1')* et par raison de symétrie :

$p(z - x) = z(y - x)$ *(2')* et $p(z - x) = z(y - x)$ *(3')*.

En multipliant *(1')*, *(2')* et *(3')* on obtient : $p^3 = -(xyz)$

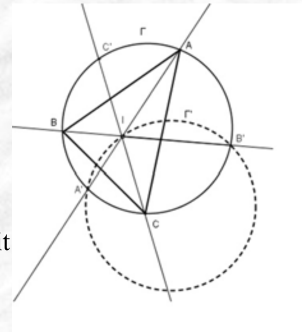
d'où $p^6 = (xyz)^2 = 27$ et par suite $p^2 = 3$ et $xyz = -p^3 = -p^2 \times p = -3p$.

Exercice 4

Dans la figure ci-contre,
ABC est un triangle acutangle
(ses trois angles sont aigus)
et Γ son cercle circonscrit.

Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ coupent le cercle Γ respectivement en A', B' et C'. On désigne par I le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC') et par Γ le cercle circonscrit au triangle IA'B'.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont isométriques.



- **Domaine mathématique**

Géométrie plane : notion de cercles isométriques, loi de sinus pour un triangle, notion de bissectrice, points cocycliques.

- **Analyse de l'exercice**

Le résultat à prouver repose essentiellement sur la loi de sinus pour un triangle inscrit dans un cercle : Les deux triangles A'B'C' et IA'B'ont un côté en commun, d'où l'idée d'utiliser les deux formules :

$$\frac{A'B'}{\sin\left(\widehat{A'C'B'}\right)} = 2R \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{\sin\left(\widehat{A'IB'}\right)} = 2R' \quad .$$

- **Solution**

Soit R le rayon du cercle Γ et R'celui de Γ'. D'après la loi de sinus pour le triangle A'IB' dans le cercle Γ : $\dfrac{A'B'}{\sin\left(\widehat{A'C'B'}\right)} = 2R$

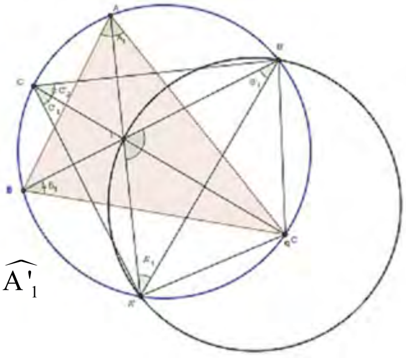
D'après la loi de sinus pour le triangle A'B'C' dans le cercle Γ';

$$\frac{A'B'}{\sin\left(\widehat{A'IB'}\right)} = 2R'$$

Pour montrer que les cercles Γ et Γ' sont isométriques, il suffit de montrer que R=R', ce qui équivaut à montrer que $\sin\left(\widehat{A'C'B'}\right) = \sin\left(\widehat{A'IB'}\right)$.

Or $\widehat{A'IB'} = \pi - (\widehat{A'_1} + \widehat{B'_1})$ et $\widehat{A'CB'} = \widehat{C'_1} + \widehat{C'_2}$

$\widehat{C'_1} + \widehat{C'_2} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{B'_1} + \widehat{A'_1}$ car $\widehat{B_1} = \widehat{ABB'} = \widehat{A'_1}$



Donc les angles $\widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{A'IB'}$ sont supplémentaires et par suite $\sin\left(\widehat{A'C'B'}\right) = \sin\left(\widehat{A'IB'}\right)$.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE LA RÉGIONALE DE SFAX

PRÉSENTATION

La régionale de Sfax, créée depuis plus de vingt huit ans , participe depuis des années aux différentes activités de l'A.T.S.M :

✓ Encadrement de trois clubs de mathématiques dans la région. (primaire, collège et secondaire).

✓ Organisation, chaque année, d'un *Rallye de mathématique* dans des établissements scolaires.

✓ Préparation des jeunes lauréats de la région pour les *Olympiades Internationales et Africaines des Mathématiques* et pour les phases finales du *Championnat des jeux mathématiques et logiques.*

✓ Participation à PARIS, à la Coupe inter-régionale *Euromath* , organisée par le C.I.J.M.

✓ Participation depuis trois ans, par une classe, au *Rallye mathématique de Toulouse*.

✓ Participation à la compétition *Kangourou Sans Frontières « Tunisie » .*

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

Le bureau régional de Sfax organise depuis des années un rallye de mathématique à l'échelle individuelle ou collective, en vue de sélectionner des jeunes des écoles primaires, des collèges et des lycées pour la participation à la compétition interrégionale *Euromath*, au *Rallye de Toulouse* et aux finales du *Championnat des jeux mathématiques et logiques*.

- **Épreuves**

Individuelles

Les participants sont des élèves des classes de 5^e , 6^e, du cycle primaire et des élèves des classes de 7^e , 8^e , 9^e année de base et $1^{ère}$ et 2^e année secondaire.

- **Partenaires**

Commissariats Régionaux de l'Éducation de Sfax

- **Contacts :**

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, bureau régional de Sfax
Lycée Majida Boulila , BP 1018 Sfax
☎ & 🖷 : **(+216) 74249499**
Présidente de la régionale : Salma Elaoud ; 🖰 : **salmaelaoud@yahoo.fr**
Autre contact, Sadok Ktari : 🖰 :**ktari2008@yahoo.fr**

EXERCICES PROPOSÉS LORS DU RALLYE 2015

Nombre divisible par ses chiffres !

36 et 248 vérifient la même propriété (P) : chacun de ces nombres est composé de chiffres distincts, distincts de 0 et il est divisible par les chiffres qui le composent,

Déterminer le premier nombre plus grand que 2015 vérifiant la propriété (P).

- **Domaine mathématique**

Arithmétique.

- **Niveau scolaire**

7^e et 8^e années de base

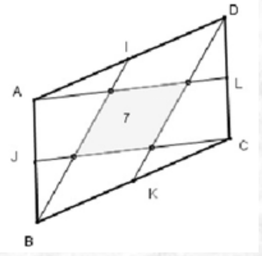
- **Solution**

2136

Aire d'un parallélogramme

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme
Les points I, J, K et L désigne respectivement
les milieux des segments [AD] , [AB] , [BC] et [CD].
L'aire du quadrilatère grisé est égale à 7.

Quelle est alors l'aire de ABCD ?



- **Domaine mathématique**

Arithmétique

- **Niveau scolaire**

7^e, 8^e, et 9^e années de base

- **Solution**

35

Carrés à côtés consécutifs

Déterminer cinq carrés, sachant que :

- leurs côtés sont des nombres entiers consécutifs,
- la somme des aires des trois plus petits est égale à la somme des aires des deux plus grands.

- **Domaine mathématique**

Arithmétique

- **Niveau scolaire**

8^e, et 9^e années de base

- **Solution**

10 ; 11 ; 12 ; 13 et 14

Somme de sommes de chiffres pairs

SP(n) désigne la somme des chiffres pairs de n .

Par exemple SP(2754) = 6

Calculer SP(100) + SP(99) +… + SP(2) + SP(1).

- **Domaine mathématique**

Arithmétique

- **Niveau scolaire**

$1^{ère}$ et 2^e année secondaire

- **Solution**

400

Nombres palindromes

Un entier naturel écrit en base 10, est dit nombre palindrome s'il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche. Exemples : 202 , 40304

i) Combien y a-t-il des nombres palindromes premiers ayant un nombre pair de chiffres ?
ii) Trouver un nombre palindrome à 4 chiffres divisible par 3 entiers premiers et consécutifs.

- **Domaine mathématique**

Arithmétique

- **Niveau scolaire**

8^{e}, et 9^{e} années de base

- **Solution**

i) un seul : 11

ii) $1001= 7\times11\times13$

Un nombre et son renversé

Un nombre qui a une écriture décimale *ab* admet pour renversé le nombre qui s'écrit *ba*.
Exemple 37 est le renversé de 73 .

Trouver deux entiers naturels x et y tels que x est le renversé de y et x^2 est aussi le renverse de y^2.

- **Domaine mathématique**

Arithmétique

- **Niveau scolaire**

1ère et 2^{e} année secondaire

- **Solution**

$x = 13$; $y = 31$

RALLYE MATHÉMATIQUE DE LA RÉGIONALE DE SOUSSE

PRÉSENTATION

La Régionale de Sousse, compte parmi les anciens bureaux régionaux de l'ATSM, ses activités connaissent une évolution remarquable, surtout après le renouvellement de son bureau directeur.

la Régionale de Sousse participe aux différentes activités de l'ATSM :

- ✓ Encadrement d'un club de mathématiques dans la région.
- ✓ Organisation d'un séminaire intitulé « *semaine ouverte de mathématique* ».
- ✓ Organisation d'un *Rallye de mathématique* dans des établissements scolaires.
- ✓ Publication d'une revue scientifique pour les élèves des collèges et lycées.
- ✓ Préparation des jeunes lauréats de la région pour les *Olympiades Internationales et Africaines des Mathématiques* et pour les phases finales du *Championnat des jeux mathématiques et logiques*.
- ✓ Participation à PARIS, à la coupe inter-régionale *Euromath* , organisée par le CIJM.
- ✓ Participation à la compétition *Kangourou sans frontière*s *« tunisie »* (cette année, plus que 3000 candidats ont participé à cette compétition).

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

Le bureau régional de Sousse organise un Rallye de mathématique à l'échelle individuelle, en vue de sélectionner des jeunes des écoles primaires, des collèges et des lycées pour la participation à la Coupe inter-régionale *Euromath* et aux Finales du *Championnat des jeux mathématiques et logiques.*

- **Épreuves**

Individuelles

Les participants sont des élèves des classes de 5^{e} , 6^{e} du cycle primaire et des élèves des classes de 7^{e} , 8^{e} , 9^{e} année de base et 1ère , 2^{e} et 3^{e} année secondaire.

- **Partenaires**

Commissariat Régional de l'Éducation de Sousse

Universités de la région.

- **Contacts :**

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, bureau régional de Sousse

☏ : **(+216)20802145**

Président de la régionale : Mohamed Chahed Agrebi ; 🖰 : **sousseatsm@gmail.com**

Autre contact : Hassine Hamzaoui (membre du BN de l'ATSM) ; 🖰 :**hamzaoui.hassine@gmail.com**

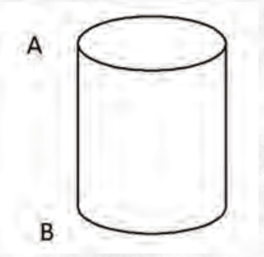
EXERCICES PROPOSÉS LORS DU RALLYE 2015

Huile d'olive

Un cylindre est plein d'huile d'olive.
Le rayon de la base est 7 cm.
On incline le cylindre afin que la hauteur [AB] fasse 45° avec l'horizontale.

Quelle la quantité d'huile coulée ?

(On prendra $\pi = \frac{22}{7}$).



- **Domaine mathématique**

Mesure de grandeurs, Solide

- **Niveau scolaire**

9e année de base et 1ère année secondaire.

- **Solution**

1078 cm3

Rallye de Sousse

Au rallye de Sousse les gagnants peuvent parcourir un circuit dans des voitures spéciales : la roue avant de la voiture a 60 cm de diamètre alors que sa roue arrière a 90 cm de diamètre.

Quelle est la distance parcourue par la voiture sachant que la roue avant a fait 70 tours de plus que la roue arrière ?

(On prendra $\pi = \frac{22}{7}$).

- **Domaine mathématique**

Mesure de grandeurs

- **Niveau scolaire**

9e année de base et 1ère année secondaire.

- **Solution**

39 600 cm

Le drapeau de la Tunisie

Le croissant est constitué de deux cercles de même rayon 2 cm et dont les centres sont distants de $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

On prendra $\pi = \dfrac{22}{7}$ et $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Quelle est l'aire du croissant ?

- **Domaine mathématique**

Géométrie

- **Niveau scolaire**

1ère et 2e année secondaire

- **Solution**

Réponse : 4,10 cm²

CHAMPIONNAT F.F.J.M.

PRÉSENTATION :
La Fédération Française des Jeux Mathématiques (F.F.J.M.) offre chaque année aux élèves, collégiens, lycéens, étudiants ou adultes de France ou de nombreux autres pays une compétition exaltante s'étalant sur plusieurs mois : le Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques. Huit catégories, quatre phases successives, des centaines de milliers de concurrents, des centaines de prix de valeur et un maximum d'humour caractérisent ce que les journalistes n'ont pas hésiter à appeler "l'événement le plus astucieux de l'année", et qui a le mérite d'associer scolaires et adultes.
Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. Sont exigés de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche, mais pas réellement de connaissances. Au risque de déplaire à quelques puristes, seul le résultat compte. Encore qu'en cas de solution multiple, il faille donner le nombre exact de solutions.

Le championnat hors de France :
Le championnat voit chaque année la participation de concurrents, issus de nombreux pays. Des structures relais organisent demi-finales, finales régionales ou nationales en Belgique, Centrafrique, Italie, Luxembourg, Niger, Pologne, Québec, Russie, Slovaquie, Suisse, Tchad, République Tchèque, Tunisie, Ukraine.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Depuis le premier Championnat, en 1987, patronné par les revues Jeux & Stratégie et Science & Vie, que de chemin parcouru ! La FFJM a été l'un des artisans du renouveau de l'image des mathématiques auprès des élèves et du grand public. Les finales successives ont égrené des noms insolites et prestigieux : Cité des Sciences, École Polytechnique, Sénat, Parc Astérix, Cité Internationnale Universitaire de Paris et aujourd'hui Université Paris-Diderot.

Le championnat est encore, à sa vingt-neuvième édition, la compétition de référence avec ses trois étapes qui sont autant de fêtes pour les participants et les animateurs de 9 à 99 ans.

- **Epreuves :** 8 catégories :

CE = 3e année de l'école primaire
CM = 2 dernières années du primaire.

C1 = *France* : 6^{e} - 5^{e}, *Belgique* : 6^{e} - primaire - 1^{re} -secondaire ;
Suisse : 6^{e} - 7^{e} ; *Tunisie* : 1^{re} - 2^{nd} secondaire.
C2 = *France* : 4^{e} - 3^{e} ; *Belgique* : 2^{nd} - 3^{e} secondaire ; *Suisse* : 8^{e} - 9^{e} ;
Tunisie : 3^{e} - 4^{e} secondaire.
L1 = *France* : 2^{nd} à terminales ; *Belgique* : 4^{e} à 6^{e} secondaire ;
Suisse : gymnase ; *Tunisie* : 5^{e} à 7^{e} secondaire.
L2 = Deux premières années du supérieur scientifique.
GP = Grand Public (adultes).
HC = Haute Compétition.

Deux modes de participation possibles aux quarts de finales :
- Par correspondance.
- Dans les établissements scolaires.

Compétition :
Quarts de finale (décembre). Demi-finales régionales (mars).
Finale internationale et Concours parallèle open (fin août).

Partenaires :
Casio, Tangente, Éditions Vuibert, Jeunesses Scientifiques (Belgique), Encyclopédia Universalis.

Contacts :

FRANCE : F.F.J.M.
1578 route de Langesse
45290 Varennes-Chanzy
☎ : 06 51 86 44 69
🖷 : 09 72 11 05 52

BELGIQUE : F.F.J.M. Belgique
Clos de la Quièvre 22
B-7700 MOUSCRON
☎🖷 : 32 (0) 56 33 14 53

SUISSE : F.S.J.M.
Philippe Dony et Christian Pralong
Établissement Secondaire de Prilly
CH 1008 PRILLY

ITALIE :
Angelo Guerraggio
Centro PRISTEM
Università Bocconi,
Viale Isonzo, 7
20100 Milano ITALIE

NIGER : A.N.J.M,
Mamane Voube
BP 13180, NIAMEY
☎ : (227) 74 10 64

QUÉBEC
Frédéric Gourdeau, Département de Mathématiques et de Statistique,
Université Laval,
QUEBEC G1K7P4

POLOGNE : F.P.J.M,
R. Rabczuk
H. Steinhaus Center
Politec. Wroclawska
50-370 WROCLAW
☎ : (48) 71320 25 23

TUNISIE : A.T.S.M.,
Bechir Kachoukh
43, rue de la Liberté
219 Le Bardo
☎ : (216) 1261455

UKRAINE
Ihor Kryvosheya et Tetyana Zbozhynska
Union des Jeunes Mathématiciens

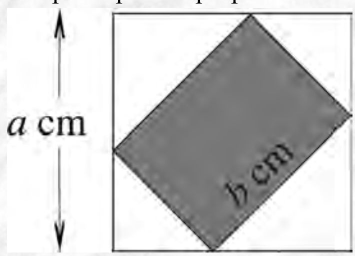
LE RECTANGLE DE L'ANNÉE (PROBLÈME PROPOSÉ EN 2014)

Enoncé :

Un rectangle dont une dimension est égale à 14 cm est calé dans un carré de côté 20 cm comme l'indique la figure, qui ne respecte pas les proportions.

Quelle est l'aire de ce rectangle ?

On prendra, si besoin est 1,414 pour $\sqrt{2}$ et on donnera la réponse en cm² arrondie au dixième le plus proche.



A partir de cet énoncé, nous avons également réalisé une fiche utilisable en animation, sous une forme légèrement différente (celle d'un QCM). Un rectangle dont une dimension est égale à 14 cm est calé dans un carré de côté 20 cm comme l'indique la figure, qui ne respecte pas les proportions.

Quelle est la bonne réponse :

¬ A. L'aire du rectangle bleu est strictement inférieure à l'aire de la partie blanche du carré ;

¬ B. L'aire du rectangle bleu est strictement supérieure à l'aire de la partie blanche du carré ;

¬ C. L'aire du rectangle bleu est exactement égale à l'aire de la partie blanche du carré ;

¬ D. Les données du problème ne sont pas suffisantes pour répondre à la question.

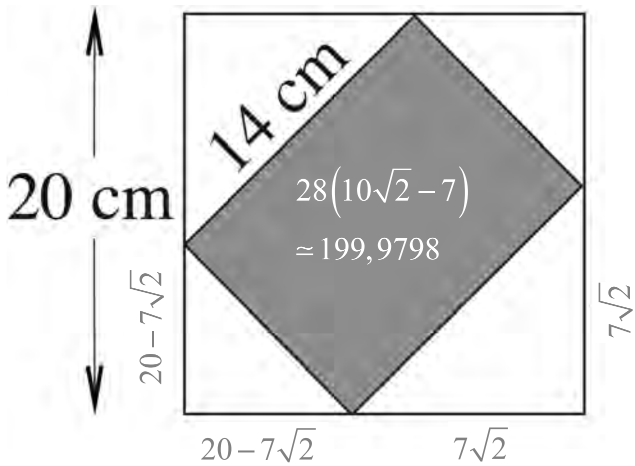
- **Domaines de compétences :**

Les notions mathématiques mises en jeu dans ce problème sont :
- la notion de symétrie ;
- les notions de valeur exacte et de valeur approchée.

Des prolongements sont possibles permettant d'aborder l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

- **Analyse de la tâche :**

Il faut d'abord se persuader que si le rectangle est « calé » (c'est-à-dire inscrit dans le carré) ses axes de symétrie coïncident avec les diagonales du carré.
Un calcul relativement simple (mais seulement à partir de la dernière année du collège) permet ensuite de déterminer l'aire du rectangle.

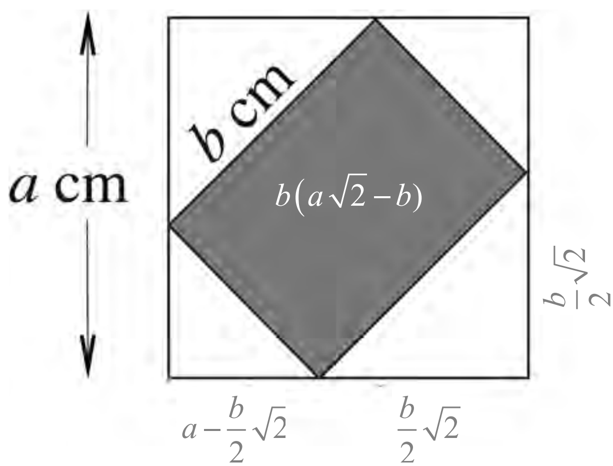


On constate alors que l'aire du rectangle est presqu'égale à la moitié de celle du carré (à environ 0,01 % près).

PROLONGEMENT POSSIBLE (À PARTIR DU LYCÉE)

Enoncé :

Peut-on trouver des nombre entiers de centimètres *a* et *b* tels que le rectangle calé dans le carré ait une aire exactement égale à la moitié de l'aire du carré ?



La réponse est négative et met en jeu l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

LES COMPETITIONS
WORLD PUZZLE FEDERATION et COMBILOGIQUE

PRÉSENTATION :
Le World Sudoku Championship et le World Puzzle Championship sont des compétitions organisées chaque année par la World Puzzle Federation. La WPF est une association qui a été créée en 1992 à l'initiative de Will Shortz, éditeur des jeux du New York Times. Selon ses statuts, cette organisation possède un seul adhérent par pays. La majorité des adhérents sont des sociétés éditrices de revues de jeux de logique. Depuis 2012, l'adhérent français de la WPF est la Fédération Française des Jeux Mathématiques.

Ces deux compétitions, qui se déroulent sur trois ou quatre jours, réunissent des équipes de 4 joueurs (adultes ou lycéens) par pays participant. Elles donnent lieu à deux classements : un classement individuel et un classement par équipes. Les pays participants sont majoritairement des pays anglo-saxons et des pays de l'Europe de l'Est, auxquels il faut ajouter l'Allemagne, les Pays-Bas, le Japon, la Russie, le Canada. La France et la Belgique participent au WPC depuis l'année 2000 et au WSC depuis sa création en 2004.

Les énoncés des épreuves sont proposés systématiquement en anglais, quelle que soit la langue des compétiteurs. Un « booklet » contenant tous les textes des énoncés (sans les diagrammes ou avec des diagrammes-exemples très simples) sont envoyés aux compétiteurs quelques jours avant la compétition afin qu'ils les étudient et une séance de " questions-réponses " sur ces textes (en anglais) est prévue avant le début des épreuves.

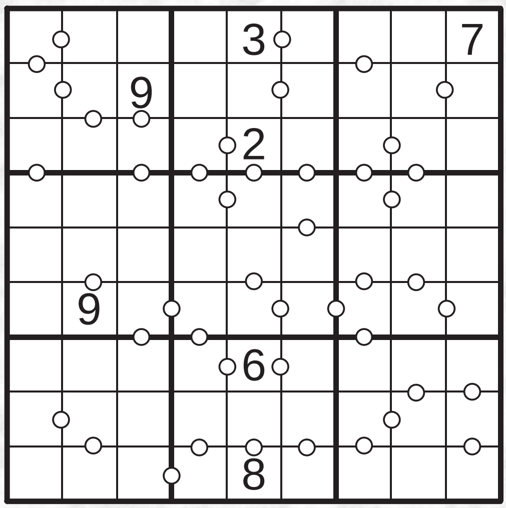
La particularité de ces compétitions est la très grande variété des jeux proposés : plusieurs dizaines de jeux différents dont très peu sont connus du grand public en France. Le sudoku, pour ne parler que du plus connu des jeux de grilles, est ainsi décliné en de très nombreuses variantes, qui changent la stratégie et les méthodes de résolution par rapport au jeu « classique ».

Le Combilogique est une compétition créée en 2000 lors du premier Salon des Jeux Mathématiques par Bernard Novelli et Bernard Myers. Depuis 2012, cette compétition a été intégrée dans les épreuves qualificatives pour la finale française du Championnat de sudoku et du Championnat de jeux de grilles.

UN EXEMPLE DE JEU : LE SUDOKU « CONSÉCUTIF »

Enoncé :

Dans ce jeu, comme dans tout sudoku, chaque ligne, colonne et région doit contenir les chiffres de 1 à 9. De plus, deux cases adjacentes par un côté sont séparées par un rond blanc si et seulement si elles contiennent deux chiffres consécutifs.

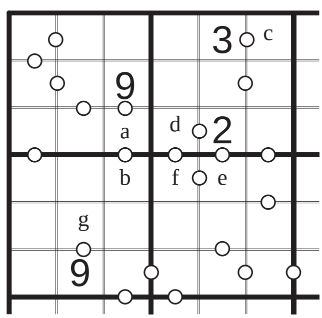


- **Domaine de compétence :**

Raisonnement logique

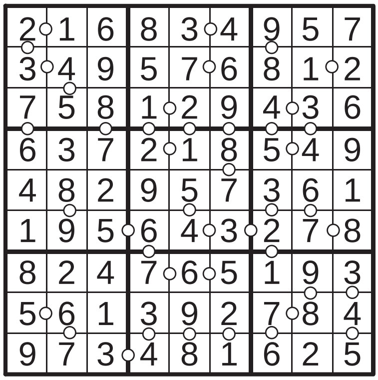
- **Analyse de la tâche :**

Outre les techniques habituelles de résolution des sudokus, il est nécessaire ici d'utiliser le fait que deux cases adjacentes contiennent ou ne contiennent pas des chiffres consécutifs. En effet, le nombre d'indices donnés (les chiffres de l'énoncé) est très inférieur au nombre minimal d'indices que doit contenir une grille de sudoku pour conduire à une solution unique.



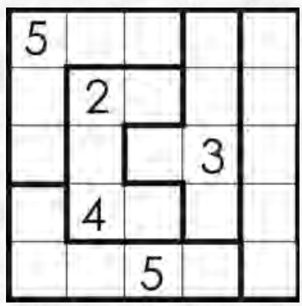
En a et b, on ne peut placer que les chiffres 8 et 7.
En c, la seule possibilité est de placer un 4 (il y a déjà un 2 dans la région).
En d et e, on ne peut placer qu'un 1 (il y a déjà un 3 dans la région et dans la colonne), d'où un 2 en f.
En g, on ne peut placer qu'un 8 …

- **Solution :**



UN EXEMPLE DE JEU : LE SUDOKU «IRREGULIER »

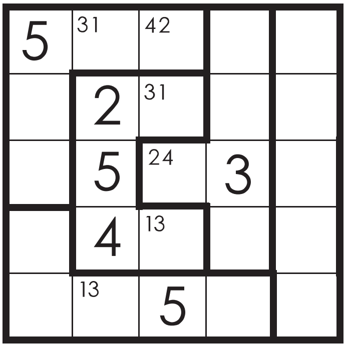
Dans ce sudoku, les « régions » ont des formes irrégulières et chaque région doit contenir les nombres de 1 à 5. Les colonnes sont numérotées de 1 à 5 de gauche à droite et les lignes de 1 à 5 de haut en bas.



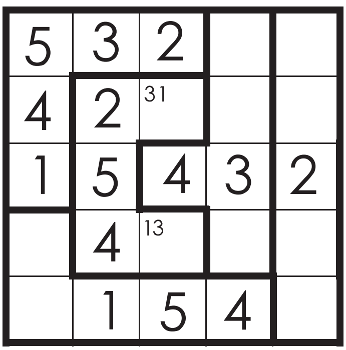
- **Solution :**

La case en colonne 2 ligne 1 et la case en colonne 2 ligne 5 ne peuvent contenir aucun des chiffres 2, 4 ou 5. Elles contiennent donc l'une 1 ou 3 et l'autre 3 ou 1. On en déduit que la case en colonne 2 ligne 3 contient un 5.

La région 3 centrale en forme de U contient déjà les chiffres 2, 4 et 5 en colonne 2. On en déduit que les cases en colonne 3 ligne 2 et en colonne 3 ligne 4 contiennent l'une 1 ou 3 et l'autre 3 ou 1. En observant la colonne 3 et la ligne 1, on conclut que la case en colonne 3 ligne 1 contient 2 ou 4 et la case en colonne 3 ligne 3 un 4 ou un 2.

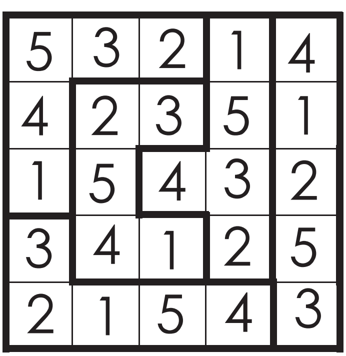


Les cases en ligne 3 colonne 3 et en colonne 4 ligne 5 doivent contenir le même chiffre (sinon, ce chiffre serait absent de la 3e colonne). En observant les chiffres inscrits dans la ligne 3 et dans la région centrale en forme de U, on conclut que la case en colonne 1 et ligne 3 doit contenir le chiffre 1 et donc la case en ligne 1 colonne 2 le chiffre 3 et la case en ligne 5 colonne 2 le chiffre 1. En observant la ligne 2, on conclut que la case en colonne 1 et en ligne 2 contient le chiffre 4 et on en déduit que la case en ligne 1 colonne 3 contient le chiffre 2. Il en résulte immédiatement que la case centrale de la grille contient un 4, ce qui permet de compléter la ligne 3 avec un 2.



En observant la colonne 4 et la ligne 1, on complète la case d'intersection avec un 1, puis la ligne 1 en plaçant un 4 dans la dernière case. De même, l'observation de la ligne 5 et de la colonne 5 permet de placer 3 à l'intersection. On peut alors compléter la dernière ligne, puis le première colonne, ce qui permet de placer un 3 en 3e colonne dans la case marquée 31 et un 1 dans celle marquée 13.

La grille se complète ensuite facilement.



CONCOURS CALCUL MENTAL MATHADOR

PRÉSENTATION

La 1ère édition s'est déroulée pendant l'année scolaire 2011/2012.

Le principe a été conçu par une équipe de Canopé Besançon pilotée par Christel Renaud et Eric Trouillot, le créateur du jeu Mathador.

La 5e édition se déroulera cette année 2015/2016.

FICHE TECHNIQUE

Compétition :

Le concours s'adresse aux classes de CE2, CM1 et CM2 en primaire, les classes de Segpa et d'Erea et toutes les classes du collège. Les quatre premières éditions ont concerné l'académie de Franche-Comté, le département de la Dordogne s'est associé pour la dernière édition.

De 40 classes participantes pour la 1ère édition, le concours est passé à 250 classes cette année. Le projet est de le gérer à l'aide d'une plate-forme numérique nationale, Canopé et de le proposer dans toute la France le plus rapidement possible.

Principe de l'épreuve :

Le concours est gratuit et ouvert à toutes les classes dans la limite des places définies : 250 pour la dernière édition qui se répartissent dans 4 catégories : Primaire (CE2-CM1-CM2), 6e-5e, 4e-3e et Segpa-Erea. L'épreuve s'adresse à tous les élèves de la classe.

Chaque semaine, pendant 16 semaines, depuis fin novembre et jusqu'en avril, une épreuve de type Mathador est proposée à tous les élèves de la classe.

L'enseignant obtient l'épreuve en ligne sur le site du concours de Canopé. Elle est disponible chaque lundi matin.

L'enseignant choisit le moment qu'il veut dans la semaine pour faire passer l'épreuve qui dure 3 minutes. Chaque élève dispose d'une feuille réponse sur laquelle il doit écrire ses opérations.

L'enseignant doit saisir les résultats de sa classe (la moyenne) sur le site du concours avant le vendredi soir.

Canopé effectue chaque semaine la mise à jour des classements pendant les 16 semaines du concours.

Un palmarès est établi à l'issue de la 16ème semaine dans chacune des 4 catégories.

Contenu de l'épreuve :
En 3 minutes, chaque élève essaye de fabriquer le nombre-cible en combinant tout ou partie des 5 nombres dont il dispose avec les 4 opérations. Chacun des 5 nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les calculs ne doivent contenir que des nombres positifs.

L'élève note ses opérations sur sa fiche de score et compte les points de sa solution.
Le système de points est le suivant :
Une addition : 1 point, une multiplication : 1 point, une soustraction : 2 points, une division : 3 points et le coup Mathador : 13 points. 0 point si aucune solution ou erreurs dans les calculs.

Le coup Mathador est réalisé lorsque le nombre-cible est fabriqué en utilisant les 5 nombres et chacune des 4 opérations soit une addition, une soustraction, une multiplication et une division.

L'enseignant calcule ensuite la moyenne de la classe et la transmet à Canopé.

Contact :
Canopé académie de Besançon - 5 Rue des Fusillés -
BP 1153 - 25003 Besançon Cedex

☏ : **03 81 25 02 50**
🖷 : **03 67 10 10 03**
🖱 : **christel.renaud@ac-besancon.fr**

DES EXEMPLES DE SITUATIONS PROPOSÉES AUX CLASSES

Ennoncé : Nombre-cible 33

Nombres pour calculer 33 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9

- **Solution :**

Quelques solutions faciles :

Solutions en 2 points :
$3 \times 9 + 6 = 33$
$(9 + 2) \times 3 = 33$

Solutions en 3 points :
$(1 + 2) \times 9 + 6 = 33$
$(9 + 6) \times 2 + 3 = 33$

Quelques solutions moyennes :

Solution en 5 points :
$(2 \times 3 + 1) \times 6 - 9 = 33$

Solutions en 6 points :
$(9 - 3) \times 6 - (2 + 1) = 33$
$(9 + 1) \times 3 + 6 : 2 = 33$

Solution en 7 points :
$(2 \text{ x } 6 - 1) \times 9 : 3 = 33$

Mathador en 13 points :

$(9 + 2) \times (6 - 3) :1 = 33$
$(9 + 3 - 1) \times 6 : 2 = 33$
$(6 : 2 + 9 - 1) \times 3 = 33$

Intérêts pédagogiques :
Le critère le plus important dans le choix des tirages Mathador est la diversité des solutions allant de très facile à difficile : chaque élève doit y trouver son compte. Un autre critère important dans le choix des tirages est la recherche d'une progressivité de la difficulté des tirages proposés au cours des 16 semaines de façon à pouvoir « mesurer » des progrès en calcul mental. Pratique de la décomposition des nombres, notamment multiplicative, très importante pour la mise en place du concept de nombres.

La règle avec les points attribués aux opérations incite à complexifier sa solution pour avoir le maximum de points. De plus, le système de points incite à utiliser la soustraction et la division, les deux opérations contraires, que l'on a tendance à mentalement moins utiliser. Cela implique un travail sur le sens des nombres et des opérations ainsi que sur les ordres de grandeur.

D'autre part, ce principe de calcul mental à l'envers avec recherche d'un nombre-cible est un prolongement idéal du calcul mental classique. L'élève est acteur : par les choix de nombres et d'opérations qu'il doit effectuer, cela permet également de travailler le sens des nombres et des opérations.

Enoncé : Nombre-cible 72

Nombres pour calculer 72 : 1 ; 2 ; 7 ; 10 ; 14

Quelques solutions faciles :

Solution en 2 points :
$7 \times 10 + 2 = 72$

Solution en 3 points :
$(10 + 14) \times (1 + 2) = 72$

Quelques solutions moyennes :

Solution en 5 points :
$7 \times 10 + 2 : 1 = 72$

Solutions en 6 points :
$(7 - 1) \times 14 - (10 + 2) = 72$
$(7 - 1) \times 10 + 14 - 2 = 72$

Solution en 7 points :
$(7 - 1) \times 14 - 10 - 2 = 72$

Mathador en 13 points :

$(14 - 7) \times 10 + 2 : 1 = 72$
$(10 + 14) \times (7 - 1) : 2 = 72$
$(14 - 1) \times 10 : 2 + 7 = 72$

Intérêts pédagogiques :
Une des idées de base était de créer et de mettre à disposition des enseignants un outil simple permettant de pratiquer le calcul mental de façon régulière tout au long de l'année scolaire.

Associer avec un travail régulier plus classique de calcul mental automatisé et de calcul mental réfléchi sur l'ensemble de l'année scolaire, ce concours permet d'entretenir et de mettre en application les connaissances apprises.

Le principe de recherche d'un nombre-cible est ludique pour la plupart des élèves. Il contribue à créer une image attractive et positive du calcul mental et du calcul.

Le principe du calcul mental à l'envers n'est pas naturel. De façon à le rendre plus familier pour les élèves, des enseignants proposent en parallèle du concours des entraînements supplémentaires dans la semaine.

Enfin, l'évolution des scores de chaque élève ainsi que la moyenne de la classe sont des indicateurs intéressants pour mesurer d'éventuels progrès en calcul mental.

Pour information, ci-dessous, l'évolution des moyennes des 135 classes de cycle 3 lors du concours 2014/2015 :
Tirage1 : 2,85
Tirage 5 : 3,55
Tirage 9 : 5,43
Tirage 12 : 4,59
Tirage 15 : 5,79

La moyenne des 135 classes pour les 16 tirages est de : 4,51
Pour l'immense majorité des classes, on note une évolution croissante et régulière des moyennes au cours de l'année entre le 1er tirage et le 16e.

- **Prolongements de ce concours :**

Lors du Salon Culture et Jeux Mathématiques de Paris en 2014 puis en 2015, un tournoi de Calcul Mental Mathador a été proposé au public. Cinq défis Mathador étaient proposés aux participants. Le total des points réalisés lors de ces 5 défis a permis d'établir un classement Jeune et un classement Adulte.

En 2015, pour la Semaine des Mathématiques, plusieurs centaines de classes dans toute la France ont participé à un mini-concours par classe mis en place par Canopé National avec 3 défis Mathador proposés dans la semaine à toutes les classes. Le classement par catégorie a été réalisé en tenant compte des moyennes des classes.

Coquillage quaternionique fractal
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

COUPE EUROMATH CASIO

PRÉSENTATION :

La Coupe Euromath des régions est une compétition mathématique unique au monde, dont la finale est une épreuve par équipes se déroulant sur une scène, dans une salle de spectacle et devant un public.
La première phase a pour but de sélectionner les meilleures équipes. Cette phase comporte des épreuves sur table, épreuves individuelles (de type Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques) et épreuves collectives plus variées (comprenant notamment des énigmes de type Championnat des Jeux Mathématiques et des jeux de grille de type Tangente Jeux et Stratégie, ou de type World Puzzle Championship).

A l'issue de la phase qualificative, les deux équipes sélectionnées disputent une finale sur scène.

Les énigmes de la finale sont à résoudre sur des grilles géantes et sont retransmises sur écran. Des exemples simples des énigmes à résoudre sont proposés aux spectateurs, qui suivent la résolution en direct.

Elaborées par les membres du jury de la Fédération Française des Jeux Mathématiques et du CIJM, les épreuves sur scène s'adressent à un ou plusieurs équipiers (voire des équipes complètes) et comprennent
- des jeux de grilles
- des jeux de culture scientifique
- des puzzles
- des épreuves d'estimation
- des jeux de stratégie
- des épreuves de tri.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Juin 2000 : création de la Coupe Euromath dans le cadre du 1er Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques organisé début juin Place Saint- Sulpice à Paris à l'occasion de l'année mondiale des mathématiques.

Mai 2015 : seizième édition d'Euromath.
En 15 ans, la Coupe Euromath a vu la participation d'équipes d'Allemagne, d'Alsace, de Belgique, du Danemark, d'Ile-de-France, d'Italie, du Limousin, du Luxembourg, de Midi-Pyrénées, de Normandie, de Rhône- Alpes, de Suisse, de Tunisie et d'Ukraine.

- **Compétition :**

Fin mai ou début juin, dans le cadre du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques. Les équipes sont sélectionnées par des compétitions mathématiques.

- **Epreuves :**

La compétition est une compétition par équipes qui comporte des épreuves individuelles et des épreuves collectives.
Chaque équipe comprend un élève de l'école élémentaire, un collégien de 1e ou 2e année de collège, un collégien de 3e ou 4e année de collège, un lycéen, un étudiant et un adulte, plus un capitaine (non joueur).

- **Epreuves Qualificatives :**

Il s'agit d'épreuves sur papier, de type Championnat FFJM ou de type Spécial Logique.
Epreuves finales : Elles se déroulent sur scène, devant un public. Des images retransmises sur écran permettent au public de lire les règles des jeux et de suivre en direct la résolutions des énigmes.

- **Partenaires :**

Calculatrices Casio, Editions POLE

- **Contacts :**

CIJM,
11 rue Pierre et Marie Curie 75005 Paris,
☏ : 01 42 77 83 62,
Site Internet : **www.cijm.org**

FFJM
1578 route de Langesse
45290 Varennes-Chanzy
☏: 06 51 86 44 69
🖷 : 09 72 11 05 52
Site Internet : **www.ffjm.org**

UN EXEMPLE DES QUESTIONS POSEES LORS DU CONCOURS

On dispose de boules noires et blanches qui ont été réparties dans des sacs (tous les sacs contiennent deux boules) de telle sorte que les contenus des sacs soient tous différents. Chaque sac porte une inscription censée correspondre à son contenu. Mais celui qui a réalisé ces inscriptions s'est systématiquement trompé, de telle sorte qu'aucune inscription n'est exacte.
Vous pouvez demander que l'on sorte une boule d'un sac que vous désignerez, et recommencer cette opération jusqu'à ce que vous soyez capable de connaître le contenu exact de tous les sacs.
Lorsqu'une équipe pense connaître le contenu de tous les sacs, elle le signale à un arbitre et remet sa réponse, chaque équipe n'ayant droit qu'à une seule réponse.

Enoncé : Les trois sacs

- **Domaine de compétence :**

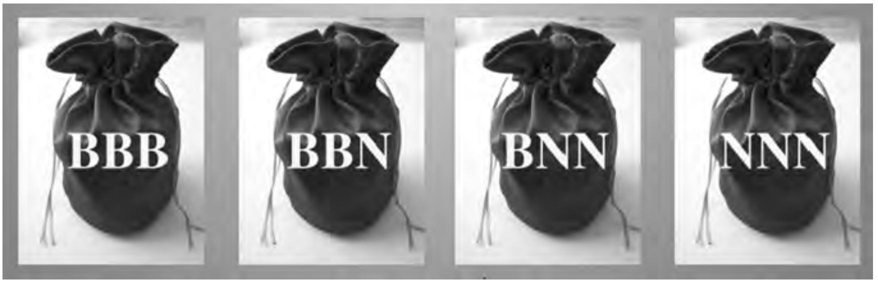
Logique, raisonnement.

- **Analyse de la tâche :**

- Constater que le sac marqué « NB » contient nécessairement deux boules de même couleur et, qu'en connaissant cette couleur, on en déduit immédiatement le contenu des deux autre sacs.

- En déduire qu'il suffit de demander que l'on sorte une boule du sac marqué « NB » pour connaître le contenu des trois sacs.

- **Prolongement : les quatre sacs.**



Le règle est la même, mais ici les sacs contiennent chacun trois boules.

La tâche est ici nettement plus complexe. Il existe en effet 9 façons de répartir les boules de façon que le contenu d'aucun sac ne corresponde à l'inscription qu'il porte.

Une stratégie peut consister à déterminer complètement le contenu d'un sac. Selon le cas, cela peut nécessiter deux ou trois tirages. On est ensuite ramené à un problème avec trois sacs, mais ici il ne suffira pas de sortir une seule boule d'un sac. Il faudra sortir au moins deux boules d'un sac. Ce sac sera choisi en fonction du contenu du sac que l'on aura complétement déterminé au départ.

LES DÉFIS MATHÉMAGIQUES

PRÉSENTATION

Chaque défi propose une activité mathématique destinée aux collégiens de cinquième et de quatrième. Cette activité, au rythme d'une par trimestre, peut faire appel à des connaissances figurant dans les programmes de sixième ou de cinquième ou relever de la culture générale (énigme, tour de cartes à expliquer, ...). Les énoncés sont courts et d'accès facile. Chaque activité comporte un très petit nombre de questions, si possible une seule. En revanche, ces questions sont ouvertes et peuvent, dans toute la mesure du possible, être résolues par des méthodes variées. La tâche demandée aux élèves, recherche et rédaction, se veut d'une durée raisonnable.

Une des principales originalités réside dans le mode de présentation de chaque activité : ce sont les clowns Amédée et Gugusse qui s'en chargent à travers une saynète vidéo d'une durée courte (4 à 7 minutes). Cette saynète est ensuite mise à la disposition des professeurs de l'académie sur le site Planète MATHS de l'Inspection Pédagogique de Mathématiques de Grenoble (site *http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/maths/* ; suivre l'onglet Défis mathémagiques dans Animations mathématiques - colonne de gauche -) et sur celui de l'APMEP (site *http://www.apmep.fr/-Defis-mathematiques-*).

Un document écrit, téléchargeable sur les mêmes sites, accompagne la vidéo ; Les défis antérieurs restent accessibles sur le site *Planète MaTHS* : chacun peut y trouver des ressources originales pour le démarrage d'un cours ou la réalisation d'une activité.

Les activités sont choisies, dans toute la mesure du possible, de sorte que les professeurs de mathématiques de collège qui le souhaiteraient, puissent leur donner un prolongement au-delà de la transmission des réponses. A cette fin, une fiche pédagogique, mettant en évidence des prolongements possibles, est mise à disposition des professeurs.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE :

2011 : Amédée et Gugusse se lancent dans des spectacles de clowns mathématiciens (présence remarquée aux Journées Nationales de l'APMEP à Grenoble en octobre 2011).

Printemps 2013 : lancement du 1er défi mathémagique sur le site Planète MATHS de l'Académie de Grenoble et sur le site de l'APMEP.

COMPETITION :

Chaque défi est à relever dans un temps imparti (environ 6 semaines) ; une évaluation est faite par l'équipe organisatrice, selon des critères annoncés à l'avance, et un palmarès est établi à l'issue des défis de chaque année en cours.

Pour la rédaction des réponses, les élèves, appartenant ou non à la même classe, s'organisent par groupes dont l'effectif est compris entre 2 et 5. La composition des groupes, garantie par le professeur, est fixée pour l'année scolaire. Les réponses des élèves sont envoyées sous la forme d'un fichier attaché à un courriel que le professeur transmet aux organisateurs.

EPREUVES :

3 défis mathémagiques par an.
Résolution par groupes (2 à 5 personnes), dans le cadre d'une classe ou d'un club scientifique.
Niveau : 5^{e} - 4^{e}

PARTENAIRES

Régionale APMEP de Grenoble
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Grenoble
CRDP de Grenoble

CONTACTS

Régionale APMEP de Grenoble

Amédée et Gugusse

Equipe organisatrice :
: **defimathemagique@laposte.net**

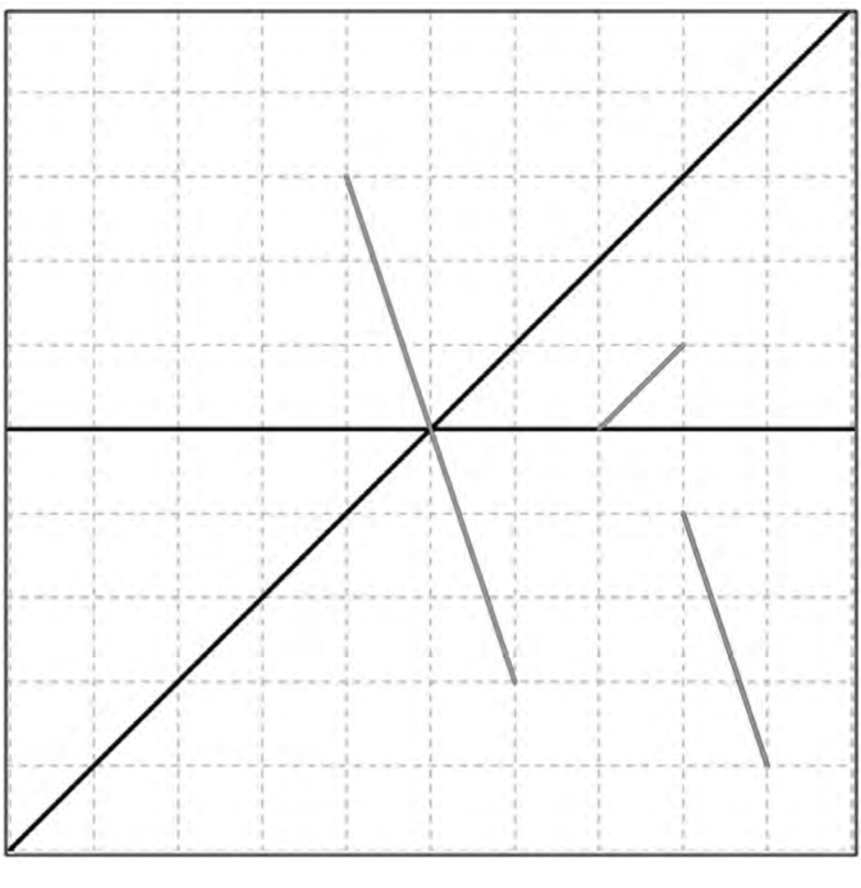
ENONCÉS

Défi n°1

Bonjour les amis,

Comme vous y invitent Amédée et Gugusse, le défi (N°1) consiste à compléter la figure ci-dessous formée de trois segments de sorte que la figure obtenue soit symétrique par rapport à chacune des deux droites noires.
C'est l'aspect mathématique !

La figure obtenue devra ensuite être coloriée, de sorte que deux zones symétriques par rapport à l'une des droites en noir soient de la même couleur.
C'est l'aspect esthétique !



Défi n°4 :

Comme vous y invitent Amédée et Gugusse, le défi (N°4) consiste à résumer, à l'aide de 5 dessins, le message reçu par Amédée et Gugusse (voir ci-dessous). Pour chacun des dessins, vous mettrez en légende la partie correspondante du message décodé.
Votre réponse sera appréciée dans les domaines de l'esthétique et de la communication.

Message codé reçu par Amédée et Gugusse :

JNLE NZD MCE BUNECM, MLTZ DCPD IN MCERN M'LBBNIIN RNRCP.
J'LT NDN ONUGNU ZPU I'TIN ICEGPN. A'NZD PEN TIN R'PE ICTEDLTE LUAHTBNI FULEALTZ ZTDPN LP ZPR RN I'CANLE TERTNE (QPLULEDN-ENPF RNGUNZ RN ILDTDPRN ZPR ND ZCTXLEDN-ENPF RNGUNZ RN ICEGTDPRN NZD), LUAHTBNI TETDTLINMNED LBBNIN TINZ RN IL RNZCILDTCE. JN ZPTZ LIIN IL-OLZ BCPU M'CAAPBNU RN MCPDCEZ TMBILEDNZ ZPU ANDDN TIN BCPU ECPUUTU INZ BNUZCEENIZ RNZ OLZNZ FULEALTZNZ LPZDULINZ : AN ZCED RNZ MCPDCEZ CUTGTELTUNZ RP ALEDLI, RN IL ULAN OTSND, DUNZ LRLBDLOINZ L IL UTGPNPU LPZDULIN. JN BLZZLTZ PEN ZNMLTEN BLU MCTZ ZPU ANDDN TIN LVNA PEN NQPTBN RN 5 ALMLULRNZ BCPU NEDUNDNETU IN DUCPBNLP ND LOLDDUN INZ ONDNZ ENANZZLTUNZ L ECDUN ACEZCMMLDTCE : LH ! ACMMN INPU VTLERN NDLTD RNITATNPZN !
ZLVNS-VCPZ QPN IL ILTEN RP MCPDCE BCPZZN ACEDTEPNIINMNED : NIIN EN DCMON JLMLTZ ND, QPLER CE EN DCER BLZ INZ MCPDCEZ, TIZ BNPVNED RNVNETU TEALBLOINZ RN ZN RNBILANU, DNIINMNED INPU ILTEN GCUGNN R'NLP BNZN ZPU NPX ! ECPZ DCERTCEZ UNGPITNUNMNED INZ MCPDCEZ ND, ACMMN TI NDLTD DUCB RTFFTATIN R'PDTITZNU IL ILTEN CODNEPN, ECPZ RNVTCEZ IL OUPINU.
ND MLTEDNELED J'LBBUNERZ QPN I'CE VL NULRTQPNU ANZ MCPDCEZ RN I'LUAHTBNI : IL FULEAN L RNATRN RN FLTUN RN ANZ TINZ PEN UNZNUVN ELDPUNIIN, RN UNVNETU L IL OTCRTVNUZTDN R'CUTGTEN ND RN ZPBBUTMNU DCPDNZ INZ NZBNANZ TEDUCRPTDNZ LUDTFTATNIINMNED BLU I'HCMMN.
A'NZD IL FTE RN ANDDN ONIIN HTZDCTUN !

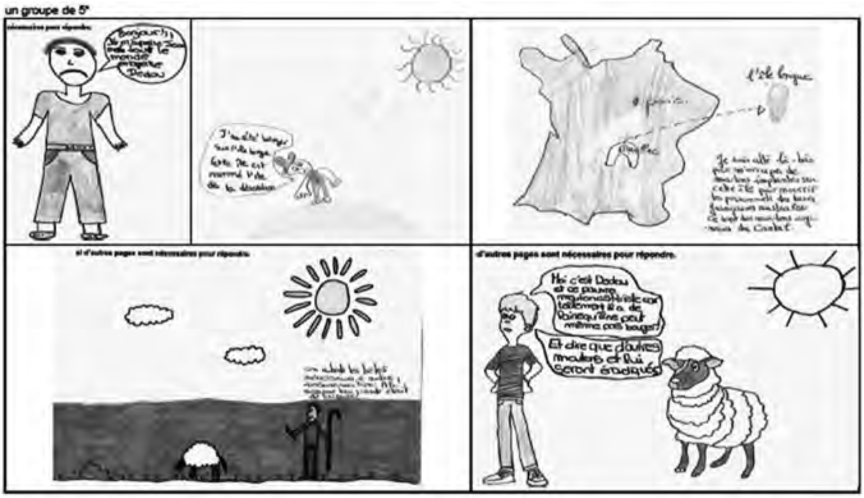
Fréquences d'apparition des lettres dans les textes écrits en français

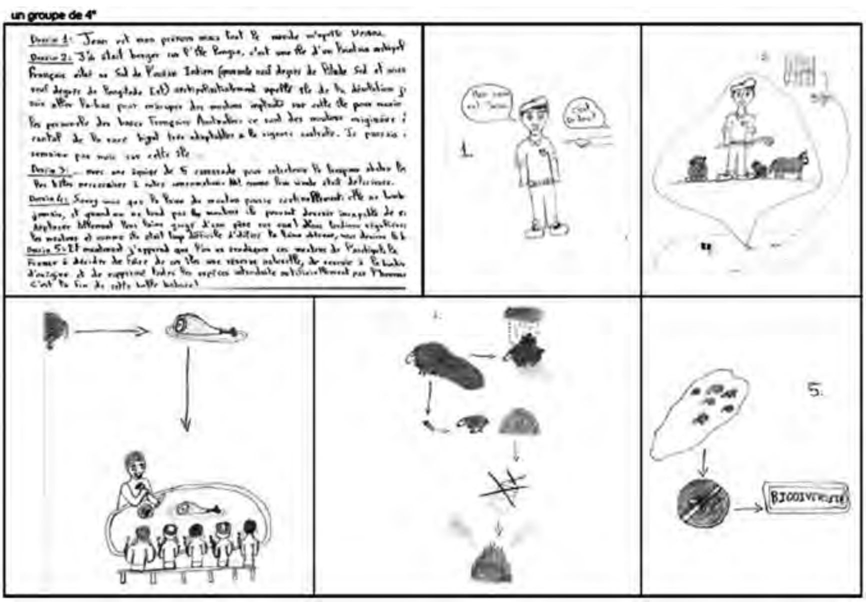
Fréquences d'apparition des lettres

Lettre	Fréquence	Lettre	Fréquence
A	8.40 %	N	7.13 %
B	1.06 %	O	5.26 %
C	3.03 %	P	3.01 %
D	4.18 %	Q	0.99 %
E	17.26 %	R	6.55 %
F	1.12 %	S	8.08 %
G	1.27 %	T	7.07 %
H	0.92 %	U	5.74 %
I	7.34 %	V	1.32 %
J	0.31 %	W	0.04 %
K	0.05 %	X	0.45 %
L	6.01 %	Y	0.30 %
M	2.96 %	Z	0.12 %

- **Réponses :**

Deux exemples de réponses



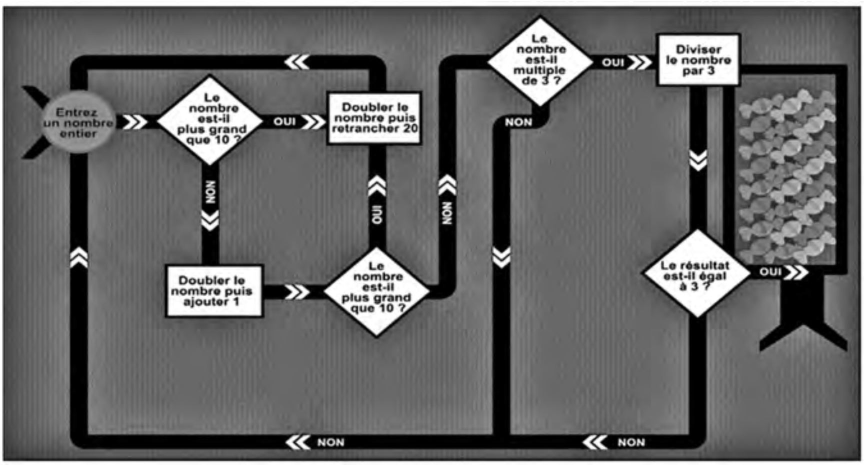


Défi n°6 :

Comme vous y invitent Amédée et Gugusse, le défi (N°6) consiste à déterminer les nombres entiers qu'il faut rentrer dans la machine d'Amédée pour que celle-ci donne une papillote.

Votre réponse peut se présenter sous la forme d'un texte, mais vous pouvez aussi imaginer d'autres modalités. Elle sera appréciée dans les domaines de l'argumentation et de la communication.

Le circuit numérique



- **Réponses :**

Seuls les nombres 4, 9, 12, 16, 18 et 19 donnent une papillote.

Commentaires
Bel exemple mettant en jeu divers types de raisonnement.

LE KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

  25ème année en 2015 – Le 3ème jeudi de mars

Nombre de participants en France : 331 000.
En 2015, 13 000 professeurs dans 4250 établissements ont fait participer 132 000 écoliers, 176 000 collégiens et 33 000 lycéens.

Le kangourou distribue chaque année plus de 500 000 jeux et livres.

- **Compétition :**

Type d'épreuves proposées : Questions à Choix Multiple
Depuis 25 ans, le Kangourou a popularisé, en France, les questionnaires du type QCM, en montrant qu'ils pouvaient être un outil intelligent d'interrogation, d'amusement et d'apprentissage, à condition de …
- ne pas poser des questions « trop » simples,
- bien choisir les 5 réponses proposées de manière à obliger les élèves à résoudre un vrai problème,

- essayer d'anticiper les erreurs possibles et prévoir quelques « pièges » significatifs,
- préférer les questions qui apprennent quelque chose à de simples vérifications de connaissances.

Le Kangourou met à la disposition des professeurs de chaque établissement participant sa base de 4000 questions pour leur permettre de fabriquer leurs propres fiches d'exercices (classés par niveaux et par thèmes).

Chaque année, 150 questions Kangourou, pour les cinq niveaux, sont sélectionnées lors des journées annuelles de l'association Kangourou Sans Frontières, parmi deux mille questions élaborées par les professeurs d'une soixantaine de pays. Ainsi, 7 millions de jeunes réfléchissent, dans le monde, le même jour, aux mêmes questions.

- **Contact :**

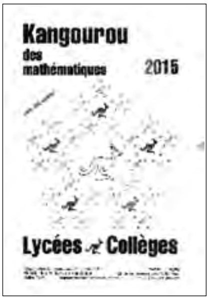
André, Jean-Christophe et Jean-Philippe Deledicq,

☏ 01 46 33 23 54

ACL-Les éditions du Kangourou,
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris.

Site Internet : **www.mathkang.org**

QUELQUES QUESTIONS DU JEU-CONCOURS 2015



Les questions sont numérotées, en France, de 1 à 24, dans l'ordre présupposé de difficulté croissante. Les statistiques de réponses des élèves sont données dans les annales du Kangourou. Nous avons ici choisi celles pour lesquelles les erreurs des élèves se sont avérées les plus étonnantes …

Questions Benjamins (6^e, 5^e)

Enoncé B5 :

Sur une balance, on a équilibré de deux manières les lapins Zap et Zip.

Combien pèse Zap ?

A) 2 kg, B) 3 kg, C) 4 kg, D) 5 kg, E) 6 kg ?

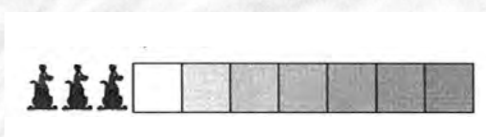
- **Solution :**

B) 3 kg

> ***Commentaires***
> *La bonne réponse (B) n'est donnée que par 20 % des élèves de 5ème, alors que plus de 30% ont donné la réponse A.*

Enoncé B24 :

La figure montre 3 kangourous identiques et 7 cases alignées.
De combien de manières peut-on placer les 3 kangourous dans 3 cases différentes sans avoir 2 kangourous dans 2 cases voisines ?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

- **Solution :** Au total, il y a 10 manières de placer les kangourous comme indiqué.

Commentaires
Sur les 70% d'élèves ayant répondu à la question, le plus petit pourcentage (9 %) est celui des élèves ayant donné la bonne réponse (D).

Questions Cadets (4^e, 3^e)

Enoncé C15 :

60 candidats, sur les 100 candidats présents, ont réussi un test de code de la route. À ce test, la moyenne générale a été de 6.
La moyenne de ceux qui ont réussi est de 8.

Quelle est la moyenne de ceux qui ont échoué ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

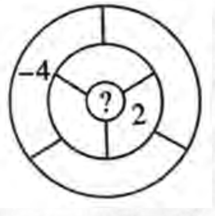
- **Solution :**

La somme des nombres de points obtenus par les candidats est 6 × 100, soit 600. Ceux qui ont réussi totalisent 8 × 60, soit 480 points. Les 40 candidats qui ont échoué totalisent donc 600 – 480 soit 120 points.
Leur moyenne est donc 120/40 , soit 3.

Commentaires
En 4^e, 14% seulement des élèves ont répondu juste (C), tandis que 42 % ont répondu D.

Enoncé C25 :

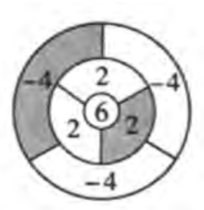
Ce dessin comporte sept régions. Deux régions sont voisines quand elles ont une frontière commune. On veut placer un nombre dans chaque région, en s'arrangeant pour que le nombre dans chaque région soit la somme des nombres de toutes les régions voisines.
Deux nombres sont déjà placés : 2 et -4.



Quel nombre faut-il mettre dans la région centrale ?
A) – 4 B) – 2 C) 0 D) 1 E) 6

- **Solution :**

La solution est montrée ci-contre.



> ***Commentaires***
> *A cette question, 40 % des élèves ne répondent pas ; 16% répondent B, 15 % C et seulement 14% E.*

Questions Juniors (2nde et lycées non S)

Enoncé J14 :

Kangourou a une boîte de 100 bougies. Il en allume une chaque soir et la laisse se consumer. Avec les restes de 7 bougies consumées, il fait une nouvelle bougie entière.

Combien de soirs, au maximum, Kangourou pourra-t-il allumer une bougie entière ?

A) 112 B) 114 C) 115 D) 116 E) 117

- **Solution :**

Avec les restes des 100 bougies de la boîte, comme $100 = 7 \times 14 + 2$, Kangourou pourra faire 14 nouvelles bougies. Ces 14 bougies consumées, il aura $2 + 14$, soit 16 restes, avec lesquels il fera 2 bougies. Il ne lui restera alors que 4 restes qui ne suffisent pas pour faire une bougie entière. Finalement, Kangourou pourra allumer une bougie entière pendant $100 + 14 + 2$, soit 116 soirs.

> ***Commentaires***
> *50 % des élèves ont répondu B à cette question, alors que 17 % seulement ont donné la bonne réponse (D).*

Enoncé J14 :

Pour prendre une décision, Jean dispose d'un dé à six faces sur lesquelles figurent soit « Oui », soit « Non », soit « Peut–être ».
La figure montre ce dé dans trois positions.

Quelle est la probabilité que le jet de ce dé amène un « Oui » ?

A) 1/2 B) 1/3 C) 5/9 D) 2/3 E) 5/6

Solution :
Les trois positions du dé indiquent que le dé a au moins 2 faces « Oui », 2 faces « Non» et une face « Peut-être ». S'il n'y avait que deux « Oui », alors la troisième position serait incompatible avec le dé de la deuxième position : étant donné le sens d'écriture du « Oui », il devrait y avoir « Peut-être » à la place d'un des deux « Non ».
Il y a donc 3 faces « Oui » et la probabilité d'obtenir « Oui » est ½.

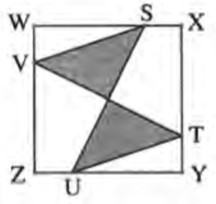
Commentaires
45 % des élèves ont répondu B à cette question, alors que seulement 27 % ont donné la bonne réponse (A).

Enoncé J28 :

Le carré WXYZ a pour aire 16.
Les points S, T, U et V sont sur les côtés de ce carré tels que :
WS =XT=YU=ZV.

Si WS = 3 SX, quelle est l'aire de la partie grisée de la figure ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



Solution :
Le côté du carré $WXYZ$ d'aire 16 vaut 4.
Avec $WX = 4$ et $WS = 3\ SX$, on a donc $WS = 3$ et $SX = 1$.
Par la rotation r d'un quart de tour de centre le centre du carré, on a $r(W) = X$, $r(X) = Y$, $r(Y) = Z$ et $r(Z) = W$, d'où aussi $r(V) = S$, $r(S) = T$, $r(T) = U$ et $r(U) = V$. $VSTU$ est donc un carré et son aire vaut VS^2.
On a alors, par Pythagore : $VS^2 = WS^2 + WV^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.

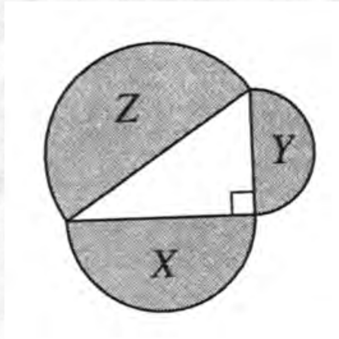
L'aire de la partie grisée est la moitié de l'aire du carré $VSTU$, soit 5.

Commentaires
En seconde, il y a seulement 16 % des élèves donnant la bonne réponse B, autant donnant la réponse C et 40 % ne donnant aucune réponse.

Question Senior ($1^{ère}$ et T, S)

Enoncé S7 :

La figure montre en gris trois demi-disques dont les diamètres sont respectivement les trois côtés d'un triangle rectangle. Si X, Y et Z désignent les aires, en cm2, de ces trois demi-disques.



Laquelle des relations suivantes est nécessairement vraie ?

A) $X + Y < Z$

B) $X + Y = Z$

C) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$

D) $X^2 + Y^2 = Z^2$

E) $X^2 + Y^2 = Z$

Solution :

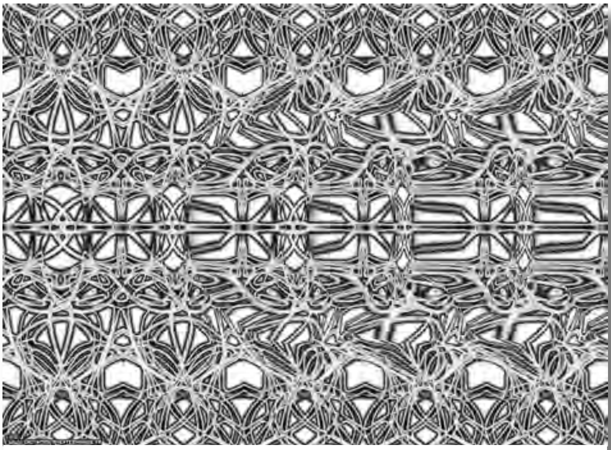
Si x, y et z sont les côtés du triangle rectangle correspondant respectivement aux diamètres des demi-disques d'aires X, Y et Z, on a $x^2 + y^2 = z^2$.

L'aire d'un disque étant proportionnelle au carré de son rayon, les aires X, Y et Z sont proportionnelles à x^2, y^2 et z^2.

Et donc $X + Y = Z$.

Commentaires

Malheureusement, 51 % des élèves de 1ère S et 44 % des élèves Terminale S sont tombés dans le piège tendu par la réponse D ; maigre consolation : 24 % des élèves de Terminale S ont bien répondu et 17 % de 1ère S.



Autostéréogramme d'un volcan caché
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

LE TRAIT DU 6

LES TOURNOIS DE « TOTO » (0+0 = LA TETE A TOTO)
« GENAILLE et LUCAS ou NEPER » ?

Ce tournoi a été présenté, pour la première fois, en juin 2013 à Allonnes (72)
Ecole Jules Ferry (CM2), par l'association « Le trait du 6 »
et a été ensuite repris dans des ateliers au Service Jeunesse.
Il s'adresse à des enfants de 8 à 12 ans (CM1-CM2-6^{e} -5^{e})

OBJECTIFS :

- Faire connaître les anciens outils de calcul,
- indiquer les différentes possibilités de raisonnement pour arriver à un même résultat,
- favoriser le travail en équipe, l'esprit de compétition,
- promouvoir les initiatives et la prise de responsabilités.

PRÉSENTATION

Il s'adresse à des enfants de 8 à 12 ans (CM1-CM2-6^{e} -5^{e}) et peut se dérouler en 1, 2, ou 3 manches. Le capitaine de l'équipe doit anticiper, dynamiser son équipe et choisir entre deux modes de travail : soit chacun effectue l'intégralité des 24 multiplications proposées, soit les multiplications sont réparties sur les différents coéquipiers. Le capitaine rapporte, seul, les résultats de son équipe.

FICHE TECHNIQUE

Durée d'une manche : 1 heure

- Epreuve = 30 minutes
- Mise en route, lecture du règlement, tirage au sort = 15 minutes
- Vérification et rapport des résultats = 15 minutes

Nombre de participants :

Petits groupes de 8 à 10 (maximum) par équipe.

Déroulement :
- Tirage au sort par l'animateur (réglettes de Genaille et Lucas ou réglettes de Néper)

- Chaque équipe de 8 à 10 participants désigne son capitaine.

- Le capitaine remet à chacun de ses coéquipiers une grille de 24 multiplications.

- Le capitaine choisit le mode de travail intégralité ou répartition.
  - Intégralité : chaque participant doit réaliser, seul, les 24 multiplications proposées,
  - Répartition : le capitaine donne à chacun un certain nombre de multiplications à réaliser (possibilité de travail en binôme)

- En fonction du résultat (à 2, 3 ou 4 chiffres), le nombre de points attribués sera de 2, 3 ou 4 points.

- Après 30 minutes, le capitaine doit, sous peine de nullité, ramasser toutes les feuilles puis :
  - vérifier qu'un seul résultat figure dans chaque case,
  - rapporter à l'animateur « le » résultat de chaque opération de : « Les tournois de Toto»

- Le total des points ne peut excéder 90. En cas d'ex-æquo, sera déclarée gagnante l'équipe qui aura obtenu, la première, la réponse juste à toutes les opérations. Une opération (somme) complémentaire pourra être demandée.

Variante :
Possibilité de « déguiser » les montants à multiplier en utilisant une police type « Kitty Cats Tfb », « SakabeAnimal01 », « Webdings », « Wingdings » , « Wingdings 2» , « Wingdings 3 », etc .

Contacts et règlement complet sur le site de l'association *Le trait du 6*
Site Internet : **http://letraitdu6.free.fr**

Le trait d6

Tirets et traits d'union

LA TETE A TOTO
EPREUVE 1/4 DE FINALE

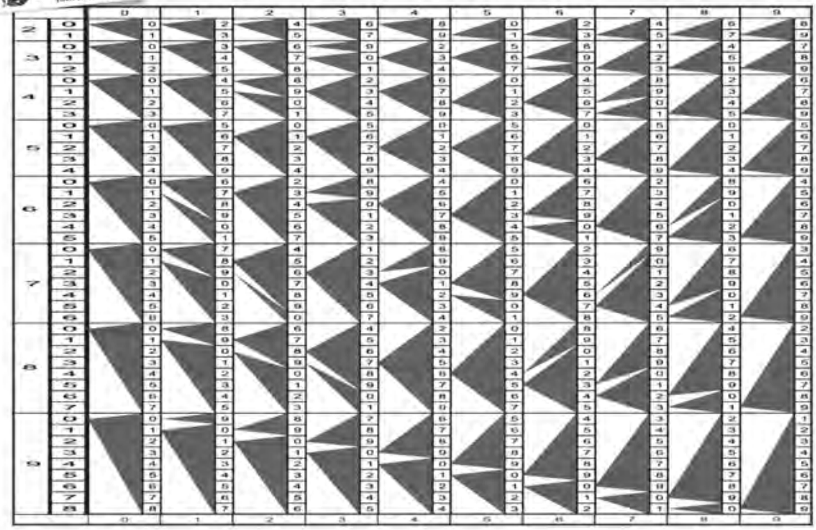
Opération N°	Multiplier	par	inscrire le résultat trouvé	*nbre de points attribués si réponse juste*
1	12	9		*3*
2	45	8		*3*
3	67	8		*3*
4	75	7		*3*
5	98	7		*3*
6	104	7		*3*
7	123	6		*3*
8	218	6		*4*
9	297	6		*4*
10	321	6		*4*
11	342	5		*4*
12	415	5		*4*
13	457	5		*4*
14	489	5		*4*
15	521	5		*4*
16	570	4		*4*
17	657	4		*4*
18	678	4		*4*
19	725	4		*4*
20	825	3		*4*
21	978	3		*4*
22	983	3		*4*
23	2548	2		*4*
24	9647	2		*5*
TOTAL				*10*

Le trait d6
Tirets et traits d'union

Table de conversion	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	□	🗗	◀	▶	▲	▼	⏪	⏩	⏮	_

LA TETE A TOTO EPREUVE 1/4 DE FINALE						
Opération N°	Multiplier	Par	Conversion Multiplier	Par	inscrire le résultat trouvé	*nbre de points attribués si réponse juste*
1	□ 🗗	⏮				*3*
2	▶ ▲	⏩				*3*
3	▼ ⏪	⏩				*3*
4	⏪ ▲	⏪				*3*
5	⏮ ⏩	⏪				*3*
6	□ _ ▶	⏪				*3*
7	□ 🗗 ◀	▼				*3*
8	🗗 □ ▶	▼				*4*
9	🗗 ⏮ ⏪	▼				*4*
10	[illegible] 🗗 □	▼				*4*
11	[illegible] ▶ 🗗	▲				*4*
12	▶ □ ▲	▲				*4*
13	▶ ▲ ⏪	▲				*4*
14	▶ ⏩ ⏮	▲				*4*
15	▲ 🗗 □	▲				*4*
16	▲ ⏪ _	▶				*4*
17	▼ ▲ ⏪	▶				*4*
18	▼ ⏪ ⏩	▶				*4*
19	⏪ 🗗 ▲	▶				*4*
20	⏩ 🗗 ▲	◀				*4*
21	⏮ ⏪ ⏩	◀				*4*
22	⏮ ⏩ ◀	◀				*4*
23	🗗 ▲ ▶ ⏩	🗗				*4*
24	⏮ ▼ ▶ ⏪	🗗				*5*
TOTAL						*10*

Réglettes de Genaille et Lucas



Réglettes de Neper

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	0/0
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0/0
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0/0
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	0/0
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	0/0
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	0/0
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	0/0
8	0/9	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	0/0
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	0/0
0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0

Commentaires

Les réglettes (ou bâtons) de « Genaille et Lucas » (1885) et « Neper » (1617) sont destinées à effectuer rapidement des multiplications à un ou plusieurs chiffres.

Les premières ont un aspect beaucoup plus séduisant, et sont beaucoup plus ludiques. Très faciles d'utilisation (lecture directe des résultats), les réglettes de Genaille et Lucas permettent une approche sympathique des multiplications, de 1 à xxxxx chiffres. Les enfants se prennent rapidement au jeu.

Les réglettes de Neper (ou Napier), quant à elles, beaucoup plus pédagogiques permettent de mémoriser les tables de multiplication. Elles permettent la compréhension de la retenue et, reprenant la table de Pythagore, développent la réflexion et la concentration. Une fréquente utilisation, ainsi que la nécessité de trouver rapidement les résultats, permettent la mémorisation des tables de multiplication en sollicitant la mémoire visuelle.

Pour les multiplications à plusieurs chiffres, on procèdera de façon traditionnelle, en posant le résultat du nombre multiplié par le chiffre de l'unité, puis en décalant vers la gauche le résultat du nombre multiplié par le chiffre des dizaines, etc.

Ces réglettes n'étant pas encore utilisées régulièrement dans le milieu de l'enseignement traditionnel, nous n'avons aucun retour de la part des enseignants.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES JUNIOR

UNE COMPETITION VRAIMENT INTERNATIONALE

PRÉSENTATION :

Mathématiques sans frontières junior est une compétition entre classes de CM2 et de sixième en France et de niveaux équivalents à l'étranger. Toutes les classes participent le même jour sur le même sujet, cependant les palmarès et remises des prix relèvent d'une organisation par secteur. En France, les inspections pédagogiques régionales des académies participantes se chargent d'organiser la compétition.

Née en 2004, elle fonctionne comme sa grande sœur « Mathématiques sans frontières » qui s'adresse depuis plus de 25 ans aux classes de troisième et seconde.
La participation n'a cessé d'augmenter et en 2014, 2489 classes ont participé à Mathématiques Sans Frontières Junior, permettant à 60000 élèves de composer sur le même sujet, dans une trentaine de pays !

Une équipe de professeurs des premier et second degrés de l'académie de Strasbourg est chargée de la création des sujets : 8 exercices pour les CM2 et 1 de plus pour les sixièmes, l'énoncé du premier exercice est donné en allemand, anglais et en arabe. Chaque année, une épreuve d'entraînement est proposée aux participants pour préparer l'épreuve finale.

Epreuves, corrigés et rapports de jury sont consultables sur le site. Pour permettre aux enseignants d'utiliser plus facilement les exercices, ils sont sélectionnables grâce à une classification par plusieurs entrées : les notions du programme, les domaines mathématiques, les stratégies mises en œuvre, etc.

La compétition s'adresse aux classes entières et ne demande qu'une réponse par classe et par exercice : cela favorise donc la participation de tous, l'esprit d'équipe, l'initiative des élèves. La difficulté graduée et les thèmes variés des exercices permettent à tous les élèves d'une même classe d'apporter leur contribution et chacun peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Une classe de CM2 et une classe de sixième peuvent choisir de s'associer pour concourir ensemble dans la catégorie jumelage favorisant une liaison inter-degrés vivante, effective et initiant des échanges de pratique professionnelle constructifs et appliqués. Ce mode d'inscription est depuis quelques années très plébiscité : plus de la moitié des classes le choisissent !

Cette compétition permet de renforcer la liaison inter-degrés, d'ouvrir des frontières entre la France et les autres pays, entre les établissements, entre les mathématiques et les langues étrangères et entre les élèves d'une même classe !

Contacts :

: **msfju@ac-strabourg.fr**

Site Internet : **http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/**

Un sujet comporte toujours une épreuve en langue étrangère. L'épreuve suivante a été donnée avec un énoncé en anglais (ci-dessous), un énoncé en allemand et un énoncé en arabe.

EQUILATERAL TRIANGLES (EXTRAIT DE LA FINALE 2012)

Enoncé :

Analyse de l'épreuve (extrait du rapport du jury)

La solution détaillée est sur le site Internet :

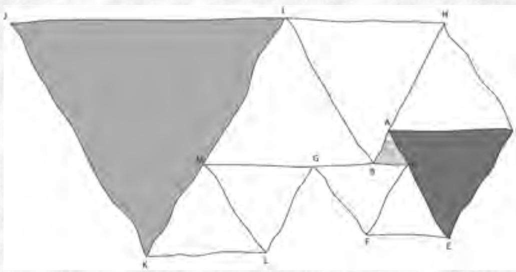
http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/

This figure is composed of 10 equilateral triangles.

The length of the side of the red triangle (ABC) is 2 cm.

The length of the side of the blue triangle (ADE) is 7 cm.

What is the length of the side of the green triangle (JIK) ?



La réponse doit être faite dans l'une des trois langues et cette modalité a été respectée par 80% des classes.
La plupart des classes entrent dans le problème (peu de non réponses).
Toutefois beaucoup élèves utilisent des procédures fausses :

- mesures directement faites sur la figure ;
- proportionnalité en cherchant à obtenir les mesures du grand triangle à partir du petit ;
- collage pour superposer les figures (et non les côtés).

De plus, une proportion non négligeable répond par la mesure du périmètre et non par la mesure du côté du triangle. Une incompréhension du mot side, une confusion entre périmètre et côté ou, plus finement, l'idée qu'on mesure un triangle par ses trois côtés et non par un seul pour les triangles équilatéraux ?

Cette épreuve cumulait des difficultés qui expliquent les échecs.
Ainsi dans le domaine de la géométrie, l'utilisation de schémas à main levée est assez peu courante. De plus, l'interaction entre raisonnement géométrique (utilisation des propriétés des triangles) et raisonnements numériques (certes simples car additifs) rendait cette résolution complexe.

De même, dans le domaine de la mesure, le fait que la figure ne soit pas à taille réelle n'a pas été considéré par plus de la moitié des classes qui ont mesuré directement sur l'énoncé.

Enfin, l'utilisation de la proportionnalité a été vraisemblablement incitée par la forme de l'énoncé : sa présentation favorisait une procédure additive, procédure la plus naturelle chez nombre d'élèves de CM2 et de 6^{e}.

Dans le même ordre d'idée, le sujet de la proportionnalité est souvent d'actualité en classe, au moins en CM2, à cette période (mars). Le recours à la procédure de la proportionnalité : un effet de contrat didactique ?

Cet exercice illustre un fait que l'on retrouve fréquemment lors de la résolution de problèmes de MSF Junior, à savoir que, plus que le niveau des savoirs en jeu, c'est la mobilisation de savoirs pertinents et leur instanciation (articulation dans une démarche sensée et adapté au « circonstances » de l'énoncé) qui ont été génératrices de difficultés.

Un sujet comporte une ou plusieurs épreuves pour lesquelles est proposée une annexe composée de pièces à découper, une manière à favoriser la manipulation

CIRCUIT AUTOMOBILE (EXTRAIT DE LA FINALE 2009)

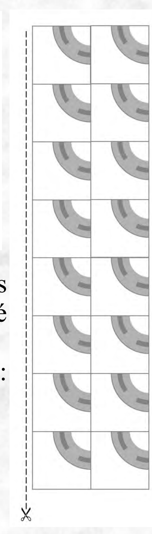
Analyse de l'épreuve (extrait du rapport du jury)

La solution détaillée est sur le site Internet :

http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/

Pour construire un circuit automobile, Tomi possède 16 tapis carrés identiques sur lesquels un morceau de route est imprimé (voir pièces sur l'annexe).
Il les pose côté contre côté. Il peut construire 3 circuits fermés :
un avec 4 tapis,
un avec 12 tapis,
un avec 16 tapis.

Colle ces trois circuits.



Pour répondre à cette épreuve, une seule annexe ne suffisait pas, il fallait penser à mutualiser les sujets.

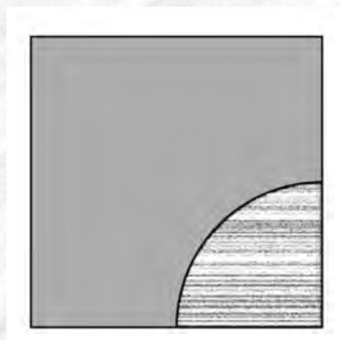
Le circuit automobile a été réussi dans sa grande majorité (90% des classes).

Les erreurs sont principalement des circuits non fermés ou non terminés. Il semble que le fait d'avoir fourni un nombre de pièces insuffisant par sujet ait créé quelques rares perturbations.

BULLES DE SAVON (EXTRAIT DE LA FINALE 2011)

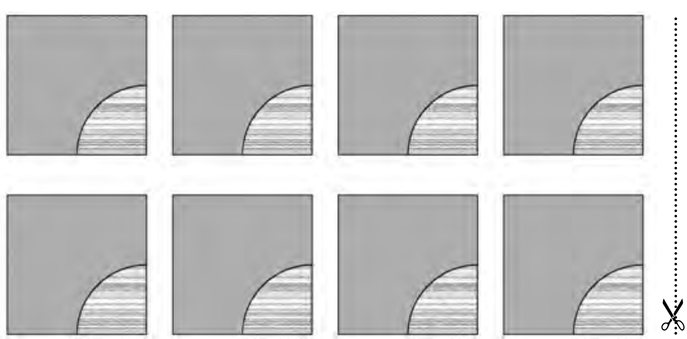
Enoncé :

Théo veut faire une fresque carrée sur le mur de sa salle de bain en assemblant 4 carreaux identiques à celui-ci (voir ci-dessous).



Sa femme souhaite que le dessin ait 2 axes de symétrie.

Colle les 6 fresques qu'il pourrait faire.



Analyse de l'épreuve (extrait du rapport du jury)
La solution détaillée est sur le site Internet :
http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/

Cette épreuve a été peu réussie.
Les erreurs relevées sont de deux natures :
- forte proportion de réponses oubliant une ou plusieurs conditions avec une « fresque » non carrée, plus de 4 motifs de base, un seul axe de symétrie (le plus fréquent) ;
- oubli d'une réponse car une des réponses est doublée, la fresque étant simplement pivotée.

Un des premiers éléments d'explication est que cette épreuve se situe dans un domaine de compétences moins bien maîtrisé en général : la géométrie (cf. Evaluation Nationale CM2 et les constats effectués par les enseignants). Une des trois conditions sur le motif utilisait la notion d'axe de symétrie, qui de plus est double. Cette une notion est encore diversement maîtrisée.
Un second élément se retrouve dans la forme de l'énoncé. Le mot fresque a induit une difficulté, mais c'est surtout dans la mise en forme des conditions que résidait la difficulté : les conditions sont disséminées dans l'énoncé, de natures différentes et complexes : double axe de symétrie !
Enfin, cet exercice réclamait une exhaustivité des réponses. Ce type de consignes génère des difficultés, les élèves ayant du mal à trouver toutes les réponses ou à les discriminer.

Un sujet comporte, depuis 2013, une épreuve sans données suffisantes pour obtenir une réponse exacte. Il s'agit pour les élèves de proposer des valeurs « raisonnables » à utiliser pour permettre d'obtenir une estimation de la réponse demandée.

AUX MAÎTRES PRÈS (EXTRAIT DES ÉPREUVES DE DÉCOUVERTE DE 2013

Enoncé :

Pour estimer la longueur de la clôture de leur école, les élèves des 8 classes de l'école Fermi la longent en se donnant la main.

Avec l'aide de leurs professeurs, ils arrivent tout juste à fermer la boucle.

Donne ton estimation (en mètres) de la longueur de la clôture de l'école.

Explique ton raisonnement.

RANGÉS À PEU PRÈS (EXTRAIT DE LA FINALE DE 2013)

Enoncé :

Les élèves des 4 classes d'une école se rangent 2 par 2 en attendant leur bus.

Donne ton estimation (en mètres) de la longueur de ce rang. Explique ton raisonnement.

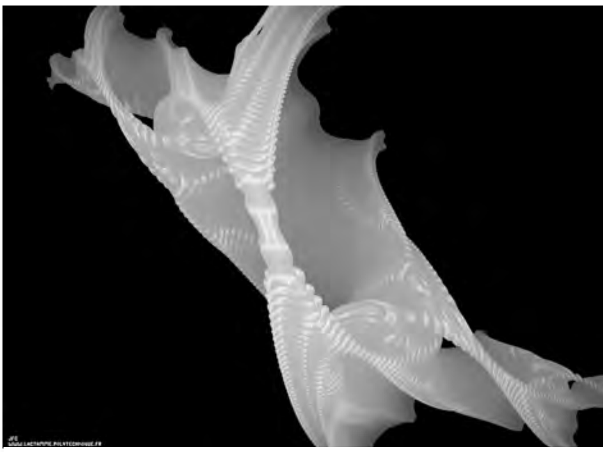
Analyse de l'épreuve « rangé à peu près » (extrait du rapport du jury)
Les solutions détaillées sont sur le site Internet :
http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/

Cette épreuve était une nouveauté en 2013, cette situation avait été anticipée en proposant un problème similaire dans l'épreuve de découverte (sujet ci-dessus) et d'une note spécifique à cet exercice en direction des enseignants.

Malgré cette précaution, 20 % des classes n'ont pas formulé de réponse ou ont traité le problème comme si les données suffisaient, faisant des opérations, souvent sans rapport avec la situation, utilisant 2 et 4 (seules données chiffrées de l'énoncé) pour essayer de tomber sur un résultat plausible. Ce type de comportement est induit par un contrat didactique ! Hormis ces classes, les élèves ont plutôt bien compris la situation et ont souvent effectué une approximation. Les difficultés inhérentes à la résolution de problème (comprendre la situation, effectuer un raisonnement simple, vérifier que le résultat est plausible entre autres) se repèrent dans les productions d'élèves.

C'est surtout un manque de maîtrise des mesures de longueur qui ont causé le plus d'erreurs, notamment leur manipulation soit pour des conversions, soit pour des opérations. Un constat qui rejoint d'autres indicateurs : la mesure pose une problématique particulière dans l'enseignement des mathématiques.

Un axe dans la formation des enseignants mais aussi dans la réflexion des concepteurs de la compétition ?



L'ensemble de Julia dans le corps des quaternions
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

PRESENTATION

Concours organisé par le Ministère de l'Education Nationale, destiné à développer le goût des mathématiques, de la recherche et de l'esprit d'initiative, à favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et à permettre aux élèves d'aborder les problèmes mathématiques de manière ouverte, en autorisant des approches originales. Il s'adresse à tous les lycéens de première de toutes séries (plus de 20 000 candidats), y compris les lycées français à l'étranger.

Les candidats s'inscrivent en février par l'intermédiaire de leur établissement scolaire. Les connaissances nécessaires sont basées sur les programmes de collège et de seconde, complétées par les parties communes des programmes des différentes classes de première.

Dans chaque académie, une cellule établit un palmarès et organise une remise des prix. Les meilleures copies sont transmises à un jury national pour une remise de prix nationaux, début juin.

Dans certaines académies (Versailles, Rouen, Amiens, Corse, Lyon, Grenoble, Caen), d'autres Olympiades Académiques ont été créées à l'intention des élèves de quatrième. Il existe même, dans l'académie de Versailles, une Olympiade Académique par équipes à l'intention des élèves de troisième et seconde.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Créées en novembre 2000, ouvertes à toutes les séries de première depuis 2005. Puis, l'académie de Versailles a eu l'initiative des Olympiades de Quatrième (2006) et des Olympiades de Troisième et Seconde par équipes (2014).

- **Epreuves :**

Olympiade de première : individuelle, durée quatre heures (mi mars). Quatre exercices dont deux communs à toutes les académies, deux autres choisis par la cellule académique.

Olympiade de quatrième : individuelle, durée deux heures (début avril). Quatre exercices.

Olympiade de seconde et troisième : par équipes de trois, durée deux heures (début avril). Trois ou quatre exercices.

- **Contact :**

Site Internet :
http://eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-nationales-de-mathématiques.html

Annales (Olympiades de première) publiées par l'APMEP.

OLYMPIADE DE PREMIÈRE
EXERCICE NATIONAL, 2011

Enoncé : Essuie-glace (les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brise sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment $[OB]$. Soit A le point de $[OB]$ tel que $OA = 15$ cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment $[AB]$ (voir figure 1). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm² près.

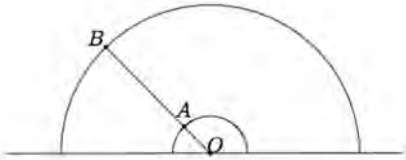


Figure 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments $[OB]$ et $[O'B']$ de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

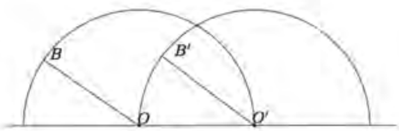


Figure 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3) : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment $[OC]$ qui relie le centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4 \times CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.

Figure 3

(a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

(b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que $[MN]$ est horizontal (voir la figure 4 page suivante). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment $[OM']$ est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

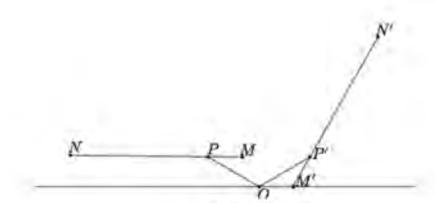


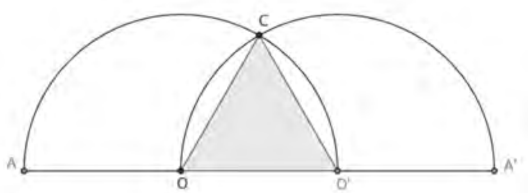
Figure 4

- **Solutions :**

1) L'aire cherchée est : $\frac{1}{2}\left(\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2\right) = 3375 \times \frac{\pi}{2}$ cm², soit 5301 cm² (valeur arrondie au cm² près).

2) L'aire essuyée par les balais est la somme des aires des secteurs angulaires *AOC* et *CO'A'* et du triangle équilatéral *COO'*. Or $\widehat{AOC} = 120°$, donc le secteur angulaire AOC a pour aire $\frac{\pi R^2}{3}$, tout comme le secteur angulaire CO'A'. Le triangle équilatéral COO' a pour base R et pour hauteur $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

En définitive, l'aire cherchée est : $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.



3)

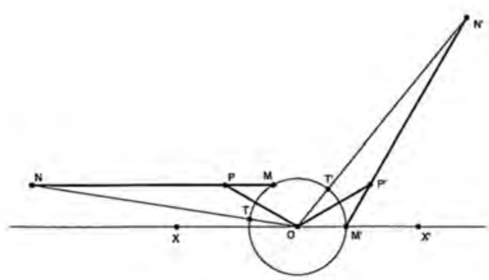
a) Soit *H* le pied de la hauteur *AH* du triangle *AOC*. .

$CH = CA \times \mathbf{cos}\,30° = a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}CO$, donc le triangle *AOC*, dont la hauteur est aussi médiane, est isocèle.

b) L'angle dont a tourné le dispositif est $\widehat{MOM} = 180° - \widehat{XOM}$. Or, $\widehat{MOP} = \widehat{MPO} = \widehat{XOP} = 30°$ donc $\widehat{MOM'} = 120°$.

La surface essuyée par les balais est délimitée par les segments [*MN*] et [M'N'] et les arcs de cercle *MM'* et *NN'*. Or la portion de plan délimitée par les segments [*TN*], [*NM*] et l'arc de cercle *TM* a la même aire que celle délimitée par les segments [*T'N'*], [*N'M'*] et l'arc de cercle *T'M'* : elles se déduisent l'une de l'autre par rotation. Donc l'aire cherchée est la même que celle délimitée par les segments [*TN*], [*T'N'*] et les arcs de cercle *NN'* et *TT'*, soit $\frac{\pi}{3}\left(ON^2 - OT^2\right)$. Or $OT^2 = a^2$ et si *K* est la projection orthogonale de *O* sur (*MN*), $OK = OP \times \mathbf{sin}\, 30° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $NK = NP + OP \times \mathbf{cos}\, 30° = 4a + \frac{3}{2}a$,
donc $ON^2 = OK^2 + NK^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{121}{4}a^2 = 31a^2$.
En définitive, l'aire cherchée est $10\pi a^2$.

On peut aussi dire que si l'essuie-glace décrivait un tour complet, il essuierait toute la surface comprise entre les cercles de rayon *ON* et de rayon *OM*, soit : $\pi\left(ON^2 - OM^2\right) = 30\pi a^2$.
Puisqu'il tourne d'un tiers de tour, il essuie le tiers de cette surface.



Commentaire et développement
A la différence des problèmes d'Olympiades Internationales, ceux-ci ont des énoncés longs et progressifs. Ils s'adressent à un public plus vaste et doivent donc comporter des premières questions aisément abordables. On remarquera par ailleurs que les aires calculées aux questions 1), 2) et 3) peuvent difficilement être comparées l'une à l'autre.

OLYMPIADE DE PREMIÈRE
Exercice 4 – Lyon 2012

Enoncé : duels tétraédriques

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.

Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?

2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.

(a) Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

(b) Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.

3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.

(a) Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.

(b) Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?

4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées a_1, a_2, a_3, a_4 avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées b_1, b_2, b_3, b_4 avec $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées c_1, c_2, c_3, c_4 avec $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, celui de Diane a des faces numérotées d_1, d_2, d_3, d_4 avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$.

Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraédrique ne se retrouve sur un autre dé tétraédrique. Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.

(a) Montrer que, si $a_2 \leq b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

(b) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?

(c) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$?

- **Solution :**

1) Antoine (probabilité $\frac{3}{4}$), alors que Diane, Cyril et Baptiste ont pour pro babilités $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ et 0 respectivement.

2)

a) Antoine gagne contre Baptiste si et seulement si il obtient 6, ce qui a pour probabilité $\frac{3}{4}$.

b) Baptiste gagne contre Cyril si et seulement si Cyril obtient 3 (probabi lité $\frac{3}{4}$). Cyril gagne contre Diane si et seulement si : soit il obtient 8 (pro babilité $\frac{1}{4}$), soit il obtient 3 et Diane 2 (probabilité $\frac{3}{8}$), donc la probabi lité totale est $\frac{5}{8}$. Et Diane gagne contre Antoine si et seulement si : soit Antoine obtient 1 soit Antoine obtient 6 et Diane 7 (même probabilité $\frac{5}{8}$).

On remarquera que chacune de ces quatre probabilités est supérieure à $\frac{1}{2}$.

3)

a) Baptiste gagne si et seulement si Antoine obtient 1, Cyril 3 et Diane 2, ce qui a pour probabilité : $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{32}$.

b) Antoine gagne si et seulement si il obtient 6, Cyril 3 et Diane 2 (probabilité $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{32}$). Diane gagne si et seulement si elle obtient 7 et Cyril 3 (probabilité $\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$). Cyril gagne si et seulement si il obtient 8 (probabilité $\frac{1}{4}$). On a bien la somme des probabilités $\frac{3}{32}+\frac{9}{32}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$ et c'est Diane qui a le plus de chances de gagner ce jeu.

4)

a) Puisque $a_2 < b_2$ (ils ne peuvent pas être égaux), il suffit pour que Baptiste gagne qu'il obtienne b_2, b_3 ou b_4 alors qu'Antoine obtient a_1 ou a_2 : probabilité $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{32}$.

La probabilité qu'Antoine gagne est donc inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

b) D'après la question précédente, une telle situation nécessiterait que $a_2 > b_2$, $b_2 > c_2$, $c_2 > d_2$, $d_2 > a_2$, donc $a_2 > a_2$, ce qui est impossible. De tels dés ne peuvent donc pas exister.

c) D'après la question (2), les dés du départ conviennent presque (les probabilités sont d'ailleurs toutes quatre supérieures ou égales à $\frac{5}{8}$). Il suffit de changer le dé de Baptiste pour que la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste et Baptiste contre Cyril soient chacune égale à $\frac{5}{8}$ et non $\frac{3}{4}$. Antoine doit pouvoir perdre contre Baptiste quand il obtient 6, donc $b_4 > 6$. La probabilité qu'il obtienne 6 et gagne contre Baptiste n'est plus alors qu'au maximum $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}<\frac{5}{8}$. Il doit donc pouvoir gagner contre Baptiste quand il obtient 1, donc $b_1 < 1$. On vérifie aisément que si le dé de Baptiste a pour faces 0, 4, 5, 9 par exemple, Antoine a une probabilité $\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$ de gagner contre Baptiste, et Baptiste a la même probabilité de gagner contre Cyril. Donc les dés (1, 6, 6, 6), (0, 4, 5, 9), (3, 3, 3, 8), (2, 2, 7, 7) répondent à la question.

Commentaires :
Les calculs sont plus ou moins pénibles selon la manière de traduire numériquement les questions posées. On peut par exemple envisager des arbres à 256 branches, ou des arbres à 16 branches quand chaque dé ne prend que deux valeurs distinctes.

La quatrième question semble déroutante de prime abord, elle nécessite des raisonnements ingénieux et conduit à un résultat intéressant.

OLYMPIADE DE QUATRIÈME
EXERCICE 4 – LYON 2014

Enoncé : Nul en Maths

Madame Mathix a une classe de 30 collégiens vraiment exceptionnels.

Elle affirme qu'en maths, la moyenne de ses élèves est supérieure à 13 (c'est-à-dire la somme des trente notes divisée par 30). Un journaliste vient visiter le collège et constate que chaque élève de cette classe aime faire du ski ou jouer au foot.

Certains élèves aiment même les deux sports, mais aucun élève n'aime ni l'un ni l'autre.

Le journaliste s'intéresse surtout aux notes des élèves en maths et remarque que la moyenne des amateurs de foot est inférieure ou égale à 10. Il calcule alors la moyenne des amateurs de ski et obtient de nouveau un résultat inférieur ou égal à 10.

Il affirme donc que Madame Mathix lui a menti : la moyenne de la classe ne peut pas être supérieure à 13.

Décider si l'on peut être sûr que Madame Mathix a menti.
Si oui, donner une justification.
Si non, trouver pour chaque élève de la classe une note en maths (entre 0 et 20) et un ou deux sports favoris (parmi ski et foot) qui montrent que Madame Mathix peut tout à fait avoir raison.

- **Solution :**

Supposons que dix élèves n'aimant que le foot ont tous 20 en maths, dix élèves n'aimant que le ski ont également tous 20 en maths, tandis que dix élèves aimant à la fois le ski et le foot ont tous 0 en maths (si l'on fait trop de sport, on n'a plus de temps pour les maths).

Dans ce cas, la moyenne des amateurs de foot vaut :

$$(20+20+20+20+20+20+20+20+20+20+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0)/20 = (20\times10)/20 = 10$$

et la moyenne des amateurs de ski vaut également 10. La moyenne de toute la classe, cependant, vaut :

$$(20+...+20+0+...+0)\,/\,30=(20\times 20)\,/\,30=13,333...$$

et Madame Mathix peut tout à fait avoir raison.

Commentaires :

Les méthodes de résolution d'un tel problème sont très différentes selon que la réponse est « oui » ou « non ». Il importe donc aussi vite que possible de « deviner » la bonne réponse car on perd beaucoup de temps si l'on part dans la mauvaise direction.

OLYMPIADES INTERNATIONALES MATHÉMATIQUES

HISTORIQUE

Chaque année, une centaine de pays envoient une équipe de six élèves de moins de 20 ans n'ayant pas entamé leurs études supérieures. Les épreuves consistent en deux séances de 4 heures et demie comportant chacune trois problèmes notés sur 7 points. Les énoncés sont courts, sans indications ni questions intermédiaires, dans l'un des thèmes parmi algèbre, arithmétique, combinatoire, géométrie (à noter l'absence de l'analyse et des probabilités). La solution demande surtout de l'ingéniosité, et non d'avoir assimilé des techniques standard.

À l'issue de la compétition, 1/12 des participants reçoivent une médaille d'or, 2/12 une médaille d'argent et 3/12 une médaille de bronze.

Mentionnons également qu'il existe de **nombreuses autres compétitions** du même type.
La France participe depuis quelques années :
aux Olympiades Européennes pour Filles (EGMO)
et aux Olympiades Balkaniques Juniors (réservées aux élèves de moins de 15,5 ans).

Préparation et mode de sélection des équipes :

Au sein de l'association Animath, l'Olympiade Française de Mathématiques (OFM) prépare et sélectionne les équipes de la manière suivante :

1) En début d'année scolaire, tout élève scolarisé entre la quatrième (exceptionnellement cinquième) et la terminale peut s'inscrire sur le site Animath (www.animath.fr) au test d'entrée de l'OFM qui se déroule début octobre. À l'issue de ce test, une centaine d'élèves sont sélectionnés (les sujets pour les collégiens diffèrent de ceux des sujets pour lycéens, et de plus les barres d'admission diffèrent selon que l'élève est scolarisé en seconde, première ou terminale).

2) Ces élèves sont alors invités à suivre une préparation par correspondance comportant des envois mensuels d'exercices et des tests.

3) En février, 30 à 40 élèves participent à un stage d'une semaine.

4) À l'issue de plusieurs tests de sélection, les équipes pour les diverses compétitions sont constituées.

En outre, indépendamment des sélections pour les Olympiades Internationales, Animath organise :

La Coupe Animath, compétition ouverte à tous les élèves entre la quatrième (exceptionnellement cinquième) et la première, qui se déroule début juin. Suite à cette compétition, 60 à 80 élèves sont invités à participer à un stage d'été de 10 jours fin août, pendant lequel ils sont initiés aux mathématiques olympiques.

Un stage junior à la Toussaint, ouvert aux élèves de collège ou de seconde. La sélection pour ce stage s'effectue sur dossier.

Public concerné.

Les derniers tests de sélection ont attiré de l'ordre de 500 candidatures, pour la plupart de très bon niveau. Les stages et la formation continue concernent plus de 150 élèves par an. De par leur nature, les exercices olympiques ne sont accessibles qu'à une petite élite, représentant au plus quelques élèves de chaque établissement. Soulignons cependant que des élèves exceptionnels proviennent régulièrement de tous les horizons, tant du point de vue géographique que social, et pas seulement des « grands lycées ».

Renseignements et contact

: **olymp@animath.fr**

Site Internet : **http://www.animath.fr**

EXEMPLE DE PROBLÈME DES OLYMPIADES INTERNATIONALES

Enoncé :

On dit qu'un ensemble fini S de points du plan est équilibré si, pour tous points A et B de S distincts, il existe un point C de S tel que $AC = BC$. On dit que S est excentrique si, pour tous points A, B et C de S distincts, il n'existe pas de point P de S tel que $PA = PB = PC$.

a) Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.

b) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

- **Solution :**

a) Si n est impair, alors les sommets d'un polygone régulier à n côtés forment un ensemble équilibré et excentrique. Si n est pair, l'ensemble $\{O, A_0, A_1, \dots A_{n-2}\}$ avec $A_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3(n-2)}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{3(n-2)}\right)\right)$ est équilibré mais non excentrique.

b) On montre qu'il existe un ensemble équilibré et excentrique de cardinal n si et seulement si n est impair. Le sens direct ayant été montré dans la partie a), il reste à voir que s'il existe un ensemble équilibré excentrique S de cardinal n alors n est impair.

Comme S est excentrique, un cercle centré en un point A de S passe par au plus 2 points de S.
Pour toute paire non ordonnée $\{A,B\}$ de points, choisissons un cercle $C_{A,B}$ centré en un point de S qui passe par A et B. De ce qui précède, on en déduit que si $\{A,B\}$ et $\{A',B'\}$ sont deux paires distinctes, alors $C_{A,B} \neq C_{A',B'}$. Par conséquent, il existe au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles centrés en un point de S et passant par deux points de S.

Si n était pair, alors pour tout point $A \in S$ il existerait au plus $\frac{n-2}{2}$ cercles centrés en A et passant par deux points de S, donc il y aurait au total au plus $\frac{n(n-2)}{2}$ cercles.

Commentaires :
Ce problème était le plus “facile” parmi les trois problèmes de la première journée d'épreuve, et nécessitait très peu de connaissances. Néanmoins, seuls 265 candidats sur les 577 (dont 4 français sur 6) ont obtenu la note maximale.

La partie a) est probablement abordable pour de très bons élèves peu entraînés, mais la partie b) nécessitait un peu d'habitude de la technique de “double comptage”'.

EXEMPLE DE PROBLÈME DE LA COUPE ANIMATH 2014

Enoncé :

Trouver tous les couples de chiffres (a,b) tels que l'entier dont les quatre chiffres sont $ab32$ soit divisible par 99.

- **Solution :**

Soit n l'entier formé par les deux chiffres ab. On cherche a et b de sorte que $100n + 32$ soit divisible par 99.

Or, $100n + 32 = n + 32 + 99n$, donc la condition équivaut au fait que $n + 32$ soit divisible par 99.

Or, $0 \leq n \leq 99$, donc $32 \leq n + 32 \leq 131$. L'unique entier entre 32 et 131 qui est divisible par 99 étant 99, la seule solution est $n = 99 - 32 = 67$, c'est-à-dire $a = 6$ et $b = 7$.

Commentaires :
Cet exercice est le deuxième parmi les quatre que devaient résoudre les collégiens en trois heures. On pouvait également le résoudre en utilisant les critères de divisibilité par 9 et par 11 : en effet, la condition de divisibilité par 11 donne que b – (a+1) est divisible par 11, ce qui impose que b = a + 1 puisque b et a + 1 sont compris entre 0 et 10. Ensuite, la condition de divisibilité par 9 donne que a + b + 3 + 2 = 2a + 6 = 2(a + 3) est divisible par 9, ce qui impose que a = 6 puis b = 7.

Dans tous les cas il nécessitait quelques compétences sur les manipulations algébriques. Sur les 79 copies rendues, la moyenne obtenue était de presque 5 points sur 7, ce qui montre le bon niveau des élèves s'étant présentés au concours.

EXEMPLE DE PROBLÈME DU TEST D'ENTRÉE DE L'OFM 2013

Enoncé :

Soit A, B, C et D quatre points distincts dans le plan. Il se trouve que tout cercle qui passe par A et B rencontre tout cercle qui passe par C et D.

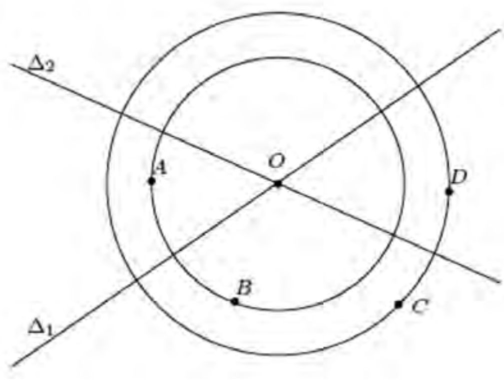
Prouver que A, B, C et D sont alignés ou qu'ils sont tous sur un même cercle.

- **Solution :**

Par l'absurde : supposons que les quatre points ne soient ni alignés ni cocycliques.

Soit Δ_1 la médiatrice de $[AB]$, et Δ_2 celle de $[CD]$.

S'il existe un point O commun à Δ_1 et Δ_2 : on note Γ_1 le cercle de centre O et de rayon OA, et Γ_2 le cercle de centre O et de rayon OC.



Bien entendu, on a $A, B \in \Gamma_1$ et $C, D \in \Gamma_2$

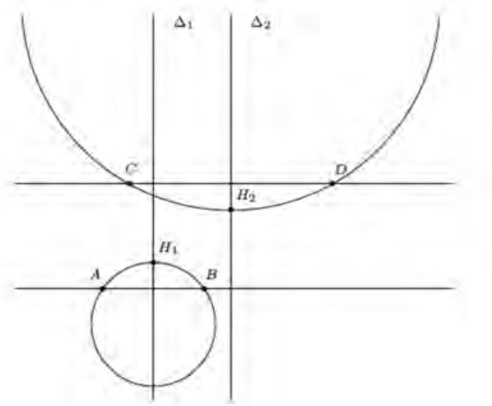
On ne peut avoir $OA = OC$ sans quoi les cercles Γ_1 et Γ_2 seraient confondus et les points A, B, C, D seraient cocycliques, en contradiction avec notre hypothèse.

Donc, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont concentriques et de rayons différents. Mais alors, on a trouvé un cercle qui passe par A et B, et un cercle qui passe par C et D, qui ne se rencontrent pas. Cela contredit les données de l'énoncé.

On en déduit que les droites Δ_1 et Δ_2 n'ont pas de point commun, et sont donc parallèles. Par suite, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (et distinctes, puisque les quatre points sont supposés non alignés).

Soit $d > 0$ la distance entre les droites (AB) et (CD). Soit H_1 le point de Δ_1 situé dans la bande délimitée par (AB) et (CD) et à une distance $\frac{d}{4}$ de (AB). Le point H_2 est défini de façon analogue vis-à-vis de (CD).

Alors, les cercles Γ'_1 et Γ'_2, qui passent respectivement par les points A, B, H_1, et par les points C, D, H_2 ne se rencontrent pas, ce qui contredit à nouveau les données de l'énoncé.



Et finalement, les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

Commentaires :

Ce problème est assez éloigné des types de problèmes de géométrie que l'on rencontre habituellement aux Olympiades Internationales, car il ne nécessite que très peu de connaissances et de techniques de géométrie synthétique. Néanmoins, il permettait de détecter les élèves ayant de bonnes facultés de raisonnement géométrique, qui seraient aptes par la suite à assimiler les notions nécessaires.

Cet exercice est le sixième parmi les huit exercices que devaient résoudre les candidats en quatre heures (plusieurs exercices étaient nettement plus abordables que celui-ci). Le score moyen obtenu à cet exercice était de 1 point sur 7, ce qui montre le peu d'aisance de la plupart des élèves avec la géométrie.

Le cas particulier où A, B, C sont supposés alignés est nettement plus abordable.

Voici une esquisse de solution : on peut supposer que (AB) est l'axe des abscisses. Si D appartient au demi-plan ouvert supérieur, considérer un cercle passant par D et tangent en C à (AB), et un cercle de grand rayon, passant par A et B, dont le centre est sur le demi-plan inférieur.

Le cas particulier implique en fait quasi-immédiatement l'exercice grâce à une inversion qui transforme le cercle ABC en une droite ; cependant les inversions sont quasiment inconnues des élèves français en dehors du monde olympique.

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

1 Historique et présentation

L'Olympiade Mathématique Belge (OMB) est née en 1976 et est organisée annuellement par la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française (SBPMef). Depuis 2004, elle compte entre 26000 et 28000 participants provenant d'environ 350 écoles de l'enseignement secondaire belge francophone et luxembourgeois. En 2015, pour sa quarantième édition, la barre des 700000 participations a été franchie. Au regard d'une population de cinq millions d'habitants, il ne fait aucun doute que l'OMB rencontre un très grand succès.

Depuis 1996, trois catégories de participants existent : la catégorie miNi pour le premier degré de l'enseignement secondaire (12-14 ans), la catégorie miDi pour le second degré (14-16 ans) et la catégorie maXi pour le troisième degré (16-18 ans).

L'organisation de la compétition nécessite un énorme bénévolat. On estime à plus d'un millier le nombre de professeurs de mathématiques participant à la surveillance et à la correction de l'épreuve. Cette épreuve a lieu le mercredi après-midi ; demi-jour de congé dans l'enseignement belge.

La première partie, les éliminatoires, se déroulent le second mercredi de janvier suivant les congés de Noël et Nouvel An. Ils se déroulent dans les écoles des participants et sont corrigés par les professeurs de ces écoles. Ils sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 22 sont à choix multiple (une bonne réponse parmi cinq) et 8 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999.

Dans chacune des dix zones géographiques où la compétition a lieu, 12% des participants environ ont accès à la demi-finale. Celle-ci est organisée par les secrétaires régionaux dans dix universités ou écoles de ces régions au mois de mars, peu après le congé de Carnaval. Les questionnaires sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 15 sont à choix multiple (une bonne réponse parmi cinq) et 15 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999. Les secrétaires régionaux envoient les résultats des participants au secrétaire national en vue de la sélection pour l'épreuve finale.

La finale a lieu peu après le congé de Pâques à l'université de Namur et regroupe entre 110 et 115 participants. Elle est surveillée et corrigée par les membres du jury national. Elle est constituée de quatre questions ouvertes dont les réponses sont à justifier en détail.

Enfin, au mois de mai, a lieu alternativement, dans les universités de Bruxelles, Liège, Louvain-la-Neuve, Mons et Namur, la proclamation des résultats des trois catégories et la remise des prix offerts par la SBPMef ainsi que divers mécènes. Le prix Willy Vanhamme pour la réponse la plus élégante à un des problèmes de la finale y est offert. Les identités des participants francophones de l'équipe belge pour l'olympiade internationale y sont aussi annoncées.

Le jury national est constitué d'une vingtaine de membres. Ils sont enseignants, inspecteurs et conseillers pédagogiques de tous les réseaux de l'enseignement secondaire ou des Hautes Écoles ou Universités belges et luxembourgeoises. Ce jury compose les questionnaires de toutes les étapes de la compétition. Les membres du jury effectuent, chaque année, bénévolement, plusieurs dizaines d'heures de travail pour le bon déroulement de la compétition.

2 Motivation et coordonnées

L'OMB poursuit le triple but d'intéresser les élèves aux mathématiques par le biais d'une compétition passionnante, de mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation scolaire et de fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Les exercices de l'OMB sont libres de droits à condition de mentionner qu'ils proviennent de cette compétition. Plusieurs manuels belges de mathématiques puisent d'ailleurs dans cette réserve d'exercices.

Tous les quatre ans, la SBPMef publie un recueil des questions de quatre olympiades. Le dernier (2011-2014) constitué par Pascal Dupont et Michel Sebille est disponible auprès de la SBPMef aux coordonnées suivantes :

SBPMef
24 rue du onze novembre
7000 Mons
Belgique

`http://www.sbpm.be` (SBPMef)
`http://omb.sbpm.be` (OMB)

3 Problème 1 (finale maXi 2014)

3.1 L'énoncé

Les Babeleirs [1] parlent la babelangue, qui s'écrit au moyen d'un alphabet de deux lettres, A et B. Les mots de leur lexique sont tous ceux qui découlent des règles suivantes, et uniquement ceux-là :

R1. Le mot d'une seule lettre B appartient au lexique.

1. Ceci ne fait absolument pas référence à la tour de Babel. En bruxellois, babeleir désigne une personne qui parle vraiment beaucoup voire beaucoup trop.

R2. Si un mot du lexique contient un B, le mot obtenu en remplaçant ce B par ABA appartient aussi au lexique.

R3. Si un mot du lexique contient deux A successifs, alors le mot obtenu en les remplaçant par un B appartient aussi au lexique.

R4. Si un mot du lexique contient deux B successifs, alors le mot obtenu en les supprimant appartient aussi au lexique.

1. Le mot AA appartient-il au lexique de la babelangue ?
2. Le mot AAA appartient-il au lexique ?
3. Le mot vide (formé de zéro lettre) appartient-il au lexique ?
4. Le mot $BABA$ appartient-il au lexique ?
5. Décrire l'ensemble des mots du lexique comportant exactement deux B.
6. Combien y a-t-il de mots de n lettres dans le lexique de la babelangue ?

3.2 Une solution

Cette solution est due au participant Pablo Bustillo Vazquez.

1. $B \xrightarrow{R2} ABA \xrightarrow{R2} AABAA \xrightarrow{R3} AABB \xrightarrow{R4} AA$.
2. Montrons qu'un mot de babelangue contient toujours un nombre pair de A. On commence avec le mot B qui en contient 0, c'est-à-dire un nombre pair. Mais la règle $R2$ ajoute 2 lettres A, $R3$ en enlève 2 et $R4$ n'en modifie pas le nombre. Aucune règle ne permet donc de modifier la parité du nombre de A. Le mot AAA ne peut ainsi appartenir au lexique.
3. $B \xrightarrow{R2} ABA \xrightarrow{R2} AABAA \xrightarrow{R2} AAABAAA \xrightarrow{R3} BABAAA \xrightarrow{R3} BABBA \xrightarrow{R4}$ $BAA \xrightarrow{R3} BB \xrightarrow{R4} \phi$.
4. Le point (3) nous a montré que le mot $BABBA$ appartient au lexique. $BABBA \xrightarrow{R2} BABABAA \xrightarrow{R3} BABABB \xrightarrow{R4} BABA$
5. Commençons par démontrer la réciproque de $R3$. Partons d'un mot contenant un B.
   $\ldots B \ldots \xrightarrow{R2} \ldots ABA \ldots \xrightarrow{R2} \ldots AABAA \ldots \xrightarrow{R3} AABB \xrightarrow{R4} \ldots AA \ldots$
   Ainsi, en appliquant un certain nombre de fois $R2$ puis la réciproque de $R3$, on peut obtenir tout mot composé exclusivement d'un nombre pair de A.
   On peut choisir toute paire de A consécutifs et les remplacer par un B en vertu de $R3$. Dès lors, les mots recherchés sont tous les mots composés de deux B et d'un nombre pair de A. Au point (2), on a bien vu qu'il n'y en a pas d'autre.
6. On a vu au point précédent que les mots de n lettres du lexique sont ceux composés d'un nombre pair de A. Il y a 2^{n-1} manières de choisir les $n-1$ premières lettres du mot La dernière est alors A ou B selon que les $n-1$ premières contiennent un nombre impair ou pair de A. Le lexique contient donc 2^{n-1} mots de n lettres.

3.3 Analyse du problème

Lors de la sélection de ce problème, une discussion plus longue qu'à l'habitude a eu lieu entre les membres du jury. Ce problème est-il plutôt simple ou plutôt compliqué ? Il n'est en effet pas nécessaire de connaître beaucoup de mathématiques pour trouver la solution. Si, au premier abord, cela indiquerait qu'il est « facile », il peut aussi apparaitre plus difficile pour ceux qui préfèrent des problèmes plus « classiques ».

Au final, et bien mal lui en a pris, le jury a placé le problème en première position ; considérant ainsi qu'il était le moins difficile des quatre proposés. Après correction, il s'est avéré que ce problème à recueilli à la fois le plus grand nombre de réponses à la cote maximale et la moyenne la plus faible des quatre questions de la finale. Plus encore, certains des participants terminant parmi les premiers de la finale ont obtenu de mauvais résultats sur cette question.

Le fait que le problème ne fasse pas explicitement référence à une matière mathématique a pleinement joué un rôle d'élévation de la difficulté. Il n'est ici pas possible de faire référence directement à des résultats bien connus pour avancer dans la résolution. Ce « saut dans l'inconnu » a été préjudiciable à un quart des participants qui n'ont parfois même pas répondu complètement aux premières sous-questions pourtant faciles à première vue.

Une autre caractéristique est que les élèves de 5ème année (16-17ans) ont mieux réussi ce problème que les élèves de 6ème année (17-18 ans). En Belgique, la combinatoire se voit en sixième année. Pour un élève de cette année d'étude, il est dès lors tentant de répondre à la sous-question (6) en utilisant la (5) et les coefficients binomiaux. Le nombre de mots de n lettres est alors, selon la parité de n,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}$$

ou

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1}.$$

Ils ont clairement vu que ce ne pouvait être la réponse finale et que ces expressions devaient être simplifiables. Elles le sont effectivement en 2^{n-1}. Ils avaient donc assez de connaissances en combinatoire pour obtenir une expression à l'aide des coefficients binomiaux, mais pas assez pour obtenir la réponse finale. Les élèves de cinquième année, n'ayant pas connaissance des coefficients binomiaux, ont plus naturellement trouvé une solution plus simple.

À ce titre, la réflexion intuitive la plus simple consiste à se dire que puisqu'un mot de n lettres contient un nombre impair ou pair de B, ils se répartissent peut-être selon une proportion moitié-moitié. Les petits cas faisables à la main convainquent alors définitivement de la justesse de cette intuition.

4 Problème 1 (finale miNi 2014)

4.1 L'énoncé

Nicole a effectué une division écrite au crayon. Pour l'ennuyer, Jules gomme grossièrement quelques chiffres et les remplace par des lettres. Ci-dessous se trouve l'opération ainsi maltraitée.

1. Le chiffre des unités peut-il être 3 ? 6 ?
2. Quel aurait pu être le calcul de Nicole ? Justifier chaque remplacement de lettre par un chiffre. S'il y a plusieurs solutions, envisager toutes les solutions.

$$
\begin{array}{ccccccl|l}
A & B & C & 9 & 4 & & & 2\,3\,D\,E \\ \cline{8-8}
F & G & H & I & & & & 1\,2 \\ \cline{1-4}
 & J & K & L & M & & & \\
 & N & O & P & Q & & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3 & 0 & & &
\end{array}
$$

4.2 Une solution

Cette solution est inspirée de celles des participants Nicolas BEYNE, Quentin CLAUS et Vincent THIELENS. Pour sa solution, Nicolas BEYNE a reçu le prix Willy VANHAMME récompensant la solution la plus élégante de la compétition toutes catégories confondues.

1. Dans une division euclidienne,

   $$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}.$$

   Ici, dividende−reste $= ABC94 - 30 = ABC64$. Donc le produit diviseur× quotient, c'est-à-dire $23DE \times 12$, vaut $ABC64$. Son chiffre des unités est 4. Or le chiffre des unités de $23DE \times 12$ ne dépend que du chiffre des unités de $E \times 2$. Si E, le chiffre des unités du diviseur, valait 3, le chiffre des unités de $23DE \times 12$ serait $3 \times 2 = 6$ et pas 4. Si E valait 6, $E \times 2$ vaudrait 12 donc le chiffre des unités de $23DE \times 12$ serait 2 et pas 4. Par conséquent, le chiffre des unités du diviseur ne peut pas être 3 ni 6.

2. Rappelons que $23DE \times 12 = ABC64$. Si D et E étaient chacun 0 (le plus petit chiffre), le produit $23DE \times 12$ vaudrait 27600. Si D et E étaient chacun 9 (le plus grand chiffre), le produit $23DE \times 12$ vaudrait 28788. Le produit $23DE \times 12$ est donc compris entre ces deux nombres. Nous cherchons les multiples de 12 compris entre 27600 et 28788 et qui s'écrivent $ABC64$. Ils commencent soit par $AB = 27$, soit par $AB = 28$. De plus, les multiples de 12 sont toujours des multiples de 3. En utilisant le critère de divisibilité par 3, nous trouvons que si $AB = 27$, C doit être 8 et que si $AB = 28$, C doit être 1, 4 ou 7.

   Nous avons donc trouvé les quatre seules valeurs possibles pour le dividende $ABC94$: 27894, 28194, 28494 et 28794. Il suffit alors de leur soustraire le reste 30 et de diviser chaque résultat par le quotient 12 pour trouver les quatre valeurs possibles pour le diviseur : 2322, 2347, 2372, 2397. Les autres remplacements de lettres par des chiffres s'obtiennent à partir du dividende et du diviseur en effectuant la division écrite :

$$\begin{array}{r|l} 27894 & 2322 \\ \cline{2-2} \underline{2322} & 12 \\ 4674 & \\ \underline{4644} & \\ 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28194 & 2347 \\ \cline{2-2} \underline{2347} & 12 \\ 4724 & \\ \underline{4694} & \\ 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28494 & 2372 \\ \cline{2-2} \underline{2372} & 12 \\ 4774 & \\ \underline{4744} & \\ 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28794 & 2397 \\ \cline{2-2} \underline{2397} & 12 \\ 4824 & \\ \underline{4794} & \\ 30 & \end{array}$$

4.3 Analyse du problème

Comme souvent, produire des questions pour la catégorie d'âge la moins élevée n'est pas aisé. Les participants de première année commencent seulement l'apprentissage des justifications. Ils ne maîtrisent donc pas tous ce domaine qui les mènera au concept de démonstration. Plus encore, l'école primaire peut parfois formater les mathématiques d'une manière qui ne convient pas à l'enseignement secondaire. Certains participants ne se sont parfois pas encore défait de ce formatage.

L'un de ces formatage malheureux est que l'élève peut sortir de l'école primaire en étant convaincu qu'un problème mathématique ne possède qu'une seule et unique solution. Conscient de ce travers, le jury a décidé de rédiger la question en précisant qu'il était possible d'en avoir plusieurs. Cela n'a malheureusement pas suffit et la moitié des participants n'en a donné qu'une seule. Si cela ne signifie pas nécessairement qu'il n'ont pas envisagé l'existence d'autres solutions, il est clair que c'est là un problème qui n'est pas anodin.

L'OMB remet chaque année un prix d'élégance. Il est rare qu'il soit attribué en catégorie miNi pour la simple raison que des élèves peu habitués aux démonstrations ont du mal à en rédiger une et donc, a fortiori, encore plus à en rédiger une élégante. La raison pour laquelle Nicolas Beyne l'a reçu est qu'il s'est aperçu (et il était le seul) que ce problème à 17 inconnues (de A à Q) était en réalité un problème à 5 inconnues (de A à E) et l'a résolu en utilisant ces cinq variables seulement et en plus sans recourir à la structure du calcul écrit, mais uniquement à celle de la division euclidienne.

Les autres participants ont en effet résolu cette question en remplaçant les chiffres les uns après les autres en commençant évidemment par le fait que $M = 4$ et en continuant lettre après lettre en respectant la structure d'un calcul écrit.

La preuve ultime, s'il en est besoin, que des élèves de cet âge-là ne sont pas du tout au fait des standards de la démonstration est que sept participants sur les quarante ont justifié les remplacements des lettres par des chiffres correctement, mais par ordre alphabétique ; la correction des copies étant rendue ainsi assez pénible.

RALLYE BOMBYX
Rallye mathématique de Ganges et de l'académie de Montpellier

PRÉSENTATION

Le rallye Bombyx, organisé par l'Association Rallye Bombyx (Ganges - Hérault), est ouvert à tous les élèves de l'académie de Montpellier en Collège ainsi qu'aux élèves de CM2 des secteurs scolaires des Collèges participant à la compétition. Son objectif est de donner aux élèves le goût pour la recherche de problèmes mathématiques, l'intérêt pédagogique majeur étant de leur faire appréhender les mathématiques autrement, l'aspect ludique de la compétition et l'émulation qu'elle produit permettant d'avoir plaisir à faire des mathématiques. Ainsi, le rallye mathématique Bombyx « *participe à la vitalité de l'enseignement des mathématiques dans l'académie et constitue un moyen de motivation* » (Cf. la Lettre de rentrée 2013 des I.A.-I.P.R. de math.). Par ailleurs, le rallye Bombyx s'inscrit dans l'action académique de promotion et de développement des mathématiques suivant le plan académique mis en place pour les années 2013-2016.

HISTORIQUE

Ce rallye mathématique organisé pour la première fois en 1988-1989 par les Professeurs de Mathématiques du collège de Ganges, a pris son nom définitif en 1999. Le nombre de concurrents progressait rapidement pour atteindre les 5 056 en 2007-2008 pour le 20^{e} Bombyx, puis 5 023 pour le 22^{e} Bombyx, 5 032 en 2012-2013 pour le 25^{e} anniversaire de la compétition et enfin 5 301 pour le 26^{e} Bombyx en 2013-2014 ! On peut noter que ces élèves proviennent d'une cinquantaine d'établissements de l'académie, 53 précisément en 2013-2014.

FICHE TECHNIQUE

- **Compétition :**

  Nombre de participants : entre 5000 et 5400.

  Niveaux d'études : CM2, 6^{e} , 5^{e} , 4^{e} , 3^{e}.

Type d'épreuves proposées : les épreuves, au nombre de trois sur l'année, sont individuelles et durent entre 1h et 1h30. Le nombre de participants à la première épreuve n'obéit à aucun quota ; pour la deuxième, ne participent que 50% des élèves précédents ; et pour la troisième épreuve, le nombre de participants est limité à 210. Quatre à six problèmes à résoudre pour chaque épreuve.

- **Fréquence**

- *quarts de finale* dans tous les établissements le **20 janvier 2014, entre 8h et 17h**.
- *demi-finales* le **20 mars 2015, entre 8h et 12h30.** Chaque établissement sera assuré d'avoir un minimum de deux représentants en finale.
- *finale académique* le **21 mai 2015 de 10h30 à 12h** au Collège Louise Michel de Ganges.

- **Partenaires**

L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques, l'I.R.E.M. de Montpellier, le Comité International de Jeux Mathématiques.

Le Rectorat de l'académie de Montpellier, la Régionale A.P.M.E.P. de Montpellier, le Foyer coopératif du collège Louise Michel.

Le Conseil Général de l'Hérault, la Ville de Ganges, les Communes de Agonès, Brissac, Causse de la Selle, Cazilhac, Laroque, Saint Bauzille de Putois, Saint Martin de Londres, Sumène.

CASIO®, Math en Main, Art Culture Lecture – Éditions du Kangourou.

Contact

Rallye math. Bombyx - Collège Louise Michel - Place Jules Ferry - 34190 GANGES

☎ **04.67.73.81.01**

🖷 **04.67.73.88.01**

🖰 **bombyx@ac-montpellier.fr**

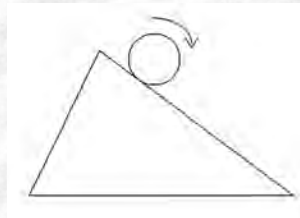
Site Internet : **http://rallye-bombyx.asso-web.com**

Énoncé : Ça roule ! « Y a qu'à observer »

Un disque de diamètre 10 cm roule à l'extérieur d'un triangle de périmètre 120 cm, sans glisser et en gardant toujours un point de contact avec le triangle.

a) Complète la figure pour visualiser la région balayée par le disque lorsqu'il a fait un tour complet du triangle.

b) Calcule l'aire de cette région (en cm²). Si besoin, on utilisera obligatoirement 3,14 pour valeur approchée du nombre   à l'exclusion de toute autre valeur donnée par une calculatrice.



- **Niveau scolaire :**

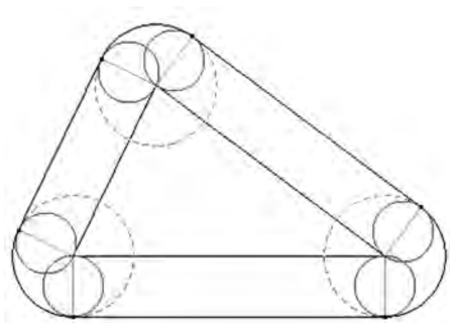
Élèves de 3^e.

- **Domaines de compétence :**

Aires des figures usuelles rencontrées au collège (disque, rectangle,…)
Représentation géométrique tirée d'une manipulation expérimentale ou d'un raisonnement.
Factorisation.

- **Solution :**

a) La région balayée par le disque lorsqu'il a fait un tour complet du triangle est visible sur la figure ci-dessous



On observe que cette région est constituée de trois secteurs circulaires qui, assemblés, forment un disque de rayon 10 cm (10 cm étant le diamètre du disque qui roule autour du triangle) et de trois rectangles de largeur 10 cm et dont la somme des longueurs a pour mesure le périmètre du triangle, soit 120 cm.

b) Le calcul de l'aire de cette région est le suivant :

$\pi \times 10^2 + 120 \times 10 = 100 \times (\pi + 12) \simeq$ **1514 cm²**.

Analyse succincte :
On a observé chez les élèves qui ont visualisé la région balayée par le disque une proportion d'environ un quart qui ont tracé un triangle dont les trois côtés sont parallèles à ceux du triangle autour duquel tourne le disque, à une distance de 10 cm de celui-ci. Les trois quarts des élèves qui ont répondu à cette question ont bien visualisé les trois arcs de cercle aux trois « coins ».
La difficulté de la question b réside d'une part dans la reconnaissance des trois secteurs circulaires dont l'assemblage forme un disque : cela suppose une représentation correcte de la rotation du disque autour de chaque sommet du triangle et une observation attentive des angles au centre des trois secteurs circulaires dont la somme mesure 360°.
D'autre part, il s'agit de mettre en application une connaissance algébrique sur la factorisation qui permet d'écrire que la somme des aires des trois rectangles est égale à :
$10a + 10b + 10c = 10(a + b + c) = 10x120$ *, où a, b, c sont les mesures des côtés du triangle en centimètre.*

Énoncé : Éclipse d'un ennéagone

Combien y a-t-il de diagonales en plus
dans un polygone régulier à 10 côtés
que dans un polygone régulier à 9 côtés ?

- **Niveau scolaire :**

Élèves de 5e.

- **Domaines de compétence :**

Dénombrement et vocabulaire de géométrie plane.

- **Solution :**

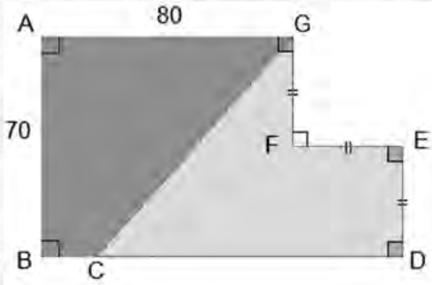
Un polygone régulier à 9 côtés a aussi 9 sommets. Numérotons-les de 1 à 9. Si on passe à 10 sommets numérotés de 1 à 10, à part les sommets numéros 9 et 1 qui sont reliés au sommet numéro 10 (côtés consécutifs du polygone), on peut relier les 7 autres sommets (numéros 2 à 8) au sommet 10 en traçant des diagonales : cela fait 7 diagonales supplémentaires. On trace aussi une 8e diagonale supplémentaire en reliant les sommets 9 et 1.
Il y a donc huit diagonales supplémentaires.

Analyse succincte :
Un problème qui demande de la rigueur et de la méthode

Énoncé : Un beau tapis

Steven a reproduit ci-dessus un beau tapis ; il a la forme d'un hexagone...

Le segment [CG] partage le tapis en deux parties de même aire. Combien mesure le segment [BC] ?



- **Niveau scolaire :**

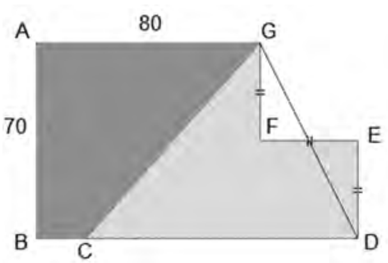
Élèves de 4^{e}.

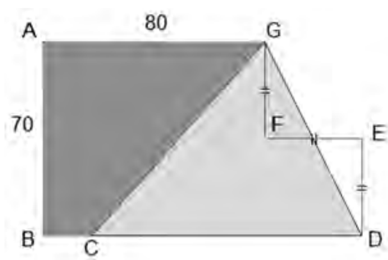
- **Domaines de compétence :**

Comparaison d'aires. Aire d'un triangle. Aire d'un parallélogramme. Symétrie centrale.

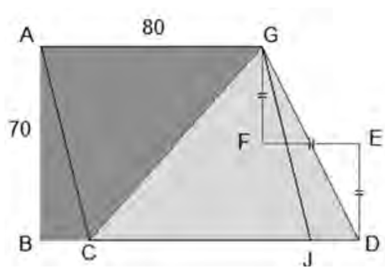
- **Solution :**

On remarque tout d'abord que GFDE est un parallélogramme. En traçant le segment [GD] on obtient un triangle GCD de même aire que le pentagone GCDEF.





On complète ensuite le tracé du parallélogramme GACJ de manière à obtenir deux triangles AGC et GCJ de même aire.



Comme GABC et GCD ont la même aire il s’en suit que les triangles ABC et GJD ont la même aire également ; or ils ont la même hauteur 70 donc les base BC et JD sont égales.
BD = 80 + 35 et CJ = 80 donc BC = JD = 35/2 = 17,5.

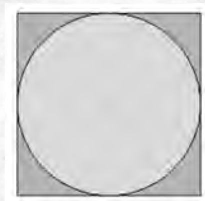
Analyse succincte :
Un problème qui demande une bonne maîtrise des calculs d’aires et un sens de l’observation.

Énoncé : Le cercle prisonnier d’un carré

Daisy observe un disque à l’intérieur d’un carré et tangent aux quatre côtés du carré.

On donne l’aire du disque : 169π cm².

Quelle est l’aire du carré en cm² ?
(valeur exacte exigée).



- **Niveau scolaire :**

Élèves de 4e.

- **Domaines de compétence :**

Aire d’un disque.
Aire d’un carré.
Calcul algébrique simple.
Raisonnement.

- **Solution 1 :**

L’aire d’un disque est égale à πr^2 où r est son rayon, donc ici $r^2 = 169$ cm².
Comme le côté du carré est égal à $2r$ son aire est égale à $(2r)^2 = 4r^2$.
$4r^2 = 4 \times 69 = 676$.

L’aire du carré mesure 676 cm².

- **Solution 2 :**

Comme $r^2 = 169$ cm² alors $r = \sqrt{169} = 13$ cm.
Comme le côté du carré est égal à $2r$ celui-ci mesure 26 cm.
$26^2 = 676$.
L’aire du carré mesure 676 cm².

RALLYE MATHÉMATIQUE APMEP DE POITOU-CHARENTE

PRÉSENTATION :

Le Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes est une compétition en classes complètes. Depuis 2004 un thème (recherche documentaire) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le thème. Les élèves doivent donc réunir une documentation qui leur servira à répondre aux questions de l'épreuve finale. Voici, depuis 2004, les thèmes choisis : Sophie Germain, Marie Agnesi, Eratosthène, Alicia Boole-Stott, π, le nombre d'or, les numérations, la magie des maths, des outils pour tracer, les codes secrets, les puzzles et, en 2015, le temps.

La classe doit fournir un dossier sur le thème et le bulletin-réponse de la partie « problèmes ». Ceux-ci sont variés pour que chaque élève puisse participer. Toutes les épreuves du rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?rubrique8

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

1991 : Création du Rallye pour les 3^{e} et les 2^{nde}.
2007 : Extension aux classes de 6^{e}, 5^{e} et 4^{e}.
2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.
2013 : Passation des épreuves pendant la Semaine des Mathématiques.
2014 : Extension aux classes de 2^{nde} Pro et proposition d'épreuves pour les CM.

- **Epreuves :**

- Classes de secondes : 2 heures avec 8 ou 9 problèmes.
- Classes de collèges et 2^{nde} pro : une épreuve par niveau de 1 heure avec 4 ou 5 problèmes.

- **Compétition :**

IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

Contact

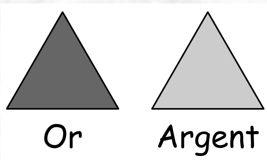
APMEP
IREM de Poitiers, Téléport 2 – BP 30179
Bd Marie et Pierre Curie – 86962 CHASSENEUIL Cedex

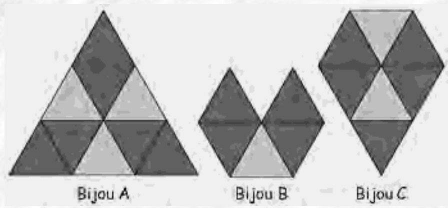
☎ : **05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)**
🖰 : **apmep.poitiers@free.fr**

ORFÈVRE EN MATHÉMATIQUES !

Enoncé :

Un orfèvre réalise des bijoux avec des triangles équilatéraux, tous de mêmes dimensions, les uns en or, les autres en argent. Le prix de chaque bijou est obtenu en ajoutant le prix de la partie en or et celui de la partie en argent, le prix de chaque partie étant proportionnel au nombre de triangles utilisés.





Le bijou A coûte 186 € et le bijou B coûte 122 €.

Combien coûte le bijou C ?

Niveau scolaire :

4e

- **Domaine mathématique :**

Numérique

- **Solution :**

À la lecture de ce problème, on pense tout de suite à la solution experte : résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. C'est pour cette raison que ce problème a été donné en quatrième où on ne dispose pas de cette méthode. Une autre méthode était en effet possible et s'imposait donc à ce niveau.

Les bijoux A et B comportent en tout 10 triangles en or et 4 triangles en argent. Le bijou C comporte 5 triangles en or et 2 triangles en argent, c'est-à-dire la moitié des bijoux A et B réunis. Le prix du bijou C est donc la demi - somme des prix des bijoux A et B, soit (186 € + 122 €)/2 = 154 €.

92 % des élèves ont réussi ce problème de cette manière et 40 % ont bien justifié leur réponse.

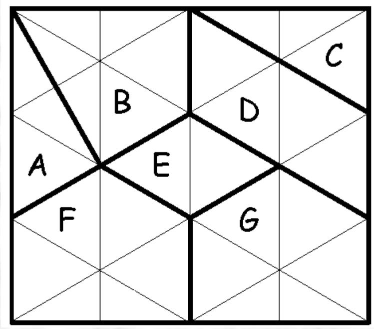
- **Prolongements :**

Toujours sans résoudre des systèmes d'équations, on peut trouver le prix d'un triangle en or (T_o) et celui d'un triangle en argent (T_a) une fois connu le prix du bijou C. En effet, le bijou C comporte une paire « or et argent » de plus que le bijou B. Donc $T_o + T_a = 154 - 122 = 32$ €. Le bijou A est composé de 3 paires « or et argent » et de 3 triangles or. On en déduit donc le prix d'un triangle or puis celui d'un triangle argent.
On observe ici combien le choix des données numériques est important. D'autres choix n'auraient pas permis une telle stratégie et auraient nécessité un système d'équations.

LE PARATONNERRE

Enoncé :

Voici un puzzle qui a la particularité d'être construit sur un réseau triangulaire. Les triangles du réseau sont équilatéraux sauf ceux des bords en haut et en bas.



1°) Glissez dans votre dossier l'hexagone que vous avez réalisé depuis l'épreuve d'entraînement.

2°) Regroupez par leur nom les pièces qui ont la même aire. Quelles sont ces aires si on choisit le triangle du réseau comme unité d'aire ?

3°) Classez, par leur nom, les pièces du plus petit périmètre au plus grand.

4°) Trouvez deux pièces de même aire mais de périmètres différents.

5°) Existe-t-il deux pièces dont l'une a un périmètre plus petit mais une aire plus grande que l'autre ?

- **Niveau scolaire :**

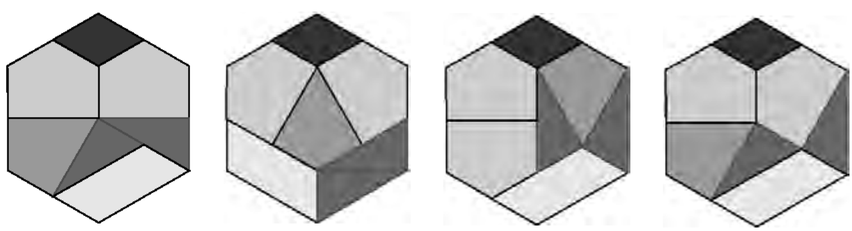
Thème sur les puzzles 6^{e}-5^{e}

- **Domaine mathématique :**

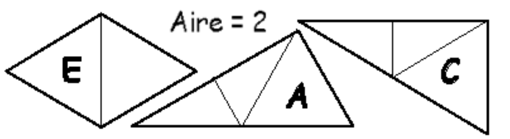
Géométrie – Aires et périmètres

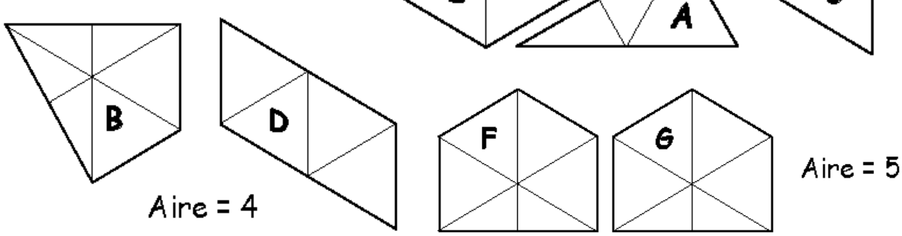
- **Solution :**

1°) Voici des solutions différentes de l'hexagone trouvées dans les dossiers.



2°) Pièces qui ont la même aire :





3°) Si on nomme c la longueur du côté du triangle équilatéral et h la hauteur du triangle équilatéral, les pièces A et C ont pour périmètre 3c + 2h et h < c. On a donc dans l'ordre des périmètres : E, A et C, B, F et G, D.
4°) Deux pièces de même aire mais de périmètres différents : E et A, ou E et C, ou B et D.
5°) Deux pièces dont l'une a un périmètre plus petit mais une aire plus grande que l'autre : F et D ou G et D.
En effet, P(F) = 4c + 2h, P(D) = 6c, mais A(F) = 5 et A(D) = 4.

Commentaires
Comme pour le Curvica (Brochure JEUX 5 - n° 119 de l'APMEP) ce puzzle permet de faire fonctionner les concepts d'aire et de périmètre sans formules et d'aller à l'encontre du théorème « élève » : plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand. C'est pourquoi il a été proposé aux niveaux des 6ème et 5ème.

Les pourcentages de réussites moyens (6^e et 5^e) sont décroissants dans l'ordre des questions : 75 %, 50 %, 40 % pour les trois premières questions. La 5^e question n'a recueilli que 17 % de réussite, ce qui n'est pas étonnant ; il faut donc bien poursuivre le travail dans ce sens.

DEUX PAR DEUX

Enoncé :

Anaïs, Baptiste, Camille, David et Émilien ont vendu en tout 50 carnets de tombola ; Anaïs et Baptiste en ont vendu 18 à eux deux, Baptiste et Camille 15, Camille et David 20, David et Émilien 25. Combien chacun en a-t-il vendu ?

- **Niveau scolaire :**

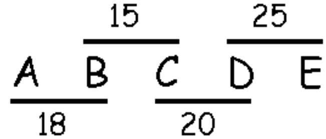
4^e

- **Domaine mathématique :**

Numérique

- **Solution :**

En faisant un schéma du style de celui ci-contre, la solution devient évidente :
A + B + C + D = 38 ; donc E = 12 puisqu'ils ont 50 carnets à eux cinq ;
ou B + C + D + E = 40 ; donc A = 10. Et on trouve ensuite facilement les autres quantités.



Commentaires

Changement de cadre ! C'est un bien grand (gros ?) mot ! Et pourtant transcrire, comme ici, une situation par un schéma, un graphique aide énormément à la résolution d'un problème. C'est ce que tente de démontrer ce problème.

74 % des classes l'ont réussi. Mais la plupart a trouvé par essais corrections. Nous espérons donc que la solution présentée dans le bilan de l'épreuve leur aura été utile.

Ce problème est une copie presque conforme d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin en Suisse Romande. Il semble, a priori, étonnant de donner un tel problème à ce niveau car on pense tout de suite à un système d'équations ! Mais les élèves de 10 à 12 ans n'ont pas de telles idées et font preuve d'initiatives et d'inventivité.

DES BOÎTES

Enoncé :

Les calculatrices TRUCHTOCH sont envoyées aux dépositaires pour la vente dans des boîtes de différentes tailles. Chaque calculatrice est dans une boîte de type B1. Quatre boîtes B1 sont envoyées dans une boîte de type B2. Quatre boîtes B2 sont envoyées dans une boîte de type B3...

1°) Pour l'envoi de 23 machines, il faut 29 boîtes de différentes tailles. Expliquez pourquoi.

2°) Combien faut-il de boîtes pour l'envoi de 64 calculatrices ?

3°) Léa Broutille, toujours à l'affût d'un exercice pour le rallye a calculé qu'un autre envoi a nécessité 32 boîtes. Combien de calculatrices étaient dans ces boîtes ?

4°) Elle pense qu'aucun envoi ne peut exister avec 35 boîtes. Est-ce vrai ou faux ?

- **Niveau scolaire :**

2nde

- **Domaine mathématique :**

Numérique

1°) Pour 23 machines, il faut 23 B1.

$23 = 5 \times 4 + 3$; il faut donc 5 B2

$5 = 1 \times 4 + 1$; il faut 1 B3

Il faut donc en tout 29 boîtes.

Autre méthode :
une boîte ***B3*** contient 16 calculatrices et se compose de **21 boîtes** :
une B3, quatre B2 et seize B1.
Une boîte **B2** contient 4 calculatrices et se compose de **5 boîtes** :
une B2 et quatre B1.
En faisant le lien avec la base quatre, on a : $23 = 1 \times 42 + 1 \times 4 + 3$; il faut donc une boîte B3, une B2 et trois B1, soit en tout $21 + 5 + 3 = 29$.

2°) Pour l'envoi de 64 calculatrices, il faut une boîte B4, contenant quatre boîtes B3, soit $4 \times 21 + 1 =$ **85 boîtes** (ou encore 64 boîtes B1 contenus dans 16 boîtes B2, elles-mêmes contenues dans 4 boîtes B3, le tout contenu dans une boîte B4).

3°) Par un raisonnement analogue, pour avoir 32 boîtes ($32 = 21 + 2 \times 5 + 1$), il faut une boîte B3, deux boîtes B2 et une boîte B1, soit $16 + 2 \times 4 + 1$.
L'envoi avec 32 boîtes contenait donc **25 calculatrices**.

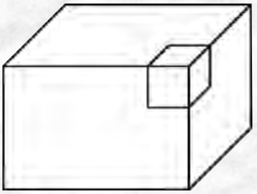
4°) S'il existe un envoi avec 35 boîtes, cela ne peut être que pour un nombre de boîtes supérieur à 25, d'après la question précédente.
Pour 26 calculatrices, il faut 26 boîtes B1, 6 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 33 boîtes.
Pour 27 calculatrices, il faut 27 boîtes B1, 6 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 34 boîtes.
Pour 28 calculatrices, il faut 28 boîtes B1, 7 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 36 boîtes.
Il n'y a donc pas d'envoi avec 35 boîtes.

> ***Commentaires***
> *Si ce problème a été choisi pour l'épreuve de seconde, il peut être donné dès le collège car sa résolution ne fait pas appel à des connaissances mathématiques spécifiques. Elle nécessite seulement une bonne compréhension des données et de la méthode. C'est pour cet aspect que ce problème a été proposé. Cependant, au niveau de l'exploitation en classe, on peut faire le lien avec la numération : ici la base quatre.*
> *Ce problème n'a pas eu la réussite attendue. Seulement 53 % des classes ont répondu correctement à au moins une question.*
> *Beaucoup ont oublié la boîte B4 à la 2^{e} question.*

CINQ COULEURS POUR UNE BOÎTE

Enoncé :

Le prof. Ila Ransor a fabriqué un parallélépipède rectangle représenté par la figure ci-contre. Les trois faces non vues sont jaunes.
La face avant est bleue sauf un carré vert de 4 cm².
La face latérale est blanche sauf un carré vert de 4 cm².
La face supérieure est rouge sauf un carré vert de 4 cm².
La partie bleue a une aire de 62 cm², la partie blanche une aire de 73 cm² et la partie rouge une aire de 38 cm².



1°) Quelle est l'aire totale des trois faces jaunes ?

2°) Quel est le volume du parallélépipède ?

Un dessin en perspective cavalière et en couleur, avec la face avant en vraie grandeur sera le bienvenu.

- **Niveau scolaire :**

3e

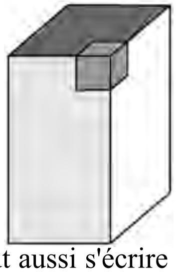
- **Domaine mathématique :**

Mesure – Calcul algébrique

- **Solution :**

1°) L'aire des trois faces visibles est de 62 cm² + 73 cm² + 38 cm² + 3 × 4 cm² = **185 cm²**. C'est aussi l'aire totale des trois faces jaunes.

2°) Les aires des trois faces sont 66 cm², 77 cm² et 42 cm². Ces aires ont deux à deux un diviseur commun : la longueur de l'arête commune à deux faces. En considérant 66 (face avant) et 77 (face latérale), et en éliminant 1 (trop petit), on prend 11 pour la hauteur, même si on ne sait pas a priori que ce sont des nombres entiers. Ce qui donne immédiatement 6 pour la largeur et 7 pour la longueur. D'où le volume $6 \times 7 \times 11 =$ **462 cm³**.



Méthode algébrique : si on note L, l et h les dimensions du parallélépipède son volume est donné par L x l x h qui peut aussi s'écrire $(Ll \times Lh \times hL)^{1/2}$, c'est-à-dire la racine carrée du produit des aires des trois faces visibles. Cela donne $(66^2 \times 77^2 \times 42^2)^{1/2} = 6 \times 11 \times 7$ et donc le volume est de **462 cm³**.

Commentaires

Si le calcul d'aire a été bien réussi, le calcul du volume l'a été moins, ce qui donne une réussite globale de 48 %. Toutes les classes qui ont trouvé correctement le volume ont cherché des solutions entières pour les arêtes à partir des aires des trois faces. Très peu de dessins en perspective ; il était seulement suggéré, mais il apportait quelques point de bonus !

Homage au dessinateur Philippe Druillet
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHÉMATIQUE CHAMPAGNE ARDENNES NIGER

PRÉSENTATION :

L'objectif de notre Rallye est de favoriser l'intérêt des Mathématiques de façon ludique, le travail en équipe ainsi que la participation et l'initiative des classes. Cette opération gratuite permet de montrer qu'on peut s'amuser en résolvant des exercices.

- **Historique :**

L'IREM de Reims organise depuis de nombreuses années un rallye mathématique destiné aux collégiens. Celui-ci a évolué en s'ouvrant aux classes de 2^{de} des lycées puis en devenant le RMCAN en partenariat avec le Niger en 2003

- **Compétition :**

Nombre de participants : plus de 1 000 classes et de 27 000 élèves

Niveaux d'études : 6^{e} à 2^{de}.

Type d'épreuves proposées :

Les 2 épreuves annuelles se déroulent selon les mêmes modalités.

En 55 minutes, dans une salle de cours, tous les élèves d'une même classe doivent s'organiser en groupes pour résoudre une palette d'exercices. L'équipe « Rallye » les crée spécialement pour cette compétition ; les 6^{es} doivent résoudre les énigmes 1 à 8, les 5^{es} celles de 1 à 10, les 4^{es} celles 1 à 12, les 3^{es} celles 1 à 13 et les 2^{des} toutes, soit les 15.

Chaque classe remet une seule fiche réponse à la fin de l'épreuve contenant uniquement les solutions.

Fréquence :

Tous les ans, la demi-finale est organisée mi-février dans chacun des établissements inscrits.

La finale départementale se déroule un mercredi après-midi de mai dans un lieu spécifique à chacun des 4 départements. Elle voit s'affronter les 3 meilleures classes par niveau et par département.

Une comparaison des résultats permet de proclamer le vainqueur académique.

Les mêmes épreuves sont organisées séparément au Niger.

- **Les partenaires :**

URCA
I.R.E.M. de Niamey,
Rectorat de l'Académie de Reims,
I.P.R. de mathématiques
DASEN des Ardennes, de l'Aube, de la Marne et de la Haute-Marne,
Collectivités locales,
APMEP Champagne Ardennes

- **Contact :**

Responsable académique : Isabelle Audra,
: **isabelle.audra@wanadoo.fr**
Site de l'IREM de Reims :
http://www.univ-reims.fr/site/laboratoires/irem/

Un « bon » énoncé de Rallye doit, à nos yeux, comprendre des énigmes surtout basées sur le raisonnement, très variées et ludiques, dans la forme et sur le fond ; il doit permettre à toutes les classes de connaitre la réussite sans que le recours aux questions subsidiaires ne soit nécessaire pour départager les ex-aequo. Chaque exercice proposé est le résultat d'une sélection difficile, basée sur les propositions des sous-groupes départementaux et effectuée lors d'une rencontre académique. Le choix des exercices et leur classement selon leur difficulté s'effectuent dans le souci de proposer un sujet équilibré et attractif… Les stratégies mises en place par les élèves engendrent vraiment des surprises : un exercice que nous jugions difficile sera mieux réussi qu'un autre estimé plus facile, pour d'autres les 3^{es} échouent là où les 6^{es} réussissent par exemple.

Les sujets de la finale précédente sont systématiquement proposés comme entraînement à la demi-finale suivante sur le site d'inscription. Chaque établissement ayant participé reçoit la feuille des réponses à l'issue de la demi-finale. Les rares demandes de complément d'informations le sont plutôt à l'issue de la finale et notamment quand les résultats déçoivent.

Régulièrement des collègues nous demandent des énoncés, qu'ils utilisent en classe comme entraînement ou pour des devoirs maisons ou encore pour créer des animations pour la liaison école-collège.

Quelques exercices ont été repris dans le 1^{er} Manuel Sésamath 5^{e}. Les finales départementales donnent lieu à une manifestation à laquelle sont conviés les différents partenaires ainsi que la presse.

EXEMPLE 1 : FINALE 2013

Enoncé de l'énigme N° 2 : Grr Grr ! (✶)

Dans la tribu des Hommes aux nattes ôtées, on ne dispose que de trois mots et l'addition pour compter :
« Gnarf » signifie 36, « Groumpf » représente le nombre 6 et « Grr » est le mot pour dire 1.
Tous les autres nombres sont exprimés à partir de ces trois mots en prononçant d'abord le plus possible de « Gnarf », puis le plus possible de « Groumpf » et en complétant si nécessaire avec des « Grr ».
Ainsi, 9 se dit : « Groumpf Grr Grr Grr » et 50 : « Gnarf Groumpf Groumpf Grr Grr ».
Au dernier recensement, on a compté 147 membres dans la tribu.

Comment dit-on 147 dans cette tribu ?

- **Solution :**

(✶) Dans cette tribu, 147 se dit : **Gnarf Gnarf Gnarf Gnarf Grr Grr Grr**…

$$\mathbf{36 + 36 + 36 + 36 + 1 + 1 + 1 = 147}$$

- **Niveau :**

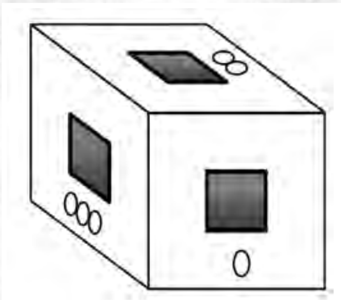
6^{e} (facile)

Analyse du problème :
Peu illustré, cet exercice classé numérique est proposé en 2de position. La rédaction est courte et un exemple permet de s'assurer de sa bonne compréhension. En principe chaque élève peut s'engager dans la résolution sans problème. Il faut décomposer 147 comme une somme de 1, 6 ou 36 en utilisant le moins de termes possibles. L'élément perturbant est la non utilisation du 6.

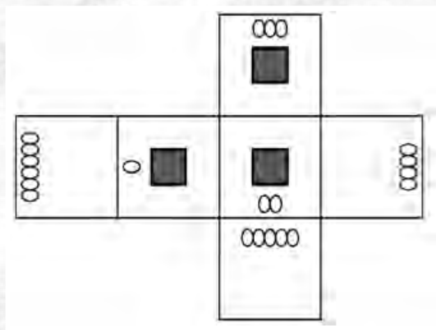
Cet exercice a été parfaitement réussi par les classes finalistes.

EXEMPLE 2 : FINALE 2013

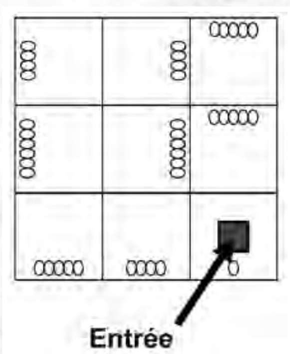
Enoncé de l'énigme N° 10 : Par ici la sortie ! (✶✶✶✶)



Pour tester le Q.I. de Titine, sa fourmi préférée, Freddy a acheté 9 petits cubes identiques complètement creux comportant chacun trois ouvertures au centre des faces désignées par 0, 00 et 000, ...



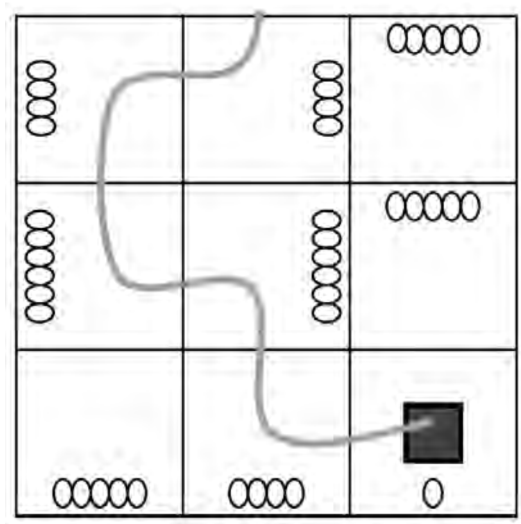
Freddy s'est amusé à réaliser un patron complet de la surface d'un des cubes et il a obtenu :



Freddy a collé côte à côte ses 9 cubes (représentés en bas en vue du dessus) et il a posé l'objet ainsi constitué sur une table bien lisse. Il a doucement fait entrer Titine dans l'ouverture indiquée par la flèche puis a posé son doigt sur cette ouverture et déclenché son chronomètre pour voir combien de temps Titine mettrait pour trouver une autre sortie.

Fais gagner du temps à Titine : indique-lui le seul trajet possible pour rejoindre l'air libre en le dessinant sur la feuille réponse !

- **Solution :**



- **Niveau :**

5^{e}

- **Analyse du problème :**

Analyse du problème :

Ce texte basé sur le cube reste court. La solution peut être rapidement trouvée à l'aide du montage du cube dont l'énoncé donne le patron puis en se montrant méthodique. Une bonne vision de l'espace peut néanmoins suffire mais l'existence d'impasses rend plus délicat le suivi. Lors de la finale, les 5^{e} ont échoué mais le taux de réussite s'est élevé progressivement jusqu'à atteindre les 100% en 2de.

Donner l'habitude de manipulations permet de constater des progrès sur ce type de problème.

EXEMPLE 3 : DEMI-FINALE 2014

Enoncé de l'énigme N° 15 : Le gros cube d'Indiana Jeun's... (✶✶✶✶✶)

Dans la jungle, Indiana Jeun's vient de découvrir un immense cube composé de 15 barres d'un métal étrange et décoré de 18 grosses boules, celles ne formant pas les sommets étant placées au milieu des barres. Seules deux boules portent une inscription : S et I. Sur un mur, Indiana a déchiffré l'inscription suivante :

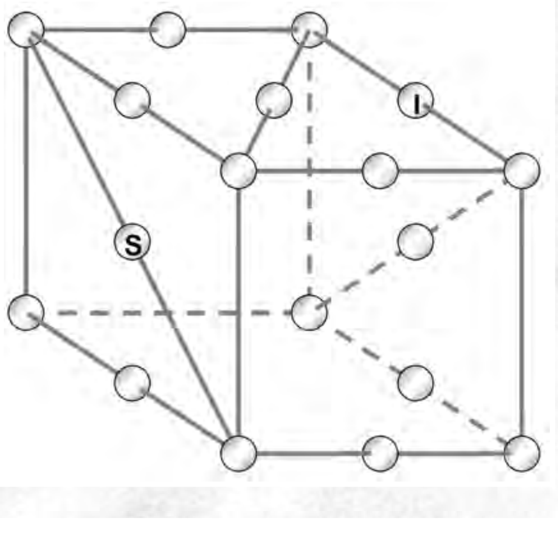
"*En dévissant la boule R, tu trouveras la prodigieuse recette du cassoulet aux huîtres telle qu'elle fût écrite par le grand chef cuisinier Jéenvydvomirr… Toutes les autres contiennent des pièges mortels*."

Incroyable ! Depuis tant d'années qu'Indiana cherche cette recette aux quatre coins du monde ! Indy reprend sa lecture…

"S*ache que ICNP est un carré. Ce n'est pas le cas de CSMG qui n'est qu'un losange. IFQN est lui aussi un carré. CHMD est un losange et IHKQ un rectangle. Le triangle AJT est équilatéral, tandis que AJO est rectangle isocèle en O. Le triangle ABH, quant à lui, est rectangle en B…*"

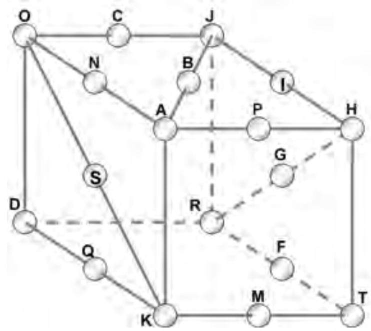
Bon… Indiana n'a pas droit à l'erreur… Aide-le ! Dis-lui dans quelle boule est cachée la recette !

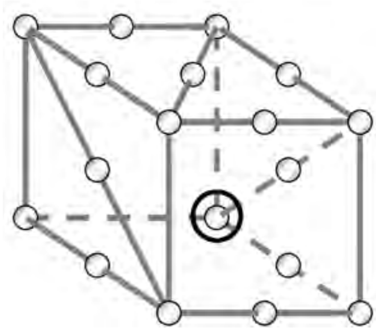
Entoure en rouge la boule où est cachée la recette :



- **Solution :**

Il y a deux carrés dont *I* et *N* sont des sommets. Le point *N* peut être placé au-dessus de ***S***.
On peut donc également placer le point ***F*** et le point ***Q***.
En considérant le carré ***ICNP***, on a deux possibilités pour le point ***C***. Une seule permet d'obtenir un losange ***CSMG***.
On place alors les points ***P***, ***M*** et ***G***.
Il y a deux possibilités pour le rectangle ***IHKQ***, mais en considérant que le point ***H*** appartient aussi au losange ***CHMD***, on trouve la position du point ***H*** et donc celles des points ***D*** et ***K***.
Parmi les boules restantes, il n'y en a que trois qui forment un triangle équilatéral. On trouve donc les trois places des points ***A***, ***J*** et ***T***. Il y a une seule manière de construire avec deux de ces points, un triangle ***AJO*** rectangle isocèle en ***O***. On trouve donc les positions des points ***T*** et ***O***.
Le triangle ***ABH*** rectangle en ***B*** permet de déterminer la position du point ***A*** et celle de ***B*** et de ***J***.





Le sommet restant est *R*, celui où est cachée la recette.

- **Niveau :**

2^{de}

Analyse du problème :
Le taux de réussite de cet exercice de géométrie dans l'espace est faible. Le texte est long mais la situation est simple à comprendre. Il faut retrouver à partir de leurs sommets et de leurs côtés des figures usuelles. La difficulté réside dans la « vision » des sections non tracées (il faut imaginer certains côtés) et l'élimination par essai-erreur de certaines possibilités a priori.

EXEMPLE 4 : FINALE 2014

Enoncé de l'énigme N° 13 : N'oubliez pas la retenue ! (✶✶✶✶✶)

Sabine ne fait rien que des bêtises… Pour éviter d'avoir 16 heures de retenue, la C.P.E. a exigé qu'elle remplisse le tableau suivant en utilisant une fois chaque nombre entier de 1 à 16… Mais, bien sûr, il faudra respecter les contraintes du texte. Elle a ajouté qu'il y avait plusieurs solutions possibles mais qu'il suffisait à Sabine d'en trouver une pour que la sanction soit levée…

				⇦ Dans cette ligne, un nombre est un multiple des trois autres.
				⇦ Dans cette ligne, il n'y a que des nombres impairs inférieurs à 10.
				⇦ Dans cette ligne, il y a 4 nombres qui se suivent.
				⇦ Dans cette ligne, un nombre est un diviseur des trois autres.
⇧ Dans cette colonne, un nombre est un multiple des trois autres.	⇧ La somme des nombres de cette colonne vaut 34.	⇧ La somme des nombres de cette colonne vaut 50.	⇧ Dans cette colonne, un nombre est un diviseur des trois autres.	⇖ Dans cette diagonale, un nombre est un multiple des trois autres.

Aide Sabine à placer les 16 nombres…
Elle a bien besoin d'un coup de main !

Complète le tableau avec les nombres de 1 à 16 placés dans le bon ordre : Au moins 4 réponses possibles (voir annexe). 4, 16, 8, 3, 12 et 6 sont seulement "probables".

2	4	16	8
3			
12			
6			**1**

- **Solution :**

2	4	16	8
3	7	5	9
12	13	14	11
6	10	15	1

2	4	16	8
3	5	9	7
12	11	10	13
6	14	15	1

2	4	16	8
3	5	9	7
12	15	14	13
6	10	11	1

2	4	16	8
3	7	9	5
12	13	14	15
6	10	11	1

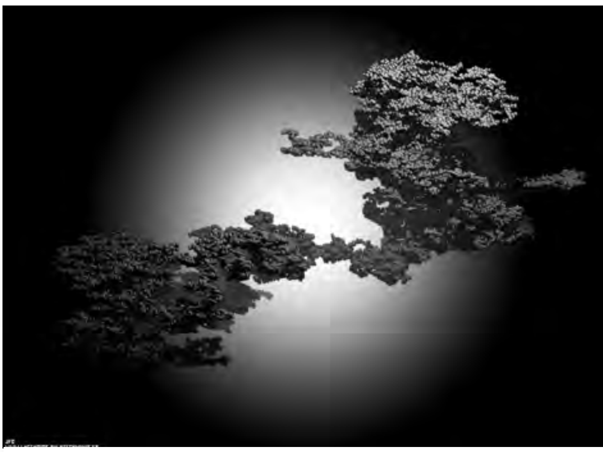
- **Niveau :**

3^e^

Analyse du problème :

Le taux de réussite, faible, s'est avéré meilleur pour les 3^es^ que pour les 2^des^. Le but est de compléter un tableau à double entrée à l'aide des nombres entiers de 1 à 16 en respectant des contraintes. Le vocabulaire mathématique ne devrait pas être un obstacle mais les conditions à respecter sont très nombreuses et « croisées ».

La non unicité de la solution n'est pas habituelle et elle a été annoncée. Cela a peut-être rendu les élèves moins vigilants lors du contrôle de leur solution.



mouvement Brownien tridimentionnel
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHÉMATIQUE D'AUVERGNE

PRÉSENTATION

Le Rallye s'adresse aux élèves des classes de 3^{e} et de 2^{de} de lycée général et technologique ou de lycée professionnel d'Auvergne.
La compétition concerne des classes entières ou des classes mixtes $3^{e}/2^{de}$ dans le cadre d'une liaison collège/lycée.

Chaque classe a deux heures pour résoudre collectivement 6 énigmes. La solution doit être rédigée.
Pour chaque exercice, le jury évalue :

- l'exactitude de la réponse,
- l'argumentation,
- la présentation.

La meilleure classe de chaque niveau dans chacun des quatre départements de l'académie est sélectionnée pour la finale.

En complément des épreuves « mathématiques », est organisé un concours d'affiche sur un thème mathématique imposé chaque année. La réalisation de l'affiche peut s'effectuer librement dès le mois de décembre, éventuellement en collaboration avec l'enseignant d'arts plastiques.

L'affiche primée sert de support à l'affiche qui présente le Rallye de l'année suivante.

HISTORIQUE

Le premier Rallye a été organisé en 1998

FICHE TECHNIQUE

Compétition :

Les épreuves qualificatives ont lieu un mardi après-midi de mars dans les établissements des classes inscrites.
En 2015 : 112 classes inscrites, soit environ 3000 élèves.
La finale a lieu un mercredi après midi début juin sur le Complexe Scientifique des Cézeaux.

Les épreuves :

Epreuves qualificatives :

Trois catégories : troisième, seconde générale, seconde professionnelle.

6 problèmes (4 communs aux trois catégories et 2 spécifiques) à résoudre en deux heures, par classe entière.

Finale :

4 problèmes (2 communs à tous et 2 spécifiques à chaque catégorie) à résoudre en 90 minutes. Présence obligatoire d'au moins les 2/3 de la classe.

Une épreuve de calcul mental d'environ 10 minutes où chaque classe est représentée par trois « champions ».

Partenaires :

Inspection Pédagogique Régionale
IREM
APMEP

Contact :

IREM
Complexe Scientifique des Cézeaux
63177 Aubière

☎ : **04 73 40 70 98**

: irem@univ-bpclermont.fr

EXERCICE QUALIFICATIF COMMUN À TOUS LES NIVEAUX EN 2014

Jeu des noisettes

Après des heures de recherche, Monsieur Écureuil a trouvé deux noisettes. Sur le chemin du retour, il est tenté de jouer au casino.

Conseillez-vous à Monsieur Écureuil de jouer à ce jeu ?
(Toutes les noisettes dans les boîtes sont visibles sur l'image.)

Analyse de la question

Question de probabilité, qui sera abordée de façon différente en fonction des niveaux et surtout en fonction de l'avancement du cours en classe de troisième.
Il faut d'abord décider sur quel critère conseiller ou non de jouer, puis calculer la probabilité de gagner ou, au moins, comparer la probabilité de gagner à la probabilité de perdre.
Puisque les seules possibilités sont soit de gagner soit de perdre, on peut aussi comparer la probabilité de gagner à 1/2.

- **Solutions envisagées par l'auteur :**

On décide de conseiller à Monsieur Ecureuil de jouer s'il a simplement plus de chances de gagner que de perdre.

S'il commence à prendre une noisette dans l'urne de droite contenant deux noisettes blanches et deux noisettes noires, il a une chance sur deux d'avoir une blanche.

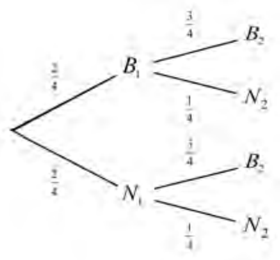
Il doit ensuite prendre une noisette dans l'autre urne, mais il n'est pas sûr de tirer une noisette blanche. Cela signifie que ses chances de perdre augmentent, et au final deviennent plus grandes que les chances de gagner.

On conseille donc à Monsieur Ecureuil de ne pas jouer.

On peut utiliser un arbre pour représenter l'expérience.

On note B1 l'évènement : "Tirer une noisette blanche dans l'urne 1"

On note B2 l'évènement : "Tirer une noisette blanche dans l'urne 2"



On peut alors modéliser cette expérience aléatoire à deux épreuves par un arbre, les premières branches correspondant aux issues du tirage dans la première boîte, les suivantes aux issues du tirage dans la deuxième boîte.

En lisant sur l'arbre, la probabilité d'avoir 2 noisettes blanches est alors :
P(B1 et B2) = $3/4 \times 2/4 = 3/8$.

La probabilité de gagner est donc : 3/8. Celle de perdre est donc : 5/8.
Comme $3/8 < 5/8$, l'écureuil a donc plus de chances de perdre que de gagner, je ne lui conseille donc pas de jouer à ce jeu !

- **Analyse des solutions proposées :**

Nous avons observé quatre types de réponses :

1) Réponse juste avec un arbre de probabilités (expérience aléatoire à deux épreuves) et calculs : Cette réponse a été donnée par la plupart des classes de seconde générale et par quelques classes de troisième et seconde professionnelle (ceux qui avaient déjà dû étudier ce type de problèmes)

2) Réponse juste en représentant tous les cas et en dénombrant les cas favorables et non favorables : Cela a été fait par des classes de troisième et seconde professionnelle.

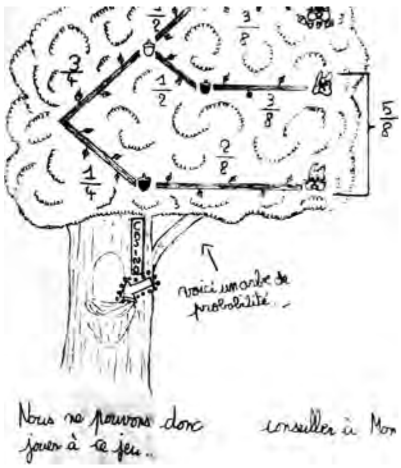
3) Réponse juste en utilisant la logique : "Dans la seconde boîte, il n'y a qu'une chance sur deux de tirer une noisette blanche. Par conséquent, si on rajoute une étape pour laquelle on n'est pas sûr de gagner, les chances de gagner à ce jeu seront alors strictement inférieures à 1/2. Ça ne vaut donc pas le coup de jouer." : Réponse vue seulement sur une copie collège.

4) Réponse fausse en calculant une moyenne des probabilités de chaque boîte : vu notamment dans des classes de collège et lycée professionnel.

- **Remarques :**

- Peu de classes ont fait la remarque que le gain était l'opposé de la perte, et que c'est pour cette raison qu'il suffisait de rechercher la probabilité de gagner. On pourrait demander ce qu'il se passerait si l'on modifiait le gain ou la perte, afin d'introduire la notion d'espérance.

- La BD a rendu l'exercice plus ludique et certaines classes ont répondu à l'aide de dessins.



- **Application en classe :**

En troisième : après avoir présenté les probabilités (vocabulaire, cas simple), cet exercice pourrait constituer une bonne activité pour aborder la notion d'épreuve avec deux étapes successives. Si la réponse donnée était

- du type 2 : on pourra rebondir en disant que la méthode est très bien, mais que nous allons voir une méthode plus rapide.
- du type 3 : on pourra aussi dire que le raisonnement est très bien, mais que l'on aimerait avoir plus de précision concernant les chances de gagner.
- du type 4 : on pourra montrer aux élèves qu'il ne faut pas "improviser" car le risque de se tromper est trop grand, et élargir le danger en parlant de certains jeux de casino (comme la roulette). Si l'élève avait beaucoup réfléchi et qu'il ne comprend pas pourquoi faire une moyenne ici ne fonctionne pas, on expliquera alors le sens de son résultat.

Au lycée : Pour rappeler la notion et ensuite modifier les règles pour faire apparaître la notion d'espérance.

En effet, si le nombre de noisettes gagnées est 4 l'espérance mathématique est $\frac{3}{8}x(4-2)+\frac{5}{8}x(0-2)=\frac{-1}{2}$ et le jeu est déconseillé, de même si c'est 5.

Mais si ce nombre est 6, l'espérance est $\frac{3}{8}x(6-2)+\frac{5}{8}x(0-2)=\frac{2}{8}$, et le jeu est conseillé, de même si c'est plus que 6.

EXERCICE COMMUN, FINALE 2014

Enoncé : Casse-tête

On utilise des pièces en bois obtenues en juxtaposant deux cubes élémentaires de côté 2cm.

On prend deux pièces. De combien de façons peut-on les assembler en faisant se correspondre des faces entières de cube élémentaire ?

Réaliser l'ensemble de ces assemblages à l'aide du matériel fourni.

On souhaite ranger tous les assemblages obtenus dans une boîte parallélépipédique.
Quelles dimensions donner à cette boîte pour qu'il ne reste aucun espace vide ?

Réaliser un rangement.

Analyse du problème

C'est dans un premier temps un problème d'organisation pour décompter correctement le nombre d'assemblages différents de deux pièces.
Il faut ensuite passer du volume aux dimensions de la boîte.
Deux séries de dimensions sont à envisager et sont toutes les deux possibles. Il faut donc passer à la dernière étape pour prouver par l'exemple que les dimensions conviennent.
Cet exercice montre qu'une activité présentée parfois comme uniquement ludique (un casse-tête en l'occurrence), cache un contenu mathématique et qu'il est parfois utile de manipuler des objets pour justifier un résultat.

- **Travail des élèves :**

Environ 25 pièces ont été distribuées aux élèves, volontairement bien plus que nécessaire pour ne pas les guider.

La notion d'assemblages différents a dû être précisée. Dans ce contexte moins scolaire, certains groupes construisant deux pièces identiques considèrent qu'elles sont différentes puisqu'il y en a deux ...
Plusieurs groupes n'ont pas obtenu toutes les pièces possibles.

Cependant tous ont cherché à remplir une boîte éventuellement très grande lorsque le groupe avait essayé d'utiliser toutes les pièces mises à disposition. Un seul groupe a partiellement justifié le choix de ses dimensions. Trois constructions différentes ont été trouvées pour une boîte de 4 × 3 × 2. Les classes de seconde ont mieux respecté les consignes que les classes de troisième.

- **Solutions envisagées :**

Pour obtenir les différents assemblages :

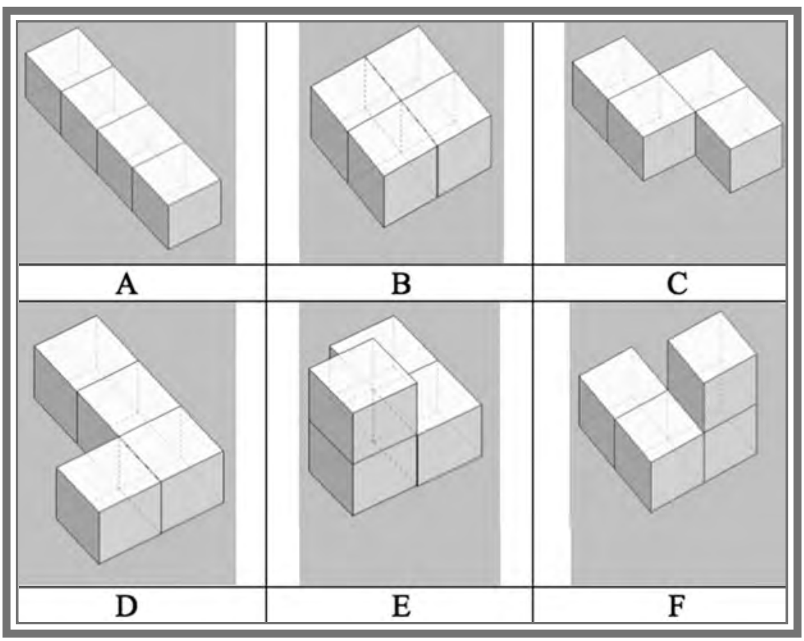
- Pièces dans un plan et parallèles, 3 positions (assemblages A, B et C)
- Pièces dans un plan et perpendiculaires, 1 position (assemblage D)
- Pièces pas dans le même plan, 2 positions (assemblage E et F)

Pour simplifier la description, on utilise comme unité de volume le cube et comme unité de longueur, la longueur d'une arête.

Il y a donc au total 6 assemblages de 2 pièces, soit 24 cubes élémentaires.

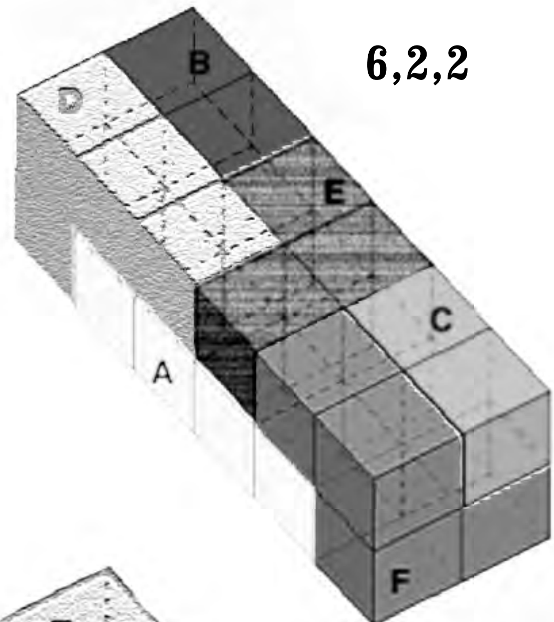
L'assemblage A est composé de 4 cubes alignés, donc une des dimensions de la boîte est supérieure ou égale à 4. L'assemblage E occupe la place de deux cubes en longueur, en largeur et en hauteur ; toutes les dimensions de la boîte sont donc supérieures ou égales à 2.

Le volume de la boîte devant faire 24 cubes, on voit que les seules dimensions possibles sont 4, 3, 2 ou 6, 2, 2.

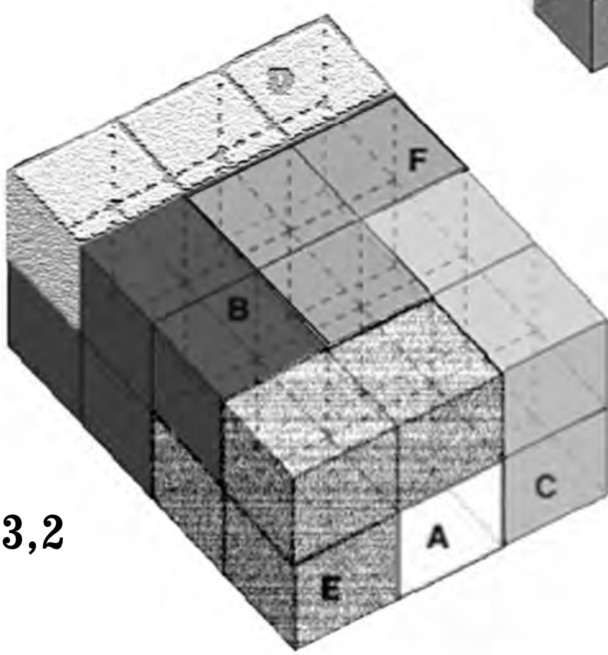


Les deux dimensions de boîte sont possibles.

Un exemple de construction dans chaque cas est donné ci-dessous.



6,2,2



4,3,2

RALLYE DYNAMIQUE ET VIRTUEL DE L'IREM DE BASSE-NORMANDIE

PRÉSENTATION :

Le rallye mathématique de l'Irem de Basse-Normandie consiste en une épreuve unique au cours de laquelle des classes des niveaux 3^{e} et 2nde tentent de résoudre le plus grand nombre possible de problèmes qu'il découvrent au fur et à mesure de l'épreuve en franchissant une à une un certain nombre d'étapes (il y en a 6 dans la formule actuelle).

Le principe de ce rallye est le suivant : les classes ont accès aux énoncés des problèmes grâce au programme nommé "rdv..." (rdv15 pour l'année 2015 par exemple) que le professeur responsable de la classe aura pris soin de copier sur les postes utilisés par les élèves le jour du rallye. L'accès à internet n'est pas nécessaire pour les élèves. Seul un poste utilisé par le professeur responsable doit être connecté au site du rallye pour la transmission des réponses obtenues par la classe en cours de jeu.

Le jour du rallye, à 14 h, est transmis à tous les participants un mot de passe qui permet d'accéder à la 1ère étape. Les élèves ont alors accès aux énoncés de plusieurs problèmes. L'un d'eux est appelé « énigme », les autres sont appelés « bonus ». C'est la réponse à l'énigme qui permet d'obtenir le code d'accès à l'étape suivante. Il est donc important de la résoudre en priorité. La recherche des bonus quant à elle, peut être effectuée pendant toute la durée du jeu.

Quand une énigme est résolue, le programme "rdv" permet aux élèves d'accéder à l'étape suivante et la réponse obtenue doit alors être transmise au serveur du rallye par Internet, grâce au poste connecté. Les réponses obtenues pour les bonus sont également transmises en cours de jeu ainsi que l'instant où la classe accède à une nouvelle étape.

Pour certaines énigmes, la classe a la possibilité d'accéder à une aide. En cas de blocage, elle peut aussi avoir recours à un joker lui permettant de passer à l'étape suivante sans résoudre l'énigme. Mais chaque classe n'a droit qu'à deux jokers au plus. Tout cela est assorti d'un ensemble de pénalités suivant que la classe utilise une aide ou un joker.

Pour une classe donnée, le rallye prend fin lorsqu'elle est arrivée au terme des 6 énigmes, ou au terme des 90 minutes imparties pour le jeu.

Le classement est réalisé à partir d'un nombre de points calculés selon un barème précis liés à la nature des problèmes résolus. En cas d'égalité de points, c'est le décompte du temps enregistré pour chaque classe qui permet de départager, en tenant compte des pénalités.

L'originalité de ce rallye réside essentiellement dans sa conception par étapes à franchir, comme dans un rallye au sens habituel du terme. Il amène à une réflexion en amont dans la classe sur l'organisation à mettre en place pour que le travail collectif des élèves soit plus efficace. La dimension « travail collaboratif et collectif » , en plus de la recherche des problèmes proprement dite, est en effet essentielle pour la réussite d'une classe dans cette épreuve.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Avril 2004 : Mise en place de la 1ère édition du Rdv. Cette année là , en plus de l'épreuve elle-même, a été mise en place une finale entre la meilleure classe de 3e et la meilleure classe de 2nde. Cette finale a eu lieu en mai dans l'enceinte du château de Caen et fut principalement basée sur la mesure de grandeurs inaccessibles utilisant notamment des copies d'instruments de mesure anciens tels le bâton de Jacob.

Seule une autre édition, celle de 2006, a également été assortie d'une finale, au mémorial de Caen, autour de problèmes de cryptographie (en lien avec la machine énigma dont le mémorial possède un exemplaire).

Entre 2004 et 2013, le programme Rdv utilisé par les élèves pour avoir connaissance des problèmes, a été conçu sous la forme de pages pdf protégées par mot de passe.

A partir de l'édition 2014, le Rdv est un fichier exécutable au format « flash », format conçu au départ pour faire de l'interactivité mais aussi et surtout de l'animation. C'est cette dimension que nous avons voulu intégrer. Ainsi la compréhension de certaines des énigmes est parfois basée non seulement sur un texte mais aussi sur l'observation d'une image animée. Ce sont des énigmes d'une autre nature qui peuvent ainsi être proposées.

- **Niveaux concernés :**

3e et 2nde .
Jour de l'épreuve : en général un vendredi au mois d'avril.
Durée de l'épreuve : 1h30

- **Partenaires :**

CASIO ; TANGENTE ; APMEP

- **Contact :**

rdvmath-caen@laposte.net
Site du rallye : **http://irem.crdp.ac-caen.fr/rallye/debut.php**

LA MOSAIQUE DE CARRES (RDV 2014)

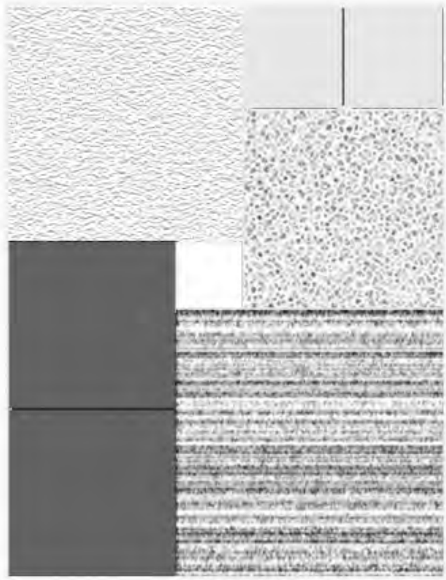
Enoncé de l’énigme :

Le rectangle ci-contre
est une mosaïque de 8 carrés.

Le côté du plus petit carré
(en rose) mesure 142 mm.

Quelles sont les dimensions du
grand rectangle ainsi formé ?

La réponse attendue est l’aire
de ce rectangle en mm².



Légende du dessin

- **Solution :**

Prenons par exemple comme inconnue la longueur en mm d’un des deux carrés identiques en haut à droite, et notons-la x .

On en déduit, étape par étape, une expression de la longueur des côtés des autres carrés en fonction de x.

Les deux côtés, supérieur et inférieur, ayant même longueur, on obtient l’équation :

$3x - 142 + 2x = x + 142 + 2x + 142$

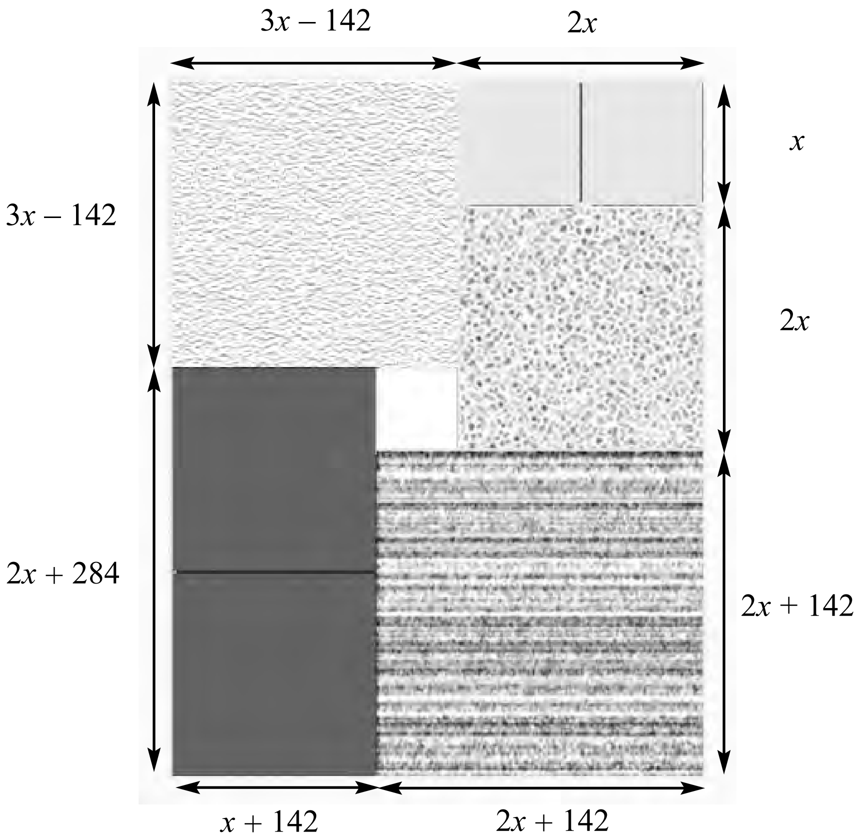
Soit en simplifiant : $x = 213$

D'où les dimensions suivantes du rectangle :

Largeur : $3x + 284 =$ **923 mm**

Longueur : $5x + 142 =$ **1 207 mm**

Aire : **1 114 061 mm²**



- **Pourquoi cette énigme ?**

- L'énoncé est court, avec une figure simple, formée uniquement de carrés et une seule donnée numérique.

- Un des atouts de cette énigme est de faire prendre conscience aux élèves que la seule donnée du côté du carré blanc suffit à définir entièrement les dimensions de la mosaïque. (Etonnant non ?)

- Nous espérions une mise en équation du problème. Le choix de l'inconnue est laissé à l'initiative de l'élève ce qui nous plaît également.

- **Aide proposée lors du rallye :**

Dans le rallye dynamique et virtuel, les élèves ont la possibilité de prendre une aide. (Ce qui enlève 2 points à leur score (sur les 5 points prévus initialement) mais peut leur permettre d'avancer dans la résolution.) Sur cette énigme nous leur avons proposé l'aide suivante : « On note x la longueur du côté d'un carré jaune. Exprimez la largeur du grand rectangle de 2 façons différentes en fonction de x. »

Nous avons beaucoup débattu sur cette aide. Comment aider les élèves sur cette énigme sans imposer une méthode ? N'est-il pas dommage de proposer le choix de l'inconnue au risque de couper toute prise d'initiative ? D'un autre côté, si les élèves demandent une aide, c'est qu'il y a un blocage. L'aide doit donc réellement leur être utile. Il n'est pas évident de trouver le juste équilibre entre ces deux impératifs. D'autant qu'il s'agit d'une aide à distance… contrairement à ce qui se passe en classe où l'élève pose directement la question au professeur.

- **Réinvestissement en classe :**

Cette énigme a été proposée en différenciation dans 2 classes de 3^{e} lors d'un chapitre sur les équations et inéquations. Elle a été donnée en exercice supplémentaire pour les élèves les plus performants qui se sont attelés à la tâche avec plaisir. (4 élèves dans une classe et 2 élèves dans l'autre.)
Une fois l'idée d'utiliser comme inconnue l'un des côtés des carrés, les élèves s'amusent beaucoup à exprimer les différents côtés des autres carrés en fonction de l'inconnue choisie. Il y a un plaisir à trouver les différentes expressions de proche en proche.
De même que plusieurs élèves ont pu constater avec satisfaction qu'ils avaient la même solution finale en ayant choisi des inconnues différentes et en ayant obtenu des équations différentes.
En revanche, j'ai constaté que certains élèves expriment la longueur du rectangle de 2 façons différentes en fonction de x… mais ne pensent pas à transformer cette observation en équation et donc ne parviennent pas à conclure.
Une (bonne) élève a même exprimé l'aire en fonction de x en espérant que les « x » allaient « s'annuler » m'a-t-elle dit, lors du calcul de l'aire.

- **Prolongement avec un logiciel de géométrie dynamique :**

Avec Géogébra, on peut facilement montrer aux élèves que cette figure ne fonctionne que pour une seule valeur possible de longueur et de largeur du rectangle. (Sinon l'assemblage des 8 carrés « ne se ferme pas » pour reprendre l'expression des élèves.) La construction n'est pas très compliquée et plutôt amusante.

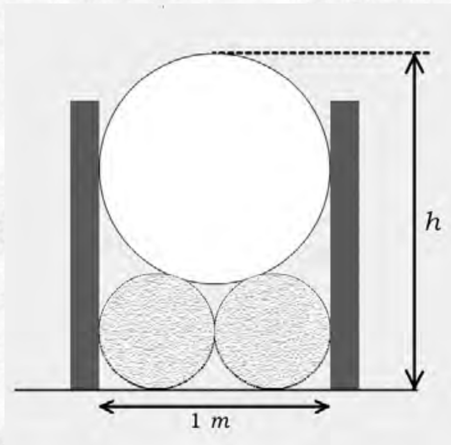
L'OBSTACLE (RDV 2014)

Enoncé de l'énigme :

Voici un obstacle pour l'épreuve de saut des jeux équestres mondiaux à Caen.

Sachant que l'écart entre les poteaux est d'un mètre,

quelle est la hauteur de l'obstacle ?



- **Solution :**

L'obstacle mesure 1457 mm

- **Pourquoi cette énigme ?**

Dans le rallye que nous réalisons, comme nous nous adressons à des élèves de 2nde et de 3e, nous essayons de proposer chaque année des énigmes qui utilisent des propriétés et théorèmes de géométrie classique. (Pythagore, Thalès, propriétés des triangles et des cercles…).
Cette énigme présente des critères intéressants pour le rallye :

- Le sujet est court avec peu de données, un peu à la manière d'un sangaku. (Ici une seule véritablement : la largeur entre les poteaux.)

- Le lien avec une situation réelle et la simplicité apparente de la figure. (Apparente car les élèves qui ont constaté que ce n'était pas si simple de faire une figure précise à l'échelle…)

- L'outil mathématique le plus simple pour résoudre cette énigme (ici le Théorème de Pythagore) n'est pas induit pas l'énoncé. (Pas de triangle rectangle.)

- Les élèves vont devoir prendre des initiatives. (Faire apparaître les centres des cercles, un triangle isocèle, une hauteur…)

- Pas de grosse difficulté de calcul et donc un temps raisonnable pour la résolution, ce qui est important dans un rallye comme le nôtre d'une durée de 1h30.

- **Quel réinvestissement possible en classe ?**

Cette énigme est typiquement une tâche complexe de niveau 3^{e} /4^{e} . On peut la donner en classe ou en exercice de recherche à la maison. Il est intéressant de demander aux élèves de laisser toutes les traces de leurs recherches afin de comprendre leur raisonnement. (Ce qu'on ne demande pas pour ce rallye où seule la réponse est attendue, sans justification.)

Il est facile de proposer des coups de pouces simples pour aider à la résolution en fonction du niveau des élèves. Exemples d'aides possibles :

Aide n°1 : trace la figure à l'échelle. Fais apparaître les centres.

Aide n°2 : que dire du triangle formé par les 3 centres ? Peut-on calculer sa hauteur ?

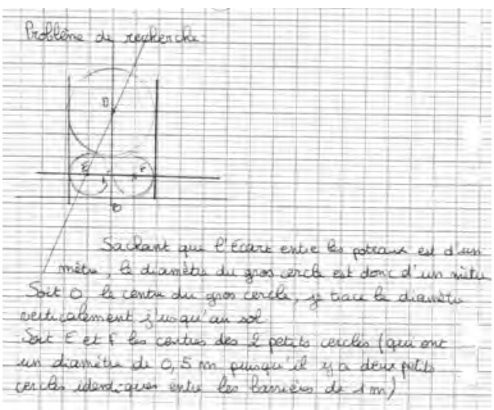
Quelques observations sur le travail d'élèves de deux classes de 3^{e} :

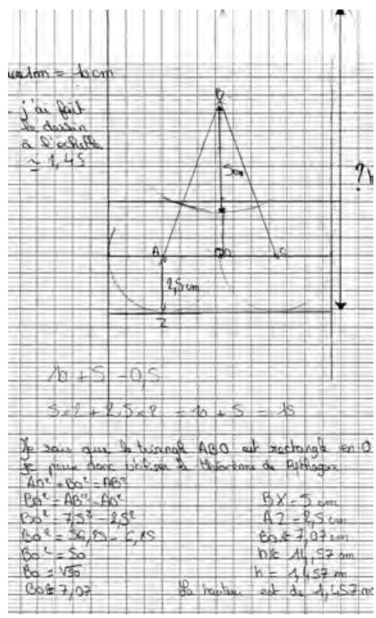
- Un nombre important d'élèves a considéré que l'obstacle mesurait 1,50 m de haut exactement par manque de rigueur.

- Certains ont écrit que la hauteur serait légèrement inférieure à 1,50 m sans pouvoir être plus précis.

- Une minorité a fait un dessin à l'échelle pour s'approcher de la réponse.

- Quelques élèves ont réussi la tâche sans aide. En voici un exemple :



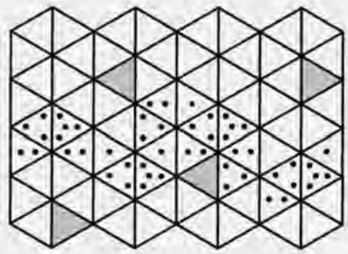


LE DE TETRAEDRIQUE (RDV 2014)

Enoncé de l'énigme :

Sur le quadrillage ci-contre, on a fait rouler sans glisser un dé à 4 faces identiques ayant la forme d'un triangle équilatéral.
Les faces du dé ont laissé leur empreinte sur le papier. Certaines empreintes sont encore visibles, les autres ont été effacées.

Retrouvez le nombre de points imprimés sur chacun des 4 triangles gris.



La réponse demandée est le produit de ces quatre nombres.

- **Solution :**

Le produit des quatre nombres est : $(4 \times 3 \times 4 \times 4) = 192$

- **Méthodes de recherche :**

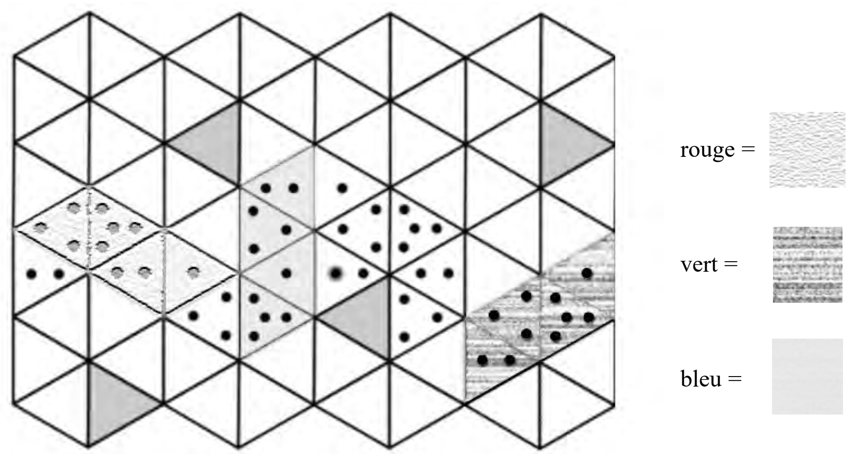
Cette énigme est ce que nous appelons un bonus ; c'est-à-dire que la résolution n'est pas nécessaire pour poursuivre le rallye. Les bonus sont classés en trois catégories de difficulté ; celui-ci fait partie des plus simples.

C'est une énigme qui peut faire appel à de la géométrie dans l'espace (construction d'un tétraèdre régulier), ou simplement de l'observation de transformations du plan directement sur le quadrillage.

Construction d'un dé :
Une première idée peut être de construire le dé de l'énigme afin de la faire « rouler » sur le quadrillage. Les élèves qui veulent le construire peuvent chercher un patron possible : quatre faces, chacune étant un triangle équilatéral ayant un côté commun avec au moins un des trois autres triangles.
Alors des questions se posent :
Comment placer les points sur les faces ?
La façon de les placer peut-elle engendrer des dés différents ?
En faisant des essais on comprend qu'il y a deux possibilités. Laquelle est la bonne ?

On peut aussi avoir l'idée de découper le patron directement sur le quadrillage. On s'aperçoit qu'on ne peut pas choisir quatre triangles adjacents quelconques (par exemple quatre triangles adjacents d'un même hexagone).

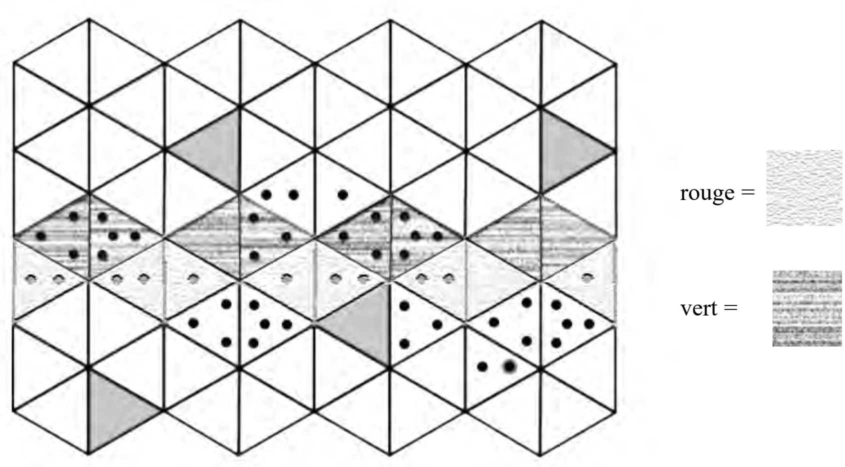
Il suffit de choisir quatre triangles adjacents portant des nombres différents.



Ce peut être quatre triangles formant un triangle équilatéral dont les dimensions sont doubles.
Ou quatre triangles formant un parallélogramme dont deux côtés opposés ont des dimensions doubles des deux autres.
Exemple en rouge, en vert ou en bleu.

On observe aussi que l'on peut opérer une translation de ces « bandes » (c'est-à-dire répéter la suite des quatre nombres mis en évidence : par exemple en rouge 3 ; 4 ; 2 ; 1)
Ceci permet de compléter le quadrillage et donc de résoudre l'énigme.
Observation de tranformations du plan sur le quadrillage :

On peut observer des « bandes » constituées alternativement des nombres 1 et 2 (en rouge) ; mais aussi des nombres 3 et 4 (en vert).



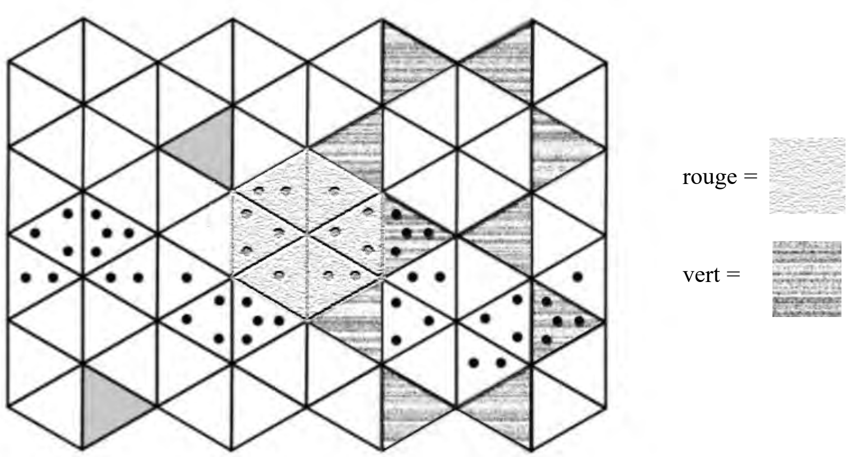
Comment sont construites ces « bandes » :
Une fois le motif de départ choisi (deux triangles adjacents de même couleur), on le répète par symétrie centrale ou axiale.

Ce qui permet de compléter le quadrillage et de résoudre l’énigme.

On peut également observer que dans chaque hexagone régulier constitué de 6 triangles équilatéraux, les triangles qui sont opposés par la pointe portent le même numéro (ce qui met en place une symétrie centrale ; exemple en rouge).

On peut donc colorier (en vert par exemple) les trois triangles opposés par le sommet à un triangle portant le numéro 4.

De proche en proche, on peut atteindre les faces recherchées.



Il est artistique de constater que l’on peut compléter entièrement ce quadrillage par un assemblage de quatre couleurs dessinant chacune des « étoiles » entrelacées.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE BRUXELLES

PRÉSENTATION

Le rallye est destiné aux élèves de 1ère et 2e secondaire de l'enseignement belge (ce qui équivaut aux classes de 5e et 4e de collège en France). Chaque classe a une heure pour résoudre collectivement cinq énigmes, présentées autour d'un sujet donné.
Les meilleures classes sont sélectionnées pour la finale, où elles doivent cette fois résoudre successivement quatre énigmes.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Ce Rallye Mathématique a été organisé pour la première fois en 2003, avec la collaboration du Rallye mathématique de Toulouse. Il a pris par la suite son indépendance. Il rassemble actuellement plus de 1000 élèves. De futurs enseignants de la Haute Ecole Francisco Ferrer participent activement à l'élaboration des questions et aux corrections.

Partenaires :

Haute Ecole Francisco Ferrer, Unité d'Enseignement et de Recherche *Mathématiques appliquées* et Catégorie Pédagogique.
Ville de Bruxelles
IREM de Bruxelles
Casio pour le rallye 2013

Epreuves :

Epreuves par classe (5e et 4e).
Enigmes proposées sous forme ludique sur un thème donné (Labyrinthes, eau, graphes, lumière, ...) pour susciter l'intérêt et l'envie de chercher.

Compétitions :

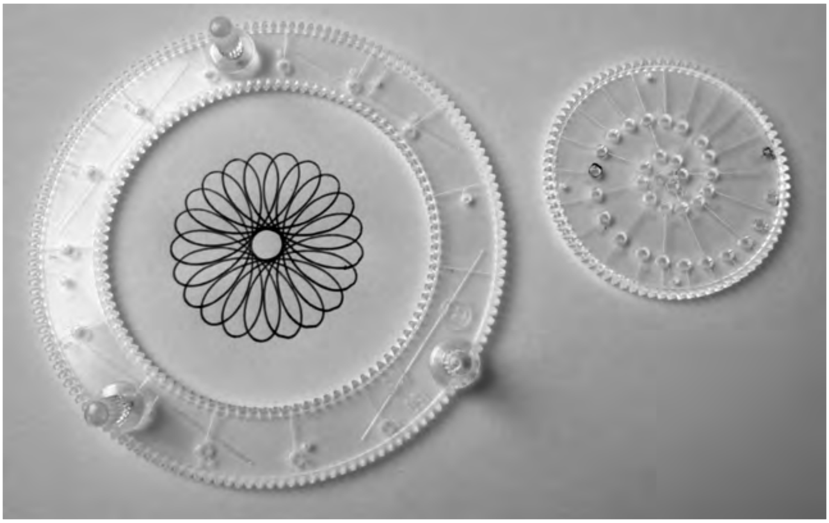
Eliminatoires : en février – mars (une heure durant le temps scolaire)
Finale en avril – mai.
En 2013, celle-ci a été organisée pendant *Maths en rue*, animations mathématiques proposées aux classes et à tout public. Les questions étaient adaptées à l'emplacement de l'événement : place de la Monnaie à Bruxelles.

Contact :

Joëlle Lamon
: **joellelamon@yahoo.fr**
Site Internet : **www.jeuxmaths.be**

THÈME 2013 : MATHS À L'EAU

• Question 1 : "Le flocon de neige"

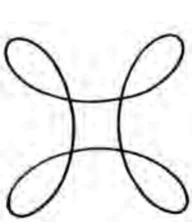
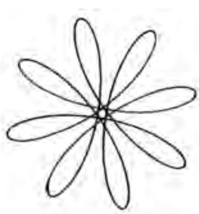
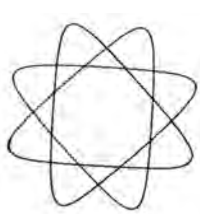
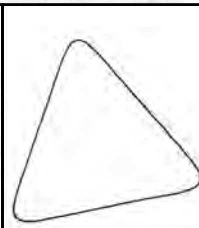


Pauline a retrouvé son vieux spirographe. Elle s'occupe de la décoration pour les fêtes de fin d'année.

Avec une couronne de 100 dents et un disque de 25 dents, un tour complet le long de la couronne permet de dessiner une figure à 4 branches, alors que pour un disque de 40 dents, il faut deux tours complets (soit 200 dents) pour réaliser une figure à 5 branches.

Le trou où l'on place le stylo bille ou le marqueur n'a pas d'influence sur le nombre de branches.

Voici quelques essais faits avec la couronne à 96 dents en variant les disques.

72 dents	60 dents	36 dents	32 dents
			

Elle veut dessiner une figure à 6 branches pour évoquer un flocon de neige. Pour cela, elle veut utiliser un disque à placer à l'intérieur d'une couronne. Couronnes proposées : 105 dents et 96 dents. Disques proposés : 84 - 80 - 75 - 72 et 35 dents.

Quelles couronnes et quels disques peut-elle utiliser ?

Quel est votre raisonnement ?

Analyse de la question
Domaine : Nombres : Multiples et diviseurs, PGCD, PPCM.
Cette question est l'occasion de redécouvrir les possibilités de ce jeu oublié, qui existe d'ailleurs maintenant sous la forme d'application en ligne.
Une première difficulté consiste à repérer qu'il s'agit ici d'une utilisation du PPCM de deux nombres.
L'exemple sert à aider au cadrage de la situation.

- **Correction**

Ce PPCM devra valoir 6 fois le nombre de dents d'un disque, soit $6 \times 80 = 480$ ou $6 \times 35 = 210$ ou $6 \times 72 = 432$ ou $6 \times 84 = 504$ ou $6 \times 75 = 450$.
Parmi ces nombres, 480 est un multiple de 96 et 210 est un multiple de 105.

Il reste à vérifier que 480 est bien le plus petit commun multiple de 96 et 80 et que 210 est bien le plus petit multiple de 105 et 35, ce qui n'est pas vrai puisque 105 est déjà un multiple de 35. Très peu de classes ont fait cette observation

La seule réponse qui convient est donc ***la couronne de 96 dents et le disque de 80 dents.***

Commentaires
Souvent, les élèves se sont contentés d'une solution trouvée et n'ont pas fourni de raisonnement complet.

Question 2 : "Le Tonnelet Gelé"

Je possède un tonnelet cylindrique.

Il est rempli complètement avec 12 litres d'eau. Je voudrais congeler l'eau et obtenir le plus grand glaçon possible sans dépasser le bord du cylindre.

Quand l'eau gèle, son volume augmente environ de 9 %.

BRRRRR !!

Quelle est la quantité d'eau (en cl) à retirer du tonnelet avant de le mettre au congélateur ?

Analyse de la question
Domaine : problèmes de proportionnalité directe.
Ce sujet pourrait être repris en physique.

- **Correction**

Volume d'eau initial : x litres (après avoir retiré de l'eau)
Volume de l'eau gelée :$1200cl = x \times 1,09$.
Recherche du volume d'eau initial (en cl) : 1200 : 1,09 = 1100,917 cl
Il faudra retirer 1200 cl -1100,917 cl = 99,083 cl.

Commentaires
Plusieurs classes ont oublié le dernier calcul.
La première partie du problème a donné lieu à un très grand nombre d'erreurs.

Question 3 : "Une Peluche à L'eau"

Arthur et son fils Quentin se baladent en kayak. L'embarcation remonte le canal à une vitesse constante qui est, par rapport à l'eau, de 4,2 km/h. La vitesse du courant est de 0,6 km/h, ce qui signifie que s'il n'y avait pas de courant, l'embarcation aurait une vitesse de 4,8 km/h.

Tout à coup, la peluche de Quentin tombe à l'eau à cause du vent et se coince immédiatement entre deux rochers. Il ne s'en rend compte que 6 minutes plus tard et se met à pleurer. Arthur fait demi-tour (ce qui lui prend 30 secondes) et pagaie avec la même énergie pour redescendre le canal, aidé cette fois par la vitesse du courant.

En 6 minutes, quelle a été la distance parcourue par l'embarcation ?

Combien de temps au total Quentin aura-t-il été privé de sa peluche ?

> ***Analyse de la question***
> *Domaine : problèmes de proportionnalité directe, problèmes complexes.*
> *Ce problème est sans doute fort complexe à ce niveau, mais les nombreux indices donnés aident à sa résolution.*
> *Le sujet pourrait être repris en physique.*

Correction

Espace parcouru sans peluche :
6 min $\times$ 4,2 km/h = 1/10 $\times$ 4,2 km = 420 m
Temps pour faire demi-tour :
30 secondes
Temps de remontée :
420 m : 5400 m/h = 42/540 h = 42/9 minutes = 4 minutes 40 secondes
Temps total :
6 min + 30 sec + 4 min 40 sec = 11 minutes et 10 secondes

> ***Commentaires***
> *Dans ce problème, tenir compte du courant a été une première grosse difficulté.*
> *Beaucoup de classes ont additionné des minutes décimales et des secondes, ou se sont trompées dans les conversions.*

Question 4 : " L'eau de la Terre"

Les $\frac{7}{10}$ de la Terre sont recouverts d'eau.
Seulement $\frac{1}{40}$ de cette eau est de l'eau douce.
Cette eau douce se répartit ainsi :
$\frac{3}{1000}$ vient des rivières
$\frac{3}{10}$ vient des ressources souterraines,
le reste est stocké dans les glaciers.

Quel pourcentage de l'eau totale représente l'eau douce venant des rivières ?
(Si nécessaire, on prendra pour rayon de la Terre, supposée sphérique, 6378 km)

Analyse de la question
Domaine : Problèmes de pourcentages et opérations sur ceux-ci.
Ce problème, assez simple, contient de nombreuses données inutiles demandant aux élèves un tri dans celles-ci. Il peut permettre ensuite un lien vers d'autres cours.

- **Correction**

L'eau douce venant des rivières représente 3/1000 de l'eau douce, qui représente 1/40 du total de l'eau.

L'eau douce venant des rivières représente donc 0,000075 × 100 % du total de l'eau, soit 0,0075 % du total de l'eau.

Commentaires
Une erreur fréquente a été de multiplier des % et des % et de considérer ensuite que le produit obtenu était exprimé en centièmes ou % et non en dix-millièmes.

Plusieurs classes se sont laissées piéger par les données inutiles, ou n'ont pas répondu à la question posée.

Question 5 : "La piscine"

Rosa veut terminer la construction de sa piscine se trouvant dans le jardin. Pour cela, elle nous demande de l'aide. Cette piscine mesure 10 m de long, 4 m de large et 1,60 m de haut. Dans un premier temps, elle aimerait savoir combien elle va devoir débourser pour le carrelage à poser sachant que les carrelages ont la forme de carrés dont le côté mesure 20 cm et qu'une boîte de 25 carrelages coûte 15 €.

Combien va-t-elle payer ? Quel est votre raisonnement ?

Dans un second temps, elle se demande combien de litres d'eau seront nécessaires pour remplir la piscine sur une hauteur de 1,40 m.

Donner le nombre de litres et votre raisonnement.

Analyse de la question
Domaine : Calculs d'aire et de volume d'un solide, proportionnalité directe. Ce problème est assez classique

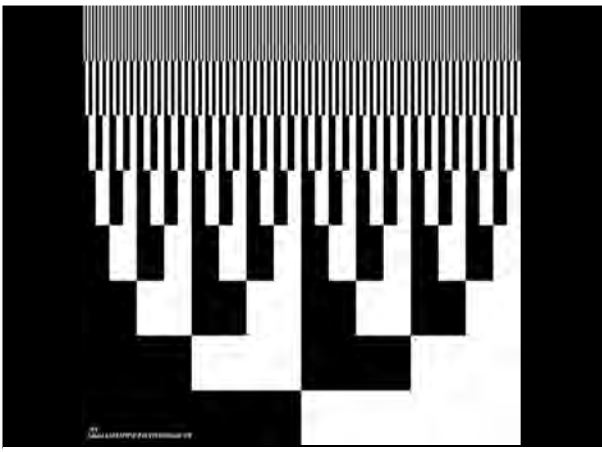
- **Correction**

Première partie :
Nombre de carrés pour la base : $20 \times 50 = 1000$
Nombre de carrés pour les faces latérales avant et arrière : $2 \times 8 \times 50 = 800$
Nombre de carrés pour les faces gauches et droites : $2 \times 8 \times 20 = 320$
Nombre total de carrelages : 2120
Nombre de boîtes nécessaire (arrondi à l'unité supérieure) : $2120 : 25 = 84{,}8 \rightarrow$ 85 boîtes
Prix à payer : 75×15 € = 1275 €.

Deuxième partie :
Volume d'eau souhaité : $4 \times 10 \times 1{,}40 \text{ m}^3 = 56 \text{ m}^3$
Rosa aura donc besoin de 56 000 litres d'eau pour remplir sa piscine.

Commentaires
Ce problème, assez classique, a donné lieu à de nombreuses confusions dans les unités ou les objets : les nombres semblant avoir alors peu de sens pour les élèves.

Notons aussi quelques erreurs dans les conversions.



Clavier de piano fractal
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHÉMATIQUE DE HAUTE-NORMANDIE

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Le rallye Mathématique de Haute-Normandie a été créé en 2001 et a eu lieu tous les ans depuis. Il en est donc à sa 15^{e} édition ! Il a été en quelque sorte « importé » de l'IREM de Toulouse à celui de Rouen grâce aux rencontres Inter-IREM. A l'origine, il ne concernait que les classes de 3^{e} et de 2^{nde}. Il a constamment évolué et s'adresse maintenant aussi aux classes de CM2 et de 6ème depuis 2007 et à celles de Terminales (S et ES) et de Bac+1 depuis 2013. Mais les bases en sont restées les mêmes et surtout sa caractéristique essentielle : il s'agit d'une compétition inter-classes.

- **Compétition :**

Cette année, le nombre de participants est de **16541** venant de 624 classes différentes et qui se répartissent comme suit :

- CM2 : 98 classes – 2234 élèves
- 6ème : 238 classes – 6058 élèves
- 3ème : 160 classes – 4270 élèves
- 2nde : 100 classes – 3139 élèves
- Terminale : 22 classes – 618 élèves
- Bac + 1 : 6 classes – 222 élèves

- **Niveaux d'études :**

CM2 – 6^{e}– 3^{e} – 2^{nde} – 2^{nde} technologiques – Terminales – Bac + 1

- **Type d'épreuves proposées :**

Il s'agit d'épreuves en classes (classes entières). Les élèves s'organisent par petits groupes, comme ils le souhaitent, selon une stratégie généralement établie à l'avance.

- **Fréquence :**

Le rallye se décompose chaque année en 2 épreuves : l'une en classe, qualificative pour la seconde épreuve : elle se déroule le premier jour de la semaine des Maths et la seconde, la finale, ne s'adresse qu'aux 3 classes qualifiées par niveau ; elle se déroule à l'Université un vendredi du mois de mai. Au cours de ces 2 épreuves, les élèves travaillent par classe entière et doivent s'organiser, trouver une stratégie qui leur permettra de remettre, au terme du temps imparti, un seul bulletin-réponse pour l'ensemble de la classe. Les exercices variés et plutôt ludiques font appel à un large éventail de connaissances mathématiques, ainsi qu'au bon sens et à la logique. A de très rares exceptions près, aucune justification de réponse n'est demandée, mais les élèves doivent souvent justifier la solution qu'ils proposent pour l'imposer au reste de la classe. Le principe du rallye est que tous les élèves d'une même classe réfléchissent ensemble sur une série de problèmes. Un des principaux objectifs de cette manifestation est de favoriser le travail en équipe et l'intelligence active.

- **Durée**

Une heure pour les épreuves en classes qualificatives, non limitée pour la finale. Mais le temps de réponse est chronométré le jour de la finale ; cela fait partie de la stratégie qu'ils doivent mettre en place : répondre vite mais en prenant des risques ou réfléchir à toutes les possibilités, envisager tous les cas,... en prenant le risque d'être éliminé au temps !

- **Les défis**

Les problèmes sont les mêmes pour deux niveaux consécutifs :
CM2/6^{e} – 3^{e} /2nde – Terminales/Bac + 1

Nous prenons beaucoup de temps pour créer les épreuves. Nous nous efforçons qu'une grande majorité des défis que nous proposons soient des sujets originaux. L'équipe n'a cessé de s'agrandir au fur et à mesure de l'extension du rallye à de nouveaux niveaux d'études. Le groupe rallye comprend désormais 7 membres :

– 2 enseignants de l'école élémentaire,
– 1 enseignant du collège,
– 2 enseignants du lycée,
– 2 enseignants du supérieur.

- **Les spécificités de chaque épreuve**

Bien que très proches dans l'esprit et toujours fidèles à nos objectifs initiaux (compétitions entre classes entières qui était le point de départ du rallye pour les classes de 3^{e} et de 2nde), les 2 nouvelles épreuves ont amené avec elles quelques nouveautés :

– L'épreuve de CM2/6^{e} est basée tous les ans sur un thème dans lequel on trouve l'origine de chaque défi proposé : il y a eu ces dernières années les Jeux Olympiques, la gastronomie, les voyages,...

– l'épreuve de Terminale/Bac + 1 est celle où on retrouve la plus grande disparité de niveaux entre les élèves participants ; par exemple entre les élèves de Terminales ES et ceux de Maths Sup MPSI.

Comme nous tenions à proposer malgré cette difficulté une épreuve commune à tous ces niveaux, nous avons instauré un choix des défis de la part des élèves : le sujet comporte 13 ou 14 défis, mais les élèves ne doivent répondre qu'à 7 d'entre eux (7 exactement !) ; ils doivent donc faire le choix des défis qu'ils vont tenter de relever. Pour les guider dans leur choix, ils n'ont qu'une information : les 14 défis sont classés du plus simple au plus difficile et, plus ils sont difficiles, plus ils rapporteront de points, bien sûr. Les classes doivent donc doser le risque qu'ils ont envie de prendre en répartissant les 7 défis qu'ils résolvent entre les premiers défis faciles mais qui rapportent peu et ceux en bas de la feuille qui rapportent gros mais où le risque est d'avoir tout simplement .... zéro !

On s'aperçoit que les élèves sont des fins stratèges et le choix des exercices traités prend beaucoup de place dans la séance....

- **La finale**

Elle se déroule à l'université en mai. Elle entre dans le cadre d'une journée de festivités scientifiques et ludiques où se succèdent épreuves du rallye, visites de laboratoires de recherche de l'université, ateliers de découvertes de musiques et de jeux mathématiques présentés par l'APMEP. La journée se termine par une remise des récompenses autour d'un buffet en présence de nombreux enseignants ayant inscrit leur classe, des inspecteurs d'académie et de nos partenaires.

- **Liste des principaux partenaires :**

CASIO – Crédit Mutuel (de Seine-Maritime) Enseignants – VILLETARD – la CREA – Ville de Pont-Audemer – Ville de Louviers – Ville de Dieppe

Le rallye de Haute-Normandie est gratuit !

C'est une constante depuis sa création et nous y tenons malgré les difficultés toujours plus nombreuses pour trouver des subventions pour organiser le rallye et surtout la finale dans de bonnes conditions.

L'équipe du rallye est constitué en 2015 de :

CM2/6e :
- Christine BLAISOT - professeur des écoles
- Philippe DELBART - professeur des écoles

3e/2nde :
- Patrick FRÉTIGNÉ – PRAG
- Saïd BOUARISS – professeur en collège

Terminales/Bac + 1
- Anne-Marie LISEICKI - professeur en lycée
- Patrick FRÉTIGNÉ – PRAG
- Frédéric VIVIEN – professeur en lycée

- **Contact :**

Patrick FRÉTIGNÉ :
: **pf@univ-rouen.fr**
Secrétariat (de l'IREM) :
: **secretariat.irem@univ-rouen.fr**
Site Internet : **http://irem.univ-rouen.fr/node/rallye/**

Je vous propose d'étudier les énoncés et quelques défis proposés au rallye ces 2 dernières années. Ils sont classés par ordre croissant de niveau :

- Les épreuves de CM2/6e

- Les épreuves de 3e/2nde

- Les épreuves de Terminale/Bac +1

1. LES ÉPREUVES DE CM2/6ÈME

Défi 7 – 2014 :

The baker cooks 67 cakes : some are round and some are square.
He puts the cakes in twelve boxes : 5 round cakes in each round box and 6 square cakes in each square box.

Every box is full at the end and there isn't any cake left.

How many round and square boxes has he got ?

- **Solution :**

On peut commencer par compter les gâteaux ronds 5 par 5, tout en utilisant le fait que les multiples de 6 ne finissent jamais par 7, donc on peut compter les gâteaux ronds plutôt 10 par 10 en partant de 5. On s'aperçoit vite que le seul multiple de 6 qui finisse par 2 est 42. À partir de là, la solution apparaît rapidement : 42 gâteaux carrés et 25 gâteaux ronds, ce qui donne 7 boîtes pour les gâteaux carrés et 6 pour les ronds.

Commentaires

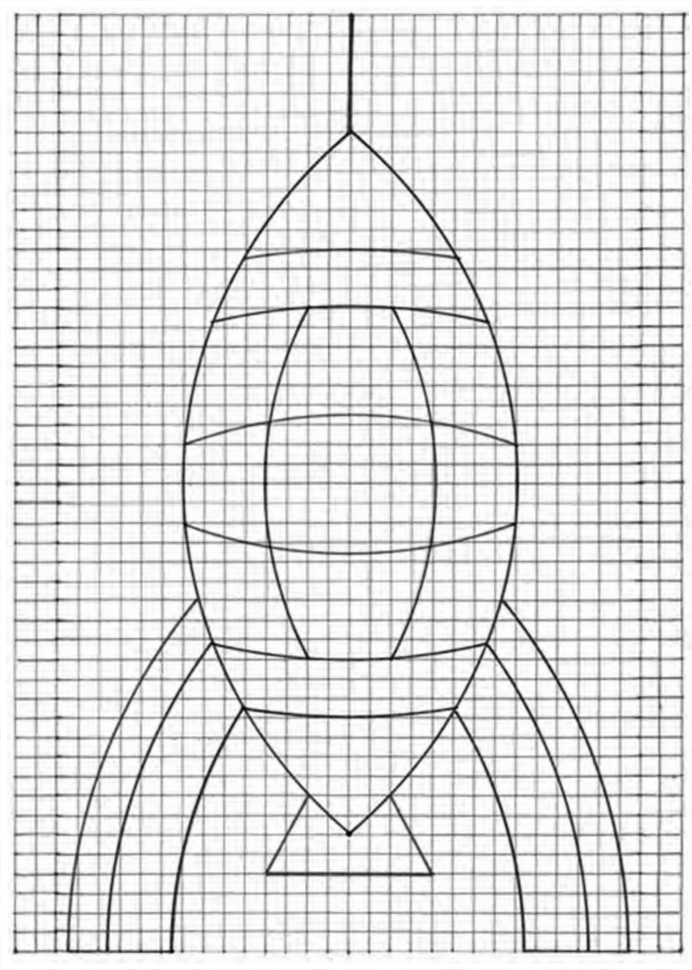
Le « tâtonnement » pour résoudre ce problème est la seule issue quand on est élève de CM2 ou de 6ème. Mais un tâtonnement qui a pu être facilité pour certains qui ont pensé utiliser les propriétés assez intuitives des multiples de 5 et de ceux de 6. C'est un des atouts de ces épreuves de rallyes : montrer toutes les facettes de la démarche scientifique. Et l'élimination des solutions à retirer, tout en optimisant cette recherche par la meilleure utilisation possible des données en est une ! Pas de honte, bien au contraire, à ne pas avoir recours systématiquement à la mise en équation.

The défi en anglais de l'année ! Vous l'avez évidemment remarqué. La première année, ça avait rebuté certains élèves et énervé certains enseignants : décidément, les langues étrangères, ça pose problème dans notre pays ! Nous ne sommes pas prêts de concurrencer les hollandais ou les scandinaves sur ce point … Maintenant, toutefois, c'est en quelque sorte rentré dans les habitudes : les élèves et leurs enseignants y sont préparés. Les dictionnaires sont prêts quand l'heure du rallye arrive ! Et quelques élèves mettent un point d'honneur à nous répondre dans la langue de Shakespeare !

Chapeau ! Euh « Hats off !» voulais-je dire.

Défi 10 – 2015 :

Reproduisez la fusée sur une feuille à petits carreaux en la réduisant de moitié.



Commentaires

Là aussi une constante, mais seulement dans nos épreuves de CM2/6e : reproduire un dessin à une échelle différente de celle du dessin proposé. Un élève s'y consacre avec beaucoup de soin généralement dans chaque classe participante.

LES ÉPREUVES DE 3E/2NDE

Défi1 – 2014 : Le nombre de Kaprekar !

Voici un nombre : 4965. On réorganise ce nombre :
1°) en écrivant les chiffres qui le composent par ordre croissant,
2°) en écrivant les chiffres qui le composent par ordre décroissant.
On obtient ainsi 2 nouveaux nombres. On soustrait le plus petit de ces 2 nombres au plus grand et on recommence l'opération avec le résultat obtenu. On ne s'arrête que quand le nombre ne varie plus.

Quel est alors le nombre obtenu ?

Dattatreya Ramachandra Kaprekar
Mathématicien indien (1905-1986)

- **Solution :**

On réorganise le nombre 4965 comme indiqué dans l'énoncé : ça donne 9654 et 4569. On effectue la soustraction 9654-4569, ce qui donne un nouveau nombre : 5085
et on recommence !
On obtient ainsi la suite de nombres suivante :
4965 – 5085 – 7992 – 7173 – 6354 – 3087– 8352 – 6174
Le nombre 6174 génère 2 nombres : 7641 et 1467 et quand on effectue la soustraction de ces 2 nombres, on obtient 6174. La suite s'arrête là et le nombre recherché est donc **6174**.

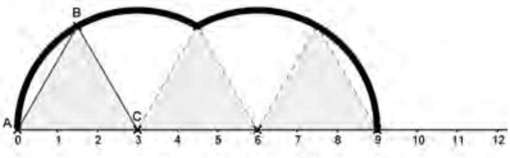
Commentaires
Petite touche historique (avec photo : c'est encore mieux !) : dès qu'on est en mesure de le faire, on ne s'en prive pas ! Quant au défi lui-même, il apporte selon nous le petit frisson que l'on ressent quand on aborde ce type de problème : on le lit, on commence les premiers calculs et on ne sait pas quand et même SI notre suite va converger. La convergence effective de notre calcul apportera le soulagement : si ma suite d'opérations converge, c'est que je dois avoir LA solution. Pour celui, plus scrupuleux (ou plus mathématicien) qui se demande ensuite s' il pouvait y avoir d'autres solutions, le singulier utilisé dans le titre du défi rassure certainement. Nous n'avons pas entendu parler d'élève qui soit allé jusqu'à partir d'un autre nombre que celui qui était proposé pour voir si la suite créée aboutissait elle aussi sur 6174 (vous sommes en temps limité ici et les meilleurs élèves sont souvent très sollicités par le reste de la classe pour résoudre un grand nombre de défis). Mais c'est ce genre de compléments que les enseignants proposent souvent à leurs élèves, le jour où ils corrigent le sujet du rallye en classe.

Défi 2 – 2015 :

Un triangle équilatéral ABC, de côté 3 cm, effectue des rotations sur une droite (d) autour de ses sommets. Dans sa position initiale, les sommets A et C sont sur la droite (d). On effectue une première rotation autour de C pour amener le point B sur la droite (d), puis on effectue une deuxième rotation autour de B pour amener le sommet A sur la droite (d) et on continue, toujours dans le même sens le long de la droite (d).

a) Dessiner le trajet parcouru par le sommet A pendant deux rotations.

b) Combien de rotations faut-il effectuer pour que la longueur du trajet parcouru par A dépasse 2015 cm ?



- **Solution :**

A la première rotation, A parcourt 2π ; à la seconde, même chose ; à la troisième, le point A est fixe puisqu'il s'agit d'une rotation de centre A.
Donc après trois rotations il a parcouru $4\ \pi$.
Pour arriver à un trajet de 2015 cm, il faut $2015/4\pi$ séries de trois rotations, soit environ 160,35 soit un peu plus que $480/3 + 1/3$
Effectivement, après 160 séries de trois rotations, soit 480 rotations, la distance parcourue est encore inférieure à 2015 cm (2010,62 cm), après 481 rotations aussi, il a alors parcouru environ 2013,76 cm :
Il faut 482 rotations pour que la longueur du trajet parcouru par le point A dépasse 2015 cm.

Commentaires
Ce défi géométrique constitue un des défis les moins réussis que nous ayons été amenés à corriger. Les raisons ? Multiples, bien sûr. Certes il y a toujours des difficultés avec les sujets de géométrie, mais nous pensons qu'ici il y a eu en plus une mauvaise compréhension du sujet et plus particulièrement du mouvement du triangle. Les rotations ne sont pas bien maîtrisées, c'est certain, mais en plus ici le centre de la rotation change à chaque rotation. Il fallait aussi penser qu'une fois toutes les trois rotations, il s'agit d'une rotation autour du point A et que donc, pendant cette rotation, le point A ne parcourt aucune distance. La manipulation du nombre réel π associé dans une opération à des nombres entiers en est une autre et enfin, il y a cette difficulté à la fin (le fait qu'elle arrive en fin de calculs a sans doute compliqué encore) : le nombre de « triples rotations » du triangle ne tombe pas juste. Il est nécessaire de faire un calcul d'approximation relativement fin pour voir qu'après 160 triples rotations, il faut encore faire tourner 2 fois le triangle pour dépasser les 2015 cm.

Défi 4 – 2015 : Les experts

Cette année, à mi-saison, une équipe de handball a perdu 3 matchs, a fait 2 matchs nuls et a gagné quelques victoires. Si, dans la seconde moitié de la saison, elle obtient 0 défaite et autant de matchs nuls que de victoires, elle aura gagné 50% de ses matchs sur l'ensemble de la saison.

Combien y a-t-il d'équipes dans ce championnat ?

- **Solution :**

Notons G le nombre de matchs gagnés à la mi-saison dans la seconde moitié, appelons X le nombre de matchs nuls (qui est aussi le nombre de victoires). On a alors l'équation : $G + X = 0{,}5\times(3+2+G+0+X+X)$
soit : $2G + 2X = 5 + G + 2X$ et donc $G = 5$
A la mi-saison il y avait eu 3 matchs perdus, 2 matchs nuls et 5 victoires, ce qui prouve qu'il y a eu en tout 10 matchs et que sur la saison entière, il y en aura 20. Dans la 2nde partie de la saison, l'équipe gagnera donc 5 matchs et fera 5 nuls. On a bien sur l'ensemble de la saison $3+2+5+0+5+5 = 20$ matchs et $5 + 5 = 10$ matchs gagnés. Comme à chaque demi-saison, ils rencontrent toutes les autres équipes et qu'ils ont joué 10 fois, il y a 11 équipes !

A la mi-saison	2^{e} moitié de saison
Nombre de matchs perdus : 3 Nombre de matchs nuls : 2 Nombre de victoires : g_1	Nombre de matchs perdus : 0 Nombre de matchs nuls : g_2 Nombre de victoires : g_2

Matchs gagnés de la saison : $g_1 + g_2$
Nombre total de matchs joués : $5+ g_1 + 2g_2$
$2(g_1 + g_2)= 5+ g_1 + 2g_2$, d'où $g_1 = 5$ et le **nombre de matchs joués : 20.**

Commentaires

Là, nous avons affaire à un type d'exercices plus rare dans nos énoncés. C'est en fait une mise en équation. L'énoncé est assez dense ce qui en rend le déchiffrage intéressant. Quand on le résout comme cela a été fait dans la solution ci-dessus, on voit qu'il faut faire attention aux parties gagnées, perdues, nulles dans les 2 demi-saisons : le fait qu'on soit à la mi-saison est à prendre en considération pour aboutir à la solution et les élèves n'ont pas souvent exploité cette donnée. Cet exercice n'a pas été bien réussi en fait. Je pense qu'il ne font pas réellement une mise en équation effective de toutes les données et du coup les notes qu'ils prennent sont vite peu claires, justement à cause de la densité de l'énoncé. Ils ont alors le plus grand mal à en tirer une et une seule solution. On a vu aussi plusieurs fois une confusion entre le nombre d'équipes et le nombre de matchs joués.

Défi 5 : Fasten seat belt

Quand il est midi à Paris, il est 7 heures du matin à New-York. Le vol de Paris à New-York dure 6h30 dans chaque sens.
Patrick décolle de Paris à 7h50 heure locale en direction de New-York et Saïd décolle de New-York en direction de Paris 1h20 plus tard. Leurs avions volent à la même vitesse et suivent le même parcours (à des altitudes légèrement différentes bien sûr).

A quelle heure (de New-York) se croiseront-ils ?

- **Solution :**

Le premier avion part de Paris et vol pendant 1h20 en direction de New-York. Après 1h20, il est donc à 6h30 – 1h20 = 5h10 de New-York.

C'est à ce moment-là que l'autre avion décolle de New-York en direction de Paris. Il est alors : 7h50 + 1h20, soit 9h10 à Paris et 9h10 – 5h = 4h10.

Ils vont se croiser après la moitié de 5h10 de vol, soit 2h35 après le décollage de New-York, où il sera alors 4h10 + 2h35 soit

6h45 (du matin)

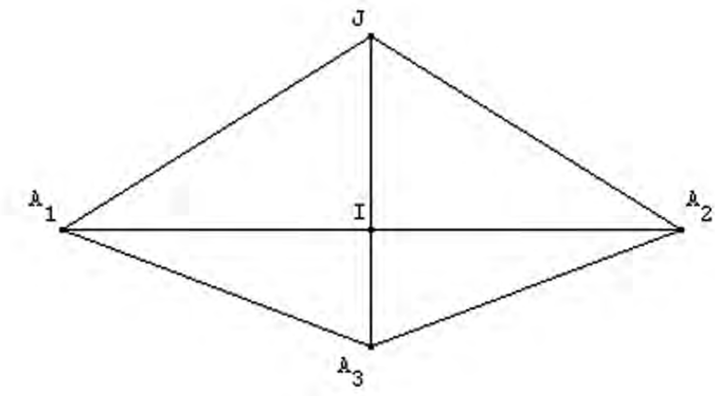
Commentaires
Les problèmes de trains, d'avions, de temps de parcours restent une difficulté importante pour les élèves. Nous n'avons pas encore osé le problème sur la baignoire qui se vide et/ou se remplit, mais qui sait dans les années à venir ….
Pour en revenir aux problèmes liés aux transports, les difficultés se cumulent : il y a les problèmes liés aux relations mal comprises entre temps, vitesse et distance et (c'était le cas ici) les difficultés liées à la bonne définition d'un référentiel (les avions vont dans deux sens différents), compliquées encore ici par le fait que l'heure locale n'est pas bien comprise. Il y avait cette année aussi, un problème (plus compliqué) sur les fuseaux horaires dans le sujet des Terminales/Bac +1 et qui a été très très mal géré par les élèves.

Défi 7 – 2014 : Justine et ses amies

Justine a beaucoup de chance, ses trois meilleurs amies d'enfance habitent près de chez elle.
Deux de ses amies habitent à 300 mètres de son domicile. La troisième, un peu plus loin encore, est située à 225 mètres des deux premières.
A quelle distance exacte, Justine est-elle de sa troisième amie, sachant que les deux premières amies habitent à 360 mètres l'une de l'autre ?

- **Solution :**

Les points J (Justine) et A_3 (3^e amie) sont équidistants des points A_1 et A_2 (les deux premières amies). Donc la droite (JA_3) est la médiatrice du segment [A_1A_2].



En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles IJA_2 et IA_2A_3 , on obtient :

IJ= 240 et IA_3=135.

Ainsi JA_3 = 375 m. (C'est la réponse attendue).

Commentaires
Comment réaliser un problème de rallye au niveau de la 3^e et de la seconde sans y insérer un défi qui nécessite l'utilisation du thèorème de Pythagore ? Vu les résultats obtenus (très moyens), les élèves s'en seraient bien passés, eux...

LES ÉPREUVES DE TERMINALE / BAC +1

Défi 1 – 2013 : Pinocchio et Dorante

Pinocchio ment le mardi, le mercredi et le jeudi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine.
Dorante ment le samedi, le dimanche et le lundi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine.

Un jour où *Pinocchio* et *Dorante* se rencontrent,
Pinocchio dit : « Hier je mentais » et *Dorante* dit : « Moi aussi ».

Quel jour de la semaine se sont-ils rencontrés ?

- **Solution :**

De deux choses l'une : en disant « *hier je mentais* », *Pinocchio* ment ou ne ment pas. Imaginons dans un premier temps qu'il ne mente pas : on n'est donc ni mardi, ni mercredi, ni jeudi ; alors, c'est que la veille il mentait et on était mardi ou mercredi ou jeudi. Finalement, aujourd'hui on serait vendredi.

Mais le vendredi *Dorante* ne ment pas et le jeudi non plus. On arrive à une contradiction.

Donc, *Pinocchio* ment en disant « *hier je mentais* » : on est donc mardi ou mercredi ou jeudi. Et la veille, il ne mentait pas, donc on n'était ni mercredi, ni jeudi ; il ne reste donc que mardi. Vérifions pour *Dorante* : le mardi, il ne ment pas, donc s'il dit « *hier je mentais* », c'est qu'il mentait vraiment. Ment-il le lundi ? Oui.

Donc c'est bon, **on était mardi** !

Commentaires
Un exercice abordable et …. jamais choisi, mais rappelons-le dans cette épreuve plus on choisit un exercice au numéro élevé et plus il rapporte de points. Le défi 1 n'est donc pas un bon calcul…

Défi 5 – 2013 : L'invasion des 1 !

Soit $n = 9 + 99 + 999 + …. + 99…9$, où le dernier nombre ajouté est constitué de 999 chiffres 9.

Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans n ?

- **Solution :**

Observons tout d'abord les premières étapes : *n* vaudra successivement : 9-108-1107-11106-111105-1111104-11111103-...

Il semblerait donc qu'à chaque étape, n hérite d'un « 1 » supplémentaire (au début de son écriture). Mais attention à son dernier chiffre : 9-8-7-6-... ça va de temps en temps (toutes les 10 étapes en fait) passer par un « 1 ». Débarrassons-nous tout de suite de ce problème : comme on va ajouter 999 nombres et que ce dernier chiffre commence à 9 et diminue d'une unité à chaque étape, il va finir par un 1, il finira donc bien par un « 1 ». Pour les « 1 » du début, faisons un raisonnement par récurrence :

Notre hypothèse, c'est : quand on ajoute un nombre composé de k « 9 », *n* commence par k – 1 « 1 ».
Si c'est le cas, *n* vaut alors : $n = 10^k + 10^{k-1}+...+ 10^2+a$ (a étant un chiffre compris entre 0 et 9)
On lui ajoute $10^{k+1} – 1$
Il vaut alors : $10^{k+1} + 10^k + 10^{k-1} +...+ 10^2 + (a-1)$ et commence alors par k « 1 ». Notre hypothèse est avérée.

La réponse est donc : 998 « 1 » au début et un « 1 » à la fin soit :

999

Commentaires
Exercice très peu choisi : les calculs sur les chiffres et les dates font peur. Une erreur de 1 ou de 10 et c'est 0 à la question. Nous glissons toujours des défis de ce type dans le sujet des Terminales/ Bac +1 mais aussi dans celui des 3^es^/2^des^ car nous pensons que c'est une occasion de manipuler des chiffres, des nombres, des opérateurs à la main vraiment : la calculatrice n'est pas d'une grande aide ici. Et même s'il n'est pas totalement exploité ici, le recours au raisonnement par récurrence est très satisfaisant. Il faudrait vérifier si les élèves sont aussi capables de le rédiger correctement mais, lors du rallye, le problème n'est pas là.

Défi 6 – 2013 : L'hélicoptère

Un hélicoptère décolle de l'aéroport de Boos (49°23'N, 1°11'E), près de Rouen et s'en va droit vers le nord. Au bout de 500 km, il tourne vers l'est, parcourt 500 km, puis met le cap vers le sud. Ayant encore franchi 500 km, il tourne vers l'ouest, parcourt de nouveau 500 km, puis se pose.

Indiquer le plus précisément possible sur la carte ci-dessous, la position de son atterrissage.

- **Solution :**

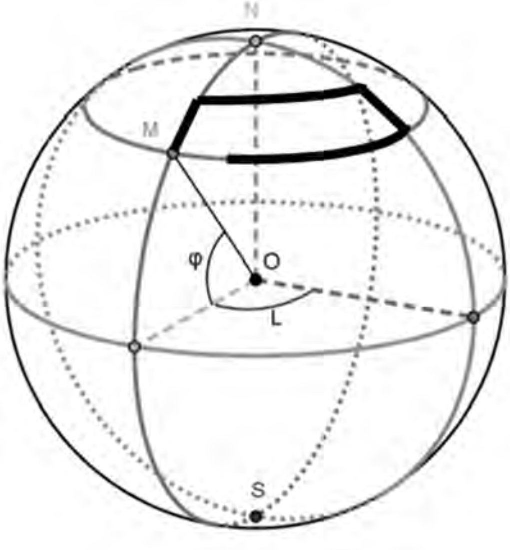
A partir du point M représentant la ville de Boos, l'hélicoptère va remonter le méridien vers le Nord passant par cette ville. Il parcourra ensuite 500 km vers l'Est sur une latitude constante mais sur un cercle de rayon plus petit que celui représentant la latitude de Boos. Comme 500 km sur le cercle le plus au Nord permet de "parcourir" plus de méridiens que celui à la latitude de Boos, une première réponse, sans le moindre calcul, serait de dire que l'hélicoptère va atterrir à l'est de Boos. La seule ville sur la carte proposée à la même latitude de Boos étant Auneuil cette réponse sera la bonne.

Par le calcul, il s'agit de déterminer l'angle au centre de la sphère terrestre (supposée de rayon 6371 km ou approché) correspondant à la distance de 500km. Par proportion avec le périmètre d'un cercle de rayon 6371 km, cela correspond à 4,4966°.

Il faut ensuite déterminer le rayon du disque, section de la sphère terrestre par un plan perpendiculaire à l'axe (NS) et passant par la latitude égale à celle de Boos plus l'angle trouvé précédemment. On trouve, en pratiquant les lignes trigonométriques dans un triangle rectangle construit dans le plan (OMN), on trouve r = 3755,57km environ.

La distance de 500km sur un tel cercle conduit à parcourir un angle autour de l'axe (NS) environ égal à 7,628°. Or, sur la latitude de Boos, un tel angle conduit à parcourir la distance de 552,18km. Il manque donc environ 52 km pour revenir au point de départ. En utilisant l'échelle donnée sur la carte, on retrouve la ville d'Auneuil.

Commentaires
Merveilleux défi ! La première lecture donne l'impression d'une évidence mais la place dans le rallye (ce n'est pas un défi 1, mais 6 !!!) laisse aussitôt penser qu'il y a un piège ou du moins qu'il faut s'y atteler avec beaucoup de sérieux. Comme on peut facilement le deviner, il a été très peu choisi par les élèves et même par les étudiants post-bac, mais ceux qui ont osé l'ont pour la plupart très bien traité. C'était même une surprise pour nous car nous pensions qu'il était vraiment très difficile. Bien évidemment, les élèves n'ont aucune notion de trigonométrie sphérique, mais l'intérêt qu'ils ont porté à résoudre ce problème concret est intéressant. L'attrait de l'aviation est encore bien réel chez les jeunes scientifiques et surtout la présentation du problème sous la forme d'une vraie carte routière les a attirés et les a poussés à mobiliser les connaissances dont ils disposent.



Défi 7 – 2014 : Pas le moment de faire une erreur de calcul ...

Flavius Josèphe est un historien du premier siècle. D'après la légende, ses talents de mathématicien lui auraient sauvé la vie. Pendant une guerre avec des soldats romains, il faisait partie d'un groupe de 41 rebelles piégés dans une cave qui, plutôt que de se rendre, avaient décidé de se suicider de la façon suivante : ils formèrent un cercle puis, en suivant la circonférence, ils tuèrent un homme sur trois parmi les survivants en partant du premier, jusqu'à ce qu'il ne reste plus personne. Josèphe et un autre rebelle ne voulaient pas ce suicide absurde.
Josèphe calcula donc où lui et son ami devaient se placer dans le cercle pour qu'à la fin ils restent vivants tous les deux.

Où doivent se placer Flavius Josèphe et son ami dans le cercle de départ pour rester vivants ?

Commentaires

Problème typique de ceux que nous cherchons à introduire dans nos épreuves : le problème n'est pas simple, mérite de la concentration, mais n'est pas infaisable non plus. Il nécessite le passage à l'outil algorihtmique. Il nécessite également de s'investir dans la lecture et la compréhension du texte et de sa traduction en mode mathématique. Enfin, il constitue un problème sinon célèbre (pour les élèves) mais historique et le sujet même du défi donne envie de s'y investir : on ne sent pas une quelconque mise en scène totalement artificielle juste pour donner prétexte à un problème mathématique abstrait. Au contraire, on perçoit l'utilité du raisonnement mathématique (et même algorithmique ici) pour résoudre un problème qu'il n'est pas possible de résoudre de façon « littéraire ». Ces dernières années, on a senti par nos épreuves l'évolution de la place de l'outil algorithmique dans la pratique des élèves et des étudiants ; après un rejet qui s'éternisait, il est entré récemment mais rapidement dans le catalogue des outils à disposition des élèves pour résoudre un problème. Une certaine assurance dans son utilisation a permis d'en faire un outil sur lequel l'élève ou l'étudiant peut compter.

- **Solution :**

Voici un programme Python permettant d'obtenir la solution :

```
v = list(range(1,42))
i=0# correspondant à la première personne, les indices commencent à 0 en Python
v=v[1:42]
while len(v)>2:
    i=i+3
    if i>=len(v):
        i=i-len(v)
    v=v[0:i]+v[i+1:len(v)]
    print(v)
```

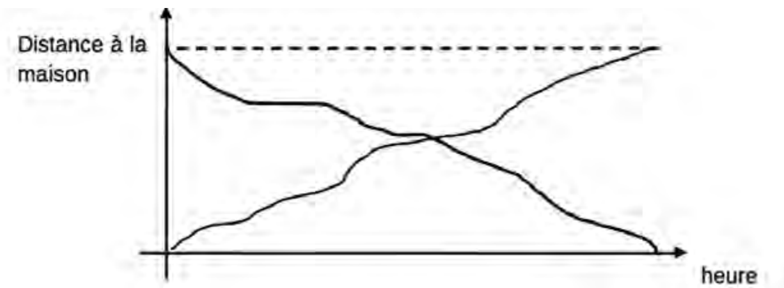
et son exécution
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 20, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 20, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 23, 28, 34, 40]
[8, 12, 23, 28, 34, 40]
[8, 12, 23, 28, 34]
[8, 12, 23, 34]
[8, 12, 34]
[8, 12]

Flavius et son ami doivent donc se mettre aux places 8 et 12 pour avoir la vie sauve !

Défi 11 – 2014 : Le randonneur

Un randonneur prévoit une journée de promenade. Il part de chez lui à 8h du matin pour arriver au lieu de sa destination le soir à 20h. Sa journée comporte des arrêts et sa vitesse n'est pas nécessairement constante lorsqu'il se déplace. Le lendemain, il reprend sa marche à la même heure de départ pour revenir chez lui de nouveau à la même heure le soir, 20h, en empruntant le même trajet. Existe-t-il sur le chemin un point sur lequel il se sera trouvé exactement à la même heure lors des deux trajets ?

- **Solution :**



Observons le graphe ci-dessus exprimant, en km, la distance à la maison du randonneur. La vitesse n'étant pas nécessairement constante, nous n'avons pas des segments sur cette représentation. Mais segments ou pas, les courbes se coupent obligatoirement en un point, et en un seul d'ailleurs, puisqu'il n'est pas envisagé qu'il revienne sur ses pas ! L'abscisse de ce point donne l'heure à laquelle il se trouve au même endroit et l'ordonnée donne la distance de ce point à la maison.

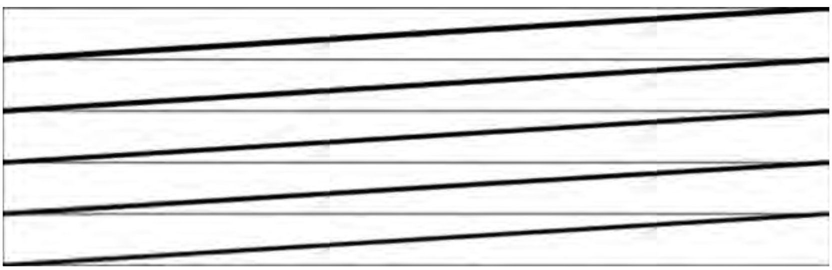
Commentaires
Là, le sujet est troublant et la réponse aussi. La façon de la justifier peut-être aussi ? En tout cas, même si ça paraît très surprenant aux élèves, la réponse est claire : oui, le randonneur se trouvera au même endroit à la même heure une fois dans la journée. Et une seule car il n'a pas le droit de rebrousser chemin. Sur un défi comme celui-ci, la justification a posteriori est indispensable car l'intuition qui pousse à donner la réponse opposée est forte (si il va très vite au début le premier jour puis très lentement et si il fait la même chose (ou le contraire d'ailleurs, selon les étudiants interrogés), il ne sera pas du tout dans la même partie du parcours. Et bien si ! Une fois !

Défi 12 – 2014 : Le parking

Cette rampe d'accès à un parking possède une structure en hélice et tourne exactement 5 fois autour de l'espace central qui a la forme d'un cylindre de hauteur 20 mètres et de largeur 10 mètres.
Quelle est la longueur de la rampe qui se trouve à 20 cm du cylindre central et qui suit la rampe sur toute sa longueur ?

- **Solution :**

Il suffit d'imaginer le cylindre sur lequel repose la rampe que l'on déplie en son patron et d'y indiquer le chemin que prend la rampe.



Un tour de cette rampe a donc comme longueur celle de la diagonale du rectangle formé par une hauteur de 4 mètres et une longueur de
$2\pi \times (5 + 0{,}20) = 10{,}40\pi$.
La diagonale du rectangle mesure $\sqrt{4^2 + (10{,}40\pi)^2}$.

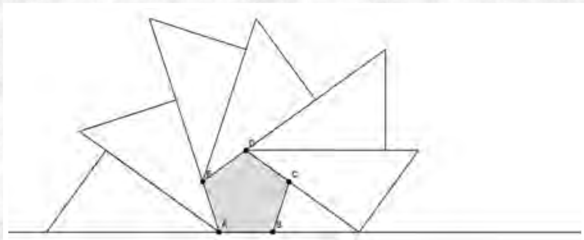
La longueur totale de la rampe est de 5 $\times \sqrt{4^2 + (10{,}40\pi)^2}$

Commentaires
On aime bien les défis qui commencent par un dessin, ou comme ici, une photo. On ne sait pas comment s'y sont pris les élèves, puisqu'on ne demande pas de démonstration, mais ceux qui ont choisi de tenter ce défi, l'ont plutôt bien réussi. Il nous paraissait pourtant assez difficile : géométrie, énoncé très court, il faut savoir en tirer les données et les mettre en équation, vision dans l'espace, longueur d'une courbe.... d'ailleurs nous l'avions intitulé « défi 12 », donc le plus dur ou presque. Il s'est passé un peu l'inverse de ce qui s'est produit sur le défi 9 (les fuseaux horaires) : les étudiants qui ont tenté le défi ont eu raison de le faire !

Défi 13 – 2013 : Le Sangaku

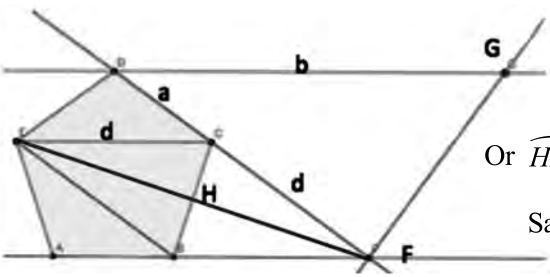
Sangaku : une énigme géométrique japonaise (d'après Gery Huvent, Dunod)
Ce Sangaku est relativement récent car daté de 1912, fin de l'ère Meiji.
On considère un pentagone régulier autour duquel s'enroule un éventail de six triangles rectangles isométriques selon la figure suivante.

Exprimer la longueur de l'hypoténuse des triangles en fonction de celle du côté du pentagone.



- **Solution :**

On considère ABCDE le pentagone régulier de côté a. ECFB est un losange de côté *d*. *b* est la longueur de l'hypoténuse du triangle DFG, rectangle en F.



$$b\times\mathbf{cos}(\widehat{FDG})=a+d$$

et $d\times\mathbf{sin}\,\widehat{HEC}=\frac{a}{2}$

Or $\widehat{HEC}=\frac{\pi}{10}$ et $\widehat{FDG}=\frac{\pi}{5}$

Sachant que $2\times\mathbf{cos}\,\frac{\pi}{5}=\Phi$:

(nombre d'or) et $\mathbf{sin}\,\frac{\pi}{10}=\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\mathbf{cos}\,\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2\Phi}$

On obtient : $\frac{b}{a}=\frac{2}{\Phi}\left(1+\frac{1}{2\frac{1}{\Phi}}\right)=2\Phi=1+\sqrt{5}$

Commentaires

Sans surprise cette fois, les élèves de Terminale et même ceux de Bac +1 (à l'exception des classes de Maths Sup) n'ont pas tenté ce défi, ou en tout cas, n'ont pas reporté sur la copie les résultats qu'ils avaient trouvés. Certes le sujet est assez difficile, mais il n'est pas interdit de penser que des facteurs psychologiques ont joué aussi : c'est le défi qui a le numéro le plus élevé, énigme géométrique japonaise (3 mots sur 3 qui font un peu peur....). Cette énigme est intéressante pourtant et mérite peut-être d'être vue dans un autre contexte que le sujet d'un rallye.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE DE LYON

HISTORIQUE

Le rallye a été créé en 2006. Le principe est celui d'une recherche collective sur des problèmes suffisamment variés pour que tous les élèves puissent participer.

En plus, un problème ouvert est proposé aux classes volontaires. La recherche se fait de manière collaborative : les classes postent leurs trouvailles au fur et à mesure sur un site. Ces trouvailles peuvent être enrichies par d'autres classes.

L'année du rallye se clôture avec la fête des mathématiques. Sur une journée, les classes finalistes viennent s'affronter autour d'énigmes puis assistent à des conférences faites par des universitaires. La journée se termine par une remise des prix.

FICHE TECHNIQUE

- **Compétition :**

Nombre de participants : En 2014, plus de 22 000 élèves ont participés soit 766 classes de l'académie.

Niveaux d'études : 3^{e}, 2^{de} (générale et professionnelle) et $1^{ère}$ professionnelle.

- **Type d'épreuves proposées :**

◊ Le problème ouvert.

◊ L'épreuve écrite de deux heures (une version 1 heure est à l'essai pour les classes qui le souhaitent). Il y a trois niveaux d'énigmes.

Parmi les énoncés proposés, les élèves en choisissent un qu'ils illustrent. Trois exercices sont écrits en langue étrangère (le même exercice en anglais, espagnol, allemand et italien).

Le thème Astronomie est également abordé à travers plusieurs énoncés.

◊ La journée de la finale

- **Calendrier 2015 :**

◊ De février à mars 2015 : recherche du problème ouvert.

◊ Jeudi 5 mars 2015 : épreuve écrite du Rallye.

◊ Mardi 19 mai 2015 : finale pour les classes lauréates.

- **Partenaires organisateurs**

- l'APMEP
- l'IREM de LYON
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques.

- **Contact**

Christian Mercat, directeur de l'IREM de Lyon, Président.
L'organisation et la gestion du Rallye sont assurées par l'association RMAL (Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon).

: **Rallye.Math@ac-lyon.fr**

Site Internet : **http://rallye-math.univ-lyon1.fr**

GRANDE OURSE (NIVEAU 2 - RALLYE 2014)

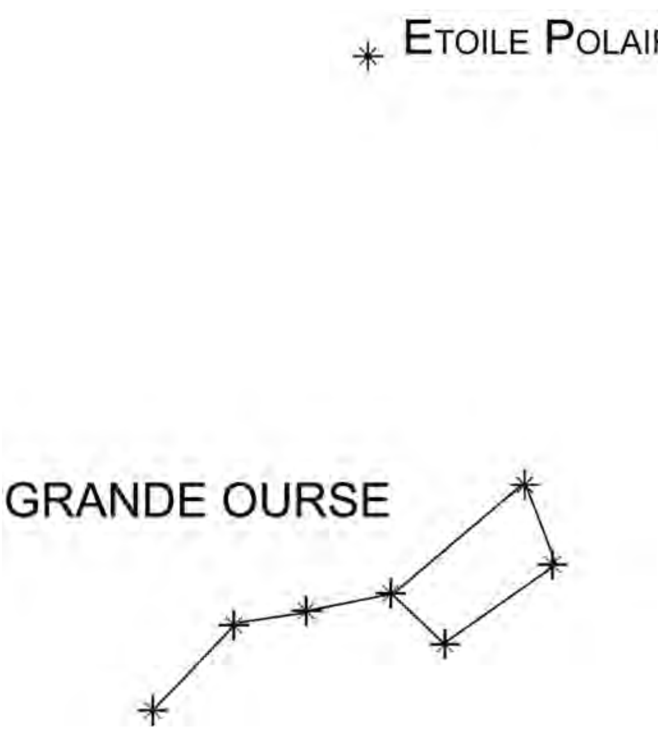
Enoncé :

Au cours de la nuit, dans l'hémisphère Nord, on voit les étoiles tourner autour de l'étoile Polaire à la vitesse d'un tour par jour.

L'étoile Polaire indique toujours la direction du Nord.

On a dessiné la Grande Ourse un jour à 21 h (voir ci-dessous).

La dessiner 3 heures plus tard.

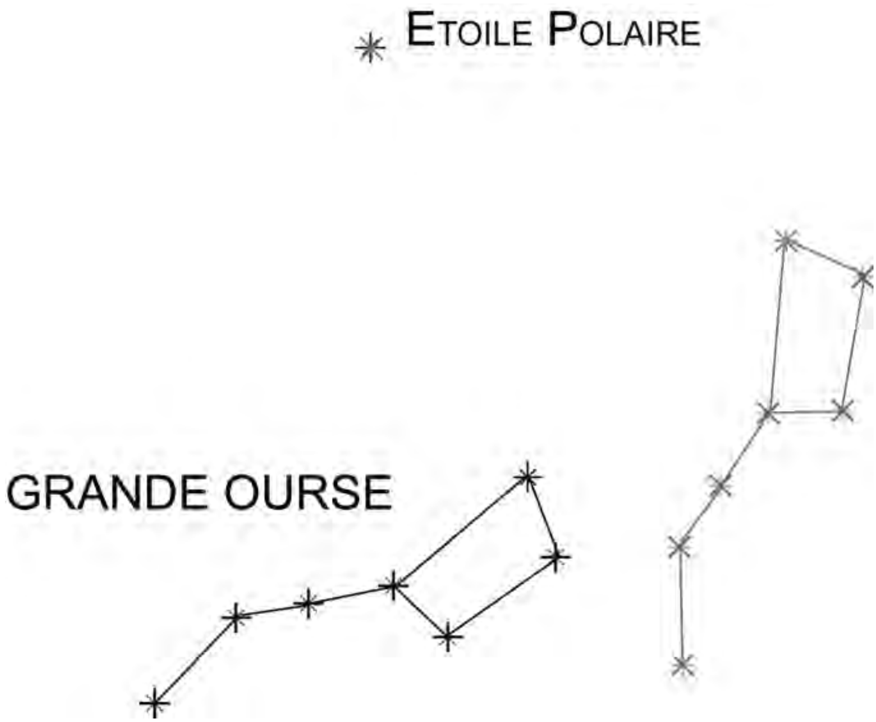


Analyse

Cet exercice a pour thème l'astronomie. Depuis 2012, nous proposons des exercices sur ce sujet dans le cadre de notre partenariat avec l'observatoire de St-Genis Laval. La classe qui réussit le mieux les exercices à thème astronomique a la chance de recevoir la visite d'un astronome de l'observatoire qui lui fera observer les étoiles un soir de juin dans la cour de son établissement.

Outre cette récompense, ce thème nous permet de développer l'intérêt des élèves et des enseignants pour les mystères de l'univers.

• **Solution :**



Commentaires :
Le thème de l'astronomie permet de développer un travail commun avec les enseignants de sciences physiques, notamment en classe de seconde. D'un point de vue mathématique, cet exercice fait intervenir la notion de rotation, abordée en 3^{e}, et réactivée lors de la construction du cercle trigonométrique en 2^{e}.

Cet exercice est issu du HS n°10 des Cahiers Clairaut, titré « Mathématiques et Astronomie », qui contient beaucoup d'exercices de niveaux très variés (de l'école élémentaire au lycée).

LE GRAND HUIT (NIVEAU 2 - RALLYE 2013)

Enoncé :

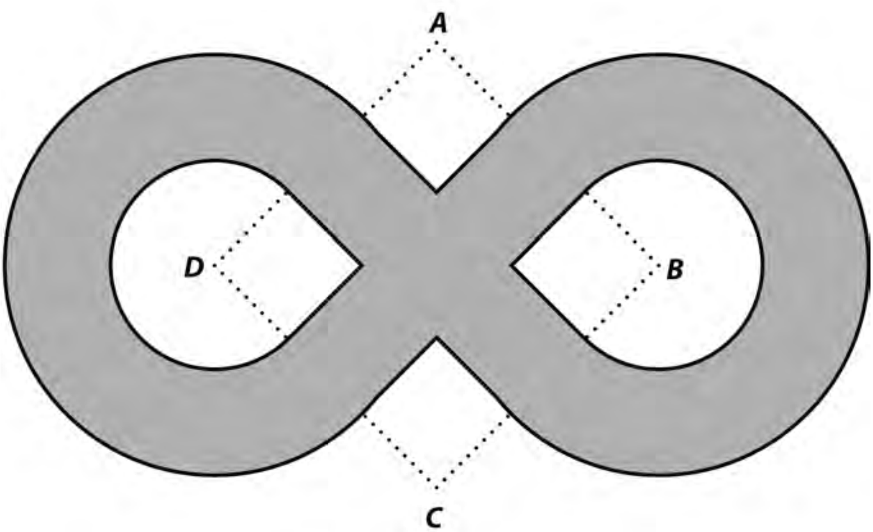
Die Ränder der Achterbahn schneiden die Seiten des Quadrats ABCD in drei gleiche Teile, und der Flächeninhalt des Quadrats ABCD ist 144 m². Welches ist der Flächeninhalt der Achterbahn?

Los bordes de la montaña rusa cortan los lados del cuadrado ABCD en tres partes iguales, y la área del cuadrado es de 144 m². ¿Cual es la área de la montaña rusa ?

I lati dell'otto volante tagliano i lati del quadrato ABCD in tre parti uguali, e la superficie del quadrato ABCD è di 144 m². Qual è la superficie dell'otto volante ?

The edges of the big dipper cut the sides of the square ABCD in three equal parts, and the surface of this square is 144 m². What is the surface of the big dipper ?

Arrondir à 0,01 prés



Analyse :
Les énoncés en 4 langues sollicitent d'autres capacités d'élèves dans la classe. L'exercice, une fois traduit, est assez classique pour le calcul d'une surface par découpage.

- **Solution :**

Le carré a pour côté 12 m ($12^2 = 144$). La largeur du grand huit est donc de 4 m.
On découpe le grand huit en 3. La partie centrale, à l'intérieur du carré ABCD, est constituée de 5 carrés de côté 4. Cela correspond aux 5/9$^{\text{ème}}$ du carré initial.
La partie centrale a donc une aire de $5 \times 16 = 80$ m²

Les deux autres parties sont symétriques donc ont la même aire.
Elles sont constituées des 3/4 d'une couronne. L'aire du petit disque, de rayon 4 m, est 16π. L'aire du grand disque, de rayon 8m, est 64π m².

Les 3/4 de la couronne de gauche a donc pour aire $(64\pi - 16\pi) \times \frac{3}{4} - 36\pi m^2$

Finalement, le grand huit a une aire de $2 \times 36\pi + 80 \simeq 306{,}19 m^2$.

Commentaires :
L'exercice d'apparence simple nécessite de la méthode. Les élèves qui en ont l'habitude vont chercher le découpage du grand huit en figures plus simples. Les autres ont besoin d'un peu plus de réflexion.

Des erreurs sont faites sur l'approximation : les élèves remplaçant le nombre π par 3,14 perdent la précision demandée.

Une conjecture sur Géogébra est possible mais pas évidente. Essayer de construire la figure demande un découpage similaire à celui proposé en solution.

Les compétences travaillées dans cet exercice peuvent être réutilisées dans des problèmes de recherche d'aire.

TRIANGLES DE HÉRON (NIVEAU 3 - RALLYE 2014)

Les trois côtés d'un triangle ABC mesurent 20 cm, 21 cm et 29 cm
Quel est le périmètre de ce triangle (en cm) ?
La formule de Héron d'Alexandrie permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs a, b et c de ses côtés et de son demi-périmètre p :
aire = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Quelle est l'aire du triangle ABC ? (donner la réponse en cm², arrondir si besoin à 0,1 près).

On appelle triangles frères deux triangles ayant le même périmètre et la même aire.

Le but est de trouver un triangle frère du triangle ABC ayant un côté de longueur 28 cm. Ceci peut se faire de plusieurs manières, par le calcul ou le dessin, de manière exacte ou approximative. L'utilisation de ficelle est également possible.

Dessiner le triangle frère cherché, et expliquer votre manière de procéder.

> ***Analyse :***
> *Les premières questions sont simples, permettant aux élèves d'entrer dans le sujet. Pour la 1ère année, nous avons demandé une justification de résultat. Cet exercice peut être résolu de différentes façons, il est assez riche pour être retravaillé.*

Enoncé :

- **Solution :**

Le périmètre du triangle est égal à 20 + 21 + 29 = 70 cm

L'aire du triangle est égale à $\sqrt{35(35-20)(35-21)(35-29)} = 210\,cm^2$.

Méthode 1 : On essaie plusieurs valeurs
On sait qu'un côté est de 28 cm. Le périmètre étant de 70 cm, la somme des deux autres côtés est donc de 42
On peut alors essayer des triplets de côtés, (28 ; 17 ; 25) convient.

Méthode 2 : On raisonne avec l'aire. Elle est de 210 cm² et la base est de 28 cm. On a alors une hauteur de 210/28 = 7,5 cm
On peut tracer un segment de 28 cm puis une parallèle à cette base à une distance de 7,5 cm. A l'aide d'une ficelle de longueur de 70 – 28 = 42 cm, on cherche comment placer la ficelle avec un sommet sur la parallèle

tracée : cela garantit l'aire de 210 cm².
Méthode 3: On met le problème en équation. On note b la longueur d'un des côtés. Le 3^{e} côté a alors pour longueur $70 - 28 - b = 42 - b$

L'aire est alors égale à $\sqrt{35(35-b)(35-28)(35-42+b)} = 210$

Cette équation mise au carré puis développée donne $b^2 - 42b + 425 = 0$

> ***Commentaires :***
> *Cet exercice fait travailler les notions d'aire et de périmètre conjointement. Il permet de découvrir une formule utile et simple d'utilisation. A noter, le jeu de mots (dû à Daniel Perrin) pour les triangles frères : « deux triangles de même périmètre et de même aire » : on entend « deux triangles de même PERE(imètre) et de même MERE ».*
> *(Prolongement sur ce sujet pour les professeurs sur :*
> *http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/meme_aire_meme_perimetre_et_pourtant/)*
> *On peut en 2nd, utiliser cet exercice pour travailler l'algorithmique et les fonctions.*

En seconde, on peut résoudre graphiquement cette équation.

Voilà un TD construit à partir de cet exercice :

1) La formule de Héron ; travail sur un algorithme
On fait ouvrir l'algorithme « Héron » programmé sur Algobox ou on le

Variables	a, b, c, p, q, S sont du type nombres
Entrée	Afficher : « Donner les longueurs des trois côtés du triangle » Lire a Lire b Lire c
Traitement	p prend la valeur a + b + c q prend la valeur p/2 S prend la valeur sqrt(q*(q-a)*(q-b)*(q-c))
Sortie	Afficher « L'aire du triangle est égale à » Afficher S

fait programmer
Puis on demande quelle formule il nous apprend.
On l'applique au triangle ABC de côtés 20, 21 et 29 cm pour trouver son

aire. Demander aussi le périmètre

2) Recherche du problème des triangles frères

On pose le problème et on incite à poser une équation :

On note a le côté de 28 cm ; b et c les deux autres longueurs du triangle frère cherché. Exprimer c en fonction de b puis l'aire S du triangle « frère » d'ABC en fonction de b seulement.

Méthode de résolution 1 par l'étude de la fonction polynôme du second degré et de l'équation $f(b)=210^2$. Si on ne simplifie pas l'équation, il est intéressant sur la calculatrice de travailler sur les fenêtres d'affichage.

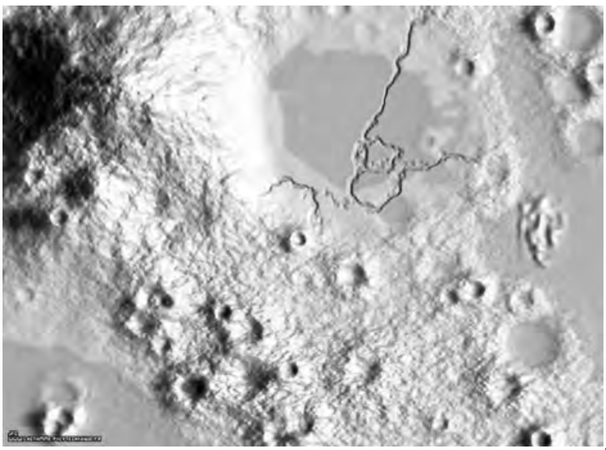
Méthode de résolution 2 : on essaie des valeurs entières et on remplit le

b	15	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$c=42-b$											
A											

tableau à l'aide de l'algorithme programmé dans la 1ère partie.

On en déduit la solution.

L'utilisation des propriétés des fonctions polynômes du second degré permet de justifier qu'il n'y a pas d'autres solutions (les deux solutions de l'équation donnent un seul triangle frère).



L'anomalie de Boticelli sur la Lune
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHEMATIQUE DE LOIRE-ATLANTIQUE

PRÉSENTATION :

Le Rallye Mathématique de Loire-Atlantique est une occasion de motiver les élèves à la résolution de problèmes, d'énigmes, à travers le plaisir de la recherche, le jeu...

Il s'adresse à des classes entières et il demande une réponse collective.

La variété des problèmes proposés réclame des savoir-faire multiples (intuition, analyse, prise d'initiatives, schématisation, manipulations, tâtonnement, raisonnement, choix de la tâche à accomplir,...). Le nombre de problèmes et leur difficulté sont choisis de telle façon que chaque élève de la classe puisse participer et empècher que l'ensemble de la tâche soit trop lourd pour des individus, fussent-ils de bons élèves.

Le Rallye peut contribuer à développer chez les élèves certaines compétences : résoudre des problèmes, conjecturer, lire et comprendre un énoncé, débattre, argumenter et contre-argumenter, travailler en équipe, communiquer, écouter et comprendre les autres, vérifier une réponse, tester une solution, s'organiser collectivement pour chercher et se mettre d'accord pour proposer la réponse de la classe, tout cela sans l'aide de l'enseignant.

Le Rallye est aussi l'occasion d'échanges entre enseignants.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

Créé à l'IREM des Pays de la Loire, centre de Nantes en 1990, arrêté en 2000 : les épreuves faisaient concourir jusqu'à dix niveaux : CM1 et CM2, 6^e et 5^e, 6^e, 5^e, 4^e et 3^e SEGPA, 4^e et 3^e Techno.
Le rallye reprend à l'IREM en 2007 aux niveaux CM2 et 6^e.
Une catégorie CM2-6^e est créée en 2009.

- **Epreuves :**

Par classe entière.
Trois catégories : CM2, 6^e, CM2-6^e.

Une première épreuve de 10 problèmes à résoudre en une heure.

Une deuxième épreuve où les élèves choisissent six problèmes dans une liste de douze.

Une finale : trois problèmes imposés, trois problèmes à choisir parmi cinq, deux manipulations à choisir parmi quatre.

- **Compétition :**

Un entraînement au premier trimestre, une première épreuve en février, une deuxième épreuve en avril et une finale en juin.

Partenaires

APMEP

Casio

CIJM

Conseil Général de Loire-Atlantique

Crédit Mutuel Enseignant

Inspection académique de Loire-Atlantique

Rectorat de l'académie de Nantes

Contact

RALLYE MATHEMATIQUE DE LOIRE-ATLANTIQUE
IREM des Pays de la Loire

Franck FOUGERE
Collège Albert Vinçon
23, route de Saint Marc
44 600 Saint Nazaire

☎ : **06-64-31-18-69**

: **franck.fougere@ac-nantes.fr**

UN PROBLÈME

L'addition ci-dessous est écrite en utilisant un cryptarithme, une même lettre remplace toujours un même chiffre et un même chiffre est toujours remplacé par une même lettre.

De plus :
- E est le double de A.
- R est le double de E.
- L est le double de R.

Trouvez la valeur de chacune des lettres.

					L	E
+	R	A	L	L	Y	E
+			M	A	T	H
	R	E	P	A	R	T

Enoncé :

- **Niveau scolaire :**

CM2, collège

- **Domaine mathématique :**

Nombres entiers, calcul, logique

- **Solution :**

La lettre A vaut ....1............
La lettre E vaut ....2............
La lettre H vaut............3............
La lettre L vaut ....8............
La lettre M vaut............6............
La lettre P vaut ....5............
La lettre R vaut............4............
La lettre T vaut ....7............
La lettre Y vaut 9

- **Commentaires :**

Les élèves qui font tout de suite des essai-erreur n'aboutissent pas.
Ceux qui réussissent ont utilisé :
- E est le double de A.
- R est le double de E

- L est le double de R.

Ils trouvent A = 1, E = 2, R = 4 et L = 8, ensuite ils procèdent par essai-erreur. S'ils essaient H = 3 alors ils trouvent T = 7 et Y = 9. Il reste 5 ou 6 pour M et P.

D'où, la solution finale :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & 8 & 2 \\ + & 4 & 1 & 8 & 8 & 9 & 2 \\ + & & & 6 & 1 & 7 & 3 \\ \hline & 4 & 2 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

Mais le taux de réussite est faible : 19% pour les CM2 et 22,9 % pour les 6ème. Pourquoi ?

Une lecture incomplète de l'énoncé ? La difficulté de passer d'une déduction à des essai-erreur ?

Pour obtenir des réponses, on peut reprendre ce problème en classe en posant la question « Peut-on trouver la solution en ne faisant que des essai-erreur ? ».

Le but est que la classe soit persuadée qu'une première étape est d'utiliser :

- E est le double de A.
- R est le double de E.
- L est le double de R.

Pour déduire que :

- A est plus petit que E, E est plus petit que R et R est plus petit que L.
- A ≠ 0 car si A = 0 alors E = 0 impossible d'après l'énoncé
- A < 2, car si A = 2 alors L = 16 impossible…

On a une solution partielle avec : A = 1   E = 2   R = 4   L = 8

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & 8 & 2 \\ + & 4 & 1 & 8 & 8 & 9 & 2 \\ + & & & M & 1 & T & H \\ \hline & 4 & 2 & P & 1 & 4 & T \end{array}$$

Alors, on redonne un temps de recherche pour terminer la solution. Il faut oser revenir à la méthode essai-erreur pour aboutir.

On peut aussi compléter l'activité sur le problème en posant une nouvelle question : « Peut-on trouver la solution sans faire des essai-erreur ? ».

On a déjà répondu pour les valeurs de A, E, L et R.

Pour continuer, il faut remarquer en tenant compte des retenues (peut être une aide de l'enseignant) que :

$1 + 8 + Y + T = 24$ ou $8 + Y + T = 24$ soit $Y + T = 16$ ou $Y + T = 15$

Par ailleurs :

Si $1+ 8 + M = 10$, on aurait M = 1, mais on a déjà : A = 1.
Si $1+ 8 + M = 13$, on aurait M = 4, mais on a déjà : R = 4.
Si $1+ 8 + M = 15$, on aurait M = 6 et P = 5
Si $1+ 8 + M = 16$, on aurait M = 7 et P = 6
Si $1+ 8 + M = 17$, on aurait M = 8. Mais on a déjà : L= 8
Si $1+ 8 + M = 19$, on aurait M = 10 impossible

SI M = 6. et P = 5. Il reste 0, 3, 7 et 9 pour les valeurs de Y, T et H.
De plus, on doit avoir $Y + T = 16$ ou $Y + T = 15$. On en déduit que
H = 3, T = 7 et Y = 9

Si M = 7 et P = 6, alors il reste 0, 3, 5 et 9 pour les valeurs de Y, T et H.
Mais $Y + T = 16$ ou $Y + T = 15$ est impossible

Ainsi, on prouve aussi que la solution est bien

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 8 & 2 \\ + & 4 & 1 & 8 & 8 & 9 & 2 \\ + & & & 6 & 1 & 7 & 3 \\ \hline & 4 & 2 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

et qu'elle est unique.

Cette résolution sans essai-erreur permet de convaincre les élèves de la possibilité d'une résolution du problème par une succession de raisonnements qui analysent différentes solutions en fonction des données ou des résultats déjà trouvés.

Le problème proposé initialement n'avait pas l'aide :
- E est le double de A.
- R est le double de E.
- L est le double de R.

La résolution encore plus complexe aurait-elle été trouvée par un élève de CM2 ou de 6^{e} dans l'heure de l'épreuve ? On peut en douter.

Visualisatuion tridimentionnelle
de la dynamique de Verhulst
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHEMATIQUE DE MACHECOUL

HISTORIQUE

Ce rallye a été créé en 2007 dans le but de faire le lien entre les élèves de 6^{e} du collège St Joseph de Machecoul (Loire Atlantique) et les élèves de CM du canton.
La $1^{ère}$ année, une classe de 6^{e} et une de CM ont participé à ce rallye, puis une 2^{e} classe de CM et de 6^{e}, jusqu'en 2014 avec 4 classes de CM de 4 écoles du canton de Machecoul et 5 classes de 6^{e} du collège.

FICHE TECHNIQUE

- **Compétition :**

Ce rallye concerne des classes de CM1-CM2 et des 6^{e}.

La 1ère année, une cinquantaine d'élèves ont été concernés jusqu'à environ 230 participants en 2014.

Chaque épreuve composée de 6 problèmes à résoudre, se déroule dans les classes, par groupes de 4 élèves.

Un entraînement a lieu au mois de novembre-décembre et un autre au mois de mars (si possible pendant la semaine des mathématiques).

La finale a lieu durant une demi-journée au mois de juin.

Les écoles inscrites viennent au collège et les élèves sont mélangés par groupes de 4 (2 élèves de CM avec 2 élèves de 6^{e}) afin de renforcer le lien écoles-collège.

Un classement des groupes et une remise des prix clôturent ce rallye.

Contact

Rallye Mathématique de Machecoul
Théophane Garçonnet
Collège-Lycée Saint Joseph
14 rue des capucins
44270 Machecoul

☏ : **02.40.78.50.18**

: **theo.garconnet@orange.fr**

Site Internet : **www.rallye-maths-machecoul.wifeo.com**

BACTÉRIES (EXTRAIT DE MARS 2013)

Enoncé :

Une population de bactéries double toutes les heures.

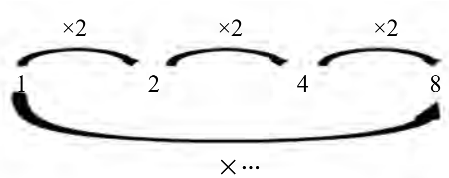
Par combien est-elle multipliée au bout de 3 heures ?

- **Mots clés :** Calcul – Logique – Réflexion

- **But du problème :** Savoir par combien on multiplie si on fait 3 fois de suite une multiplication par 2.

- **Analyse du problème**

- Comprendre d'abord que doubler veut dire $\times 2$.
    (rappel : les élèves sont en CM ou 6e)
- Une difficulté, c'est croire que c'est évident, que c'est facile.
    Attention : $\times 2$ ne veut pas dire $+2$
    et donc $\times 2 \times 2 \times 2 \neq \times 6$.
- L'importance de communiquer et de faire un schéma
    (un dessin vaut souvent mieux qu'un long discours !)



- Poser un nombre au départ (1 par exemple) et le résultat devient trivial :
  $\times 2 \;\; \times 2 \;\; \times 2$ équivaut à faire $\times 8$.
- La population de bactéries a donc été multipliée par 8 en 3 heures.

• Commentaires et développement

- Trop de groupes n'ont pas assez réfléchi, et ont indiqué ×6 !
Tous se sont dit « Mais bien sûr, pourquoi j'ai pensé à cela, pourquoi j'ai fait cette erreur » quand ils ont entendu la réponse avec l'explication.
- Faire le lien (pour les lycéens) avec la suite géométrique de raison 2.
Si on connait U_0 alors $U_3 = U_0 \times 2^3 = U_0 \times 8$.
Mais en activité préparatoire aux suites, des lycéens tomberaient-ils eux aussi dans le piège ?

PENDULE (EXTRAIT DE DÉCEMBRE 2013 ET DE JUIN 2014)

Enoncé :

Une pendule a 2 aiguilles, une petite pour les heures et une grande pour les minutes.

Quand il est 12h00 les 2 aiguilles sont superposées (l'une sur l'autre).

Dans une journée (de 24h) combien de fois les 2 aiguilles sont-elles superposées ?

Une pendule a 2 aiguilles, une petite pour les heures et une grande pour les minutes.

Quand il est 3h00 les 2 aiguilles forment un angle droit.

Dans une journée (de 24h) combien de fois les 2 aiguilles forment-elles un angle droit ?

- **Mots clés :** Angle – Essayer – S'organiser - Compter

- **But du problème :** Trouver combien de fois les 2 aiguilles d'une pendule sont superposées ou forment un angle droit en 24h en utilisant un objet usuel pour bien « compter » et ne pas tomber dans un piège.

- **Analyse du problème :**

- Comprendre le rôle des 2 aiguilles d'une pendule (ou de leur montre si elle est à aiguilles ou de la pendule de leur classe...) et maîtriser le vocabulaire : « superposées ou angle droit », les CM connaissent ce vocabulaire en principe.

- Chercher mentalement (ou avec une vraie montre) ou bien faire des calculs... mais c'est risqué. Les élèves étant par groupes de 4, ce problème mérite de bien s'organiser (de bien réfléchir à la question) pour ne pas oublier ou pour ne pas compter deux fois la même situation.

- ***Aiguilles superposées :***

Quand la grande aiguille (les min) fait un tour de cadran, la petite (les h) avance aussi... de 1/12 h (5 min). Donc il faut plus d'une heure entre deux superpositions ; si la grande parcourt 5 min, la petite a bougé de 5/12 min...

(calcul infini et impossible pour un élève de CM ou de 6^{e}).

Alors l’astuce, c’est de réfléchir sur 12 h. La grande aiguille a tourné 12 fois tandis que la petite qu’une fois. Elles se sont donc superposées 11 fois durant ce laps de temps :

La 1ère fois à 00h00

10 fois entre ces 2 heures là

La 12ème fois à 12h00

Ce qui fait un total de 22 fois en tout entre 00h00 et 23h59.

- ***Aiguilles formant un angle droit :***

Les aiguilles avancent toujours au même rythme : 1 tour pour la petite pendant que la grande en fait 12.
Chaque heure, les 2 aiguilles forment 2 fois un angle droit... ou presque.

En effet durant la 1ère heure l’angle droit a lieu vers 00h16 et vers 00h49.

Durant la 2ème heure vers 01h22 et vers 01h54 et durant la 3ème heure vers 02h28 et à la suivante... il sera 03h00 !
Pareil pour 09h00.

C’est-à-dire que durant 12h00 les 2 aiguilles formeront un angle droit
($2 \times 12 - 2 = 22$) fois ; ce qui fait 44 fois par jour.

Commentaires et développement

- Certains groupes ont trop vite « compté » sans voir le piège : (il n’y a pas 1 heure entre 2 intervalles de temps où les 2 aiguilles se superposent et il n’y a pas ½ heure entre 2 intervalles de temps où les 2 aiguilles forment un angle droit).
Beaucoup ont trouvé 24 fois et 48 fois !

- C’est un exercice qui demande d’imaginer concrètement la situation (avec une montre réelle ou imaginaire) et de bien s’organiser.

- L’importance de travailler en groupes, de bien discuter et de voir le « piège », que quand la grande aiguille bouge, la petite aussi (12 fois moins vite).

- *Le 1er problème a été donné à un entraînement, avec explication du piège, et le 2nd à la finale quelques mois après, pour qu'ils ne retombent pas la même erreur. Malheureusement, beaucoup avait oublié...*

- *Avec les 2 aiguilles, on aurait pu également (plus pour les élèves de 6e) faire des calculs d'angle précis.*

Par exemple :
Quelle est la mesure d'angle des 2 aiguilles quand il est 1h (simple),

ou 3h30 (moins évident)

ou bien 9h15 (plus dur)… ?

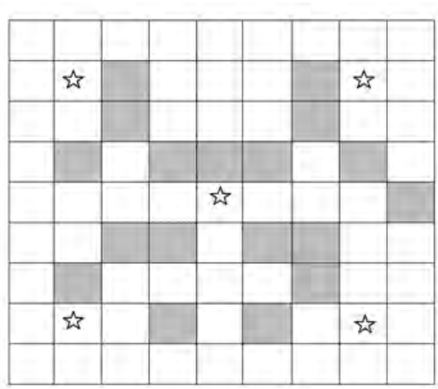
SCRABBLE (EXTRAIT DE MARS 2013)

Sam veut écrire le mot « RALLYE » « MATHS » dans cette grille. Il peut l'écrire de haut en bas ou de gauche à droite. Il ne peut mettre qu'une lettre par case.
S'il écrit une lettre sur une case grise, les points de cette lettre sont doublés.
S'il écrit sur une case étoile, ils sont triplés.

Pour calculer son score, Sam additionne le total des points obtenus Ecrire le mot « RALLYE » et « MATHS » dans la grille pour obtenir le maximum de points.

Enoncé :

R	A	L	L	Y	E
4 pts	1 pt	2 pts	2 pts	8 pts	1 pt



M	A	T	H	S
2 pts	1 pt	3 pts	8 pts	1 pt

- **Mots clés :** Français – Addition – Essais - Maximiser

- **But du problème :** Mettre dans une grille de Scrabble, les mots MATHS et RALLYE afin de gagner le plus de points possibles, avec les vrais points des lettres de ce jeu

- **Analyse du problème :**

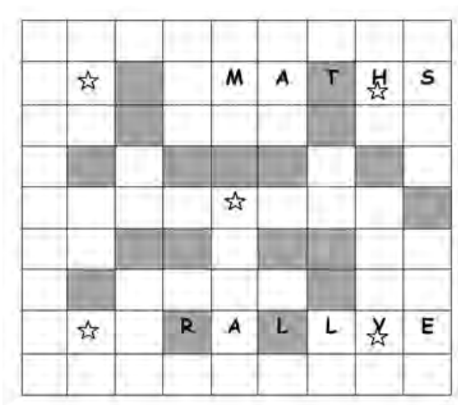
- Comprendre le rôle des cases grisées (points doublés) et des cases étoiles (points triplés).

- Faire des calculs simples : points doublés : ×2, points triplés : ×3 et additionner les points correspondant à chaque lettre.

- Chercher à maximiser ce total de points avec le ***y*** de Rallye et le ***h*** de maths dans une case étoile.

- Faire différents essais, pour s'assurer que l'on ne peut pas trouver mieux.

Ci-contre : Solution optimale



Le score maximum pour le mot MATHS est de **34 points** et celui pour le mot RALLYE est de **40 points**.

Commentaires et développement :

- Beaucoup de groupes ont trouvé de bons scores, mais tous n'ont pas trouvé le maximum. Certains ont cru (trop vite) avoir obtenu le meilleur total dès les premiers essais.

- La difficulté des problèmes d'optimisation, c'est que l'on ne sait jamais si on a résolu entièrement le problème, d'où l'importance de communiquer (groupes de 4 élèves) et de vouloir toujours faire mieux.

- Ce problème a été donné au 2nd entraînement et une autre grille (assez ressemblante) avec les mots JEUX et MACHECOUL a été proposée à la finale de la même année. De cette façon, nous avons pu remarquer ceux qui avaient bien réfléchi et compris ce problème la 1ère fois pour être motivés afin d'encore mieux réussir la 2nde fois.

- Ce problème est adaptable... à l'infini (ou presque) et permet aux plus littéraires, de faire des mathématiques en s'amusant avec leur matière préférée (le français). Tous les élèves peuvent trouver leur compte avec ce genre de sujet.

RALLYE MATHS DES 6^{E} DE NOUVELLE-CALÉDONIE

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Créé en 2002, le Rallye Maths concernait 10 collèges. En 2014, c'est 3234 élèves (72% des élèves scolarisés en 6^{e}) de 32 établissements de tout le pays qui ont participé aux épreuves qualificatives et 545 élèves de 23 classes ont été réunis pour la finale.

- **Compétition :**

Le Rallye Maths est un concours basé sur le travail en groupe : la classe rend une réponse unique et collective. Il a pour but de donner une image dynamique des mathématiques en donnant l'occasion aux élèves d'apprendre à argumenter, à prouver et à s'entrainer au débat scientifique. Il se présente en trois étapes :

- Deux épreuves qualificatives (fin mai, début aout) qui se déroulent dans les collèges et pendant lesquelles chaque classe doit résoudre en une heure des problèmes d'arithmétique, de géométrie, de logique. Le nombre d'exercices rend nécessaire la participation de tous les élèves et la variété des problèmes permet d'utiliser les compétences de chacun.
- La finale (en octobre) réunit la classe lauréate de chaque établissement. Véritable fête des mathématiques, elle se déroule, en plein air, sur une journée durant laquelle l'accent est mis sur l'expérimentation.

Ce rallye s'adresse à tous les élèves de 6^{e} scolarisés en Nouvelle-Calédonie, tous peuvent participer aux épreuves qualificatives mais le nombre de classes pour la finale est plafonné à 25 pour des raisons de sécurité et d'organisation.

- **Les partenaires :**

Le Rallye Maths de Nouvelle-Calédonie est entièrement porté par l'As2Maths, association loi 1901, créée en 1985, qui a pour but de promouvoir et animer l'enseignement des mathématiques en Nouvelle-Calédonie. Les institutions du pays et de nombreuses entreprises privées soutiennent ce rallye et permettent d'organiser la finale et de récompenser tous les finalistes.

- **Contact :**

Caroline Guillard, Présidente de l'As2Maths
21 rue de Monaco
98800 Nouméa
Nouvelle-Calédonie

: **presidente@as2maths.nc** Site Internet : **www.as2maths.nc**

EXTRAIT 2ÈME ÉPREUVE 2013

Enoncé de l'énigme : Nouméa – Poindimié

Claire vient d'arriver en Nouvelle-Calédonie. Elle est à Nouméa et souhaite se rendre à Poindimié. Elle veut parcourir la plus petite distance possible.
Elle dispose de la carte ci-dessous et des distances suivantes :

Nouméa - Boulouparis	76 000 m
Boulouparis - Thio	46,4 km
Boulouparis - La Foa	357 hm
Thio - Canala	3 640 dam
Canala - Kouaoua	39,3 km
Kouaoua - Houaïlou	40 000 000 mm
Houailou - Poindimié	741 hm
La Foa - Bourail	54,6 km
Bourail - Poya	47 500 m
Poya - Koné	5 790 000 cm
Koné - Poindimié	782 000 dm
Bourail - Houaïlou	65,4 km
La Foa - Kouaoua	58 800 m

Quelle route Claire va-t-elle choisir (la repasser sur la feuille réponse) ?

Combien de kilomètres va-t-elle parcourir ?

- **Niveau :**

A partir de la 6^{e}

- **Domaines de compétence :**

Grandeurs et mesure : calculer des distances en utilisant les bonnes unités – rechercher, extraire et organiser les informations utiles

- **Analyse du problème :**

Repérer les deux villes sur la carte puis déterminer les différents trajets possibles.

A l'aide des distances données dans le tableau, les élèves doivent extraire les informations utiles, convertir les distances dans la même unité et enfin calculer la longueur des différents trajets possibles.

Il est possible de restreindre la recherche aux trois itinéraires suivants :
a) Nouméa – Boulouparis – Thio – Canala – Kouaoua – Houailou - Poindimié
b) Nouméa – Boulouparis – La Foa – Kouaoua – Houailou - Poindimié
c) Nouméa – Boulouparis – La Foa – Bourail – Houailou - Poindimié

Constater éventuellement que les trajets Nouméa – Boulouparis (76 000 m = 76 km) et Houailou – Poindimié (741 hm = 74,1 km) apparaissent dans les 3 options. Par équivalence, simplifier la recherche en ne comparant que les distances séparant Boulouparis et Houaïlou suivant l'itinéraire choisi :

a) Boulouparis – Thio : 46,4 km ; Thio – Canala : 3640 dam = 36,4 km ; Canala – Kouaoua : 39,3 km ; Kouaoua – Houailou : 40 000 000 mm = 40 km donc Boulouparis – Houailou par cet itinéraire : 46,4 + 36,4 + 39,3 + 40 = 162,1 km

b) Boulouparis – La Foa : 357 hm = 35,7 km ; La Foa – Kouaoua : 58 800 m = 58,8 km ; Kouaoua – Houailou : 40 000 000 mm = 40 km donc Boulouparis – Houailou par cet itinéraire : 35,7 + 58,8 + + 40 = 134,5 km

c) Boulouparis – La Foa : 357 hm = 35,7 km ; La Foa – Bourail : 54,6 km ; Bourail – Houailou : 65,4 km donc Boulouparis – Houailou par cet itinéraire : 35,7 + 54,8 + 65,4 = 155,9 km

L'itinéraire le plus court est donc l'itinéraire **b)** et la longueur totale du trajet est 76 + 134,5 + 74,1 = **284,6** km.

Commentaires et Prolongement :
La diversité des compétences et la multiplication des réponses à fournir favorisent le travail en groupe.

S'agissant d'une situation contextualisée, les élèves calédoniens n'ont eu aucune difficulté à envisager les différents itinéraires et la plupart ont opté pour la route la plus courante via Bourail car elle est plus rapide sans faire attention que l'exercice leur demandait l'itinéraire le plus court en distance.

Seulement 39 classes sur les 118 ont répondu correctement au problème.

Cet exercice peut être exploité en classe en changeant simplement la ville de départ et la destination de Claire. Un autre prolongement est l'utilisation de report de longueurs pour déterminer la distance minimale entre deux villes.

EXTRAIT 1ÈRE ÉPREUVE 2014

Enoncé de l'énigme : Des vacances entre amis

Jean et Mireille souhaitent partir sur l'île de Maré avec des amis.

Ils ont noté les prix suivants :
- Un billet d'avion aller-retour : 24 000 F
- Un bungalow pour 2 personnes par nuit : 15 400 F
- Un transfert aéroport-hôtel-aéroport : 1 000 F
- Un petit déjeuner : 1 200 F
- Un repas (midi ou soir) : 3 000F

Combien coûte un séjour pour 6 personnes du vendredi après-midi au dimanche après-midi ?

- **Niveau :**

A partir de la 6e

- **Domaines de compétence :**

Opérations, proportionnalité, raisonnement.

- **Analyse du problème :**

Cet exercice présente une application concrète de l'utilisation des mathématiques dans la vie courante. Les élèves doivent déterminer le nombre de nuits, de repas, de billets d'avion, de transferts et de petits déjeuners pour pouvoir calculer le cout total du séjour pour 6 personnes. La combinaison des données temporelles et numériques a été la principale cause de confusion, c'était donc la difficulté majeure. Le travail en groupe est un atout pour ce problème notamment pour les débats que suscite cet exercice.

- **Solution :**

• 6 billets d'avion aller-retour : 24 000× 6 = 144 000 F

• 3 bungalows pour 2 personnes pour 2 nuits : 15 400×3×2=92 400 F

• 6 transferts aéroport-hôtel-aéroport : 6×1 000=6 000 F

• 6 petits déjeuners pour 2 matins : 1 200×6×2=14 400 F

• 4 repas (2 midis et 2 soirs) pour 6 personnes : 3 000×4×6=72 000 F

Le coût total est donc 144 000+92 400+6 000+14 400+72 000=328 800 F

> ***Prolongement :***
> *Il est possible de simplifier ou de complexifier cet exercice en modifiant les données temporelles ou numériques. Un prolongement est aussi possible en utilisant d'autres devises.*

EXTRAIT 1ÈRE ÉPREUVE 2014

Enoncé de l'énigme : La Roche Percée

Le saviez-vous ?

Le terme « Roche Percée » vient du trou qui était situé dans la falaise à côté du Bonhomme, formé par les eaux qui se sont frayées un passage à travers la colline s'avançant dans la mer. La falaise qui était au-dessus du trou s'est écroulée en août 2006. Un éboulement plus récent s'est produit le 17 mars 2007. Il ne reste plus que le tunnel qui relie la Roche Percée et la baie des tortues.

Pour cet exercice il faut utiliser la carte de la fiche réponse.
Arthur et Benjamin se sont donné rendez-vous sur la plage au niveau du point D. Ils doivent retrouver un trésor grâce aux indications fournies par le parchemin ci-dessous :

Sur la carte, on appelle R le point représentant la Roche Percée.

- Placer sur la carte le point B tel que BD = 2,9 cm et BR = 4,3 cm.
- Construire la droite (d) perpendiculaire à (RD) passant par R.
- Construire la droite (d') parallèle à (d) passant par B.
- Le trésor se trouve sur la droite (d'), à 560 m en réalité de la Roche Percée.

Effectuer les constructions et placer le point T représentant l'emplacement du trésor.

- **Niveau :**

6^{e}

- **Domaines de compétence :**

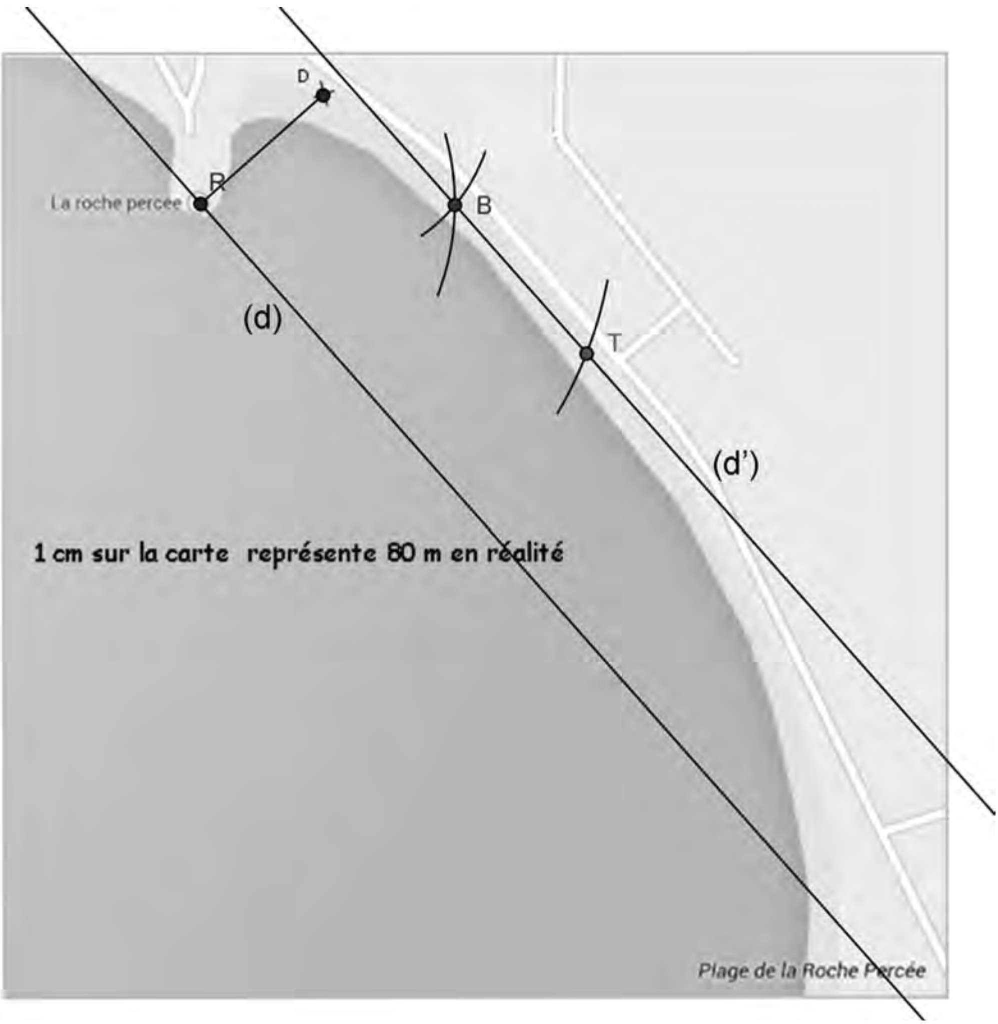
Construction géométrique, proportionnalité.

- **Analyse du problème :**

Les constructions géométriques sont simples et ce type d'exercices (recherche de trésor) est très apprécié des élèves. La difficulté rencontrée par la plupart des élèves a été l'interprétation de la notion d'échelle sous entendue par l'indication portée sur la carte.

- **Solution :**

1 cm sur la carte représente 80 m dans la réalité donc 560 m en réalité sont représentés par 7 cm sur la carte



RALLYE MATHÉMATIQUE DE PARIS (RALLYE EN VILLE DU CIJM)

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Ce rallye est l'une des activités proposées chaque année pendant le « Salon Culture et Jeux Mathématiques » organisé par le CIJM depuis l'année 2000.

- **Compétition :**

Le Rallye Mathématique de Paris est organisé par le CIJM pour faire découvrir, par la résolution d'énigmes, des lieux parisiens liés aux sciences mathématiques et à leur histoire. Il s'adresse à tout public.

- **Nombre de participants :**

On note dans le règlement : 50 équipes de 4 personnes au maximum. Ce nombre varie chaque année en fonction des conditions météorologiques et de lieux visités.

- **Liste des partenaires :**

Le rallye est doté par le magazine Tangente. Selon les années, les lieux de passage peuvent être des musées (Musée de Cluny, Musée de la Marine, Musée du Quai Branly, Musée des Arts et Métiers, Institut du Monde Arabe …) , des lieux de sciences (Palais de la Découverte, Observatoire de Paris, Cité des Sciences…) qui nous ouvrent leurs portes ou encore des libraires, des antiquaires, des commerces qui acceptent d'exposer des objets mathématiques. Tous deviennent ainsi nos partenaires le temps d'un Rallye.

- **Commentaires sur ce genre de Rallye :**

Il est difficile de satisfaire tous les concurrents ! Trop long, trop court, trop simple, trop difficile, trop de math, pas assez de math etc… L'ambition des organisateurs est de faire découvrir des lieux où on ne s'attend pas à faire des mathématiques et où, pourtant, les mathématiques sont présentes ; d'attirer le regard sur des bâtiments, des objets, des statues qui révèlent l'histoire mais aussi la vie de cette discipline dans la vie de tous les jours. Ce projet incite à proposer chaque fois un règlement – puisqu'il en faut un - qui répondra mieux aux remarques des participants ; bien sûr sans jamais y parvenir vraiment !

- **Contact :** CIJM

Adresse postale : CIJM
IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie- 75005 Paris
: mjanvier@cijm.org
Site Internet : **http://www2.cijm.org/salon/competitions-salon**

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PARIS 2012

Enoncé de l'énigme :

1- En mathématiques, un nœud borroméen constitue un ensemble d'anneaux déformables qui ne peuvent être détachés les uns des autres même en les déformant, mais tel que la suppression de n'importe quel anneau libère les anneaux restants.

L'esplanade Pierre Vidal-Naquet, au cœur de l'université Paris/Diderot, est un endroit idéal pour la détente. Sur les murs des bâtiments qui l'encadrent vous découvrez des mosaïques commandées à l'artiste Eric Duyckaerts et librement inspirées des travaux du mathématicien Pierre Soury, ancien enseignant à l'université.

Observez cette mosaïque .
Constitue-t-elle un nœud borroméen et combien de brins la composent ?

- **Réponse :**

C'est un nœud borroméen constitué de 3 brins.

Commentaires

En 2012 deux niveaux étaient proposés aux participants, compétition ou promenade. La question des nœuds borommméens s'adressait aux équipes qui avaient fait le choix du rallye compétition. On ne note ici qu'une partie des questions sur ce sujet. Il fallait retrouver 6 mosaïques, les situer sur un plan et répondre à la même question pour chacune d'elles. Mais aussi réaliser un nœud avec une ficelle et compléter un dessin de nœud sachant qu'il répondait à la définition du nœud borroméen.

L'ambition des organisateurs était de faire découvrir un aspect de la recherche mathématique actuelle en topologie, recherche vivante dans cette université Paris/Diderot.

Plus de la moitié des équipes qui avaient fait ce choix plus difficile ont répondu correctement.

DANS LE JARDIN DES PLANTES (RMP 2012)

Enoncé de l'énigme :

Dans la partie appelée Jardin de l'Ecole de Botanique, vous trouverez sans peine les petits bassins où s'ébattent les grenouilles. Leurs coassements vous guideront !

Rallye Promenade

Une grenouille veut traverser l'étang par bonds successifs sur les nénuphars qui la séparent de l'autre bord. Elle peut franchir un intervalle ou deux intervalles à la fois, mais ne revient jamais en arrière.

- De combien de façons différentes la grenouille peut-elle traverser l'étang avec 5 nénuphars ? (P1)
- Et s'il y avait 13 nénuphars ? (P2)

Rallye Compétition

Une grenouille veut traverser l'étang jusqu'à l'autre rive par bonds successifs sur les nénuphars. Elle peut franchir un intervalle ou deux intervalles à la fois, et elle peut revenir en arrière mais ne se pose jamais deux fois sur le même nénuphar ni ne revient au départ.

- De combien de façons différentes la grenouille peut-elle traverser l'étang avec 5 nénuphars ? (C1)
- Et s'il y avait 13 nénuphars ? (C2)

- **Réponses :**

P1 : 13 façons de traverser (C'est le sixième terme de la suite de Fibonacci soit $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$)

P2 : 610 façons de traverser (C'est le quatorzième terme de la suite de Fibonacci)

C1 : 24 façons de traverser (C'est le terme P_6 d'une suite qui ressemble à la précédente. Les conditions pour traverser reviennent à autoriser des sauts de 1, 2 ou 3 nénuphars soit $P_n = P_{n-3} + P_{n-2} + P_{n-1}$)

C2 : 3136 façons de traverser (P_{14} de la même suite)

Commentaires

P1 a été résolue à 75 % environ mais 15 % pour P2. Ce qui semble montrer que la référence à Fibonacci n'était pas évidente.

C1, peu de mauvaises réponses. C2, environ une réponse sur deux était juste.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PARIS 2013

En 2013, le salon se déroulait sur le parvis de la Cité des Sciences et de l'Industrie et le Rallye conduisait les équipes au travers du Parc de La Villette. Trois niveaux de questions étaient alors offerts aux participants : les pistes jaune, verte, rouge. Le tout groupé sur un petit livret qui est encore disponible pour tout ceux qui voudraient faire une visite mathématique de ce parc du 19^{e} arrondissement.
Les questions nécessitent une présence sur les lieux il n'y aura donc pas d'exemples ici.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PARIS 2014

En 2014, le salon avait retrouvé son emplacement d'origine, la place Saint Sulpice dans le 6e arrondissement de Paris. Le thème en était « Mathématiques au carrefour des Cultures » et le Rallye a été accueilli par le musée du Quai Branly. Deux heures pendant lesquelles les équipes ont pu jeter un regard mathématique sur des objets venus de tous les continents.
Ce rallye proposait de découvrir l'ethnomathématique et ces savoir-faire qu'on peut qualifier de « mathématiques naturelles ». On observe codes et codages, symétries, tracés géométriques sur les poteries, les tissages, les bijoux et les nombreux objets de la remarquable collection de cet étonnant musée.
L'ethnomathématique met en relief les mathématiques que révèlent ces arts ; elle nous permet d'avoir une connaissance de la nature du développement de la pensée mathématique à travers les continents.
Le questionnaire se présentait sous forme d'un petit livret, lui aussi disponible sur demande au CIJM.

Enoncé de l'énigme 1 :

La frise visible sur le cache-sexe ci-contre possède plusieurs propriétés géométriques dont les deux suivantes : elle est invariante par rotation d'un demi-tour (on voit le même motif si on le regarde à l'envers) et par symétrie verticale (on voit le même motif si on le regarde dans le miroir).


Cache-sexe de femme, Wayana.
Musée du quai Branly

Sauriez-vous dessiner deux frises :
1. la première invariante par rotation d'un demi-tour, mais pas par symétrie verticale ;
2. la seconde invariante par symétrie verticale, mais pas par rotation d'un demi tour.

Enoncé de l'énigme 2 :

Dans son livre African fractals l'ethnomathématicien Ron Eglash nous dit comment, en Afrique, l'architecture, l'art, l'organisation sociale et jusqu'au tressage des cheveux révèlent la nature fractale de nombreux motifs. Une visite dans ce musée est l'occasion de découvrir quelques objets qui viennent accréditer cette thèse.

Mais d'abord, quand dirons-nous qu'un motif est fractal ? Qu'est-ce qui permet de reconnaitre une géométrie fractale ? Retenons quatre critères :

- réitération d'un procédé de construction,
- changement d'échelle,
- autosimilarité,
- reproductibilité à l'infini.

Le collier pectoral dont vous voyez la photo ci-contre réalise ces conditions. Il s'agit pour vous de répondre à deux questions concernant ce collier.

- Combien de pendeloques triangulaires constituent ce collier pectoral avec ses 3 niveaux (un petit triangle a été détaché, on le prendra en compte) ?
- Combien y en aurait-il au total si on poursuivait sa construction au quatrième niveau ?

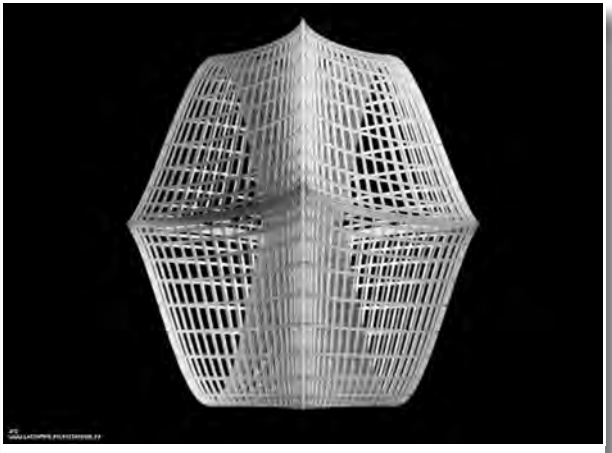
Pectoral Touareg
Sahara algérien, Hoggar. En argent avec envers en fer, il est porté par les femmes. (Musée quai Branly)

Réponses :

23 ; 84

Commentaires

Bien que totalement décentré par rapport au salon, le Rallye a remporté un grand succès. Il pouvait se faire le samedi ou le dimanche avec un livret gratuit qu'il suffisait de demander sur le stand « Rallye » du salon. Sur présentation de ce livret, les équipes pouvaient entrer dans le musée et partir à la recherche des pièces faisant l'objet de questions. Le record d'inscriptions a été atteint puisque, dépassant les limites du règlement, ce sont 58 équipes qui ont souhaité effectuer ces recherches. Les résultats ont été très inégaux et, dans l'ensemble, assez modestes. Mais le but était atteint, pratiquer des mathématiques à la fois ludiques et culturelles.



La troisième 'puissance' d'un tore
définie à l'aide de trois champs bidimensionnels
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

RALLYE MATHÉMATIQUE DU MANS (RALLYE EN VILLE DU CIJM)

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Ce rallye est l'une des activités proposées aux visiteurs du Festival des Jeux de l'Esprit qui se déroule au Mans pendant un week end de mars. Il existe depuis décembre 2010.

- **Compétition :**

Le Rallye Mathématique du Mans est organisé par le CIJM, sur le modèle du Rallye Mathématique de Paris ; il a pour ambition de faire parcourir quelques artères de la ville en découvrant des lieux et des activités à connotation mathématique.

- **Nombre de participants :**

Ce nombre varie chaque année en fonction des conditions météorologiques et de lieux visités. En général, une douzaine d'équipes de 2 à 4 personnes. Ce rallye s'adresse à tout public.

- **Liste des partenaires :**

Le rallye est soutenu par la Ville du Mans, à l'origine du Festival. Selon les années, les lieux de passage peuvent être des musées (Musée de la Reine Bérangère, Musée de Tessé, Carré Plantagenet) , des lieux d'activités scientifiques ou techniques (Musée Vert, Usine des Eaux) qui nous ouvrent leurs portes ; ou encore des libraires, des antiquaires, des commerces qui acceptent d'exposer des objets et sujets mathématiques. Tous deviennent ainsi nos partenaires le temps d'un Rallye.

- **Contact :**

CIJM
Adresse postale : IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie- 75005 Paris

mjanvier@cijm.org

Site Internet : **http://www2.cijm.org/salon/competitions-salon**

RALLYE EN VILLE - LE MANS 2012

Enoncé de l'énigme :

Place du cardinal Grente, la partie la plus ancienne de la cathédrale ouvre son porche face à l'évêché. Au dessus du porche vous observez un trapèze (pas tout à fait un triangle) fait d'un quadrillage régulier de pierres claires et foncées. Il s'agit de dénombrer les pierres sombres utilisées pour orner ce trapèze (comme si toutes les pierres étaient intactes).

Quel est ce nombre ?

- **Réponse :**
  525

- **Remarques :**

– On peut tout simplement les compter, c'est un peu long et pas toujours très fiable.

– On peut effectuer l'addition en remarquant que la première rangée a 5 pierres sombres, puis 7, puis 9 et la dernière en a 45
donc 5 + 7 + 9 + ……. + 43 + 45.

– Ou encore on peut s'apercevoir que, si on avait le petit triangle en haut de la frise, il faudrait connaître la somme S des 23 premiers entiers positifs impairs :

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots\ 37 + 39 + 41 + 43 + 45$

$S = 45 + 43 + 41 + 39 + 37 + \ldots\ldots\ 9 + 7 + 5 + 3 + 1$

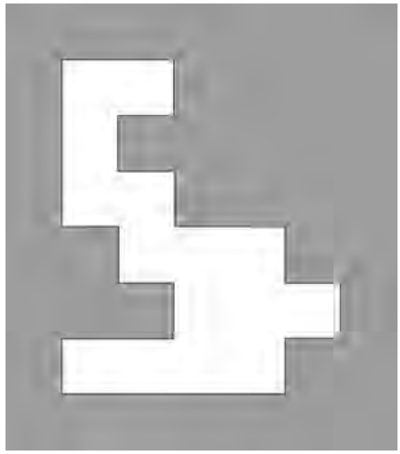
Soit $2S = 23 \times 46$ *donc* $S = 23^2 = 529$

Mais on avait compté les 1+3 pierres absentes donc le nombre cherché était ***525*** *.*

Le lieu où vous recevrez les questions de la partie B vous sera donné par une lecture convenable de la grille de Cardan.

Il vous suffit de placer correctement la fenêtre sur la grille. Mais combien y a-t-il de façons différentes de placer cette fenêtre ?

	rou	te	pla	ced	ose	ja	jet	
	des	jac	ob	ose	la	ros	deo	
	sor	ob	roi	rep	ub	er	liq	
	por	ins	deu	pl	aie	duj	etd	
	ram	pli	ard	ind	esp	spl	pls	
	art	lan	tes	ru	an	te	sru	
	tag	epr	epr	ema	rt	ine	al	



- **Réponse :**

Il y a 48 façons de positionner la fenêtre sur la grille. Avec le bon placement de la fenêtre on lit le point de rendez-vous :

laroseraiedujardindesplantes.

RALLYE EN VILLE – LE MANS 2014

Enoncé de l'énigme :

Allez au n°61 de la Grande rue.
Dans la vitrine de l'Antiquaire vous lirez un document qui décrit les mesures agraires utilisées en Sarthe aux XVIII^{e} et XIX^{e} siècles.

AGRAIRES (Mesures)

Pour les terres, une mesure générale est **l'arpent** contenant 100 chaînées de 25 pieds du Roi au carré (0,6595 are) et valant donc 65,95 ares. Une seule exception est signalée, celle de Marolles où on utilise une chaîne de 22 pieds comme dans les forêts, ce qui ramène l'arpent à 51 ares[1].

Mais les mesures concrètes existaient également. Elles posent des problèmes d'évaluation comme l'explique le texte de 1614 (DE BRANCHE).

Le **journal** de terre est « la quantité de terre qu'un laboureur à bœufs peut labourer en un jour », mais cette quantité varie selon que la terre est plus ou moins facile à travailler. Toutefois, selon le document, les arpenteurs ont retenu une évaluation moyenne laquelle, dans une grande partie du Maine, est de 80 chaînées, ce qui met le journal aux 4/5 de l'arpent, et pour La Flèche et « aultres lieux » de 66,66 chaînées, soit les 2/3 de l'arpent.

La **boisselée**, qui est basée sur la superficie ensemencée par un boisseau, pose encore plus de problèmes car elle combine la variation de la dimension du boisseau à celle de la qualité des terres. On sème en effet plus épais dans les bonnes terres de la vallée que sur les coteaux. Aussi l'auteur du texte de 1614 renonce à donner une évaluation de la boisselée.

Il semble qu'une normalisation de la boisselée par rapport à l'arpent soit ensuite intervenue en sorte que ROQUET considère que la boisselée est le sixième de l'arpent avec une valeur de 11 ares, mais en reconnaissant que le rapport est variable et peut aller du quart au neuvième.

Pour les prés, deux unités sont mentionnées, **l'hommée** et le **quartier**. L'hommée valait selon le document de 1614 un demi-arpent ou 50 chaînées soit 33,33 ares à La Flèche et 60 chaînées en général dans le Maine soit 40 ares[2]. Le quartier, contrairement à ce que laisserait supposer son nom, correspondait à la moitié de l'arpent soit environ 33 ares.

Pour les vignes, on parlait aussi de **quartier**, mais il n'avait pas la même superficie que le quartier de pré. Il était plus petit, couvrant seulement 16,49 ares selon ROQUET.

Question : 1 journal = ….m²

Allez alors dans les vignes des Fossés Saint Pierre. Vous y trouverez une indication pour répondre à la question suivante :
Question : le vignoble a une surface de ……… journal (aux)
et une surface de ……………quartier(s)

- **Réponses :**

1 arpent = 65,95 ares = 6595 m²

1 journal étant 4/5 de l'arpent,

1 journal = 5276 m²

Dans la vigne, un panneau indiquait une surface de 200 m².
On peut donc trouver la surface dans cette unité d'autrefois :
200 / 5276 ≈ 0,038 journal
Et 1 quartier = 16,49 ares = 1649 m² soit 200/1649 ≈ 0,1213 quartier

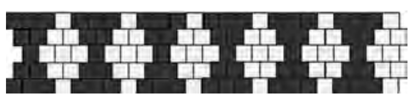
Depuis les ***jardins de Gourdaine***, observez les vestiges de l'enceinte romaine qui fut édifiée à la fin du III^e siècle.
Longue de 1,3 km, pendant quinze siècles elle a enfermé le noyau historique de la ville sur une surface de 9 hectares. Cette enceinte était presque un rectangle.

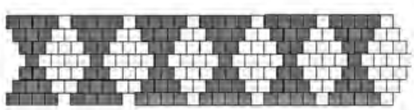
Question :
A périmètre constant, quelle forme aurait-il fallu lui donner pour obtenir une surface maximum ? Quelle aurait été alors son aire en hectares ?

Approchez-vous maintenant de la ***Tour des Pans-de-Gorron***. Cette tour, dont la forme diffère de celle des 10 autres tours encore visibles, est remarquable par la grande richesse des décors géométriques de ses parements. Ces décors sont faits d'une alternance de pierres claires et de pierres sombres liées par un mortier rose. Selon les niveaux on peut observer des triangles, des cercles, des losanges, des sabliers, des chevrons, etc. Sur chaque niveau les pierres sont placées sur 5 lignes.
Au niveau le plus bas les pierres blanches forment des losanges et les pierres sombres des « sabliers ».

Questions :
Quelle est la proportion de pierres blanches par rapport aux pierres sombres ?

Si le même dessin (alternance de losanges et de sabliers) était produit sur 7 lignes, quelle serait la proportion pierres blanches/pierres sombres ?





- **Réponses :**

Avec les 5 niveaux
Sur un losange: 1+2+3+2+1 = 9 pierres blanches
Sur un sablier : 3+2+1+2+3 = 11 pierres sombres
soit une proportion de 9/11

Avec 7 niveaux
Sur un losange: 1+2+3+4+3+2+1 = 16 pierres blanches
Sur un sablier : 4+3+2+1+2+3+4 = 19 pierres sombres
soit une proportion de 16/19

On remarque que $9/11 < 16/19 < 1$ et on peut s'interroger sur ce que devient cette proportion si on a 9, 11, 13, 15 ….. niveaux.

- **Commentaires**

Il est difficile d'extraire quelques exemples de ce « rallye en ville » ; les questions sont très liées à l'histoire locale et, à la demande des participants, il faut limiter le niveau des maths utilisées. Mais c'est une merveilleuse occasion de faire se rencontrer des mondes culturels souvent imperméables les uns aux autres. L'accueil des responsables de sites est toujours excellent. Les vestiges romains du Mans, muraille, thermes, objets archéologiques ont été l'occasion d'étudier l'aspect géométrique de frises datant des premiers siècles. L'artisanat conservé au Musée de la Reine Bérangère n'est pas moins digne d'intérêt : en 2014, les concurrents furent invités à entrer dans ce musée pour découvrir la collection d'oeuvres de Louis-Léopold Thuilant, le potier de Prévelles, pour en découvrir les symétries et autres propriétés géométriques !

RALLYE MATHEMATIQUES IREM 95

PRÉSENTATION :

Côté élève, les intentions de ce rallye sont de :

- confronter les élèves à des problèmes de recherche pour lesquels différents types de démarches sont possibles qui favorisent l'initiative, l'imagination et l'autonomie ;
- placer les élèves dans un contexte inhabituel qui valorise le travail en équipe, qui les implique dans un esprit de coopération et non de rivalité.

Le Rallye est un outil qui permet de :

- mettre les élèves en situation de recherche de façon autonome ;
- leur faire élaborer des procédures de résolutions personnelles ;
- favoriser une démarche scientifique: émettre des hypothèses, élaborer une démarche de résolution, vérifier, échanger des procédures, argumenter...
- utiliser, enrichir le langage spécifique aux mathématiques (vocabulaire, schémas, graphiques...)
- lire en mathématiques en s'adaptant à la diversité des formes d'énoncés de problèmes ;
- prendre conscience de ses connaissances même si celles-ci sont modestes ;
- écrire en mathématiques : des écrits pour chercher ; des écrits destinés à être communiqués ; des écrits pour argumenter.

Côté enseignants, l'organisation du rallye permet de :

en classe , vivre des situations de recherche de problèmes ouverts avec un regard plus aigu sur les procédures (le rendu des productions d'élèves doit expliciter la manière dont les élèves sont arrivés au résultat mais aussi la façon dont le débat a amené à choisir la production finale) ; proposer à des collègues enseignant dans les classes, en formation continue, de :

- se réunir pour échanger autour de l'action et construire les sujets ;
- proposer un accompagnement du Rallye pour échanger sur les sujets, les modalités de mise en place en classe, les réactions d'élèves, les prolongements du Rallye dans la vie de la classe ou de l'école.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

2011 – 2012 : animations sur la circonscription de Sarcelles Sud pour organiser un Rallye Maths Cycle 2 (Grande section – CP – CE1).

2012-2013: ouverture du Rallye Maths au département du Val d'Oise en intégrant des classes de cycle 3 et de l'ASH (Clis et Segpa) : 1ère année du Rallye Maths IREM 95 (101 classes ont participé).

2013-2014 : ouverture aux classes de moyenne section de maternelle. Les classes pouvant participer concernent donc en maternelle : les moyennes et grandes sections, en élémentaire : les classes de CP au CM2, les CLIS ; ainsi que les classes de Segpa, IME, ITEP (avec 35 classes participantes pour ces dernières) : création des journées de jeux et activités mathématiques.

2014-2015 : ouverture aux classes de 6^{e} pour que le Rallye puisse être un support à la liaison CM2-6^{e}.

- **Epreuves :**

Quatre domaines de recherche :

nombres et calculs (problèmes sur les quantités en maternelle), géométrie (plane et dans l'espace), grandeurs et mesures, logique. Niveaux de difficultés : pour chaque cycle, il y a dans chaque domaine quatre niveaux de difficulté (croissante : vert-bleu-jaune-rouge (et arc-en-ciel pour la liaison CM2-6^{e})), le choix est laissé à l'enseignant.

Recherche par petits groupes :

- les élèves en même temps, le même jour sur le même problème ;
- les groupes de recherche sont hétérogènes pour favoriser les échanges et la recherche.

Mise en commun :

- chaque groupe doit avoir un temps de parole lui permettant d'expliquer sa démarche ;
- la mise en commun doit permettre un temps d'échange à partir des productions (grands formats).

Elle doit également inclure un temps de négociation et de décision (vote) pour choisir la production finale de la classe. Il peut y avoir des mises en commun intermédiaires de façon à ne pas rester « sec » sur un problème.

Matériel nécessaire :

Les élèves peuvent utiliser, à leur demande, tous les documents et matériels disponibles dans la classe mais ils ne doivent recevoir aucune aide mathématique de l'enseignant ou de tout autre adulte (voir le document en ligne sur le site « malle au trésor »).

Une seule réponse par classe :
Suite à un échange, les élèves doivent choisir la réponse à envoyer. La classe doit justifier son choix. Ce n'est donc pas l'enseignant qui choisit la réponse de la classe. Chaque réponse choisie par la classe doit impérativement être accompagnée d'un argumentaire qui peut se présenter sous diverses formes (dictée à l'adulte, photos etc.). L'argumentaire doit suffire à expliciter la démarche.

- **Compétition :**

Le rallye mathématique se déroule en deux étapes :
- étape 1 : 4 problèmes à résoudre, pas de barème (c'est juste un entraînement, la classe n'envoie pas de bulletin réponse). Les collègues peuvent renvoyer des remarques sur les problèmes … (en général début janvier mais les dates sont libres).

- étape 2 : 4 problèmes à résoudre en deux semaines, la classe envoie un coupon réponse par problème (un par domaine : 1 de « nombres et calcul », 1 de « logique », 1 de « géométrie », 1 de « grandeurs et mesures » (sur deux semaines dont la semaine des Mathématiques) fin mai-début juin : journées de jeux maths.

Les classes ayant participé aux deux épreuves du rallye peuvent, si elles le souhaitent, s'inscrire aux journées de jeux mathématiques (une demi-journée par classe).

Partenaires

DSDEN 95,

ACSDAECS,

CapMaths,

2AMaj Val de France,

Secours populaire 95

Contact

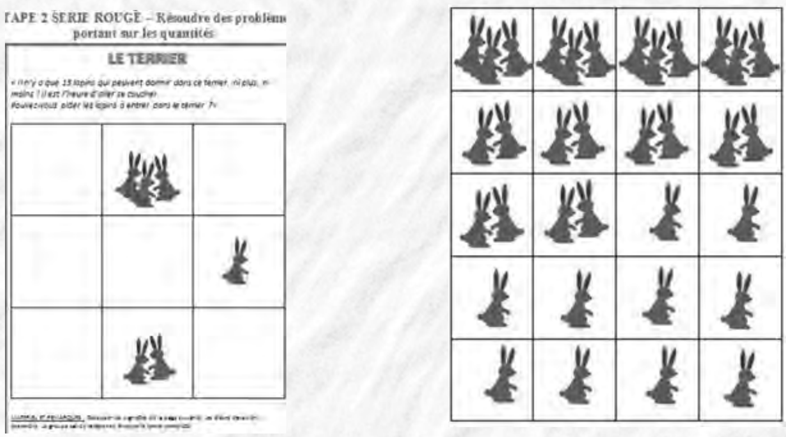
Rallye Maths Irem 95,
Inspection de Sarcelles Sud,
148 avenue de la division Leclerc
95200 Sarcelles site.

Agnès BATTON
✉ : **agnes.batton@u-cergy.fr**

Monique FIGAROL
✉ : **monique.figarol@ac-versailles.fr**

1 - LE TERRIER

Enoncé :



Il n’y a que 15 lapins qui peuvent dormir dans ce terrier, ni plus ni moins ! Il est l’heure d’aller se coucher. Pouvez-vous aider les lapins à s’installer dans le terrier ? matériel et remarques : découper les lapins. Les élèves travaillent ensemble, le groupe valide la réponse. Envoyer les terriers complétés.

- **Niveau scolaire :**

Moyenne et grande section de maternelle (niv. de difficulté le plus élevé)

- **Domaine mathématique :**

Résolution de problèmes portant sur des quantités

- **Analyse de tâche :**

Les élèves doivent compléter le quadrillage représentant le terrier de manière à ce qu’il y ait 15 lapins au total. L’énoncé comporte une information implicite : rien ne dit que toutes les cases doivent être remplies.

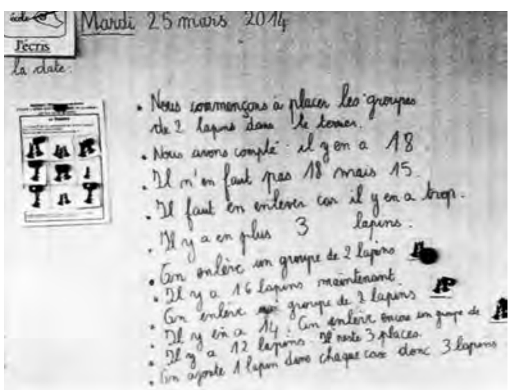
C’est donc un des premiers points dont les élèves doivent débattre. Le problème a plusieurs solutions (en remplissant toutes les cases ou non). Cette pluralité de solutions peut être difficile à accepter pour certains élèves. Procédures possibles :
- dénombrer les lapins initialement présents dans le terrier, trouver le complément à 15 à partir de là en utilisant les étiquettes de groupes de lapins (en surcomptant, à l’aide de jetons ou de boules de boulier …) ;
- recompter les lapins une fois les étiquettes posées et arriver à 15 à la suite de plusieurs essais-ajustements ;

- faire des calculs intermédiaires au fur et à mesure que les étiquettes sont posées...

Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants :
GS, école maternelle Jean Jaurès à Sarcelles :
Il est à noter qu'aucun élève n'a eu l'idée de savoir combien de lapins étaient déjà dans le terrier pour savoir combien il fallait en rajouter. Mise en commun : lors de l'affichage collectif, les élèves ont d'abord observé les terriers de chaque groupe. Une élève fait la remarque que toutes les solutions proposées sont différentes ce qui a laissé perplexes les autres élèves. Puis, en regroupement, chaque groupe a vérifié le dénombrement de son terrier et a expliqué comment il a procédé. Suite au comptage, tous les élèves valident les quatre réponses en disant : « c'est juste, il y a quinze lapins dans tous les terriers et donc il n'y a pas de mauvaise réponse ».

Mais les élèves ne devant valider qu'une seule réponse, ils décident de compter combien d'images de groupes de 1, 2 ou 3 lapins sont utilisées pour compléter. Ils remarquent que trois groupes ont utilisé la même quantité d'images de 1, de 2, et de 3 lapins mais à des emplacements différents…

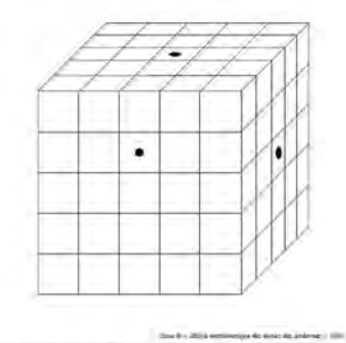
GS de maternelle, école primaire Jules Ferry à Montmorency :
Nous commençons à placer les groupes de 2 lapins dans le terrier. Nous avons compté, il y en a 18.
Il n'en faut pas 18 mais 15.
Il faut en enlever car il y en a trop.
Il y a 3 lapins en plus.
On enlève un groupe de 2.
Il y a maintenant 16 lapins.
On enlève un groupe de 2.
Il y a maintenant 14 lapins.
On enlève encore un groupe de 2.
Il y en a maintenant 12 lapins
et il reste trois cases.
On ajoute 1 lapin dans chaque case donc trois lapins.



2 – LA CHIGNOLE

J'ai construit ce cube avec des petits cubes.
Avec ma perceuse, je perce ce cube de part en part, suivant le modèle puis je détruis le grand cube.

Combien de petits cubes sont percés ?



(issu de Rallye Maths des écoles des Ardennes, 1996)

- **Niveau scolaire :** CP/CE1 (niveau le plus difficile)
- **Domaine mathématique :**

Géométrie dans l'espace, structuration de l'espace, (lexique du cube et de la structuration de l'espace, représentations et propriétés du cube)

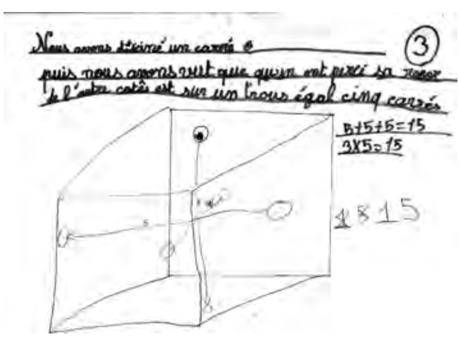
- **Solution :**

Treize cubes sont percés dont deux plusieurs fois.

- **Analyse de tâche :**

Il s'agit de dénombrer des cubes après avoir repéré des alignements de cubes mais aussi des intersections de bandes de cubes. C'est cette dernière étape qui est difficile pour les élèves . Certains groupes auraient pu, pour vérifier, utiliser du matériel (des cubes emboitables mais aussi de la pâte à modeler … pour reproduire le grand cube et ainsi vérifier le résultat).

(voir image ci-contre)



Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants:

CE1/CE2, école du Trait d'Union, Bouffémont :

La classe est organisée en groupes hétérogènes de 5 ou 6 élèves mêlant des CE1 et des CE2 ; la « solution » choisie par l'ensemble de la classe est celle offrant une perspective transparente du cube transpercé de trois flèches visibles de part en part et indiquant le nombre de cubes transper-

cés soient 3 fois 5. Aucun élève n'a perçu que deux cubes étaient troués plusieurs fois et que par conséquent il n'y avait pas 15 cubes percés. Les conceptions erronées dénotent :
- une confusion de vocabulaire entre cube et carré : certains groupes ont compté le nombre de faces carrées percées ;
- une confusion de représentation : malgré le nombre de cubes énoncé au préalable, certains ont pensé que l'intérieur du cube était creux. Cette conception était appuyée pour certains par la représentation de ce cube en papier à l'aide de papier quadrillé à petits carreaux reprenant le nombre apparent de carrés comme dimension du patron.

3 – CHIENS ET CHATS

Il faut 56 biscuits pour nourrir 10 animaux.

Il n'y a que des chats et des chiens.

Les chiens mangent 6 biscuits chacun.

Les chats n'en mangent que 5.

Combien y-a-t-il de chiens et de chats ?

- **Niveau scolaire :** CP/CE1 (niveau 3 sur 4)
- **Domaine mathématique :** nombres et calculs
- **Analyse de tâche :**

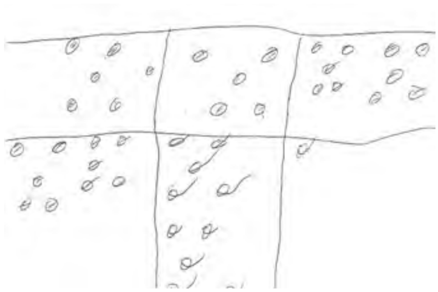
Descriptifs de procédures d'élèves par des enseignants, demande d'usage de matériel :

CP de l'école Jean Jaurès 1 à Sarcelles :

Pour trouver, nous avons dessiné les chiens, les chats et les biscuits. Pour les chiens des paquets de 6 biscuits et des paquets de 5 pour les chats. Nous n'avons pas réussi car on ne peut pas dessiner les biscuits dessinés. Nous avons demandé à la maîtresse 56 biscuits photocopiés. Nous les avons découpés puis nous avons fait des paquets de 6 et de 5. Pour gagner il faut faire dix paquets et tout distribuer (il ne fallait pas laisser de biscuits). Il y a 6 chiens et 5 chats.
Les divers dessins d'élèves permettent de repérer des niveaux différents selon les groupes d'élèves.

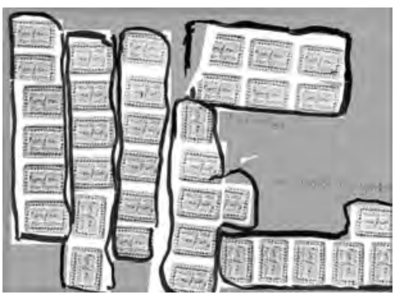
Représentation très figurative

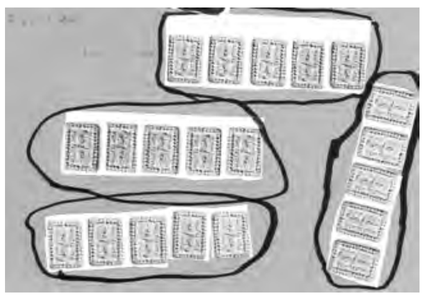
Représentation très abstraite des gâteaux et où chiens et chats ne sont



représentés que par les groupements

Mais il manque tout de même quelques détails dans le descriptif pour savoir comment se sont faits par la suite les calculs (des essais et des ajustements certainement mais comment ?).





LES JOURNÉES DE JEUX MATHÉMATIQUES :

Entre fin mai et début juin, les élèves sont invités à venir participer à des ateliers de jeux ou d'activités mathématiques. Ils sont pris en charge une demi-journée par des collègues enseignants (de primaire ou de l'ESPE), des étudiants en master enseignement ou des bénévoles. Ils jouent ainsi environ trois heures (ce qui correspond à 6 ateliers) puis repartent après un goûter et une remise de diplômes de participation individuelle et un diplôme collectif pour la classe.

RALLYE MATHÉMATIQUE DES COLLÈGES
IREM DE LILLE

PRÉSENTATION

Ce Rallye, organisé dans l'Académie de Lille, suscite depuis 23 ans l'intérêt des élèves et des enseignants . En 2014, plus de 11 000 collégiens ont participé aux phases qualificatives.

Chaque équipe de quatre élèves de niveaux différents (6^e, 5^e, 4^e, 3^e) doit résoudre 7 énigmes (numériques, géométriques, statistiques ou logiques, dont une de communication) nécessitant la manipulation d'objets, chacune arbitrée par un enseignant, parent ou lycéen.

FICHE TECHNIQUE

Déroulement :

De janvier à mai, le matériel des énigmes des qualifications circule dans l'académie. Il est constitué d'énoncés, d'indications, de plateaux, d'objets à manipuler (pions, solides...) ainsi que de consignes d'arbitrage. Chaque collège participant aux qualifications présente une équipe à la finale un samedi mi-juin à l'Université Lille 1.

Objectifs :

Ce Rallye veut montrer des mathématiques ludiques et attrayantes. Il n'est pas sélectif : des élèves en difficulté scolaire sont souvent en finale.

Les énigmes sont conçues pour permettre la mise en place d'analyses, de stratégies et la mobilisation de connaissances au sein d'une équipe d'élèves d'âges différents. Ceux-ci sont mis en situation de recherche mathématique par la manipulation d'objets dans un environnement différent de celui de la classe. Le travail en équipe oblige à verbaliser et à confronter différents raisonnements ou points de vue. Le regroupement inter-niveau facilite la spontanéité. Les essais sont plus aisés quand il suffit de bouger un pion tandis qu'un élève osera moins facilement écrire une réponse incertaine.

Ce Rallye promeut l'engagement des élèves, le travail en équipe, le décloisonnement des classes, la mutualisation des connaissances, l'investissement des équipes éducatives accueillant les qualifications ainsi que la participation de parents et d'anciens élèves en tant qu'arbitres.

Contacts :

IREM de Lille
Bât M1, Université Lille 1, 59 650 Villeneuve d'Ascq
☏ : **03 20 43 41 81** Site Internet : **http://rallye-irem.univ-lille1.fr**

RECTO-VERSO

Énoncé :

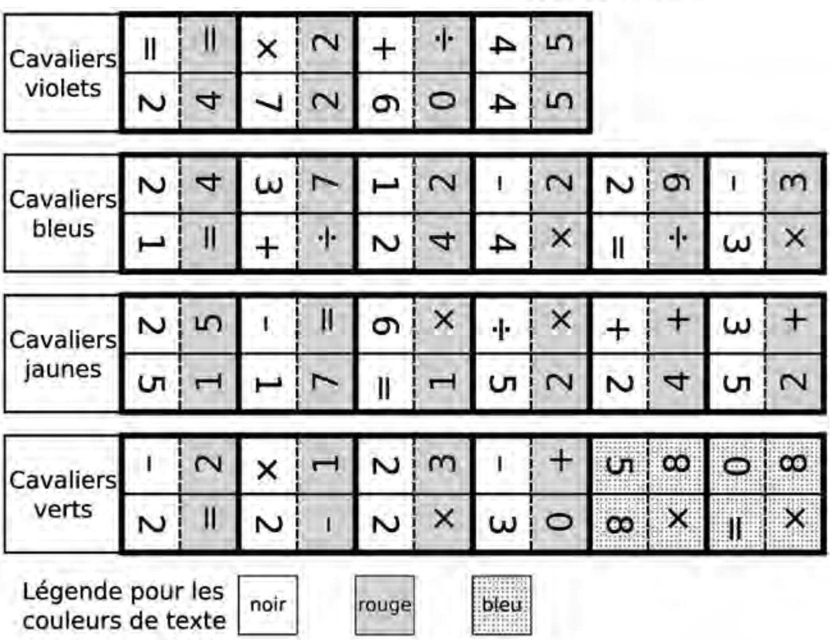
Pour chaque jeu de pions d'une même couleur, vous devez reconstituer simultanément deux égalités correctes, une pour chaque face. Pour cela, vous devez utiliser tous les pions en respectant les priorités opératoires et les notations mathématiques.

| – | 1 | | 2 | + | se lit – 12 +...

Il n'y a ni signe ni chiffre inutile.
Pour chaque jeu, une égalité est en rouge, l'autre en noir. Pour le jeu vert, ce qui est écrit en bleu complète une égalité soit rouge soit noire.

- **Matériel**

Cavaliers verts



- **Compétences :**

  Calcul mental avec des entiers et priorités opératoires.

- **Analyse**

Pour trouver les deux égalités correctes simultanément, il est nécessaire de positionner un élève de chaque côté des pions et de les inviter à communiquer entre eux. L'équipe peut donc se répartir en deux sous-groupes de deux.

Les jeux sont de difficulté croissante :

- violet : 4 pions, égalités monochromes (rouge ou noir) ;
- bleu : 6 pions, égalités monochromes (rouge ou noir) ;
- jaune : 6 pions, égalités monochromes (rouge ou noir), utilisation des priorités opératoires ;
- vert : 6 pions dont 2 réversibles (écrits en bleu), utilisation des priorités opératoires.

Comme pour toutes les énigmes du Rallye, les solutions intermédiaires sont valorisées : ici, une égalité correcte d'un seul côté. Pour chaque jeu de pions, la solution simultanée est unique mais les solutions intermédiaires proviennent des propriétés des opérations.

Les équipes ont mis en œuvre différentes stratégies, les plus courantes ayant été :

- de positionner les pions en respectant les notations mathématiques et la consigne « pas de signe inutile » (on ne commence pas la ligne par ×8 ou par +2 ; on élimine la succession 0+ =2 ; on ne termine pas par 5+ ou par 3=) ;
- de travailler par ordres de grandeur ;
- de réaliser une égalité correcte d'un côté et de vérifier si la 2nde l'est également.

Ce qui a déstabilisé des élèves, au moins au début, est le fait qu'une égalité correcte n'est pas toujours de la forme « calcul = résultat » mais peut être de la forme « résultat = calcul » ou « calcul = calcul ».

- **Solutions** :

jeu violet : $220 \div 4 = 55$ et $44 = 2 + 6 \times 7$

jeu bleu : $42 \div 7 \times 3 \div 9 \times 2 = 4$ et $21 - 42 = -33 + 12$

jeu jaune : $4 + 2 \times 2 + 1 \times 7 = 15$ et $25 - 16 = 35 \div 5 + 2$

jeu vert : $-10 + 58 = 2 \times 3 \times 8$ et $0 = 22 - 2 \times 8 - 3 \times 2$

- **Variantes :**

Ce type d'énigme permet un certain nombre d'extensions possibles :

- introduire de nouvelles opérations, des parenthèses, des décimaux…
- augmenter le nombre de pions ;
- augmenter la proportion de pions réversibles.

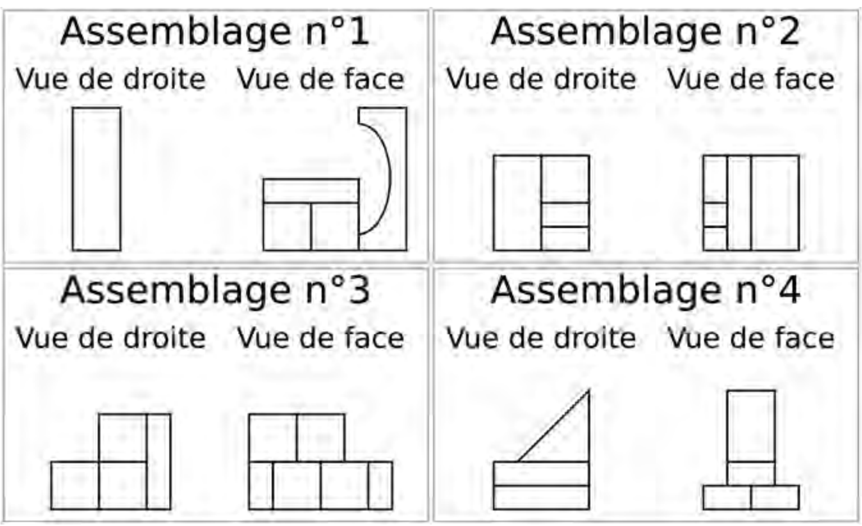
UNE PIÈCE PEUT EN CACHER UNE AUTRE (COMMUNICATION)

- **Principe de l'énigme de communication**

Une énigme de type communication est toujours proposée dans chaque phase du rallye, qualifications et finale. La communication est certes présente dans toutes les énigmes (puisque quatre personnes travaillant sur un même sujet communiquent forcément) mais ici, l'équipe est scindée en deux et chaque sous-groupe travaille « en aveugle » par rapport à l'autre. Ainsi les expressions du type « tu mets ça là, comme cela » en pointant du doigt ne fonctionnent plus. En général, un groupe sera émetteur, le second récepteur. Les émetteurs doivent transmettre les informations à leur disposition pour permettre aux récepteurs de les utiliser. Les rôles s'inversent au cours de l'énigme.
Le plus souvent, il s'agit d'une épreuve de géométrie, plane ou dans l'espace.

- **Matériel par sous-groupe**

Matériel distinct par sous groupe :
• 1 plateau indiquant les vues de face et de droite de 2 assemblages



- **Matériel identique pour les 2 sous-groupes :**

• 4 plateaux de repérage
• 20 solides : 9 cubes de côté c, 8 pavés droits de dimensions c, c/2 et 2c, 1 cylindre jaune de hauteur 2c et de diamètre de base c, 1 prisme droit de base un triangle rectangle, 1 « pont »
Les pièces utilisées se trouvent dans le commerce dans les jeux pour jeunes enfants.

Énoncé

Vous avez quatre assemblages à réaliser :
- deux dont vous avez des vues ;
- deux dont les consignes de construction vous seront données par vos équipiers.

Une fois les quatre assemblages réalisés, vous aurez utilisé l'ensemble des solides.
Seule la communication avec vos équipiers vous permettra de déterminer les solides utilisés dans chaque assemblage

Consignes orales données par l'arbitre :
- Vous n'avez le droit de communiquer qu'oralement.
- Dans un premier temps, il est conseillé de reconstituer ses propres assemblages à partir des vues données sans être certain d'utiliser les bons solides ; puis, dans un second temps, de transmettre les indications pour, au final, réaliser les quatre assemblages.

- **Compétences**
- Communiquer oralement en utilisant un vocabulaire précis.
- Construire un solide à partir de différentes vues.
- Comprendre que plusieurs solides peuvent avoir une même vue.
- Comprendre que deux vues ne suffisent pas à réaliser un assemblage.

- **Analyse**

Au collège, les objets en mathématiques sont de moins en moins manipulés, le passage objet-représentation n'est pourtant pas simple. C'est pourquoi nous proposons régulièrement une énigme de ce type. Ici, nous avons choisi de minimiser les difficultés de ce passage, si ce n'est que la vue de côté ou de face d'un cylindre posé sur sa base est équivalente à celle d'une face de pavé droit, et qu'une des pièces à utiliser n'apparaît pas sur les vues.

La plus grande difficulté de cette énigme réside dans sa nature même : la communication. Pour certaines équipes, notamment celles qui participent au Rallye pour la première fois, il n'est pas aisé d'échanger :

- personne ne prend l'initiative de communiquer en premier et tous attendent, cela est d'autant plus pénalisant dans cette énigme que chacun a la possibilité d'effectuer une construction (même fausse) sans avoir à échanger ;
- lorsqu'un sous-groupe donne des informations, l'autre n'ose pas forcément demander des précisions, dire qu'il n'a pas compris ou interrompre pour expliquer que telle pièce ne peut pas être utilisée puisqu'elle

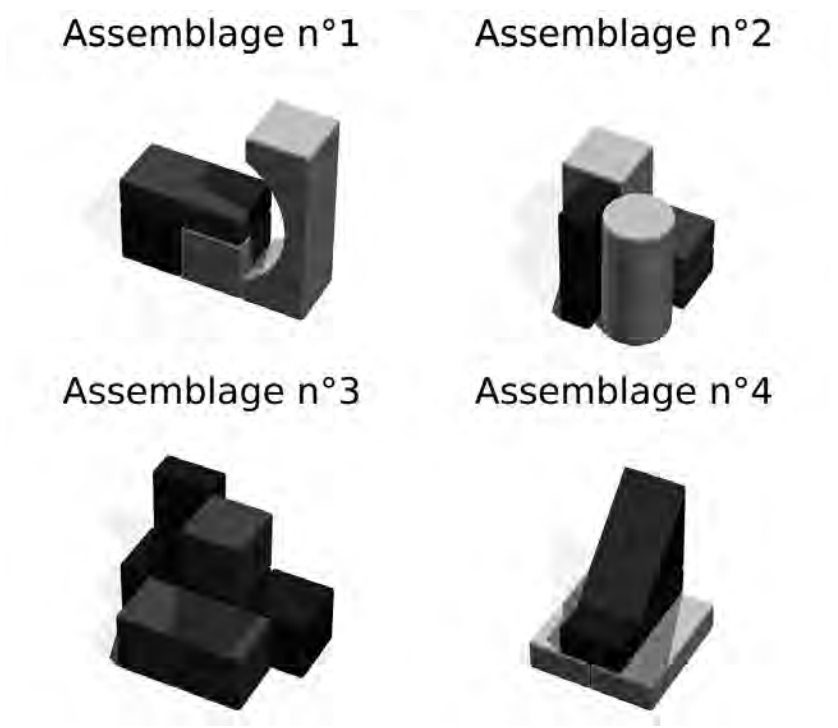
sert obligatoirement dans une des constructions qu'ils ont à transmettre ensuite ;

- le vocabulaire à employer pour indiquer le positionnement relatif des pièces est peu connu par rapport au vocabulaire employé en géométrie plane, ce genre d'exercice n'étant pas pratiqué en classe.

Au cours de l'épreuve, les deux sous-groupes mettent en place un vocabulaire commun qui n'est pas obligatoirement celui utilisé en mathématiques. Par exemple, il est courant d'entendre « triangle » au lieu de prisme droit à base triangulaire ou « tu poses le petit rectangle comme un matelas » au lieu de « tu poses le pavé droit sur sa face de plus grandes dimensions »...

Chaque sous-groupe est évalué sur sa capacité à construire les deux assemblages dont il a les vues et sur la reproduction à l'identique des constructions des autres assemblages effectuées et transmises par l'autre sous-groupe, même si celles-ci ne correspondent pas aux vues. Ainsi un assemblage faux bien transmis apportera des points au sous-groupe récepteur.

- **Solution**



- **Variantes**

Au fil des ans, nous avons exploité ce type d'énigme en communication dans différents cas de figure :

- pas de pièce cachée ou une pièce cachée sur les deux vues qui, par ses dimensions, ne peut être positionnée que dans un assemblage à un endroit précis ;

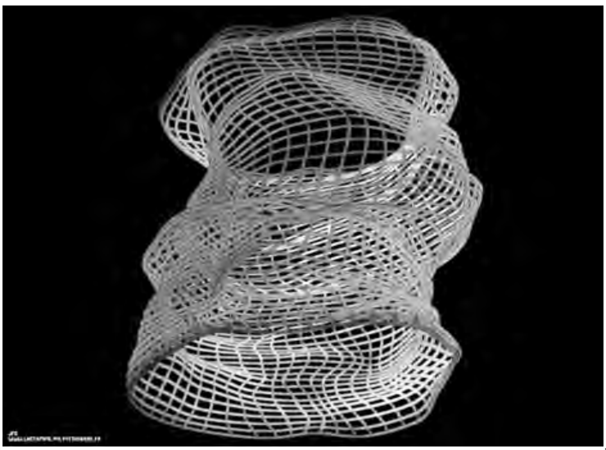
- plus de pièces dont les vues portent à confusion, l'indétermination ne pouvant être levée qu'en croisant les informations ;

- construction de plusieurs assemblages possibles à partir des mêmes vues ;

- représentations données en perspective cavalière ;

- réalisation d'une seule construction ayant des espaces vides (ruine d'une villa antique), toutes les vues étant données mais réparties dans les sous-groupes (obligation de croiser les informations pour déterminer les pièces à poser, ce qui s'est révélé très difficile pour les élèves) ;

- constructions et transmissions d'informations à partir d'assemblages de pièces soudées en ayant les yeux bandés (récepteurs et émetteurs).



Un cylindre froissé
à l'aide de trois champs bidimentionnels
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr

IREM PARIS NORD

PRÉSENTATION

Le rallye Mathématique de l'IREM Paris Nord s'adresse aux classes de CM2 et de 6e de l'Académie de Créteil. Existant depuis 1998, il a pour objectifs d'inciter les enseignants à proposer des problèmes ouverts à leurs élèves et de promouvoir la liaison école-collège.

Le rallye se déroule au cours du mois de mars. Les classes ont une heure pour répondre aux dix épreuves proposées. Des groupes mixtes peuvent être constitués en regroupant par moitié une classe de CM2 et une classe de 6e.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Le rallye étant un concours s'effectuant en classe entière, l'organisation des élèves prend une place prépondérante dans la réussite de l'épreuve. Un travail préparatoire est donc nécessaire afin que les élèves s'entendent sur une manière efficace de fonctionner ensemble. Une sélection d'épreuves provenant d'autres rallyes mathématiques est proposée comme entraînement au mois de décembre.

Certains enseignants inscrivent chaque année leurs classes et intègrent le rallye dans leur pratique pédagogique. Ils préparent celles-ci en vue du concours en proposant régulièrement des problèmes ouverts et entraînent leurs élèves en travaillant sur les sujets des éditions précédentes.

Un compte-rendu très détaillé de Caroline Mathias sur le travail de sa classe durant l'année illustre à merveille ce que l'on peut réaliser en classe en s'appuyant sur ce concours. Il est accessible sur notre site Internet dans la rubrique « rallye ».

Epreuves :

La participation au rallye oscille entre 160 et 220 classes ce qui représente en moyenne 5 000 élèves.

Nous observons depuis quelques années une nette progression du nombre de groupes mixtes malgré les contraintes plus importantes en terme d'organisation. Lors de l'édition 2014, les groupes mixtes représentaient plus de la moitié des classes participantes. Il semblerait que la liaison école-collège devienne une nécessité pédagogique partagée par de plus en plus d'enseignants.

Contacts :
Le rallye est conçu et organisé par le groupe collège de l'IREM Paris Nord composé par Stéphan Petitjean, Salvatore Tummarello, Erwan Adam et Frédéric Clerc sous la direction de Sylviane Schwer.

L'ensemble des informations concernant le rallye et les énoncés de toutes les éditions depuis 1998 est disponible sur le site Internet de l'IREM Paris Nord.

http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?rubrique32

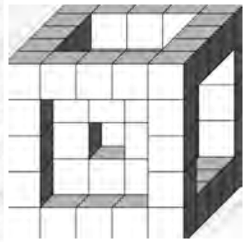
ASSEMBLAGE DE CUBES - ÉDITION 2013

Énoncé :

Le solide ci-contre est fabriqué avec des petits cubes.

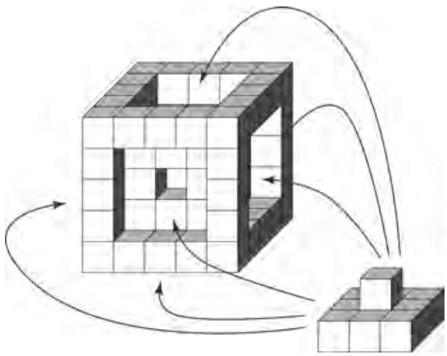
Quelle que soit la façon dont on pose cet objet sur une table, on le voit toujours ainsi.

Combien de petits cubes sont nécessaires pour construire ce solide ?



- **Réponse :**

La pièce que l'on enlève aux 6 faces est composée de 10 petits cubes.
Le grand cube entier est composé de 125 cubes (5 x 5 x 5).
Ainsi le solide est composé de 65 petits cubes (125 - 6 x 10)



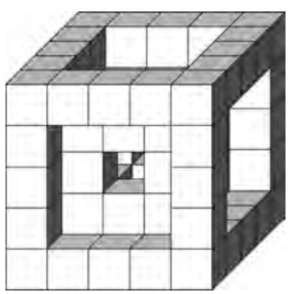
Commentaires

Ce type d'exercice est un classique de notre rallye. Nous proposons souvent ces problèmes de comptage de petits cubes car l'énoncé a une forme très simple et les méthodes de résolution sont multiples. La correction est l'occasion de confronter les différentes méthodes de comptage et de faire arriver progressivement les élèves vers une solution experte utilisant la notion de volume tout en développant la vision dans l'espace (voir ce qui est caché).

- **Débat :**

Un des débats rencontrés dans cet exercice est de savoir s'il y a ou non un petit cube au centre de la pièce.

La réponse est oui. En effet, si le solide était percé, la représentation du solide aurait été celle ci-contre.



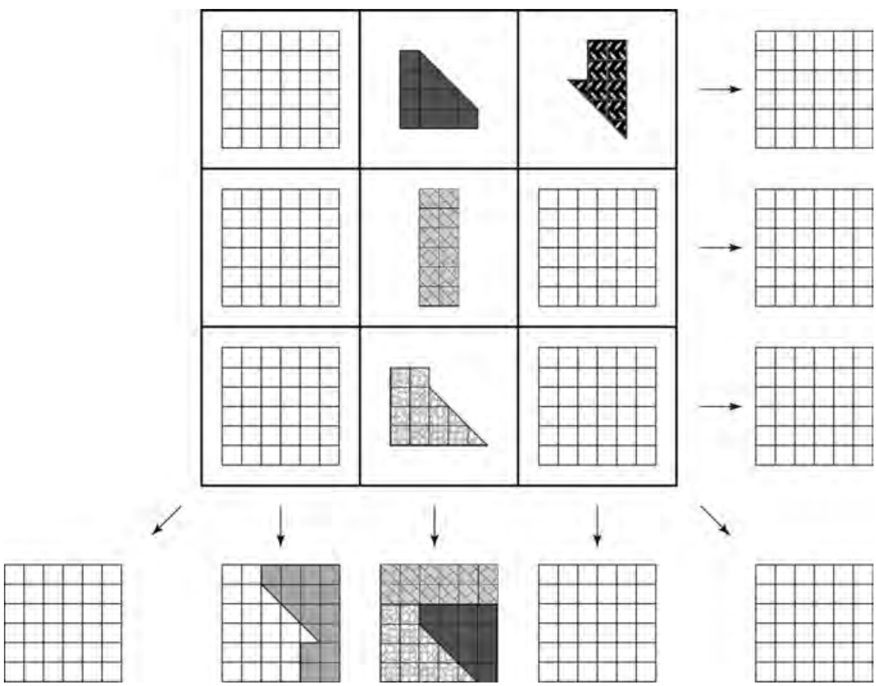
CARRÉ GÉOMAGIQUE - ÉDITION 2014

Énoncé :

Dans un carré géomagique, si l'on assemble les figures situées sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale, on doit obtenir la même figure (ici un carré).

Complète le carré géomagique ci-dessous.

Conseil : utilise des couleurs différentes pour chaque pièce.



Commentaires

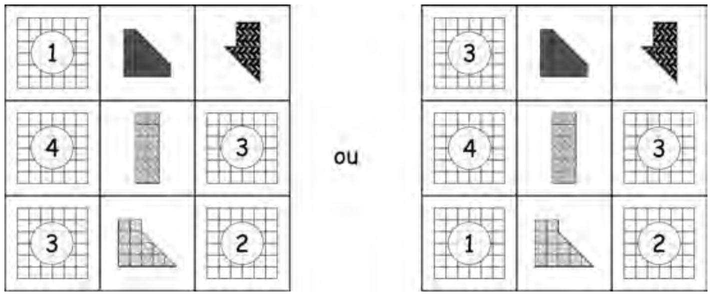
Cette épreuve a été choisie pour son originalité, pour sa beauté esthétique et pour sa difficulté.

Peu de classes ont réussi à proposer la solution complète.

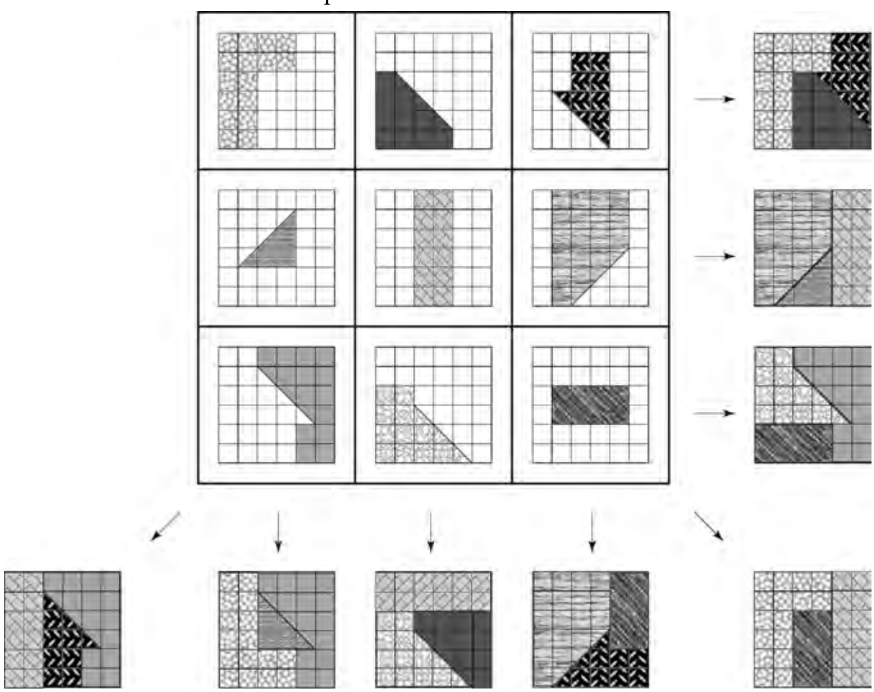
Pour résoudre le problème, il est préférable d'utiliser des couleurs différentes pour colorier chacune des pièces. Il faut procéder de la même manière qu'un carré magique numérique.

- **Réponse :**

On peut par exemple compléter le carré géomagique en procédant dans l'ordre suivant :



Cela donne la solution unique suivante :



- **Pour aller plus loin :**

On peut compléter l'épreuve en proposant le carré magique ci-contre, version numérique du carré magique géomagique. En effet, les nombres du carré magique comptent les demi-carrés de chacune des pièces du carré géomagique.

32		17
	24	
		16

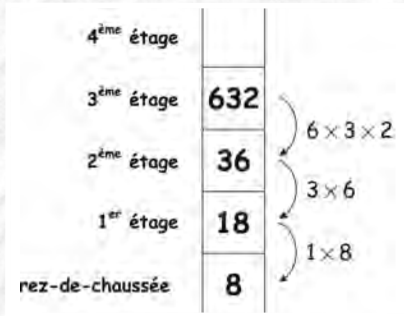
L'ÉTAGE D'UN NOMBRE - ÉDITION 2014

Énoncé :

Pour déterminer l'étage du nombre 632, nous appliquons la méthode suivante :

- on multiplie chacun de ses chiffres : $6 \times 3 \times 2 = 36$
- on multiplie chacun des chiffres du résultat obtenu : $3 \times 6 = 18$
- on multiplie de nouveau chacun des chiffres du résultat obtenu : $1 \times 8 = 8$

Il nous a fallu 3 étapes pour obtenir un nombre à un chiffre, on dit alors que le nombre 632 se situe au 3e étage (voir l'illustration ci-contre).

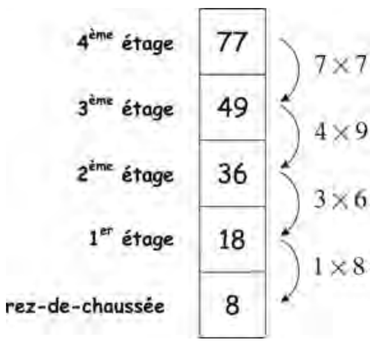


1. A quels étages se situent les nombres 486, 9 876 543 210 et 697 ?
2. Il existe un seul nombre plus petit que 100 situé au 4e étage.

Sauras-tu le trouver ?

- **Réponse :**

La première question vise à aider les élèves à comprendre l'énoncé.
Le véritable enjeu du problème se trouve dans la deuxième question. Le seul nombre plus petit que 100 situé au 4ème étage est 77.
Pour trouver ce nombre, une méthode d'essai-erreur privilégiant de grands nombres mène rapidement à la réponse.



- **Pour aller plus loin :**

Actuellement, malgré la puissance de calcul des ordinateurs, il n'existe aucun nombre connu ayant plus de 11 étages. Le problème de l'existence d'un maximum par ce procédé appelé *persistance multiplicative des nombres* reste ouvert...

Commentaires

Le rallye propose de nombreux exercices de ce type car ils incitent les élèves à être actifs dans la recherche de problème. Une fois le principe assimilé à l'aide de la question 1), l'intérêt réside davantage dans l'organisation des essais et la ténacité de l'élève que dans la difficulté technique (la calculatrice étant autorisée). Les élèves peuvent ainsi se rendre compte que s'impliquer, c'est trouver...

RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

PRÉSENTATION

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une compétition entre classes du primaire et du secondaire, d'élèves de 8 à 16 ans. Il se déroule actuellement dans une douzaine de provinces ou régions d'Italie, en France dans le département de l'Ain, à Lyon et en Franche-Comté, au Luxembourg, en Belgique francophone et en Suisse romande, dont il est originaire, et au Tessin.

Ses objectifs sont :

- pour les élèves, la résolution de problèmes, le travail en équipes, le débat scientifique et la justification des solutions ;

- pour les maîtres, l'observation des élèves en activité de résolution de problèmes, l'exploitation des sujets dans leur enseignement, l'analyse des résultats, la constitution d'une collection de problèmes expérimentés dont les stratégies et procédures de résolution ont été systématiquement relevées ;

- pour les chercheurs en didactique, pour les formateurs et pour les animateurs, l'enrichissement de leurs connaissances sur les phénomènes liés à la résolution de problèmes dans les apprentissages en mathématiques.

Les épreuves sont constituées de 5 à 7 problèmes, de difficultés variées, afin que chaque élève puisse être actif et que l'ensemble de la tâche soit trop lourd pour un seul individu, aussi doué soit-il. En l'absence de leur enseignant, les élèves disposent de 50 minutes pour s'organiser, résoudre les problèmes, adopter une seule réponse pour la classe et la rédiger de manière très explicite, avec les justifications nécessaires, en décrivant leurs démarches et solutions.

Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participants de travailler ensemble à l'élaboration des sujets, aux analyses des résultats et aux exploitations didactiques des problèmes du RMT.

Des groupes permanents de réflexion travaillent tout au long de l'année sur les analyses a priori et a posteriori des problèmes, sur le recueil des résultats et sur leur exploitation en vue de la formation des maîtres et de la pratique de classe.

Une « banque de problèmes » regroupe tous les problèmes, leurs analyses *a priori*, les résultats obtenus, les analyses a posteriori des copies d'élèves.

Cette *Banque de problèmes du RMT* a été récement ouverte au public.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1993 : création du Rallye mathématique romand ouvert aux classes des degrés 3 à 5 de l'école primaire (8 - 11 ans), 20 classes y participent.
1996 : le Rallye mathématique romand devient Rallye mathématique transalpin (RMT) avec la participation de classes italiennes. Depuis cette année, tous les problèmes font l'objet d'une analyse *a priori*.
1998 : Le Rallye mathématique transalpin (RMT) s'est ouvert aux classes des degrés 6 à 8 (11 - 14 ans) et s'est étendu à d'autres régions d'Italie, en France, au Luxembourg avec une participation totale de 500 à 600 classes. Les deux premières rencontres internationales se sont tenues à Brigue (CH) sur le thème de l'apport du RMT à la recherche en didactique. Le RMT se présente dans Panoramath 96.
2001 : participation de 1000 classes, 4^{e} rencontre internationale, fondation de l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT). Les résultats des épreuves commencent à être recueillis et analysés au niveau international. Des « finales de finales » virtuelles permettent de comparer régulièrement les copies des classes finalistes de chaque section et de travailler sur les critères communs d'attribution des points, leur harmonisation et leur interprétation.
2004 : plus de 2000 classes participent au 12^{e} RMT dans une vingtaine de sections. Les 8^{e} journées d'étude internationales se tiennent à Bourg-en-Bresse sur le thème « *Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ?* » Publication du quatrième volume des actes des rencontres. Ouverture aux classes des degrés 9 et 10 (15- 16 ans).
2005 : Lors de la 9^{e} rencontre internationale à Arco di Trento (I), constitution de groupes permanents, qui se réunissent lors des rencontres annuelles et poursuivent leur travail au cours de l'année, en vue d'une exploitation didactique des problèmes du RMT. Les thèmes retenus concernent la construction de concepts dans les domaines de la proportionnalité, de la géométrie plane et dans l'espace, de la numération, de l'approche des équations, des fonctions.
2008 : près de 3000 classes participent au 16^{e} RMT. Une première finale internationale réunit 12 classes de France, Belgique, Italie, Luxembourg et Suisse à Brigue (CH) à l'occasion des 12^{e} journées d'étude.
2010 : près de 4000 classes sont inscrites au 18^{e} RMT et 24 sections réparties en Italie, France, Belgique, Luxembourg, Suisse et Argentine. La 14^{e} rencontre internationale se tient à Besançon (F), sur le thème « *RMT, un regard constructif sur les erreurs* » déjà abordé lors de la rencontre précédente de Nivelles (BE). Les groupes de travail permanents présentent leurs travaux et leurs conclusions. L'idée d'une banque de problèmes est lancée. Le numéro 0 de la Gazette de Transalpie est présenté. Il s'agit d'une revue, nouvelle, de l'ARMT, publiée « *on line* » sur le site Internet, destinée à tous les animateurs et participants du RMT et, plus largement, à toutes les personnes intéressées par la didactique et l'enseignement des mathématiques.

2012 : Près de 4200 classes participent au 20e RMT. La 16e rencontre internationale a lieu à Villars-les-Dombes. Le thème est : « *RMT : 20 ans de pratique et de recherches* » et les travaux s'organisent autour de la Banque de problèmes du RMT.
2015 : Le seuil des 5000 classes participantes de 22 sections est franchi. La 19e rencontre se déroule à Sedilo, en Sardaigne (I) sur le thème « *RMT, apprendre ensemble en résolution de problèmes* ».

Épreuves :
Collectives, par classes.
8 catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 16 ans).
Problèmes : 5 à 7, à résoudre en 50 minutes, de difficultés échelonnées, sans aide extérieure. Beaucoup de problèmes sont communs à plusieurs catégories.
Les solutions sont à rédiger avec explications détaillées, prises en compte pour l'attribution des points. La préparation des problèmes est faite en coopération par les différentes équipes régionales et nationales, avec analyses a priori. Les traductions (en français, italien, allemand) sont rigoureusement comparées. Les évaluations a posteriori des copies d'élèves sont conduites par des groupes de travail.

Compétition :
1. Épreuve d'entraînement en décembre, sous la responsabilité du maître. La classe s'inscrit en cas d'intérêt.
2. Épreuves I et II, de janvier à avril. Sur la base d'un barème unique, les corrections et les classements sont organisés au plan régional.
3. Finales régionales, en mai ou juin. Les classes qualifiées sont réunies dans un même établissement scolaire et disputent l'épreuve finale.
4. Une analyse comparée des solutions des meilleures classes finalistes de chaque région permet d'attribuer un titre de classe "championne" de chaque catégorie au plan international. Une finale internationale regroupant une douzaine de classes gagnantes des différentes sections a été organisée en 2008, la suivante aura lieu en 2016.

Partenaires :
Divers instituts de formation des maîtres et départements de mathématiques universitaires, selon les régions.

Contacts :
ARMT, coordinateurs internationaux :
Lucia Grugnetti, (Italie) : **lucia.grugnetti@unipr.it**
Philippe Persico, (France) : **philippe.persico@laposte.net**
Président d'honneur : François Jaquet, (Suisse) : **frajaquet@bluewin.ch**

Site Internet : **www.armtint.org**

PROBLEMES

Les quatre problèmes ci-dessous figurent, dans la Banque de problèmes du RMT, en compagnie de 300 autres (en l'état de sa construction en 2015). Pour chacun d'eux, les pages suivantes présentent des extraits des différentes rubriques des fiches de la banque de problèmes : énoncé, identification, tâche de résolution et savoirs mobilisés, procédures et obstacles relevés, exploitations didactiques.

Il faut rappeler ici que tous ces problèmes ont été résolus par groupes dans le cadre de la confrontation, sans aucune intervention extérieure (en l'absence de l'enseignant de mathématiques).

Problème 1 :

Les confitures

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

- **Identification**

Ce problème a été proposé dans une épreuve du 15^{e} RMT en 2008 à des classes de 6^{e}, 5^{e} et 4^{e} année du Collège et de très nombreuses expérimentations ont été étendues à des classes de CM2.

Il est classé dans la banque sous le thème de la proportionnalité dans la famille des suites proportionnelles avec comparaisons de rapports.

Dans cette famille, la tâche essentielle est de déterminer les grandeurs qui pourraient être proportionnelles (en général deux) et extraire du contexte les suites de nombres pour chaque grandeur.

On le trouve sous les mots-clés : proportionnalité, conflit entre écarts et rapports, nombres décimaux, fractions.

Dans ce contexte de recette, la tâche mathématique consiste à trouver parmi les quatre couples de nombres (8 ; 5), (10 ; 7), (16 ; 10) et (5 ; 3) ceux qui sont proportionnels.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

Observer les quatre couples donnés et chercher des propriétés communes permettant de reconnaître celui qui correspond au jour où le « *goût est le plus sucré* » ou ceux correspondant à un « *même goût* ».

Établir des critères de choix : éliminer ceux qui ne tiennent compte que d'une des deux grandeurs (le sucre, par exemple) et retenir ceux qui tiennent compte simultanément des deux nombres du couple.

Le plus immédiat de ces critères est la différence entre les masses de cerises et de sucre : lundi 3, mardi 3, mercredi 6 et samedi 2 conduisant au « *même goût* » le lundi et le mardi (3 kg de différence) et à la plus sucrée le samedi (différence la plus petite).

Procéder à une validation de ce critère et penser que la définition de « *goût sucré* » doit se baser sur la quantité de sucre pour une même quantité de fruit ou de confiture ; imaginer alors que le critère pourrait reposer sur la masse du sucre pour 1 kg de fruit ou confiture.

Mobiliser la division ou le concept de quotient (rapport) des deux nombres de chaque couple, les calculer et les comparer ; ce qui oblige à passer à des nombres non entiers, exprimés sous forme décimale ou fractionnaire.

Par exemple en quantité de fruits pour un kg de sucre :
lundi 8 : 5 = 8/5 = 1,6 ; mardi 10 : 7 = 10/7 = 1,42... ≈ 1,42 ; mercredi 16 : 10 = 1,6 et samedi 5 : 3 = 5/3 = 1,666... ≈ 1,67, conduisant au « *même goût* » le lundi et le mercredi (1,6) et à la plus sucrée le samedi (rapport le plus grand).

Se convaincre que ce dernier critère est adéquat et qu'il faut renoncer à l'autre.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Le problème *Les confitures* est révélateur du conflit entre les écarts et les rapports pour déterminer une relation de proportionnalité.

A quelques exceptions près qui ne tiennent compte que de la quantité de sucre, il n'y a que deux procédures relevées :
- la première, très majoritaire aux degrés CM2 et 6^e, repose sur l'observation des écarts, du genre : c'est le lundi et le mardi que les confitures ont le même goût parce qu'il y a 3 kg de différence, c'est le jeudi qu'elle est la plus sucrée parce que la différence est la plus petite ou parce qu'il y a presque autant de sucre que de fruit

- la seconde repose sur le calcul des rapports, qui apparaissent dès la 5^e, soit sucre / fruit, sucre / confiture ou parfois fruit / sucre ou fruit / confiture en tenant compte que le plus petit rapport donne la confiture la plus sucrée. Les rapports sont donnés sous forme décimale dans la grande majorité des cas, avec une répétition de décimales lorsque le nombre n'est pas décimal.

Exploitations didactiques
D'après nos expérimentations, il semble que les élèves de degré CM2 et 6^{e} (11-12 ans) rencontrent un obstacle qu'ils ne peuvent pas encore franchir à cet âge devant un problème de « recette » culinaire où ce sont les rapports des ingrédients qui déterminent le goût. On pourrait certes les aider en leur « enseignant » le critère à prendre en compte dans ces situations, comme souvent lorsque les programmes abordent la proportionnalité vers 10-11 ans. On justifierait alors la recette par des raisonnements du genre : « Lorsque on double une quantité, il faut aussi doubler l'autre ».

Mais il est évident que cette aide « extérieure » que tous les élèves ont déjà reçue les années précédentes n'est d'aucune efficacité à long terme, comme le montrent toutes les expérimentations.

Pour que le rapport s'impose face à l'écart, il faut des échanges, des confrontations au cours desquelles les élèves doivent conclure à l'inadéquation du modèle additif. Par exemple en faisant varier les deux quantités tout en conservant la différence de 3 kg, on doit pouvoir faire comprendre que pour les grands nombres (par exemple 1003 et 1000) on a « presque la même quantité de cerises que de sucre » contrairement au lundi (8 et 5) et au mardi 10 et 7). Mais la contradiction est plus évidente en allant vers les nombres plus petits : 7 et 4 ; 6 et 3 ; 5 et 2 ; 4 et 1 ; 3 et 0 !! 2 et ???.

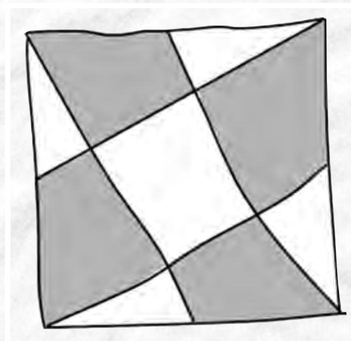
Le rôle du maître est ici plus délicat, il « n'explique » pas mais il engage les élèves dans un chemin qui devrait aboutir à une impasse dont il faudra tirer les conséquences.

Problème 2 :

La terrasse de Joseph

Joseph a une terrasse carrée de 10 m de côté. Il désire peindre le sol en blanc et en gris.

Il fait un croquis pour son projet en traçant un carré qui représente la terrasse puis, à l'intérieur, quatre segments de droites qui vont de chacun des quatre sommets au milieu d'un côté opposé. Il colorie en gris quatre parties et laisse les cinq autres en blanc.



Joseph observe son croquis fait à main levée. Il se demande de quelle forme seront ses différentes parties et si l'aire des parties blanches sera égale à celle des parties grises.

Calculez l'aire totale des parties blanches et celle des parties grises, en donnant le détail de votre démarche et de vos calculs.

- **Identification**

Ce problème est tiré d'une épreuve du 22e RMT de 2014 proposé en 6e, 5e et 4e.

Il est classé dans la banque sous le thème de la *géométrie plane* avec tous les problèmes qui font appel aux aires, longueurs et relations métriques. La tâche mathématique est de déterminer l'aire des parties de chaque couleur, après en avoir perçu la forme, dans un carré de 10 m de côté partagé par quatre segments joignant l'un des quatre sommets à l'un des quatre milieux d'un côté opposé.

Mots-clés : géométrie, carré, trapèze, triangle, quadrilatère, aire, homothétie, isométrie, rotation, symétrie centrale, côté, sommet, points milieux, pavage, similitude, hypoténuse, Pythagore, algèbre, équation, croquis.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

- Observer le dessin, constater que la figure se décompose en neuf parties et se rendre compte qu'il faut déterminer la forme de chacune des parties avant d'entrer dans la phase du calcul des aires.

Cette détermination peut se faire visuellement mais doit être confirmée par un dessin précis (avec des instruments de dessin géométrique ou sur un papier quadrillé) ou faire l'objet d'une argumentation, déduite des propriétés du carré et de ses côtés partagés en deux parties égales par les points milieux.

Reconnaître que les neuf parties sont un carré central, quatre trapèzes rectangles égaux et quatre triangles rectangles égaux (*figure 1*). On peut distinguer aussi quatre « grands » triangles (composés d'un trapèze et de deux « petits » triangles, *figure 2*), quatre triangles « moyens » (composés d'un trapèze et d'un « petit » triangle, *figure 3*) puis observer par exemple que les« grands » triangles sont des quarts du grand carré, (mesure des côtés de l'angle droit 5 et 10 cm, aire 25 cm², hypoténuse $\sqrt{125}$ ou $5\sqrt{5}$ cm) ou que tous les triangles de la figure sont semblables (mêmes angles, et rapport 2 entre les mesures des côtés de l'angle droit) …

figure 1

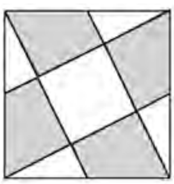


figure 2

figure 3

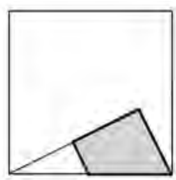
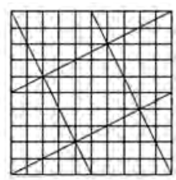


figure 4



Engager finalement le calcul des aires, pour lequel il y a de très nombreuses procédures possibles :

- par mesure des longueurs et calcul des aires sur un dessin précis à l'échelle, par exemple sur un carré de 10 cm de côté ;
  - par « quadrillage » (*figure 4*) (construction précise sur papier quadrillé d'un carré de 10 unités de côté et comptage des carrés ;
  - par « pavage » du carré en petits triangles ;
  - par décomposition et recomposition, …
- algébriquement avec x et $2x$ pour mesures des côtés de l'angle droit des petits triangles dont l'hypoténuse mesure 5 (en m), par Pythagore : $x^2 + 4x^2 = 25$, puis $5x^2 = 25$ et enfin $x^2 = 5$ (en m²), qui est aussi l'aire du petit triangle : $(x \times 2x)/2 = x^2$.

Les savoirs mobilisés, selon les procédures utilisées recouvrent l'ensemble des programmes de géométrie du Collège (polygones et le calcul de leurs aires, isométries, similitudes, relations métriques (Pythagore, Thalès), puissances et racines carrées, éléments d'algèbre.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

La réussite a été très moyenne. Sur plus de 1200 classes de 5^e, 4^e, 3^e, il n'y a que 30 % environ de réponses correctes (aire des parties grises : 60 m² et blanches : 40 m²), il faut attendre la seconde pour atteindre 50 % de réussite.

Observations tirées d'une analyse a posteriori d'environ 200 copies :
- La moitié des copies environ montrent une incapacité à entrer dans une résolution « réfléchie » : les aires grises et blanches sont déclarées égales ; la somme des deux aires est loin de correspondre à celle du carré d'origine (100) ; des calculs apparaissent sans lien avec les mesures prises ; des « gribouillages » font état de découpages et reports incohérents ; les formes des neuf figures ne sont pas reconnues... ;

- Les « débuts de raisonnement correct » témoignent d'une « entrée » dans le problème, avec reconnaissance du carré central, calculs d'aires de triangles dont un des côtés mesure 5 cm,... ;

- Parmi les procédures faisant preuve d'une compréhension du problème, une majorité repose sur un dessin précis du partage du carré (en général de 10 cm de côté) et les mesures de ses différents segments. Elles peuvent conduire à des réponses éloignées de la solution « 40 et 60 » à la suite d'erreurs de calcul, ou à des réponses proches de la solution dues aux mesures approximatives (par exemple 38,72 et 58,96 lorsque la mesure du carré central est considérée comme 4,4) sans contrôle de la somme qui devrait être 100 ou encore à une première aire calculée à partir de mesures approximatives et la seconde calculée comme complément à 100.

L'obstacle est, dans ce cas, dû à une croyance que la mesure prise sur la règle est la mesure réelle ou à une élaboration insuffisante du concept d'approximation.

- Les procédures par pavages, découpages, compensations reposent sur l'observation que le carré central équivaut à quatre triangles et qu'un trapèze équivaut à trois triangles, ce qui conduit à répartir le carré d'origine en cinq carrés : deux blancs et trois gris. Ces procédures ne sont cependant pas accompagnées de justifications ou de démonstrations ; les pavages ou découpages sont évidents et reposent sur une appréciation visuelle.

- On relève aussi de fréquents calculs de la longueur d'un des quatre segments par Pythagore, qui conduit à l'approximation « 11,8 », mais on ne voit pas apparaître l'écriture $5\sqrt{5}$ ou $\sqrt{125}$ dans les calculs qui suivent. Il s'agit ici de l'obstacle des écritures de nombres irrationnels.

- ***Exploitations didactiques***

Premières remarques tirées de premières observations des copies : La terrasse de Joseph est un problème « consistant » pour la construction des connaissances géométriques, mais évidemment, au vu des résultats obtenus, « assez difficile » pour des élèves de 13 à 16 ans dans les conditions de passation des épreuves du RMT.

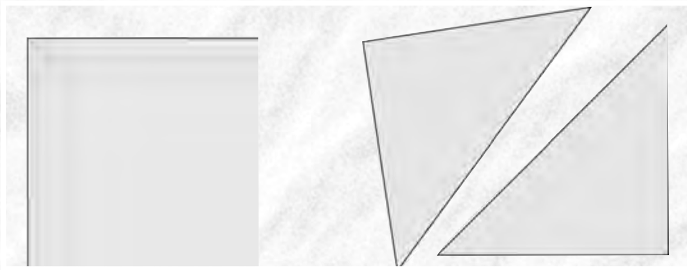
La variété des procédures de résolution observées assure l'intérêt de leur confrontation entre élèves, puis de leur institutionnalisation par le maître.

On peut en particulier profiter de comparer les procédures reposant sur les mesures prises sur un dessin, forcément approximatives même si la construction est très précise, aux procédures par pavage ou décomposition ou encore aux procédures algébriques.

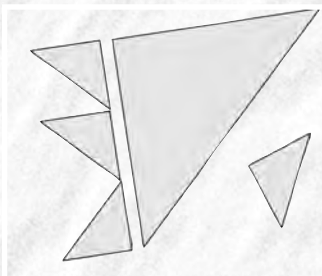
On peut aussi aborder, selon l'âge des élèves, le problème des justifications par raisonnement déductif.

Problème 3

Triangles envolés
Albert avait un carré de carton gris. Il l'a découpé en deux triangles égaux:



Puis Albert a découpé un des deux triangles en petits triangles tous égaux.
Mais le vent a emporté quelques-uns des petits triangles. Il n'en reste plus que quatre :



Sur la figure ci-contre, on voit que l'on peut aligner exactement trois des petits triangles égaux sur un côté du grand triangle.

Dessinez sur le carré d'Albert le grand triangle restant et tous les petits triangles.

Combien de petits triangles se sont-ils envolés ?

- **Identification**

Dans ce problème du 22e RMT (2014) proposé à des classes du CE2 à la 6e, il s'agit de décomposer un triangle rectangle isocèle en triangles égaux qui lui sont semblables, dans le rapport 1/3 et en déterminer le nombre. On le retrouve à partir des mots-clés : triangle, triangle rectangle isocèle, équivalence, décomposition, similitude, rapport.

Il se situe dans le thème général de la géométrie plane de la banque de problèmes, dans plusieurs familles qui traitent des alignements, de l'approche de l'aire et des pavages.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

- Percevoir les caractéristiques des triangles d'après les figures et du texte de l'énoncé : ce sont tous des triangles rectangles isocèles, les longueurs des côtés des grands triangles valent trois fois celles des côtés des petits triangles.

- Se rendre compte que la tâche revient à décomposer le grand triangle en petits, et qu'il faut trouver combien on peut placer de petits triangles dans le grand, afin de déterminer le nombre de ceux qui se sont envolés.

- Il y a de nombreuses manières de procéder. On peut par exemple découper des petits triangles pour recouvrir le grand triangle, par décalque ou par dessin de proche en proche et découvrir qu'il contient 9 petits triangles ; ou bien on peut dessiner une trame triangulaire sur le grand triangle et compter les unités.

Le dessin de proche en proche ou par décalque exige de la précision, le respect des angles droits et du parallélisme d'un triangle à l'autre, la perception des rotations et translations nécessaires. Le dessin d'une trame exige une perception d'ensemble du pavage.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Le problème s'est révélé difficile, voire trop difficile en CE2 où seulement un tiers des classes ont trouvé que 5 triangles se sont envolés. La réussite augmente au CM1 et se stabilise en CM2 et 6^{e} avec un taux de 55% de réponses correctes et explications. (Les résultats portent sur 2500 classes.)

Une analyse plus détaillée de 150 copies permet les observations suivantes :
- Environ 80% des copies font apparaître les petits triangles, sur un demi carré, ou sur le carré entier.

Parfois (environ 10% des copies) il s'agit d'un collage de petits triangles découpés ou du report du contour d'un petit triangle découpé puis déplacé dans des positions successives.

Dans la majorité des cas, on se rend compte que les figures ont été dessinées, à la règle, après les mesures ou reports nécessaires pour assurer l'isométrie des petits triangles. On relève une progression, de la catégorie 3 à la catégorie 6, dans la précision des dessins et le respect des directions (parallélisme et perpendicularité).

- Les figures obtenues par dessin font apparaître deux procédures :
  - la première par « trame triangulaire » (dans 15 % des cas), conduisant au réseau de la figure 1.

- la deuxième et la plus fréquente par « juxtapositions successives » (dans 35 % des copies) amenant à des pavages comme ceux des figures 2 et 3. Dans ce cas on constate parfois un report progressif des imprécisions pouvant entraîner des décomptes erronés.

- Pour accéder à la solution correcte, il faut évidemment observer la correspondance des côtés des petits et du grand triangle : les côtés des angles droits doivent coïncider ou être parallèles entre eux, les hypoténuses doivent aussi coïncider ou être parallèles entre eux.

Si les élèves n'observent pas cette correspondance et placent des hypoténuses de petits triangles sur des côtés de l'angle droit du grand, ils n'arrivent à placer que 8 petits triangles dans le grand.

Cette erreur apparaît dans 14% des copies. Figure 4.

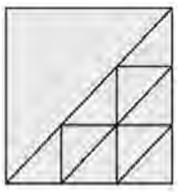


figure 1

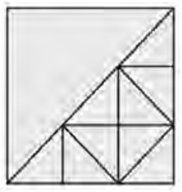


figure 2

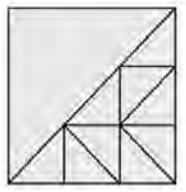


figure 3

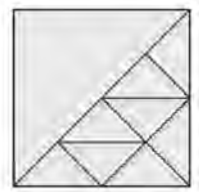


figure 4

L'erreur n'est pas très visible : l'hypoténuse d'un petit triangle est $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ proche du demi-côté du carré qui mesure 1,5.

- Sur les 150 copies examinées, on ne relève aucune trace explicite de réflexion sur l'aire des triangles, ni sur le rapport 3, ou sur la relation multiplicative 3 × 3 = 9.

- ***Exploitations didactiques***

Le problème est potentiellement intéressant pour la confrontation entre les figures pavées de 9 triangles et celles de 8 triangles. Le dessin, ou même le découpage, ne permet pas de décider entre ces deux pavages. Un débat est indispensable pour se convaincre qu'on est en présence de triangles de grandeurs différentes occupant le même espace, (avec 8 triangles ou avec 9 triangles, évidemment plus petits) puis pour constater que ce sont trois côtés des angles droits des petits qui correspondent à un côté de l'angle droit du grand. (Selon l'âge des élèves, on peut aussi faire intervenir les aires et les diagonales dans l'observation des figures où apparaissent des petits carrés (9 et 8) dans le grand triangle. Les aires des petits carrés seront alors respectivement 1 et 1,125, les côtés 1 et ≈ 1,12) ; avec 4 petits carrés on peut former un autre carré d'aire 2, de côté ≈ 1,4 ou un carré d'aire 4,5 de côté ≈ 2,1, etc.)

L'exploitation va donc s'étendre aux réflexions sur la précision des mesures.

Une autre connaissance à introduire est le lien entre le rapport des côtés 1 ou 1/3 et le rapport des aires 9 ou 1/9.

D'autres exploitations sont aussi possibles sur les différents pavages et la trame triangulaire réalisée par celui de la figure 1.

Problème 4

Le temps des vendanges
Dans les vignes de M. Brunello, un jour de vendanges, avec le raisin recueilli on a rempli 18 grandes cuves et 13 cuves moyennes. Pour les transporter à la cave, M. Brunello dispose de trois tracteurs :

- le tracteur A peut transporter, à pleine charge, 3 grandes cuves et 2 moyennes ;
- le tracteur B peut transporter, à pleine charge, 2 grandes cuves et 1 moyenne ;
- le tracteur C peut transporter, à pleine charge, 1 grande cuve et 1 moyenne ;

Ce jour-là, M Brunello a utilisé au moins une fois tous ses tracteurs et toujours à pleine charge.

Combien de voyages peut avoir fait M. Brunello avec chacun de ses tracteurs pour transporter toutes les cuves à la cave ?

Décrivez tous les voyages possibles et expliquez comment vous les avez trouvés.

- **Identification**

Il s'agit d'un « ancien » problème de la deuxième épreuve du 14^{e} RMT (2006) destiné aux classes de la 5^{e} à la seconde.

On se situe dans les domaines conceptuels des fonctions, mise en équations, étude d'un système d'équations linéaires, où l'on demande de trouver les différentes manières d'obtenir le couple (18 ; 13) par addition de trois types de couples (3 ; 2), (2 ; 1) et (1 ; 1) dans un contexte de transports de deux types de récipients par trois transporteurs (système linéaire de deux équations à 3 inconnues entières et strictement positives).
Mots-clés : fonctions, relations algébriques, relations fonctionnelles, proportionnalité, systèmes d'équations linéaires

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

Pour les catégories considérées on peut envisager différents types de procédures. Dans tous les cas l'utilisation de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers et retours est un prérequis. La prise en compte des nombreuses contraintes est également incontournable.

- Une procédure possible : identification d'un problème relevant d'une mise en équation algébrique dont une méthode de résolution peut être anticipée. Identification des inconnues du problème (par exemple a, b et c les nombres respectifs de voyages des tracteurs A, B et C), des contraintes sur ces inconnues (entiers strictement positifs) et des relations qui les lient ($3a + 2b + c = 18$ et $2a + b + c = 13$). Mise en œuvre d'une méthode de résolution adaptée, par exemple obtenir par différence $a + b = 5$ et retenir les solutions en nombres entiers naturels différents de 0 : (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2) (4 ; 1).

Chaque couple permet de déterminer la valeur correspondante de c (respectivement 7, 6, 5, 4). On obtient ainsi quatre possibilités.

Remarque : il est possible de réduire la recherche :
- en s'appuyant sur le sens et en prenant en compte que les tracteurs font au moins un voyage. On est amené à faire un travail équivalent à la résolution de 3a' + 2b' + c' = 12 et 2a' + b' + c' = 9 ce qui limite le nombre de cas à étudier.

- en travaillant sur l'aspect syntaxique et en déduisant des équations que a + b doit être égal à 5. On peut difficilement envisager que cette déduction survienne sans recours au cadre algébrique.

Autre procédure possible : procéder dans le champ multiplicatif et additif, avec des entiers, de manière organisée (éventuellement avec un tableau) en tenant compte des caractéristiques de chaque tracteur et du nombre de cuves transportées augmentant avec le nombre de voyages.
Commencer par exemple en choisissant le nombre maximum de voyages du tracteur A, s'assurer que 6 voyages ne peuvent convenir, que 5 peuvent permettre de transporter les 18 grandes cuves mais alors pas les 13 moyennes (on aurait transporté 18 grandes cuves et 12 moyennes, ce qui ne suffit pas).

Puis supposer que le tracteur A fait 4 voyages (12 GC ; 8 MC) et il faut alors tester toutes les possibilités pour les tracteurs B et C. On obtient ainsi une première solution : 4 voyages pour A, 1 pour B et 4 pour C.

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les trois autres solutions : 3 voyages pour A, 2 pour B et 5 pour C, puis 2 voyages pour A, 3 pour B, 6 pour C et 1 voyage pour A, 4 pour B et 7 pour C.

Ainsi on peut essayer de distinguer deux types de savoirs mobilisables :
- d'une part ceux liés au cadre des équations linéaires,
- d'autre part ceux liés à l'aspect fonctionnel.
Pour ces derniers on peut distinguer deux aspects :

- la nécessaire mise en œuvre d'un raisonnement relevant de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers et retours.
- l'utilisation en actes d'une ou deux fonctions de plusieurs variables. Le calcul des images se faisant dans le champ additif et multiplicatif sur des entiers.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Parmi les copies où l'échec est total, on peut percevoir que la compréhension de l'énoncé et son appropriation s'avèrent très difficiles. La multiplicité des contraintes à prendre en compte et certaines formes syntaxiques semblent s'ériger en obstacles. On identifie ainsi des classes qui ont séparé le problème en trois : combien de trajets avec le tracteur A pour transporter la totalité des cuves, puis avec le tracteur B puis avec le C. D'autres classes n'ont pas envisagé que les tracteurs étaient toujours à pleine charge, d'autres encore n'ont pas tenu compte du fait que chaque tracteur faisait au moins un trajet. On reconnaît ici à la fois des difficultés de traitement de l'énoncé et aussi une difficulté à gérer un ensemble trop important de contraintes.

Les procédures utilisées par les classes s'étant engagées dans la recherche sont globalement des procédures par essais assez peu souvent organisés et relevant de démarches arithmétiques. Les rares démarches organisées sont peu productives, on ne voit ni tableau bien structuré, ni liste pertinente (sauf en seconde). On observe par ailleurs des procédures figuratives, où les élèves représentent les cuves par des barres de différentes tailles (y compris en classes de 3^{e}). La plupart de ces copies donnent des solutions correctes en organisant des groupements. On reconnaît ainsi des procédures souvent utilisées dans les niveaux inférieurs et à contrario, même en fin de Collège ou au Lycée, n'apparaît aucune procédure algébrique.

Il est à noter que pour les niveaux observés et pour les copies qui permettent l'analyse, la question de la proportionnalité ne pose pas de difficulté.

- ***Exploitations didactiques***

L'utilisation de ce problème en classe peut se faire avec des objectifs variés.

On peut tout d'abord le mettre en œuvre comme un problème de recherche sans objectifs notionnels mais en travaillant de façon principale les compétences métamathématiques . On cherche alors à développer autant des savoir-faire en résolution de problème qu'une attitude et un rapport aux mathématiques favorables à ces résolutions de problèmes.

On peut aussi viser des objectifs notionnels.

Deux semblent possibles :

- La mise en évidence d'un aspect fonctionnel, au sens où le nombre de cuves transportées dépend de trois variables (le nombre de trajet de chacun des tracteurs). On peut alors, lors de la synthèse après une recherche minimale, étudier l'ensemble des valeurs prises par la fonction (les variables sont ici entières et bornées) en organisant convenablement la recherche des images.

- Une introduction (ou réintroduction) de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes de ce type. Compte tenu des résultats obtenus ici, l'outil algébrique n'est clairement pas disponible pour les élèves considérés, et il peut alors intervenir, après élaboration de solutions erronées ou partielles ou laborieuses, comme nouvel outil qui permet l'obtention de toutes les solutions plus efficacement.

Dans tous les cas, quel que soit l'objectif, il est nécessaire que les élèves puissent réellement s'engager dans la résolution du problème et envisager ce qui en est une solution.

Pour cela, et puisque le cadre d'une situation de classe avec l'enseignant le permet, il s'avère nécessaire de faire un travail sur l'énoncé et son appropriation. Le vocabulaire et les formulations doivent être explicitées si nécessaire, les ambiguïtés levées, l'ensemble des contraintes mises en évidence et ceci afin que l'ensemble de la communauté de recherche soit d'accord sur le problème à résoudre. Ceci étant réalisé, les productions déjà recueillies montrent que les élèves doivent pouvoir s'engager dans la recherche et produire des raisonnements qui pourront être exposés puis débattus. La diversité des pistes observées permet d'envisager la possibilité de synthèses diverses suivant les objectifs poursuivis.

RALLYE MATHEMATIQUE DE LA SARTHE

PRÉSENTATION

Ce rallye est ouvert à toutes les classes de tous les collèges sarthois (publics ou privés). C'est la classe entière qui doit s'organiser pour résoudre les énigmes mathématiques : la réponse est collective.

FICHE TECHNIQUE

Calendrier et contenu des épreuves :

- Deux épreuves de qualification (50 minutes chacune) se déroulent dans les collèges, la première en novembre, la seconde en janvier.

Les objectifs :

- faire pratiquer les mathématiques,
- aider à acquérir une méthode de travail en groupe,
- entraîner au débat : argumenter, discuter de preuves, trouver des exemples, des contre-exemples, vérifier,
- proposer un projet stimulant où s'impliquent tous les élèves d'une classe.

A l'issue de ces deux épreuves, 20 classes sont qualifiées pour la finale qui se déroule en mai-juin sur un site de plein air ; un même collège ne peut avoir qu'une classe qualifiée. La majorité des 10 ateliers proposés se déroule en extérieur et nécessite des manipulations, des mesures, des constructions et fait appel à la logique, au calcul et à l'organisation

Organisation :

L'organisation est prise en charge par une équipe de 13 professeurs avec le soutien de la DSDEN de la Sarthe, du Rectorat de l'Académie de Nantes et des IA-IPR de Mathématiques.

Historique

Le rallye se déroule depuis 1990 avec des effectifs qui augmentent chaque année. Pour le rallye 2014-2015, 699 classes issues de 59 collèges publics ou privés soit 17437 élèves inscrits.

Contacts :

Centre de ressources : Collège Kennedy - ALLONNES (Sarthe)
Professeur responsable : Gilles Ravigné **gilles.ravigne@ac-nantes.fr**
Tous les renseignements, sujets, réponses, etc, figurent sur lesite Internet :
http://sarthe.cijm.org/blog/

CRYPTOLOGIE avec ECHIQUIER et PARTITION MUSICALE (Finale juin 2013)

• Mots clés :
Logique – Réflexion – Codage – Musique – Echiquier

• But du problème :
Coder et décoder une mélodie en utilisant un codage à partir d'un échiquier.

• Présentation du problème :

« L'échiquier de musique, tel qu'il est représenté dans la peinture des anges musiciens de la cathédrale du Mans, possède un damier de 9 cases sur 9. Mais en raison de l'épaisseur du mécanisme sonore disposé à l'intérieur et qui occupe une ligne et une colonne à la périphérie du damier, l'instrument se retrouve en configuration efficace de 7 cases sur 7. Ceci correspond aux 7 touches musicales (do, ré, mi, fa, sol, la, si.) »

Dans le tableau ci-après sont distribuées sur les cases blanches les 26 lettres de l'alphabet. Le V et le W, identiques au Moyen Âge, se partagent la même case.

On constate qu'à chaque colonne de lettre correspond une note de musique. Et qu'à chaque répétition de la note correspond une lettre.
Exemple : Une note la donne la lettre G ; deux la donnent la lettre N et ainsi de suite. On ne tient pas compte des ponctuations et des espaces entre les mots.

On peut donc composer une mélodie en transcrivant le texte à dissimuler.

	A		B		C		D	
		E		F		G		
	H		I		J		K	
		L		M		N		
	O		P		Q		R	
		S		T		U		
	V/ W		X		Y		Z	
	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	

Etape 1 :

Un élève intéressé par ce mode de codage a décidé de créer la mélodie suivante :

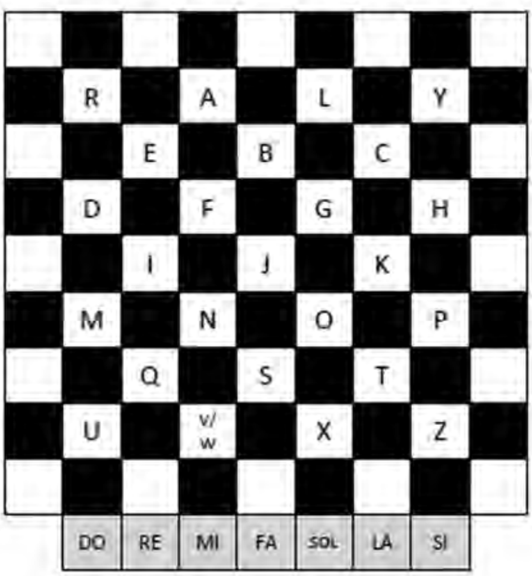
« mi, mi mi, ré, la la, do do do do, ré, la la, la la la, ré, do, ré ré, do, fa fa fa, ré, ré ré, mi mi, ré, si si si, si, ré, sol, si si si, sol sol sol sol, mi mi mi, fa fa fa, do do do, ré ré , do do do, la, mi mi, ré. »

Pouvez-vous nous traduire son message ?

Etape 2 :

Ce système étant encore trop simple pour bien cacher le message, une variable est alors introduite : la clef de chiffrement, qui rend le système bien plus compliqué pour celui qui chercherait à découvrir le message codé. Ainsi, on ne laisse plus la disposition des lettres immuable sur l'échiquier, mais leur organisation change à chaque fois selon la clef utilisée. Les lettres de la clef de chiffrement sont placées dans les premières cases et ensuite on distribue dans les cases restantes et dans l'ordre les lettres de l'alphabet non utilisées dans la clef. On prend soin de ne pas répéter les lettres déjà placées et on évite les doublons.

Exemple avec la clef RALLYE : On peut remarquer que l'on a fait attention à ne pas répéter la lettre L. On observe alors que les lettres ont changé de place et ne correspondent plus aux mêmes notes de musique que précédemment. Maintenant, deux notes mi donnent la lettre F ; un mi donne la lettre A et ainsi de suite.



Avec la clé de chiffrement « CODE » remplir l’échiquier situé sur la feuille réponse et écrire la partition musicale (Voir feuille réponse) qui cachera le message suivant : « CECI EST UN SECRET ».

Etape 3 :
Aller chercher une clef de chiffrement à l’atelier n° 6. (CLEF de CHIFFREMENT : MATHEMATIQUE). Sur place vous avez remarqué la présence d’un échiquier. Il vous faut alors traduire la partition musicale suivante pour connaître le rôle de celui-ci :

Commentaires et développement
Cette épreuve a été bien réalisée par l’ensemble des classes présentes lors de la finale.

La difficulté de l’atelier résidait dans la compréhension de la consigne (que nous avions facilitée à l’aide d’exemples et rappels) et dans le fait que les élèves se devaient d’être rigoureux et méthodiques pour déchiffrer ou chiffrer correctement les messages.

La principale cause d’échec à cette épreuve a été le manque de temps pour la réaliser. Cela pouvait s’expliquer, soit par une compréhension tardive de la consigne, soit par l’absence de musicien au sein du groupe (le solfège ne fait plus partie du programme de musique au collège et la plupart des classes ne lisent pas la totalité des sujets avant de les répartir) ou soit par une mauvaise organisation pour chiffrer ou déchiffrer le message.

GRAPHE ET DIVISIBILITÉ (finale juin 2013)

• **Mots clés :**
Logique- divisibilité-graphe

• **But du problème :**
Le but de cet atelier est d'abord d'utiliser le graphe de divisibilité par 7, puis de construire un graphe "critère de divisibilité par 4" puis à partir d'un graphe fait en grandeur nature de trouver de quel critère de divisibilité il s'agit.

• **Présentation du problème :**

Depuis la 6^{e}, on connait les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Ce sont des moyens simples et rapides pour savoir si un nombre est divisible par un autre nombre. Par exemple, pour savoir si un nombre est divisible par 3, il suffit de voir si la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 3.

I. Utilisation

Nous allons utiliser le graphe suivant pour déterminer si un nombre est divisible par 7.
Il y a deux types de flèches sur ce graphe : les flèches en trait plein et les flèches en pointillés. Chaque type de flèche va être utilisé à tour de rôle.

Le mécanisme est simple :

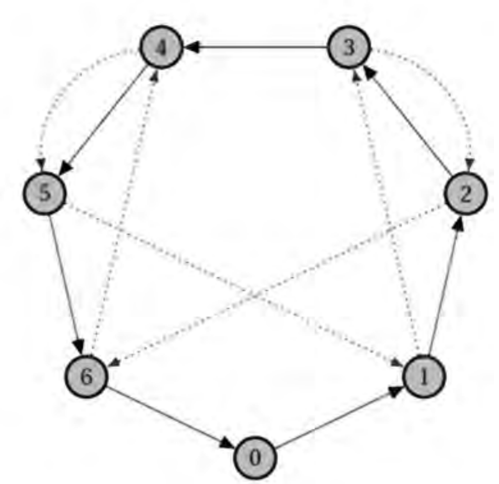
- On lit le nombre de gauche à droite, chiffre après chiffre.

- Pour le premier chiffre, on part du noeud « 0 »

- A chaque chiffre, on avance d'autant de flèches en trait plein que le chiffre le dit (donc on ne bouge pas si le chiffre est 0), ensuite on parcourt une flèche en pointillés

- Et on recommence, jusqu'à la lecture complète du nombre (**au dernier chiffre lu, on ne parcourt pas de flèche en pointillés!**).

- Si on arrive à la fin sur 0, le nombre est divisible par 7.



Pour mieux comprendre, prenons un exemple : On souhaite savoir si 586 est divisible par 7.

• On part de « 0 »

• Comme le premier chiffre à gauche est « 5 », on parcourt 5 flèches en trait plein. On arrive au nœud « 5 ».

• Ensuite, on parcourt 1 flèche en pointillés, on arrive à « 1 »

• Le second chiffre est 8, on parcourt 8 flèches en trait plein, on arrive au nœud « 2 ».

• Ensuite, on parcourt 1 flèche en pointillés, on arrive à « 6 »

• Le dernier chiffre est 6, on parcourt 6 flèches en trait plein, on arrive au nœud « 5 ».

On ne parcourt pas de flèche en pointillés car c'était le dernier chiffre.

Comme nous ne sommes pas arrivés sur le nœud « 0 » mais « 5 », ce nombre n'est pas divisible par 7.

Questions :

Le nombre 532 est-il divisible par 7 ? (Sur quel nœud arrive-t-on ?)

Le nombre 198 749 501 est-il divisible par 7 ? (Sur quel nœud arrive-t-on ?)

Nombres à 4 chiffres à compléter :

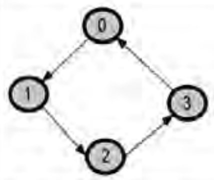
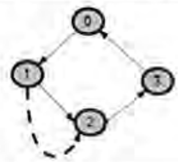
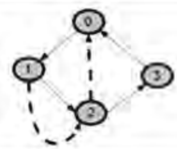
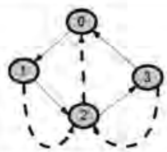
Quel est le chiffre des unités du nombre suivant qui est un multiple de 7 :
345 . ?

Quel est le chiffre des milliers du nombre suivant qui est un multiple de 7 :
. 145 ?

Enfin, le nombre 1 000 000 000 000 000 006 est-il divisible par 7 ?

II. Construction

Nous allons maintenant procéder à la création d’un graphe de ce genre. Afin de vous aider, voici comment a été créé le graphe « critère de divisibilité par 4 »

<table>
<tr><td>Comme on cherche à savoir si un nombre est divisible par 4, on dessinera 4 nœuds (autant que le diviseur) : allant de 0 à 3.
On relie les nœuds avec des flèches en trait plein dans l’ordre croissant afin de faire une boucle.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensuite, il s’agit de mettre les flèches en pointillés pour tous les nœuds (sauf 0).</td></tr>
<tr><td>Pour savoir, où arrivera la flèche partant de 1.
On multiplie ce nombre par 10, on obtient 10.
Il faut calculer le reste de la division euclidienne de 10 par 4.
$10=4\times2+2$
On trouve 2. C’est là où est l’arrivée de la flèche.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Pour savoir, où arrivera la flèche partant de 2.
On multiplie ce nombre par 10, on obtient 20.
Il faut calculer le reste de la division euclidienne de 20 par 4.
$20=4\times5+0$
On trouve 0. C’est là où est l’arrivée de la flèche.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Pour savoir, où arrivera la flèche partant de 3.
On multiplie ce nombre par 10, on obtient 30.
Il faut calculer le reste de la division euclidienne de 30 par 4.
$30=4\times7+2$
On trouve 2. C’est là où est l’arrivée de la flèche.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Votre graphe est prêt !</td><td></td></tr>
</table>

Testons-le, avec 16 puis 18.

Avec 16, j’arrive sur ….

Avec 18, j’arrive sur ….

A vous de jouer, maintenant : construisez le graphe permettant de savoir si un nombre est divisible par 6.

Si une flèche en pointillés doit arriver sur le même nœud dont elle est issue, on fait une boucle comme cela :

III. Trouver l'erreur

A l'atelier, un graphe a été fait grandeur nature. Il s'agit d'abord de trouver de quel critère de divisibilité il s'agit.

Et enfin, de trouver quelle flèche est erronée.

> ***Commentaires et développements***
>
> *- La plupart des groupes ont pu répondre facilement aux premières questions de l'atelier.*
>
> *- Par contre, quelques groupes se sont trompés dans la création du graphe, les boucles malgré l'avertissement dans le sujet ont été oubliées.*
>
> *- La dernière partie a attiré beaucoup d'élèves qui ont souhaité vivre le graphe, en se déplaçant le long des arêtes. La copie du graphe grandeur nature sur papier n'a pas posé de problème. Les élèves ont su travailler en équipe, l'un relevait les données, l'autre les recopiait. Certains groupes ont pensé à revérifier.*
>
> *- La recherche d'erreur a été plus fastidieuse sans doute parce que les élèves n'ont pas l'habitude de maîtriser ce genre d'objet mathématique.*

LE GRAND PIN (finale juin 2013)

• Mots clés :

Mesurer – Expérimenter – Calculer – Trigonométrie

• But du problème :

Trouver la hauteur du pin par estimation puis en utilisant les instruments des ingénieurs. En 6^e- 5^e, les élèves utilisent un dessin à l'échelle pour trouver les hauteurs et en 4^e - 3^e, les élèves calculent cette hauteur.

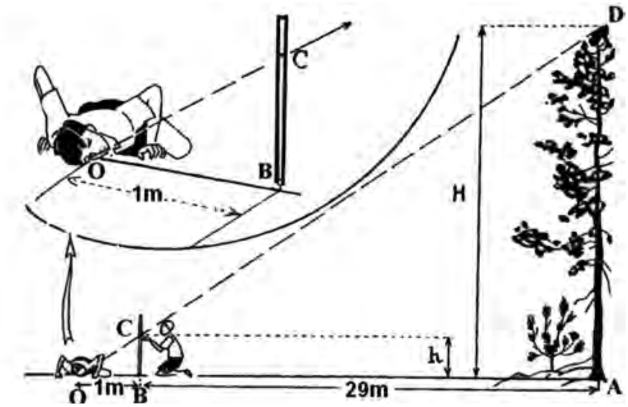
• Présentation du problème :

Cet atelier est réalisé en collaboration avec l'Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes. C'est l'une des écoles d'ingénieurs du Mans.

Le grand pin, le plus grand arbre des Etangs-chauds, est tombé malade. Il risque de s'écrouler, et il va falloir malheureusement le couper. Pour ne pas abimer les autres arbres, il va être coupé pour tomber comme repéré sur le terrain par des plots. Le directeur des Etangs chauds aimerait savoir si cela risque d'abîmer la barrière.

Pour le savoir vous allez d'abord estimer la hauteur du grand pin à la manière des scouts puis la calculer après avoir effectué des mesures à l'aide des instruments des géomètres-topographes.

Mesure à la manière des scouts :



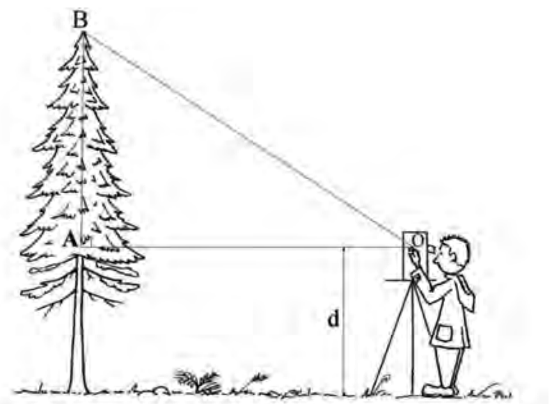
Pour estimer la hauteur du pin il faut au moins être deux :
- Un des élèves mesure 29 mètres à partir du pied de l'arbre.
- Il tient la règle verticalement à cet endroit.
- un autre élève s'éloigne encore de 1 mètre. Il place son œil en ce point (sur le sol !) et repère sur la règle le point C (intersection de la visée du sommet de l’arbre et de la règle).

Il ne reste plus qu'à mesurer la hauteur BC en cm.

Pour trouver la hauteur de l'arbre en cm il suffit de multiplier cette hauteur par 30.

(Vous pourrez le démontrer chez vous ou avec l’aide de votre professeur si vous le souhaitez)

1) Calculer la hauteur BC (donner une valeur approchée au cm).
2) Donner alors une valeur approchée en mètre de la hauteur de l'arbre.
3) D'après votre estimation, y-a-t-il un risque pour la barrière ? Justifier



Mesure à l’aide des instruments des ingénieurs.

Un appareil est placé devant l’arbre au point O.

Cet appareil permet de mesurer les angles et les longueurs.

4) Quel est le nom de cet appareil ?

Quelle est la précision de cet appareil : dans la mesure des angles ?

Dans la mesure des longueurs ?

5) A l'aide de cet appareil ou de votre décamètre :

- mesurer les distances OA et d. Prendre une valeur approchée à dix centimètres près.
- mesurer l'angle $\widehat{BOA}$. Prendre une valeur approchée au degré près. Attention, la mesure fournie par l'appareil est le complémentaire de l'angle $\widehat{BOA}$.

Représentation dans la salle de travail

6) A partir des mesures faites, calculer la longueur AB. Détailler ces calculs sur la feuille réponse, arrondir au cm près.

7) Déduire de la question précédente la taille de l'arbre. On donnera le résultat en centimètres puis en mètres. Y-a-t-il un risque pour la barrière ? Justifier.

Commentaires et développement

- Les groupes se sont bien investis sur le terrain et ont répondu assez aisément aux questions de 1) à 6).

- Pour éviter des blocages dus à l'utilisation des instruments de topologie, les élèves étaient aidés si leur mesure pour calculer l'angle n'était pas correcte.

- Les calculs en salle de travail ont été bien menés en 3ème. En 4ème les 3/4 des groupes ont fourni une réponse satisfaisante.

- En 6-5 la représentation à l'échelle a été plus difficile. La moitié des groupes de 6ème n'ont pas fourni de réponse. Dans les autres la proportionnalité n'a pas toujours été respectée. La nécessité d'utiliser une feuille A3 (ou deux feuilles A4 collées) a perturbé certains groupes.

- Les élèves ont particulièrement apprécié l'utilisation des instruments des topographes géomètres. Beaucoup sont revenus après l'atelier pour essayer les instruments et pour discuter avec les topographes de leur métier et des études à faire pour y accéder.

RALLYE MATHÉMATIQUE PÉDESTRE GRENOBLOIS

PRÉSENTATION

Ce rallye propose un parcours mathématique original dans les rues de Grenoble. Il s'adresse à toute personne intéressée (adulte ou lycéen/collégien ; personne isolée ou groupe familial/amical).

Le parcours se fait en équipe de 3 ou 4 personnes, à pied ou en tram : indices à découvrir pour trouver le parcours, défis de culture mathématique à relever tout au long du trajet ; les épreuves sont adaptées à un public diversifié.

Tout matériel utile est fourni. Seule exigence préalable : cultiver la curiosité d'esprit, le goût du défi relevé collectivement et le sens de l'humour.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE :

Octobre 2009 : premier rallye mathématique pédestre, sous le nom « rallye du centenaire » lancé à l'occasion du centenaire de l'APMEP et intégré dans le programme d'action grenoblois de la Fête de la Science. Point de départ et d'arrivée dans un lycée grenoblois.

Octobre 2011 : 3e rallye spécialement adapté pour les Journées Nationales de l'APMEP à Grenoble.

2012 et 2013 : Intégration plus marquée du rallye dans le cadre de la Fête de la Science (points de départ et d'arrivée sur les stands du Village des Sciences).

2015 : Rallye organisé dans le cadre de la Semaine des Mathématiques, à destination privilégiée d'un public collège-lycée.

COMPETITION :

La première difficulté relève de la recherche du parcours : les indications peuvent être de tous ordres (géographiques, historiques, mathématiques,...) ; le passage par une librairie ou une bibliothèque facilite la recherche de certaines réponses, en particulier celles concernant le « fil rouge » (exemple plus loin).

Certaines épreuves sont calées sur l'environnement parcouru (exemples : reconnaissance de formes, dessin du toit d'un bâtiment dont on peut faire le tour, calculs motivés par l'observation d'un tronc d'arbre…). D'autres relèvent d'énigmes ou problèmes mathématiques plus classiques.

Une épreuve finale humoristique permet à chaque équipe de s'illustrer sur scène (exemple plus loin).

EPREUVES :

3 défis mathémagiques par an.

Résolution par groupes (2 à 5 personnes), dans le cadre d'une classe ou d'un club scientifique.

Niveau : 5^e - 4^e

PARTENAIRES

Partenaire principal : la régionale APMEP de Grenoble
Appui de l'Inspection Régionale de Mathématiques
Appui, selon les années, de lycées grenoblois, du CRDP, de bibliothèques municipales.

CONTACTS

APMEP Régionale de Grenoble : André LAUR

: andre.laur@wanadoo.fr

EXEMPLE DE FIL ROUGE

De quoi s'agit-il : d'une phrase écrite par un mathématicien.
Cette phrase vous sera donnée par morceaux au fur et à mesure du parcours (sur fond grisé, faute de fond rouge !) : vous devrez en découvrir l'auteur et vous devrez la reconstituer lors de votre retour au point de départ.

Les morceaux donnés :

1. le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain

2. Monsieur ... avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels.

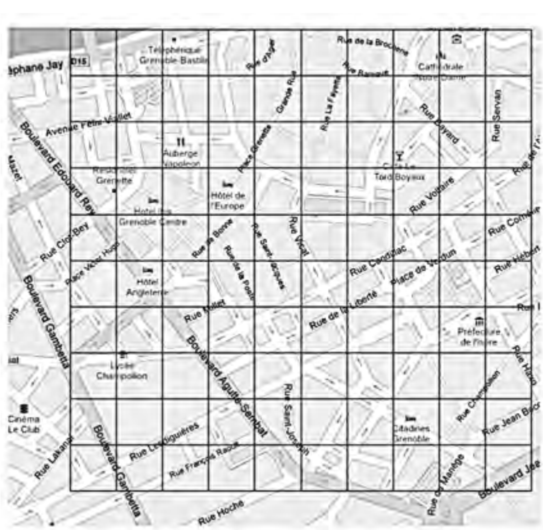
3. une question de nombres vaut bien une question de système du monde

4. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que

5. et que, sous ce titre.

Des indices ont été donnés tout au long du parcours, pour trouver le nom de l'auteur (à partir des noms des rues traversées) ou, pour le nom du Monsieur du 2ème morceau avec l'indice suivant :
Pour les Grenoblois, le nom de ce « Monsieur » est toujours associé à ceux d'un écrivain célèbre du XIXe siècle et d'un homme politique moderne qui a donné son nom à ce palais.

Exemple d'indication pour le parcours :
Parcours de l'étape n°1 :
Prenez le plan du centre-ville de Grenoble à votre disposition.



La grille de Mots Croisés 10 × 10 lui a été superposée, les verticales selon la direction nord-sud (les cases noires n'ont pas été indiquées sur le plan lui-même : elles sont lisibles sur la grille reprise en-dessous du plan). La superposition a été faite de façon que la case noire de la colonne B couvre l'endroit du Lycée Champollion dans lequel nous nous trouvons.

Suivez sur ce quadrillage, à partir de la case noire susdite, le parcours N-N-N-N-E.

La première « Dauphine » (une organisatrice repérable) vous attend devant le porche d'une église, sur une importante place piétonne traversée par le tram, face à un haut-lieu de culture marchande.

- **Solution :**

La phrase à reconstituer était : « *Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombres vaut bien une question de système du monde.* »

Elle a été formulée en 1830 par le mathématicien allemand C.G.J. Jacobi. L'indice pour trouver Fourier est typiquement grenoblois ; sur le campus universitaire se côtoient les 3 universités Joseph-Fourier, Pierre-Mendès-France et Stendhal, regroupées maintenant au sein d'un même pôle universitaire. L'indice était donné au pied du Palais des Sports, aussi appelé « Palais Pierre Mendès-France ».

Autres exemples de fil rouge utilisés : Sophie Germain, Cédric Villani, les arbres (le parcours étant entièrement dans un parc) …

EXEMPLES D'ÉPREUVES MATHÉMATIQUES

Enoncé 1 :

Trois rues composent le triangle de Grand-Place (voir le plan près du stand de l'APMEP) : rendez-vous rue de Belledonne devant l'escalator situé au milieu de cette rue.

Quel est le nombre maximum de personnes qui peuvent descendre du niveau 0 au niveau –1 par cet escalator en 1 minute (2 personnes maximum par marche).

- **Solution :**

On observe qu'une personne met 17 secondes pour descendre l'escalator. Donc il y a seulement 43 secondes qui sont utiles pour la descente dans la minute considérée.

On observe qu'il y a 19 marches visibles. Pour voir cela, on peut compter les marches qui apparaissent en haut de l'escalator pendant les 17 secondes nécessaires à la descente d'une personne. Par suite, on peut placer 19×2=38 personnes sur l'escalator.

Le nombre de personnes qui peuvent descendre en 1 minute est donc (19×2) × (43/17) soit, en arrondissant, 96 personnes.

Enoncé 2 :

« Lors d'un précédent passage dans ce parc, il était un peu plus de quinze heures et mes yeux tombèrent sur le cadran de l'horloge située près du Patio. Ce jour-là, l'horloge fonctionnait et, avec surprise, j'observais que ses deux aiguilles étaient superposées. »

Quelle heure était-il alors ?

- **Solution :**

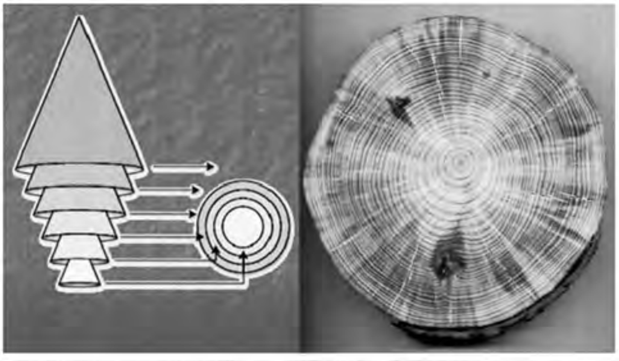
La réponse est : 15h 16 min 21 sec 81 centièmes.

Enoncé 3 : Dendrochronologie

Voici un tronc d'arbre coupé. Vous pouvez voir des couches différentes. Chacune se constitue successivement en une année autour de l'arbre et c'est sur la plus récente que repose l'écorce.

Au-dessus de la porte d'entrée d'une maison ancienne est gravée la date de sa construction : 1853. La photographie ci-dessus est celle d'une poutre de cette maison.

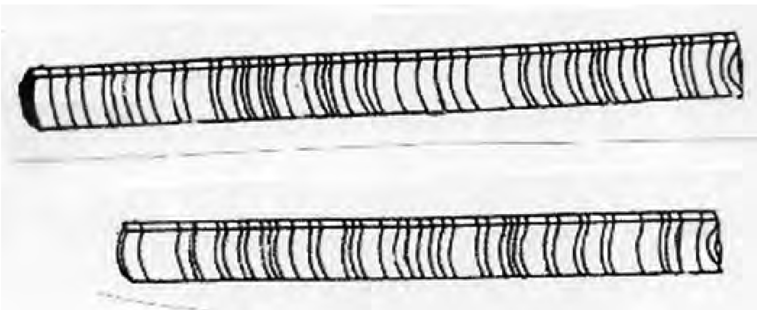
À quelle date l'arbre qui a fourni cette poutre a-t-il été planté : **1819**, **1787** ou **1887** ?



Lors d'une année de sécheresse l'épaisseur de la couche créée est faible. Par contre si le climat s'y prête son épaisseur sera plus importante. Par ailleurs pour connaître la succession des épaisseurs des couches il n'est pas nécessaire d'avoir accès à la section ; il suffit de procéder à un « carottage » c'est-à-dire d'enlever un petit cylindre de bois qui part de l'écorce pour arriver au cœur.

Vous êtes archéologue et ***vous voulez dater l'année de construction d'un pressoir à huile.***

Vous avez demandé deux carottages ; le 1er sur un chêne vivant encore aujourd'hui proche du pressoir. Le second sur l'axe de la pierre du pressoir, lequel s'avère avoir été aussi débité dans un chêne.



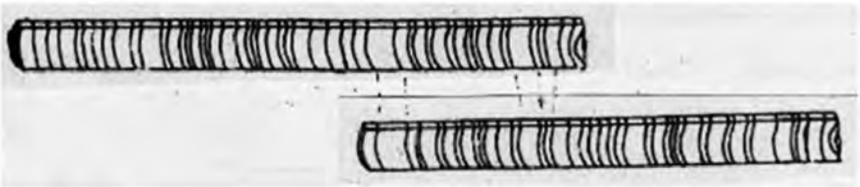
Quelle est votre conclusion : 1920, 1940 ou 1982 ?

NB : Il y a peut-être des hypothèses non explicitées ici que vous avez cependant utilisées.

- **Solution :**

Année de plantation de l'arbre : On compte environ 33 cernes sur la coupe de la poutre (1 cerne = 1 année, la partie claire correspondant au bois qui pousse au printemps) ; l'arbre d'où provient cette poutre avait donc au moins 33 ans au moment où il a été abattu ; cet arbre a donc été planté au moins 33 ans avant l'an 1853. Seule date possible : 1819.

Année de construction du pressoir : Sur les deux carottages, apparaissent les cernes de croissance de chaque arbre. Ces cernes sont plus ou moins larges selon les conditions climatiques. Les deux arbres proviennent de la même zone climatique ; on cherche donc à mettre en correspondance les cernes de chaque carottage de façon à faire coïncider les zones claires larges (printemps humides) et les zones claires étroites (printemps secs) : schéma ci-dessous.



Sur le carottage du dessus, on compte environ 31 nouveaux cernes depuis l'abattage de l'arbre du pressoir. Il y a 31 ans on était en 1982.

Enoncé 4 : Autoréférence

Complétez les pointillés avec des nombres adaptés :

78 9 10 11 12

Dans ce cadre, il y a …… nombres impairs distincts
Dans ce cadre, il y a …… nombres pairs distincts
Dans ce cadre, il y a …… chiffres impairs distincts
Dans ce cadre, il y a …… chiffres pairs distincts

Spécial Junior : Par quel nombre écrit en lettres faut-il compléter la phrase suivante pour qu'elle soit vraie ?

Dans cette phrase, on peut dénombrer … lettres.

- **Solution :**

Les chiffres/nombres pour chaque ligne : 3 / 4 / 4 / 4
« Dans cette phrase, on peut dénombrer quarante-neuf lettres »

EXEMPLE D'ÉPREUVE FINALE

Jouez collectif ! Créez un texte contenant au moins une fois chacun des six mots suivants :

quoique, infini(e), complet(e), densité, rationnel, désuet(e).

Le texte sera dit lors de la proclamation des résultats de chaque équipe. Préparez votre déclamation, qui pourra être faite par une ou plusieurs personnes de votre équipe, selon une modalité que vous choisirez parmi les suivantes : théorème lu en amphi, théorème expliqué à mes petits enfants, annonce politique, annonce matrimoniale, déclaration amoureuse, déclaration de guerre, en alexandrins, en verlan,… .

- **Solution :**

Modalité déclamatoire choisie : A notre très cher prof de maths
Quoique infinie soit votre connaissance (même si vous n'avez pas su relier plus de 12 mathématiciens à leur invention), vous avez partiellement **complété** notre soif de savoir, cette **densité rationnelle** qui nous hante. Nous avons passé de merveilleuses années malgré ces mathématiciens **désuets**. Merci encore pour l'horrible contrôle de ce matin à 8h.

Modalité déclamatoire choisie : Annonce matrimoniale
Jeune homme, dont la **désuète** attitude n'égale que sa **densité** intellectuelle, recherche **complète** cohésion avec être **rationnel quoique** superficiel, pour d'**infinies** variations.

Modalité déclamatoire choisie : slam
J'voudrais jeter un slam pour ces messieurs et dames qui ont créé c'rallye.
Faut dire, j' l'ai kiffé à l'**infini**, cette après-midi de folie !
Même si dans l' tramway y avait une **densité** de tarés,
Faut être **rationnels** : j'allais pas m'balader à pied !
C'est vraiment trop **désuet** !
J'voudrais jeter un slam pour ces messieurs et dames qui ont créé c' rallye
Ça a été un bonheur **complet** : j' le referai bien une autre journée …
Quoique non, pas si y'a d' la pluie !
Allez, encore une fois, MERCI !

TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Il a été créé en 1987 par une équipe de professeurs soutenue par :
♦la régionale de Limoges de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques)
♦le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges
♦l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Limoges
♦l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'Académie de Limoges

- **Compétition :**

Nombre de participants : environ 4000 élèves de collèges et 2000 élèves de lycées (y compris les lycées professionnels)

- **Niveaux d'études :**

Classes de quatrième pour les collégiens, toutes classes de lycées.

- **Type d'épreuves proposées :**

Une seule épreuve, de deux heures pour les quatrièmes et les lycées professionnels, de trois heures pour les lycéens ; l'épreuve est composée de 4 problèmes à résoudre par équipes de deux.

- **Fréquence :**

Chaque année à la fin du mois de janvier ; la remise des prix se déroule devant un public nombreux en avril ou en mai.

- **Liste des principaux partenaires :**

Conseil Régional du Limousin, Conseils Généraux des départements : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne,

Fondation Partenariale de l'Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,

ÉSPÉ de l'Académie de Limoges,

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Comité International des Jeux Mathématiques,

Calculatrices CASIO, Calculatrices TEXAS INSTRUMENTS,

Association Limousine des Sports Aériens,

Banque Populaire Aquitaine Centre Atlantique,

- **Contact :**

IREM
123 avenue Albert Thomas
87060 Limoges cedex

☎ : 05 55 45 72 49

🖷 : 05 55 45 73 20

🖰 : **irem@unilim.fr**

Site Internet : **www.irem.unilim.fr**

- **Divers :**

Trois brochures éditées aux PULIM permettent une utilisation des sujets en classe.

Organisation à la BFM (bibliothèque) de Limoges d'une après-midi « Mathématiques pour tous » avec présentation de jeux mathématiques issus de sujets de Tournoi qui ont été transformés en activités mathématiques ludiques pour écoliers, collégiens, lycéens ou grand public.

MULTIPLE CACHÉ
SUJET POSÉ EN 2013 À DES ÉLÈVES DE QUATRIÈME

Enoncé :

Claude écrit tous les nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7. Combien en écrit-il ?

Deux de ces nombres sont tels que l'un est multiple de l'autre. Lesquels ?

- **Solution :**

1) On trouve 24 nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7 : 2457, 2475, 2547, 2574, 2745, 2754, 4257, 4275, 4527, 4572, 4725, 4752, 5247, 5274, 5427, 5472, 5724, 5742, 7245, 7254, 7425, 7452, 7524, 7542.

Explication du total égal à 24 : on choisit d'abord le premier chiffre : il y a 4 possibilités. Pour chacun des choix, on choisit ensuite le deuxième chiffre : il n'y a plus que trois possibilités. Pour chacun des choix, on choisit ensuite le troisième chiffre : il ne reste plus que deux possibilités. Enfin, pour le dernier chiffre il ne reste plus qu'une possibilité.

Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités.

2) Notons N le plus petit des deux nombres. Son premier chiffre est nécessairement égal à 2 car si c'était 4, l'autre nombre serait aux moins égal à 2N et débuterait par 8 ou 9, ce n'est pas possible.
Il y a donc 6 nombres à tester : 2457, 2475, 2547, 2574, 2745 et 2754.
Les doubles de ces 6 nombres valent respectivement: 4914, 4950, 5094, 5148, 5490, 5508. Aucun ne convient.
Les triples des 6 nombres à tester valent respectivement: 7371, 7425, 7641, 7722, 8235, 8262.
Les quadruples des 6 nombres sont trop grands.

On obtient donc une seule solution : $7425 = 3 \times 2475$.

Commentaires
Exercice de dénombrement abordable par tous. La première question ne pose pas de problème si on écrit méthodiquement tous les nombres demandés.
Pour la seconde question, le mot multiple a posé problème à certains élèves. Pour trouver tous les cas, il faut examiner avec rigueur toutes les possibilités en multipliant par 2, 3 ou 4 chacun des nombres écrits dans la première question. Certains ont obtenu le résultat par tâtonnements mais cela ne démontre pas qu'il n'y a qu'une solution.
On peut écrire un programme :
1) on calcule la liste des 24 nombres formés avec les 4 chiffres,
2) pour chacun de ces nombres, on le multiplie par 2, 3 et 4 puis on teste si le résultat est égal à l'un des nombres de la liste.

DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS D'ENTIERS
SUJET POSÉ EN 2013 À DES LYCÉENS

Enoncé :

1) Quels sont les entiers compris entre 1 et 10 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ?

2) Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.

3) Combien d'entiers entre 1 et 100 ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ? Justifier votre résultat.

- **Solution :**

1) $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$.
Calculons les différences de deux de ces carrés.
De 1 en 1 : 1, 3, 5, 7, 9.
De 2 en 2 : 4, 8, 12, 16.
De 3 en 3 : 9, 15, 21.
De 4 en 4 : 16, 24.
On a obtenu seulement les entiers : 1, 3, 4, 5, 7, 8 et 9. Les entiers 2, 6 et 10 ne peuvent donc pas s'écrire comme une différence de deux carrés.

2) On a obtenu les premiers nombres impairs par différence de deux carrés consécutifs.
De façon générale, la différence de deux carrés consécutifs s'écrit :
$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
On obtient bien ainsi tous les nombres impairs.

3) On a obtenu les premiers multiples de 4 par différence des carrés pris de 2 en 2.
De façon générale, la différence de deux carrés pris de 2 en 2 s'écrit :
$(k+2)^2 - k^2 = 4(k + 1)$.
On obtient ainsi tous les multiples de 4.

Plus généralement, une différence de deux carrés pris de p en p s'écrira :
$(k+p)^2 - k^2 = 2kp+p^2$.

Si p est impair, cette différence est un nombre impair ; si p est pair, cette différence est un multiple de 4. Les nombres pairs non multiples de 4 ne sont jamais obtenus. Ce sont les nombres qui s'écrivent $N = 4k + 2$.

$N = 4k + 2$ est compris entre 1 et 100 quand k est compris entre 0 et 24.

Cela fait donc 25 entiers compris entre 1 et 100 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers : 2, 6, 10, 14, …, 94, 98.

Commentaires
La première question à posé problème à certains élèves qui auraient préféré la question « Quels sont les entiers compris entre 1 et 10 qui peuvent s'écrire … », mais cela revient au même et il suffit d'écrire les premiers carrés puis de calculer leurs différences.

Les formules $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ *et* $(k+2)^2 - k^2 = 4(k+1)$ *montrent que l'on peut obtenir les nombres impairs et les multiples de 4.*

Pour montrer que les doubles des nombres impairs ne peuvent être obtenus, on peut aussi remarquer que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *et que* $a + b$ *et* $a – b$ *ont la même parité. Par suite, si* $a + b$ *est impair alors* $a^2 - b^2$ *est impair ; si* $a = b$ *est pair alors* $a^2 - b^2$ *est multiple de 4.*

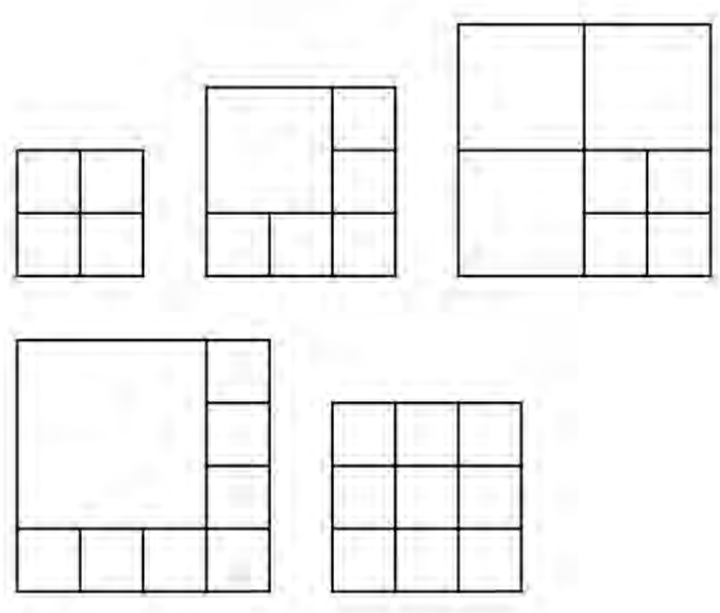
DES CARRÉS DANS UN CARRÉ
SUJET POSÉ EN 2014 À DES SECONDES
ET À DES QUATRIÈMES SANS LA GÉNÉRALISATION

Enoncé :

Partager un carré en 4, 6, 7, 8, 9 carrés (pas nécessairement de même taille).

Généralisation : pour quelles valeurs de N peut-on partager un carré en N carrés (pas nécessairement de même taille) ?

- **Solution :**



Si un carré peut être partagé en N carrés il peut l'être aussi en N + 3 carrés : en partageant l'un des carrés en 4 carrés cela ajoute 3 carrés.

Le partage est possible pour N=1 donc pour N = 4, 7, 10, … c'est-à-dire quand N = 3k + 1.

Le partage est possible pour N=6 donc pour N = 9, 12, … c'est-à-dire quand N = 3k avec k au moins égal à 2.

Le partage est possible pour N=8 donc pour N = 11, 14, … c'est-à-dire quand N = 3k + 2 avec k au moins égal à 2.

Les seuls entiers pour lesquels cela ne semble pas possible sont 2, 3 et 5 ; démontrons le.

Si on partage un carré en plusieurs carrés, il en faut au moins un pour chaque angle, donc il faut au moins 4 carrés ; cela élimine N = 2 et N = 3.

Si N est supérieur à 4, il y a au moins 3 carrés sur l'un des côtés et il n'est alors pas possible de compléter par deux autres carrés, donc le partage pour N = 5 n'est pas possible non plus.

Commentaires

Exercice classique qui peut être abordé par des collégiens. Il faut avoir un peu d'imagination pour obtenir les partages en 6 et 8 carrés.

On peut aussi partir d'un quadrillage 3×3 ou 4×4 puis regrouper des petits carrés pour en former un plus grand.

Le passage de N à N + 3 n'est pas difficile à trouver.

L'impossibilité pour N=2 et N=3 est facile à justifier, celle pour N=5 un peu plus difficile.

Comme prolongement on peut proposer de chercher de combien de façons différentes on peut partager un carré en 7 carrés (2 façons), en 8 carrés (6 façons), en 9 carrés 1(6 façons) : voir la suite A221841 de l'OEIS. Un problème voisin consiste à rechercher le nombre minimum de carrés qui partagent une grille n×n : le problème a été posé en 1907 pour n=13 par Sam Loyd en 1907 et repris par Henry Dudeney en 1917 sous le nom de Mrs Perkins's Quilt.

CHAMPIONNAT DE FOOTBALL
SUJET POSÉ EN 2014 À DES ÉLÈVES DE LYCÉES PROFESSIONNELS

Enoncé :

Lors de la saison 2012-2013 de ligue 1, à la fin de la 19^{e} journée, trois équipes (Paris Saint Germain, Lyon et Marseille) arrivent en tête avec 38 points.

Dans le championnat français de football, il est attribué :
3 points pour un match gagné, 1 point pour un match nul et 0 point pour un match perdu.

Indiquer les différentes possibilités pour obtenir 38 points après 19 matchs joués (nombre de matchs gagnés, nuls et perdus).

- **Solution :**

Possibilité 1 : 12 matchs gagnés, 2 matchs nuls et 5 matchs perdus car
$12 \times 3 + 2\times1 + 5\times0 = 38$ et $12 + 2 + 5 = 19$
Possibilité 2 : 1 match gagné, 5 matchs nuls et 3 matchs perdus car
$11 \times 3 + 5\times1 + 3\times0 = 38$ et $11 + 5 + 3 = 19$
Possibilité 3 : 10 matchs gagnés, 8 matchs nuls et 1 match perdu car
$10 \times 3 + 8\times1 + 1\times0 = 38$ et $10 + 8 + 1 = 19$

Il faut montrer qu'il n'y a pas d'autres possibilités.
Si une équipe gagne 13 matchs elle marque au moins 39 points ce qui est supérieur à 38.
Si une équipe gagne seulement 9 matchs, il lui restera au maximum 10 matchs nuls pour compléter donc elle marquera au maximum :
$9 \times 3 + 10\times1 + 0\times0 = 37$ points, elle ne peut donc pas atteindre 38.

Commentaires
C'est un exercice accessible aux collégiens. Il suffit de raisonner avec le nombre de matchs gagnés : seules les valeurs de 10 à 12 permettent d'atteindre un total de points égal à 38.
On peut aussi mettre en équations :
$x + y + z = 19$ et $3x + y = 38$ qui entraînent $y = 38 - 3x$ et $z = 2x - 19$.
Comme y et z doivent être positifs, cela entraine que x est compris entre 10 et 12.

On peut généraliser en demandant, toujours pour 19 matchs, quel est le total de points T qui donne le nombre maximal de solutions : on obtient T = 19 et T = 21 pour lesquels il y a 7 solutions.
On peut encore généraliser à N matchs et un total de points T : le nombre maximum de solutions est obtenu pour T égal à la partie entière de N/3 + 1.

TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

Le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens (TFJM) est une compétition de mathématiques qui propose à des élèves de lycée de travailler par équipe sur une série de problèmes ouverts pendant plusieurs mois.

PRÉSENTATION :

- **Le principe**

Ce tournoi est destiné aux élèves de lycée. La participation se fait par équipes de 4 à 6 élèves, encadrés par deux professeurs ou chercheurs. Les participants ont deux mois pour chercher des solutions à une série d'une dizaine de problémes difficiles, dont les dernières questions n'admettent pas de solution compléte connue.

Les élèves rédigent les résultats de leur recherche et les envoient au jury. Puis, pendant un weekend, les équipes d'une même région se retrouvent. À ce moment, elles découvrent les solutions proposées par les autres équipes. Chaque équipe présente ses résultats sur un problème à un jury de chercheurs, puis est confrontée à la critique d'une seconde équipe, sous la forme d'un débat oral.
Un membre d'une équipe tierce joue le rôle d'arbitre du débat.
Puis les rôles changent, l'équipe qui a présenté devient critique, l'arbitre présente son probléme, etc...

Deux joutes mathématiques de ce type ont lieu pendant le weekend. Le but est de favoriser les échanges d'idées constructives afin d'aller le plus loin possible dans la résolution du problème. Le jury peut orienter le débat par des questions.

Les meilleures équipes de chaque région sont sélectionnées pour se retrouver ensemble lors d'une finale nationale, et même au niveau international lors de l'*International Tournament of Young Mathematicians* pour les meilleurs.

- **Modalités de participation**

Les énoncés sont publiés en ligne au mois de décembre ou janvier. En 2016, les épreuves régionales se dérouleront début avril et la finale nationale en mai. Les inscriptions se font en ligne aprés la publication des énoncés. Des tournois régionaux sont prévus à Strasbourg, Rennes, Toulouse, Paris mais aussi probablement à Lyon, Marseille et Lille. Toutes les informations relatives au TFJM sont disponibles sur le site Internet.

- **Contact**

TFJM - Animath,
IHP
11-13 rue P. et M. Curie, 75231 Paris Cedex 05

☏ : 01 44 27 66 70

: organisateurs@tfjm.org

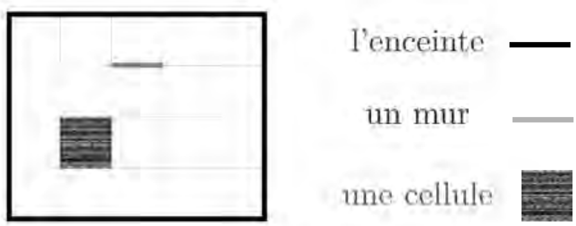
Site Internet : **www.tfjm.org**

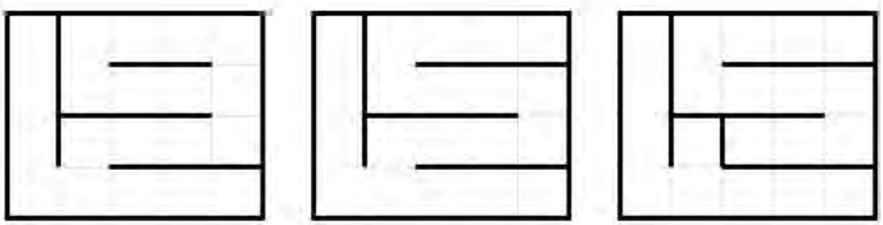
ANALYSE D'UN ÉNONCÉ

Étant donné que les problèmes du tournoi sont difficiles et font l'objet d'un temps de recherche long (plusieurs mois) il a semblé plus intéressant d'étudier dans le détail un problème que d'en survoler plusieurs. Voici l'analyse d'un problème issu de l'Édition 2014 du tournoi. Tous les énoncés des années précédentes sont disponibles en ligne.

Enoncé :

On considère une grille rectangulaire de taille $n \times m$. Le bord du rectangle est nommé *enceinte*. Les petits carrés sont appelés des *cellules*. Des *murs* peuvent être placés sur les côtés des cellules. On appelle *labyrinthe* un ensemble de murs tel que l'espace à l'intérieur de l'enceinte soit connexe et tel que l'ajout d'un mur fait nécessairement perdre la connexité (voir Figure). On note $\mathcal{L}(n,m$ l'ensemble des labyrinthes de taille $n \times m$, et son cardinal $L(n,m)$.





(a) (b) (c)

Figure 1 – Seul (b) est un labyrinthe :
(c) n'est pas un labyrinthe car il contient deux espaces séparés (et n'est donc pas connexe) et (a) n'en est pas un car on peut ajouter un mur sans perdre la connexité.

Étant données deux cellules A et B, on appelle chemin entre A et B une succession de pas verticaux et horizontaux, contigus, reliant A à B, sans passer deux fois par une même cellule.
On note $|AB|$ la longueur du plus court chemin entre A et B. Etant donné un labyrinthe λ, on appelle λ-chemin entre A et B tout chemin entre A et B ne transperçant pas les murs de λ. On note $\|AB\|_\lambda$ la longueur du plus court λ-chemin entre A et B.

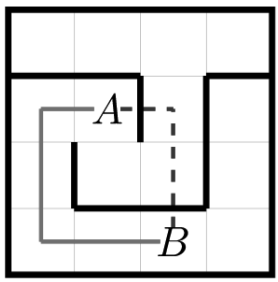


Figure ci-dessus : Ici, $|AB| = 3$ mais $\|AB\|_\lambda = 5$

1. Pour un labyrinthe λ, on note $G(\lambda)$ la longueur du plus long λ-chemin qu'il contient. Etudier $\min\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$ et $\max\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$.

2. Combien de murs peut avoir un labyrinthe de taille $n \times m$?

3. Soient A,B deux cellules données. Etudier $\max\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$ et $\min\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$.

4. Exprimer $L(2,m)$.

5. Étudier le comportement de $L(n,m)$ pour d'autres valeurs de n. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

Compréhension du sujet

La première chose notable sur cet énoncé est qu'il est difficile à comprendre. C'est évidement délibéré. Les participants ont du temps pour réfléchir, ils ne travaillent pas en temps limité. Ce n'est pas le cas de tous les énoncés du tournoi, mais les énoncés que l'on comprend du premier coup sont souvent les plus difficiles. Ici, la compréhension fait partie de l'épreuve. On notera que la compréhension est difficile car très théorique, pas parce qu'elle est incomplète. L'énoncé décrit en effet en termes mathématiques un objet assez simple, une grille de labyrinthe. Cette première barrière constitue une première étape du problème : on attend de l'élève qu'il s'approprie les définitions et notations proposées par l'énoncé et qu'il les rapproche seul des notions qui peuvent lui sembler naturelles. Pourquoi de telles notations ? Lors de l'élaboration du problème, les auteurs se sont rendu compte qu'il n'y avait pas de définition universelle d'un labyrinthe. Par conséquent il était nécessaire de bien fixer le cadre afin que chacun traite le même sujet et que les échanges puissent avoir lieu entre les équipes le moment venu. Les auteurs se sont efforcés de donner des définitions qui guident les recherches vers le format de labyrinthe le plus intéressant à étudier mathématiquement. Les définitions des éléments du labyrinthe portent volontairement des noms explicites et sont accompagnées de schémas afin qu'aucune confusion ne soit possible.

- **Attaquer une question**

L'objectif est de pousser le lecteur à faire des dessins de plein d'exemples de labyrinthes possibles, puis vérifier pour chacun s'il colle ou non à la définition de l'énoncé. C'est ainsi qu'il comprendra la notion de connexité. Par cette même série de petits exemples, le lecteur doit commencer à se rendre compte que pour m, n fixés, tous les labyrinthes ont le même nombre de murs, ce qui est la première étape importante pour répondre à la question 2. Il y a ensuite plusieurs façons de calculer ce nombre, qui est $nm-n-m+1$. On peut le faire directement avec des arguments difficiles à rédiger, un peu à la main, mais aussi avec une forme de récurrence. Néanmoins la réponse la plus facile à exprimer est en décomptant via un graphe connexe (dont les cellules du labyrinthe sont les sommets). Bien que rarement exprimé en ces termes, cette vision du probléme apparaît dans de nombreuses solutions.

- **Retour à la première question**

Après avoir bien compris les définitions, on peut chercher la première question. Celle-ci est intéressante car elle demande d'étudier le maximum d'un maximum, puis le minimum d'un maximum. Ce double niveau, qui revient au moins une fois par an dans nos énoncés, demande une gymnastique d'esprit intéressante sans être inabordable : *G(λ)* n'est rien d'autre que le chemin le plus long que l'on peut insérer dans un labyrinthe. Cela demande avant tout de regarder de nombreux petits exemples, qui permettent sans trop de difficulté de trouver les réponses. Pour le maximum, un labyrinthe "en escargot" fait bien l'affaire et $\max G(\lambda) = nm - 1$. Pour le minimum, il faut réfléchir un peu plus, mais on trouve après réflexion qu'un labyrinthe "en double peigne" donne $\min G(\lambda) = m + n - 2$, avec un petit cas particulier si les deux côtés sont impairs. Mais lorsqu'on a vu cela, comment rédiger une telle preuve ? Prouver que la valeur est atteinte est facile à l'aide d'un dessin, mais comment montrer qu'on ne peut pas la dépasser. Encore une question dont les éléves n'ont pas l'habitude. C'est souvent à ce moment que le professeur encadrant joue son rôle : comment argumenter que ce n'est pas possible ? On comprend alors que prouver que quelque chose n'existe pas, c'est bien plus difficile que prouver qu'une chose existe, puisqu'on ne peut pas la montrer. Néanmoins on y arrive, pour le maximum en argumentant que toutes les cases sont ainsi visitées. Pour le minimum il faut considérer qu'il existe un chemin reliant deux sommets opposés, avec quelques subtilités (on peut regarder les deux chemins qui relient les couples de sommets opposés, il existe un point d'intersection, un des quatre tels chemins fait alors au moins la longueur minimale affirmée). Ces résultats simples sur des objets abordables demandent déjà un raisonnement très intéressant.

- **Troisième question : les distances**

Là encore, on retrouve des min de max et max de min ... Pour la distance minimale, après compréhension du sens de la question par des petits exemples, on comprend qu'il s'agit de la distance "habituelle", c'est à dire
$\min_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda = |AB|$

En effet, les murs du labyrinthe ne font qu'ajouter des contraintes, on ne peut donc pas faire moins que la distance en absence de murs. On l'a normalement déjà compris avec la question 2. Une bonne justification mathématique est de construire l'arbre couvrant suivant : on se donne un chemin minimal entre A et B , on trace ensuite des chemins verticaux dans toutes les colonnes, on relie entre eux les chemins verticaux voisins non reliés par le chemin minimal. Cela semble assez intuitif à qui a étudié un peu longuement la question puisqu'on a souvent retrouvé des algorithmes de traçage équivalents dans les solutions proposées par les élèves, bien que non décrits dans ces termes. Pour le maximum, c'est plus compliqué.

L'intuition nous dit qu'on va pouvoir tourner suffisamment pour recouvrir tout le labyrinthe et obtenir la longueur de $nm-1$. Néanmoins des problèmes de parité se posent et il faut faire une distinction de cas un petit peu exhaustive que nous ne ferons pas ici. Une chose élégante à montrer est que la valeur $nm-1$ n'est pas toujours atteinte, ce qui peut se faire avec des arguments de coloriages.

- **Quatrième question : décompter les labyrinthes**

Ici, on change un peu le sujet d'étude. On ne s'intéresse plus aux chemins, simplement au nombre de labyrinthes. La question de la valeur de $L(2,m)$ se résout bien par récurrence : on obtient une équation de récurrence d'ordre deux. En plus d'une bonne application du programme de terminale, cela pousse les élèves à chercher comment résoudre une telle équation, ce qui se trouve facilement et est à leur portée. De plus ils peuvent vérifier leur résultat (une grosse formule avec des $\sqrt{3}$ dont ils sont toujours très fiers) à partir de leurs exemples.

- **Généralisation**

La question 5 est clairement ouverte. L'étude d'autres valeurs de n est autrement plus compliquée. Même pour 3, une récurrence devient trop difficile. La seule approche connue par les auteurs du problème est l'utilisation du théorème de Kirchhoff sur les arbres couvrants, mais ce n'est pas ce qui était attendu ici. L'important est que les élèves voient la limite des méthodes qu'ils ont employées et pourquoi elles ne fonctionnent plus ici. Cette question a entraîné de nombreuses tentatives de généralisations des questions précédentes en 3 dimensions. Encore une fois, l'intérêt est de voir ce qui s'adapte bien (et déjà comment définir un labyrinthe en 3D) et si les méthodes passent à l'échelle ou non, plutôt que les résultats.

Réutilisation dans les classes et ailleurs

Le tournoi s'adresse en particulier aux élèves de première et terminale ayant déjà un bon niveau en mathématiques et souhaitant creuser un peu plus loin que le programme, avec une approche différente de la discipline. Par conséquent, on ne peut directement faire participer toute une classe à la compétition. Il existe cependant plusieurs répercussions indirectes de la participation d'une équipe d'un établissement sur le reste des élèves.

Le premier scénario observé, le plus naturel, est lorsqu'une équipe d' une même classe participe à la compétition. Alors, une dynamique de classe se crée autour de l'équipe qui représente sa classe dans la compétition.

Les énoncés, qui sont publics, sont lus par tous les élèves avec plus ou moins d'attention. Le calendrier du tournoi rythme la vie de la classe et, après la fin de la compétition, l'équipe peut présenter ses travaux aux autres élèves.

Des équipes de classes différentes existent également et même de niveaux différents. Les équipes avec une moitié de terminales et une moitié de premières fonctionnent trés bien. Depuis quelques années, le TFJM sert de support pour les clubs de maths existants dans certains lycées pendant toute la deuxième moitié de l'année. De plus, les élèves ayant pu participer en première reviennent l'année suivante et coachent la génération suivante. On trouve aussi des anciens participants, en classe préparatoire ou à l'université, qui viennent encadrer l'équipe de leur ancien établissement.

Une autre reprise qui a déjà été expérimentée est l'organisation d'un mini-tournoi au sein d'une classe : organisation de trois équipes d'une dizaine d'élèves, sur des énoncés de l'année précédente simplifiés. Après une petite semaine de recherche, les élèves présentent leurs résultats et débattent des problèmes.

Enfin, les élèves ayant participé peuvent présenter leurs problèmes à des publics plus variés. Cela a été expérimenté lors de la fête de la science, où d'anciens participants ont préparé des exposés d'une dizaine de minutes sur leurs problèmes. Cela demande de l'accompagnement car les élèves, qui connaissent très bien leur sujet puisqu'ils y ont consacré plusieurs mois, n'ont pas l'habitude de devoir l'expliquer à des personnes qui ne connaissent pas l'énoncé. Malgré cela, cette formule fonctionne bien car les élèves sont toujours fiers de présenter leurs travaux et le public est souvent plus intéressé par l'exposé d'un lycéen que par celui d'un chercheur, parce qu'il y trouve une plus grande proximité.

On remarque que la participation au tournoi a un impact important sur les participants. Ceux-ci sont très nombreux à continuer ensuite des études scientifiques longues en lien fort avec les mathématiques et beaucoup s'investissent dans l'organisation de l'événement les années suivantes. Ceci est expliqué par deux facteurs : l'investissement sur la durée qui marque plus fortement qu'une épreuve en temps limité, mais aussi l'expérience collective et non individuelle, qui crée de nombreux souvenirs.

LE CONCOURS AL KINDI

**Le concours Al Kindi est une nouvelle compétition scientifique pour lycéens qui porte sur la cryptanalyse : l'art de déchiffrer les codes secrets.
Ce concours est organisé conjointement par les associations Animath et France IOI, avec le soutien de la DGSE et du Ministère de l'Éducation Nationale.**

Motivations

Aujourd'hui, les questions de sécurité des données sont un des enjeux majeurs de notre société, que ce soit pour protéger les transactions bancaires ou garantir la protection de la vie privée. Tout cela est rendu possible grâce aux mathématiques et à l'informatique.

Nous souhaitons faire découvrir aux lycéens cette application très concrète des mathématiques, qui joue un rôle énorme dans leur vie quotidienne. Nous voulons leur montrer qu'il est possible de prendre du plaisir en faisant des mathématiques. Enfin, nous souhaitons les sensibiliser à la question importante de la sécurité de l'information.

Principe

Le concours comporte quatre tours. Le premier tour est une épreuve qui s'adresse à tous les lycéens de seconde. Elle prend la forme d'une session interactive de 45 minutes sur ordinateur (type concours Castor), à laquelle on peut participer seul ou par binôme.

Il s'agit d'une série de petits problèmes en lien avec la cryptanalyse. Pour chaque problème, il existe trois niveaux de difficulté.

Tout problème résolu débloque de nouveaux énoncés. Plus on répond à des questions, plus on marque des points. Après le premier tour, un classement est effectué et les équipes classées dans la première moitié sont sélectionnées pour participer au tour suivant. Celui-ci a une forme différente : les participants ont une semaine pour déchiffrer un message codé. De nouveau, les équipes classées dans la première moitié participent au troisième tour qui a la même forme, puis au quatrième.

Modalités de participation

Qui peut participer ?

Tous les élèves scolarisés en seconde dans un établissement français peuvent participer à la compétition. C'est entièrement gratuit ! Les professeurs peuvent inscrire leurs élèves par classe entière.

Est-ce que c'est difficile ?

Le concours est accessible pour tous les élèves de seconde. Lors de la première épreuve, ouverte à tous, chaque question comporte trois niveaux de difficulté. Ainsi, chaque participant peut s'amuser à résoudre des défis adaptés à son niveau. La difficulté augmente lors des tours suivants.

Quand le concours aura-t-il lieu ?

Tout se passe en ligne aux mois de décembre et janvier.

Le **premier tour** est à organiser pendant la semaine du 30/11 au 04/12 au moment de votre choix.

Le **deuxième tour** dans la semaine du 14 au 19/12,

Le **troisième tour** entre le 04 et le 16/01,

Le **quatrième tour** entre le 18/01 et 05/02.

Contacts :

Site Internet : **www.concours-alkindi.fr**

Vous pouvez entrer en contact avec les organisateurs en adressant un mail à :

🖱 : **info@concours-alkindi.fr.**

Al Kindi est un savant arabe du IX^{e} siècle qui s'est intéressé à de nombreuses sciences allant de la géométrie, à la médecine et à la chimie.

Dans le *Manuscrit sur le chiffrement des messages cryptographiques*, il explique comment casser les meilleurs codes connus à son époque à l'aide de la technique de l'analyse de fréquence.

C'est la première trace connue de cryptanalyse ce qui fait d'Al Kindi l'un des fondateurs de cette discipline.

Le Comité International des Jeux Mathématiques propose aux enseignants et au grand public :

des éditions pédagogiques

des expositions

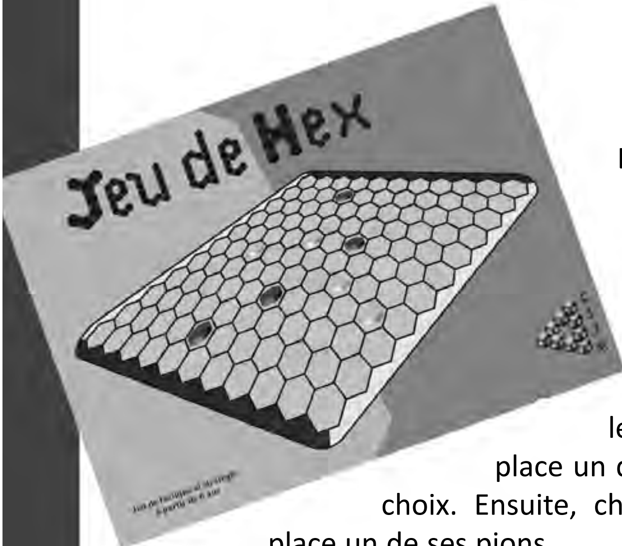
des jeux

des animations

et

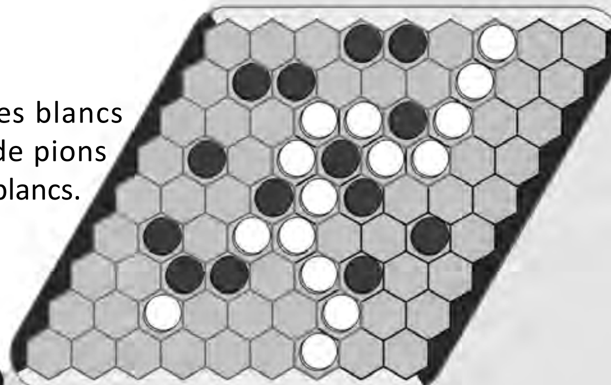
le salon annuel
Culture et Jeux Mathématiques

www.cijm.org

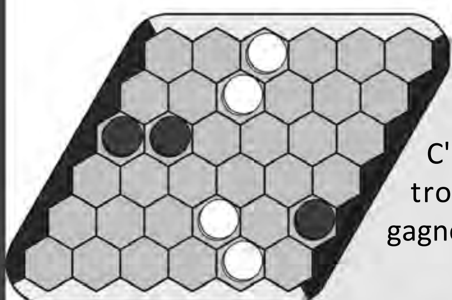


Le jeu de Hex se joue à deux joueurs sur un plateau en forme de losange pavé par des hexagones. Deux bords opposés du plateau sont blancs, les deux autres sont noirs. Le joueur qui a les pions blancs commence. Il place un de ses pions sur la case de son choix. Ensuite, chaque joueur, à tour de rôle, place un de ses pions.

Le premier joueur à avoir relié les deux bords de sa couleur a gagné !



Dans la partie ci-contre, les blancs ont gagné car un chemin de pions blancs relie les deux bords blancs.



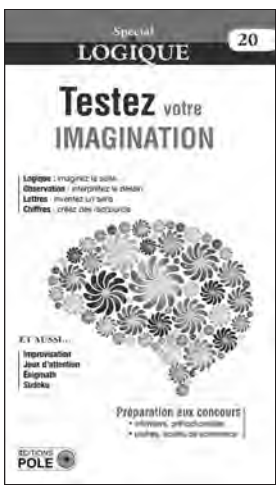
Exemple :
C'est aux noirs de jouer. Essayez de trouver le coup qui leur permet de gagner quel que soit le jeu des blancs.

Solution : Les noirs doivent jouer sur la case B ci-contre. De cette façon ils créent deux maillons, l'un reliant A et B, l'autre B et C.
Vous pouvez essayer de vous convaincre que si les noirs jouent sur n'importe quelle autre case, alors ce sont les blancs qui deviennent gagnants car ils menacent eux aussi de créer plusieurs maillons entre leurs pions.

Spécial

LOGIQUE

Abonnez-vous au trimestriel des jeux de logique



www.infinimath.com

Panoramath 6

Cocktail de pistes et d'idées

Avec Panoramath 6, le CIJM augmente la collection initiée en 1996 et poursuit le travail amorcé avec Panoramath 5. En demandant à chaque compétition de choisir des sujets originaux, significatifs et de les analyser, **Panoramath 6** a pour ambition d'être un outil pédagogique documenté permettant à chacun, au vu des expériences décrites, de choisir, d'adapter et de proposer des défis donnant le goût de la recherche.

34 compétitions et associations ont participé à cette brochure. Vous trouverez pour chacune d'entre elles, une présentation de son histoire, de ses objectifs et de son mode de fonctionnement.

Une grande diversité règne ! Il y a donc de nombreuses pistes et un cocktail d'idées à explorer.

Cet ouvrage devrait permettre aux enseignants, aux animateurs de clubs, d'ateliers scientifiques ou aux organisateurs de compétitions mathématiques, l'utilisation de l'activité ludique en mathématique dans la classe ou en animation grand public. Il expose la richesse de ces activités, leur impact pédagogique et leur place dans l'acquisition des connaissances ainsi que leurs prolongements possibles.

9 782954 043111