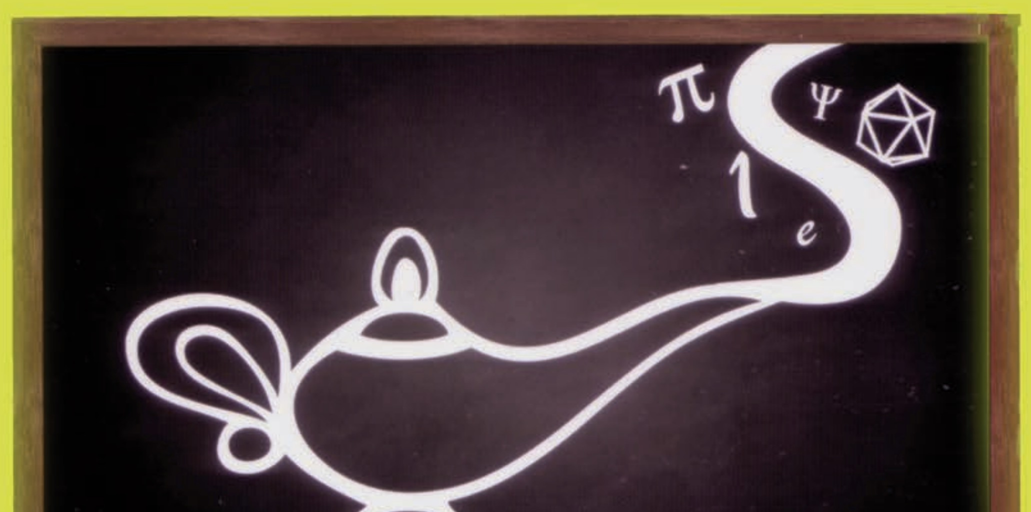
Panorama math5

Cocktail de pistes et d'idées



Comité International des Jeux Mathématiques

www.cijm.org

Panora Math5

Réalisé sous la direction de Marie José Pestel et Michel Criton,

Avec la participation active de Martine Janvier, Martine Clément
et Laurent Demonnet

A Bernard Novelli

www.cijm.org

Mise en page *Patrick Arrivetz*, édition des formules *Laurent Demonet*,
Maquette de couverture *Elsa Godet*, chargé de l'impression *FP Impression*.
Imprimé sur les presses de l'*Imprimerie SAGIM* à Coudry 77
N° d'impression : 12578

ISBN 978-2-9540431-0-4

Octobre 2011

Comité International des Jeux Mathématiques

Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire

Le **CIJM** est une association créée en 1993 par des professeurs de mathématiques désireux de proposer une autre réflexion sur leur discipline.

Le **CIJM** fédère plus de trente compétitions intéressant ainsi plusieurs millions de personnes tant en France qu'à l'étranger. Toutes unissent leurs énergies pour proposer des activités mathématiques vivantes et créatives.

Le **CIJM** est une plate-forme internationale de réflexion et d'échanges sur une pratique dynamique des mathématiques.

Ensemble nous sommes forts pour faire aimer les mathématiques

Les actions du CIJM

Créations et éditions pédagogiques
- Valises pédagogiques
- Jeux
- Annales de compétitions
- Brochures
- Expositions

Compétitions
- Euromath
- Rallye Mathématique de Paris
- Combilogique
- Hex

Compétitions sur Internet
- Chasse au trésor
- Mathématiques sur étagères

Interventions et actions de formation
- En milieu scolaire et périscolaire

Site Internet www.cijm.org
- Lieu d'échanges entre membres et force de proposition pour le public

Participation à des manifestations nationales et internationales
- Fêtes de la Science
- Festival International des Jeux à Cannes
- Maths en rue à Bruxelles
- Colloques nationaux et internationaux

Mise en oeuvre d'une manifestation annuelle
- Salon Culture et Jeux Mathématiques

Editions pédagogiques

Jeux et compétitions

Interventions extérieures

Salon Culture et Jeux Mathématiques

CIJM

8 rue Bouilloux-Lafont 75015 PARIS Tél : 01 40 37 08 95

Fax : 09 72 19 29 27 cijm@cijm.org

www.cijm.org

PREFACE

Jean-Pierre Bourguignon
Directeur de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques,

Pour sa cinquième parution Panoramath s'est donnê une nouvelle mission. Il ne se contente plus de fournir des corrigés des épreuves proposées aux différentes compétitions mathématiques, qui couvrent, soit dit en passant, des niveaux bien différents. Il part à la conquête d'une nouvelle dimension en rassemblant tout un ensemble de documents collectés auprès des organisateurs de compétitions à qui il a été demandé de sélectionner quelques-uns des sujets qui leur ont paru les plus intéressants et de fournir tous éléments permettant à d'autres de s'en saisir et de les enrichir encore. Un beau programme !

Cette encyclopédie d'un nouveau genre, destinée à stimuler la réflexion et à encourager les initiatives à partir de sujets déjà éprouvés, paraît de nature à rendre beaucoup de services à ceux qui sont intéressés à faire connaître les mathématiques alors que bien peu de documents ouverts de cette nature offrant un spectre aussi large sont disponibles. L'avantage d'une telle approche est bien évidemment de tourner le dos au bachotage des épreuves déjà données, risque inhérent à toutes les compétitions, et dont il faut beaucoup se méfier car il peut donner une idée fausse de ce qui est le cœur de la discipline.

Cette nouvelle orientation est tout à fait en ligne avec la préoccupation constante des mathématiciens qui insistent sur la place qui doit être donnée à " faire des mathématiques " dans leur apprentissage. Ne pas les faire apparaître comme un savoir fermé et définitif mais au contraire toujours à la conquête de nouveaux espaces est bien évidemment un souci qu'il convient d'avoir tout spécialement quand on s'adresse à des jeunes gens et des jeunes filles que les mathématiques intéressent. Eux, encore plus que les autres, méritent que leur soit offerte une perspective juste sur la situation réelle des mathématiques, à savoir celle d'une science en perpétuelle réorganisation et ouverte aux stimulations de toutes sortes, certaines internes à la discipline et d'autres venant de beaucoup d'horizons différents

.

La variété des documents rassemblés est tout à fait saisissante et met en évidence la richesse considérable des sources d'inspiration et des contextes dans lesquels des questions susceptibles d'un traitement mathématique peuvent apparaître et se développer. C'est une des richesses de ce Panoramath nouvelle formule, une richesse qui doit en faire un outil dont l'usage devrait dépasser les passionnés de compétition et inclure de nombreux professeurs qui souhaitent enrichir leurs cours et les faire résonner d'accents variés.

Cette initiative est en synergie avec le nouvel élan que connaît la discipline sollicitée qu'elle est par une multitude de nouveaux chantiers s'ouvrant à elle. Cet état de fait est en particulier lié aux nouvelles possibilités de construire des modèles réalistes d'un grand nombre de situations empruntées à d'autres disciplines scientifiques mais aussi à la haute technologie. Dans certaines situations, les outils mathématiques. classiques sont pertinents pour formuler les problèmes mais ceux-ci ne sont pas nécessairement ceux que les mathématiciens s'étaient posés spontanément ; dans d'autres cas, il apparaît clairement qu'un concept nouveau doit être mis en place, ce qui se fait rarement dans l'instant et requiert en général de nombreux tâtonnements avant que soit identifié le point de vue le plus fécond. Un retour aux sources en quelque sorte car c'est typique de ce qui s'est passé dans la lente maturation historique de la discipline.

Il y a encore une raison de saluer le changement de paradigme sous-jacent à Panoramath 5. Il peut en effet être vu comme un encouragement à mener une réflexion plus en profondeur sur les objets fondamentaux, qui ne se révèlent pas toujours au premier regard. Cette façon d'aborder les choses va bien au-delà de la simple proposition de solution à des exercices .Que des jeunes, et moins jeunes, gens intéressés aux mathématiques se voient offerts de tels espaces de liberté et de réflexion est particulièrement bienvenu car il s'agit ni plus ni moins que de les appeler à considérer ce que sont les mathématiques, à savoir une aventure humaine qui se nourrit du doute méthodique et de stimulations de la réflexion qui puise son inspiration à beaucoup de sources.

Bonne lecture et bonne exploration des nombreuses pistes offertes !

Jean-Pierre BOURGUIGNON

TABLE DES MATIERES

CHAMPIONNAT DE JEUX MATHÉMATIQUES DU NIGER

PRÉSENTATION

L'Association Nigérienne des Jeux Mathématiques organise le *Championnat annuel de Jeux Mathématiques du Nige*r, qui attire plusieurs milliers de participants dont les meilleurs représentent le Niger à la finale internationale des Jeux Mathématiques en France.

Les énoncés parus dans le *Sahel Dimanche* proviennent de sources diverses. Quelques-uns ont été adaptés à partir de problèmes du championnat FFJM, d'autres nous ont été communiqués par des fidèles. Tous ces problèmes ont été sélectionnés par le bureau national de l'ANJM composé de Boubé Mamane, Garba Insa, Djibrilla Harouna, Dakaou Ibrahim, Morou Amidou, René Noudgabé, Amadou Soumaila, Mme Ibrahim Marie, Kimba Abdou Oumarou, Abdoul Aziz Moussa et des présidents des antennes ANJM.

Le bureau national remercie tous les amis de l'ANJM qui ont quitté le Niger dont Pierre Chevrault, Bernard Cuvilier, Pierre Guinamant, tout en saluant la mémoire de Marc Moreau.

L'ANJM est membre du CIJM et a une reconnaissance hors du Niger puisque les revues comme le *Jeune Archimède* et *Tangente* ont consacré des articles à son sujet.

L'ANJM œuvre également dans d'autres directions pour promouvoir les mathématiques ludiques : par exemple, un championnat "des chiffres et let-tres" est organisé chaque année dans les collèges et lycées avec des finales au Centre Culturel Franco-Nigérien sous le haut patronage du Ministre en charge des enseignements secondaire et supérieur.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
1989 : Création du championnat du Niger.
1990 : Rubrique régulière de jeux mathématiques dans *Sahel Dimanche*.
1991: Premières éliminatoires grand public par le biais de *Sahel Dimanche*.
A partir de 1992 : organisation annuelle du championnat aux niveaux des collèges, des lycées et du grand public.
Depuis 2005 : organisation annuelle du championnat au niveau du primaire.

Epreuves :
Catégories : 5
Primaire (CM) - Collège (2) - Lycées - Grand Public

Compétitions :
Eliminatoires : dans les établissements primaires, secondaires ou par réponse au *Sahel Dimanche*.
Finales régionales : dans les chefs lieux des régions.
Finale nationale : Qualificative pour la finale internationale.

Partenaires :
Ministère de l'Education Nationale,
Ministère des Enseignements Secondaire et Supérieur, de la Recherche Scientifique,
Institut National de la Statistique,
Centre Culurel Américain,
Coopération Française,
Air Transport, Cominak,Somair, Aréva/Niger, CNSS, ASECNA/Niger, CCFN, SONDEP, Gamma Informatique, Leyma, NIA Assurances.

Contacts :
BOUBE Mamane
Association Nigérienne des Jeux Mathématiques
BP 13 180 Niamey
(Niger)

Enigme n° 1 : Quelle descendance ?

Pour son centième anniversaire, lbrahim a réuni autour de lui ses 100 fils, petits-fils et arrière-petits-fils. Il décide de leur donner toute sa fortune constituée de 300 pièces d'or, de la manière suivante : chaque fils recevra 15 pièces, chaque petit-fils 9 pièces et chaque arrière- petit- fils une pièce.

Sachant que dans sa descendance, il n'y a que des garçons, et que chaque fils, comme chaque petit-fils a eu, soit 4, soit 5 enfants, quel est le nombre d'arrière-petits-fils d'Ibrahim ?

Niveau scolaire :
Pour des élèves du lycée.

Domaine mathématique :
Système d'équations à trois inconnues avec des contraintes.

Solution :
Soit x, y et z, désignant respectivement le nombre de fils, de petits-fils et d'arrière-petits-fils d'Ibrahim. Les données indiquées dans l'énoncé permettent de poser le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 15x + 9y + z = 300 & (2) \end{cases}$$

En soustrayant (1) de (2), on obtient $14x + 8y = 200$, équation qui possède les solutions entières positives suivantes :

$x = 0$; $y = 25$ d'où $z = 75$ (a)

$x = 4$; $y = 18$ d'où $z = 78$ (b)

$x = 8$; $y = 11$ d'où $z = 81$ (c)

$x = 12$; $y = 4$ d'où $z = 84$ (d)

L'indication donnée sur la descendance d'Ibrahim se vérifie par

$$\left\{\begin{array}{c} 4x \leq y \leq 5x \\ \text{et} \\ 4y \leq z \leq 5y \end{array}\right.$$

Seule la solution (b) vérifie donc cette double inégalité.

Le nombre des arrière-petits-fils d'Ibrahim est donc 78.

Commentaires
On pourrait résoudre le système précédent en fonction de l'inconnue z.

On trouve ainsi que
$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4}{3}z - 100 \\ y = 200 - \frac{7}{3}z \end{array}\right. \quad \text{(S)}$$

L'indication donnée sur la descendance d'Ibrahim par rapport au fils et au petit-fils se traduit par
$$4x \leq y \leq 5x \;\cdot$$

On obtient ainsi un encadrement de z en utilisant les résultats du système (S). D'où
$$\frac{2100}{27} \leq z \leq \frac{1800}{23}$$

et par suite : z = 78.

Le nombre des arrière-petits-fils d'Ibrahim est donc 78.

Enigme n° 2 : le numéro de la voiture

En se promenant en ville, trois étudiants ont remarqué que le conducteur d'une voiture avait enfreint le code de la route. Aucun n'a retenu le numéro à quatre chiffres de la plaque minéralogique de la voiture. Chacun d'eux se souvient par contre d'une particularité de ce nombre. L'un d'eux se rappelle que ses deux premiers chiffres étaient identiques, un autre que les deux derniers chiffres étaient également identiques ; enfin, le troisième affirme que ce nombre était un carré parfait.

Pouvez-vous retrouver le numéro de la voiture ?

Niveau scolaire :
Pour des élèves du lycée.

Domaine mathématique :
Arithmétique.

Solution :

Le numéro de la voiture s'écrit donc ***aabb***, où *a* et *b* représentent les chiffres. De surcroît, ce nombre ***aabb*** est un carré parfait.

Successivement, on a :

$$aabb = a \times 11 \times 100 + b \times 11$$

$$aabb = 11 \times (100a + b)$$

$$aabb = 11 \times [(99 + 1)a + b)]$$

$$aabb = 11 \times (99a + a + b)$$

Nécessairement, comme ***aabb*** est un carré parfait et qu'il contient le facteur premier 11, sa décomposition en un produit de facteurs premiers contient un nombre pair de facteurs 11, autrement dit : $(99a + a + b)$ est divisible par 11, par suite $a + b$ est lui-même divisible par 11.

Comme *a* et *b* sont des chiffres, on a alors $0 \leq a + b \leq 18$.

Et par suite, soit $a + b = 0$, soit $a + b = 11$ (car 0 et 11 sont les seuls multiples de 11 compris entre 0 et 18).

$a + b = 0$ conduit à : $a = b = 0$ (ce qui est peu absurde car les trois étudiants auraient pu facilement retenir un tel numéro de véhicule !).

Donc $a + b = 11$ et par suite, nécessairement, (a, b) est à prendre parmi les couples suivants : (2 ; 9), (3 ; 8), (4 ; 7), (5 ; 6), (6 ; 5), (7 ; 4), (8 ; 3), (9 ; 2) car ***a*** et ***b*** sont des chiffres.

Finalement, comme $99\,a + 11 = 11 \times (9a + 1)$, on a alors:

$$\boldsymbol{aabb} = 11^2 \times (9a + 1).$$

Mais encore, faut-il que $(9a + 1)$ soit un carré parfait, d'où $\boldsymbol{a = 7}$ et, par suite $\boldsymbol{b = 4}$.
Ainsi donc, $\boldsymbol{aabb} = 11^2 \times 8^2$, c'est-à-dire encore : $\boldsymbol{aabb = 7744}$
Seuls les chiffres $\boldsymbol{a = 7}$ et $\boldsymbol{b = 4}$ conviennent.

Le numéro de la voiture était 7744.

Autre solution
Supposons que le chiffre des dizaines soit impair. D'où celui des unités est aussi impair. Impossible car les chiffres des unités et des dizaines pour un carré ne sont pas simultanément impairs.

De plus, un carré parfait étant toujours terminé par 0 ; 1; 4 ; 5 ; 6 et 9, on déduit que les valeurs possibles de b sont 0 ; 4 et 6.

- Si $\boldsymbol{b = 6}$, alors le chiffre des unités et des dizaines sont égaux à 6. Impossible car un carré parfait terminé par 6 a pour chiffre des dizaines, un chiffre impair.

- Si $\boldsymbol{b = 0}$, alors le nombre serait $aa00$ qui est égal à $11(99a + a)$. Comme, pour avoir un carré parfait, le nombre $99a + a$ doit être divisible par 11, on déduit que le chiffre a divisible par 11, et par suite $a = 0$. Ce qui est absurde car les trois étudiants auraient pu facilement retenir un tel numéro de véhicule.

- Si $\boldsymbol{b = 4}$, le nombre serait $aa44$ qui est égal à $11(99a + a + 4)$. Comme, pour avoir un carré parfait, le nombre $99a$ + a + 4 doit être divisible par 11, c'est-à-dire $a + 4$ divisible par 11. On déduit alors que $\boldsymbol{a = 7}$.

Le numéro de la voiture était 7744.

RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN (RMT)

PRÉSENTATION

Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est une compétition entre classes du primaire et du secondaire (degrés 3 à 10 de la scolarité obligatoire, élèves de 6 à 16 ans). Il se déroule actuellement en Suisse romande, dont il est originaire, au Tessin, dans une douzaine de provinces ou régions d'Italie, en France dans le département de l'Ain, à Lyon et en Franche-Comté, au Luxembourg, en Belgique francophone et en Argentine. Les objectifs sont :

- pour les élèves, la résolution de problèmes, le travail en équipes, le débat scientifique et la justification des solutions ;
- pour les maîtres, l'observation des élèves en activité de résolution de problème, l'exploitation des sujets dans leur enseignement, l'analyse des résultats, la constitution d'une collection de problèmes expérimentés dont les stratégies et procédures de résolution ont été explicitement relevées ;
- pour les chercheurs en didactique, pour les formateurs et pour les animateurs, l'enrichissement de leurs connaissances sur les phénomènes liés à la résolution de problèmes dans les apprentissages en mathématiques.

Les épreuves (un entraînement qui détermine l'inscription de la classe, deux épreuves "officielles", une finale pour les classes qualifiées) sont constituées de 5 à 7 problèmes, de difficultés variées, afin que chaque élève puisse être actif et que l'ensemble de la tâche soit trop lourd pour un seul individu, aussi doué soit-il. En l'absence de leur enseignant, les élèves disposent de 50 minutes pour s'organiser, résoudre les problèmes, adopter une seule réponse pour la classe et la rédiger de manière très explicite, avec les justifications nécessaires, en décrivant leurs démarches et solutions.

Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participant de travailler ensemble à l'élaboration des sujets, aux analyses des résultats et aux exploitations didactiques des problèmes du RMT.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1993 : création du Rallye mathématique romand ouvert aux classes des degrés 3 à 5 de l'école primaire (8 - 11 ans), 20 classes y participent.

1996 : le Rallye mathématique romand devient Rallye Mathématique Transalpin (RMT) avec la participation de classes italiennes.

1997 : ouverture aux classes de degré 6 et extension à la région de Bourg-en-Bresse. Premières journées d'études internationales.

1998 : ouverture aux classes des degrés 7 et 8 ; extension à d'autres régions d'Italie, au Luxembourg et Israël ; participation totale de 500 à 600 classes.

2001 : participation de 1000 classes, 4e rencontre internationale, fondation de l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT).

2004 : plus de 2000 classes participent au 12e RMT, 8e journées d'études internationales, publication des actes de la 7e journée d'études. Ouverture aux classes des degrés 9 et 10.
2008 : près de 3000 classes participent au 16e RMT. Une première finale internationale réunit 12 classes de France, Suisse, Italie, Luxembourg et Suisse à Brigue (CH) à l'occasion des 12e journées d'études.
2010 : près de 4000 classes sont inscrites au 18e RMT, de 24 sections réparties en Italie, France, Belgique, Luxembourg, Suisse et Argentine. La 14e rencontre internationale se tient à Besançon, sur le thème des obstacles et erreurs.

Épreuves :
Collectives, par classes.
8 catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 16 ans).
Problèmes : 5 à 7, à résoudre en 50 minutes, de difficultés échelonnées.
Beaucoup de problèmes sont communs à plusieurs catégories.
Les solutions sont à rédiger avec explications détaillées, prises en compte pour l'attribution des points. La préparation des problèmes est faite en coopération par les différentes équipes régionales et nationales. Les traductions (en français, italien, allemand, espagnol) sont rigoureusement comparées.

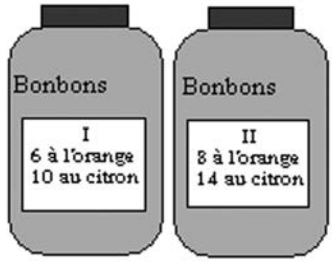
Compétition :
1. Épreuve d'entraînement en décembre, sous la responsabilité du maître. La classe s'inscrit en cas d'intérêt.
2. Épreuves I et II, de janvier à avril. Sur la base d'un barème unique, les corrections et les classements sont organisés au plan régional.
3. Finales régionales, en mai ou juin. Les classes qualifiées sont réunies dans un même établissement scolaire et disputent l'épreuve finale.
4. Une analyse comparée des solutions des meilleures classes finalistes de chaque région permet d'attribuer un titre de classe "championne" de chaque catégorie au plan international.

Partenaires :
L'association ARMT, l'unité locale de recherche en didactique du Département de Mathématiques de l'Université de Parme (Italie), divers instituts de formation des maîtres et départements de mathématiques universitaires, selon les régions.

Contacts,
ARMT, coordinateurs internationaux :
Site Internet : *www.armtint.org*
Roland Charnay, (France)
e-mail: *roland.charnay@sfr.fr*
Lucia Grugnetti, (Italie)
e-mail : *lucia.grugnetti@unipr.it*
François Jaquet, (Suisse) Président d'honneur
e-mail : *f_jaquet@orange.fr*

1. LES POTS DE BONBONS

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron. Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :
Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.



Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?
Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Domaine de connaissances
- Arithmétique : proportionnalité, approche de l'idée de " probabilité "

Analyse de la tâche (pour des élèves de 11 à 14 ans)
A) Se rendre compte qu'il ne suffit pas de choisir le pot qui a le plus de bonbons à l'orange ou le moins de bonbons au citron, mais qu'il faut aussi tenir compte des deux quantités simultanément, par un rapport de grandeurs.
B) Organiser les quatre données et mettant en évidence les deux couples correspondants

	pot I	pot II
orange :	6	8
citron :	10	14

et choisir le type de la relation à observer entre les couples : relation "additive" (somme ou écart) ou relation "multiplicative" (produit ou rapport) ou autre relation.
C) Se déterminer pour la comparaison des rapports

soit du nombre de bonbons à l'orange au nombre de bonbons au citron, dans chaque pot ;

soit du nombre de bonbons à l'orange au nombre total des bonbons de chaque pot ;

...

et calculer ces rapports en nombres décimaux ou en fractions facilement comparables (de même dénominateur ou de même numérateur) par exemple 6/10 > 8/14 car 84/140 > 80/140 ou 6 : 10 = 0,6 > 8 : 14 = 0, 57...

et finalement interpréter les comparaisons pour en déduire que le choix du premier pot est le plus favorable au tirage d'un bonbon à l'orange.

Commentaires

L'examen de plusieurs centaines de copies de groupes d'élèves n'a fait apparaître que quelques réponses (évoquées en (A) dans l'analyse de la tâche) ne prenant en compte qu'un type de bonbons :
Julien doit prendre le pot n° 1 car il y a moins de bonbons au citron que dans le pot n° II.

Beaucoup d'adultes peuvent se demander pour quelle raison la tâche de choix entre une comparaison d'écarts ou une comparaison de rapports (en B dans l'analyse a priori) est aussi fréquente aux degrés du Collège, car, pour eux, la question est résolue depuis fort longtemps.

Pourtant, les réponses fondées sur une comparaison des écarts au sein des pots (de 6 à 10 et de 8 à 14) ou d'un pot à l'autre (de 6 à 8 et de 10 à 14) sont majoritaires chez les élèves de degré 6 (11-12 ans) : 75% ; elles représentent environ 50% l'année suivante (12-13 ans ; niveau 5^{e}) et subsistent encore, environ 25% chez les élèves plus âgés (13-14 ans ; niveau 4^{e}). En voici deux exemples choisis parmi les copies analysées :
- le premier d'une comparaison au sein d'un pot, *Nous avons choisi le no 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le no 2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances ;*
- le second, fondé sur une comparaison d'un pot à l'autre : *Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron.*

Il faut relever ici que les toutes les stratégies, inadéquates, relevées ci-dessus conduisent au pot I, c'est-à-dire à la "bonne réponse".
La troisième catégorie de procédure, fondée sur le calcul de rapports (C dans l'analyse de la tâche), ne devient majoritaire que dès 13 à 14 ans (avec 70%) alors qu'elle n'atteint lors des deux années précédentes que , respectivement, 6% et 48%.

Voici un exemple fondé sur la comparaison des rapports "orange/citron" qui conduit certes à la réponse attendue mais confond "chance" avec la probabilité.
Dans le premier pot il y a 60% de chance qu'il y ait un bonbon à l'orange car 6 oranges/10 citrons = 60 oranges/100 citrons alors que dans le deuxième il n'y aura que $8 \times 100/14 \approx 57,142857\,\%$
Julien prendra le 1er pot.
La comparaison des rapports "orange/nombre total de bonbons dans le pot" est un peu plus fréquente que la précédente et se rapproche plus d'une des définitions de la probabilité : "nombre de cas favorables/nombre de cas possibles". En voici un exemple :

Le nombre des bonbons de la boîte n° 1 est égal à 16.
En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (10) par 16, on obtient alors : Bonbons à l'orange : 37,5% ; Bonbons au citron : 62,5 %.

Le nombre des bonbons de la boîte n° 2 est égal à 22.
En divisant le nombre des bonbons à l'orange (8) et au citron (14) par 22, on obtient alors : Bonbons à l'orange : 36% ; Bonbons au citron : 64 %.

Si j'étais à la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°1, car il a plus de chances d'avoir un bonbon à l'orange (37,5 % contre 36 % dans le pot n°2).

Ces résultats ont été confirmés par les analyses conduites dans les sections du RMT de Suisse, d'Italie, du Luxembourg et de Belgique. Dans cette situation d'approche intuitive de la probabilité, le passage de la comparaison des écarts à la comparaison des rapports arrive tardivement, vers 12 à 14 ans seulement.

D'un point de vue didactique, l'intérêt du problème est l'apparition de deux procédures, l'une en adéquation avec la situation et l'autre inadéquate mais conduisant cependant à la solution attendue : le choix du pot I.

Il est évident qu'il ne suffit jamais de s'intéresser à la réponse donnée mais qu'il faut toujours savoir d'où elle vient. Ceci ne simplifie pas le travail d'examen des copies d'élèves qu'on ne peut pas simplement classer en "juste" ou "faux". Le professeur doit, dans le cas où tous ses élèves ont résolu le problème des *Pots de bonbons*, conduire une séance de validation collective où les deux procédures des "écarts" et des "rapports" vont certainement apparaître (à moins qu'on ait "enseigné" préalablement la bonne procédure aux élèves pour leur éviter cet obstacle qui leur aurait "appris" à surmonter le conflit écart / rapport.)

C'est le débat collectif qui doit convaincre les élèves que la procédure de comparaison des écarts est inadéquate. Une méthode consiste à varier les nombres de bonbons au sein des pots.

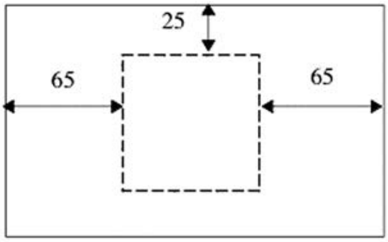
2. LA NAPPE

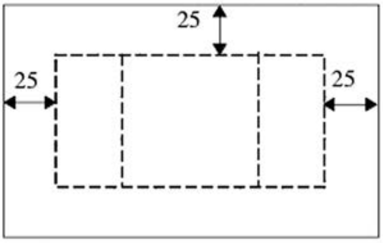
Dans la salle à manger de Luc, il y a une table carrée avec des rallonges. Quand les rallonges sont sorties, la table devient rectangulaire et sa longueur est le double de sa largeur.
Une nappe placée sur la table rectangulaire retombe alors de 25 cm de chaque côté. La même nappe placée sur la table carrée, retombe de 65 cm de chacun des deux côtés où les rallonges sont rentrées.

Quelles sont les dimensions de la nappe ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Domaine de connaissances
- Géométrie : carré et rectangle
- Arithmétique : opérations avec les nombres naturels
- Algèbre : équations de premier degré

Analyse de la tâche (pour des élèves de 11 à 15 ans)
- Interpréter géométriquement la situation en se rendant compte que pour passer d'un carré à un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, les rallonges doivent être deux "demi-carrés" (si elles sont égales, ce qui est habituel) ou former un carré (si elles n'étaient pas égales).





- Constater que la différence entre 65 et 25 correspond à une largeur de rallonge de 40 (ou que la différence globale entre 130 (2 x 65) et 50 (2 x 25) est 80 et correspond à l'allongement total dû aux rallonges (mesures en cm).
- En déduire que le carré a un côté de 80, la table avec les rallonges a une longueur de 160 et que la nappe a des dimensions de 130 (80 + 2 x 25) et 210 (160 + 2 x 25) (mesures en cm).

Il y a encore de nombreux autres cheminements dans la recherche de la solution du problème, dont la voie algébrique : en désignant par x la mesure du côté de la table, en cm, on écrit l'équation $2x + 50 = x + 130$, dont la solution est 80, conduisant aux mesures des côtés de la nappe :

(80 + 50 = 130 et 160 + 50 = 210).

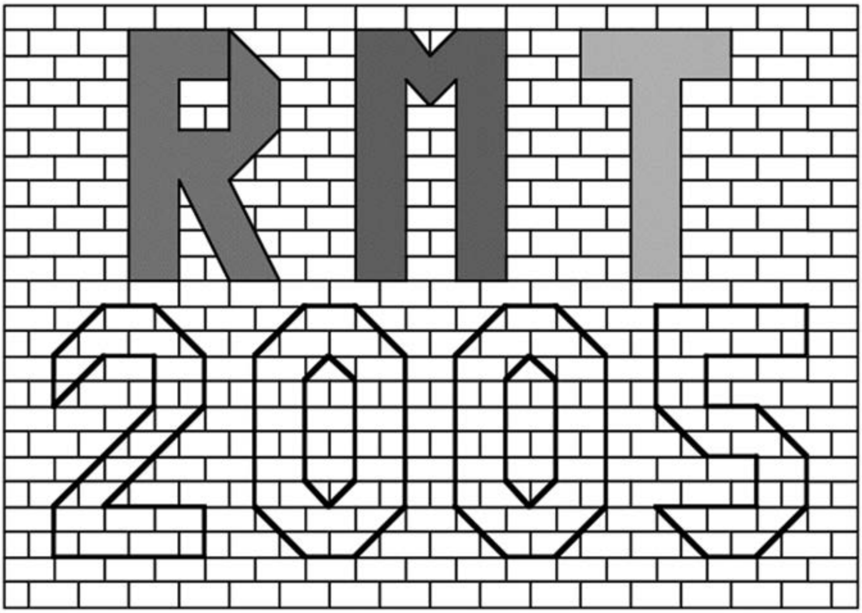
Commentaires
Le problème ne présente pas de difficulté du point de vue des opérations arithmétiques. Les figures du carré et du rectangle sont aussi familières et ne devraient pas constituer des obstacles. L'enjeu se situe au niveau du passage du cadre géométrique à celui des relations entre les mesures des côtés des objets. Les élèves se rendent bien compte que la différence entre les deux données 65 et 25 sera déterminante pour la résolution du problème mais ils ne savent qu'en faire.

On constate ainsi un échec presque total à 11 et 12 ans (près de 90%) à une réussite moyenne (de 50%) vers 13 - 15 ans.

Les élèves les plus jeunes n'arrivent pas à "entrer dans le problème", seuls ou lorsqu'ils travaillent en groupe. On peut faire l'hypothèse que cet échec est dû au manque d'activités où le passage d'un cadre à l'autre est valorisé et validé. Il faut en effet instaurer un va-et-vient entre l'élaboration de la représentation géométrique et sa transcription numérique dans le domaine des mesures comme le montre l'analyse de la tâche. De nombreuses pratiques scolaires sous-estiment la complexité de ce va-et-vient et les propriétés métriques des figures en jeu ; les données y sont déjà "prêtes à l'emploi", il suffit de les intégrer dans des schémas de résolution enseignés.
Dans le problème de *La nappe*, il faut revenir aux dimensions de la table à partir de données "relatives".

3. RMT 2005

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le "2" et le premier "0". Marc peindra l'autre "0" et le "5".



Qui utilisera le plus de peinture ?

Domaine de connaissances
- Mesure : détermination de l'aire de figures par pavage, avec détermination préalable d'une unité commune
- Géométrie : décomposition et recomposition de rectangles en carrés, triangles et trapèzes rectangles

Tâche de l'élève (pour des élèves de 8 à 11 ans)
- Lecture de l'énoncé et observation des quatre chiffres. Se rendre compte que la quantité de peinture dépend de l'étendue des surfaces à recouvrir (l'aire) et non de leur pourtour ou de leur forme.
- Constater éventuellement que les deux "0" étant identiques, leurs aires sont les mêmes et, par équivalence, simplifier la recherche en ne comparant que les chiffres "2" et "5".

- Pour comparer les aires, choisir entre différentes méthodes :
Soit procéder par éliminations simultanées de pièces ou de groupes de pièces de même aire dans chacun des chiffres "2" et "5" pour constater qu'il reste l'équivalent d'un rectangle dans le "5" lorsque toutes les autres pièces ont été marquées successivement

Soit procéder par comptage des différentes pièces de chaque figure :
dans le "2" : 9 rectangles, 4 carrés, 8 triangles, 5 trapèzes, (26 pièces en tout),
dans le "5": 10 rectangles, 6 carrés, 2 triangles, 6 trapèzes, (24 pièces en tout),
se rendre compte qu'il ne faut pas s'intéresser au nombre total de pièces mais qu'il faut prendre en compte les équivalences entre pièces :

1 rectangle ═ 2 carrés ═ 4 triangles, 1 trapèze ═ 3 triangles, ...

procéder aux échanges pour pouvoir compter les deux aires.

- Déterminer la mesure de l'aire de chaque chiffre en choisissant une seule unité de mesure et en regroupant les autres pièces pour former des rectangles, au fur et à mesure du comptage .

- Trouver, par l'une de ces procédures ou une autre qu'il y a 17 rectangles (ou 34 carrés, ou ...) dans le "2", 18 rectangles (ou 36 carrés, ou ...) dans le "5" et 21 rectangles (ou 42 carrés, ou ...) dans le "0") et en déduire que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture.

Commentaires :
Le problème "RMT 2005", comme l'indiquent les lignes précédentes, est conçu spécifiquement pour un travail de classe dans la mise en place du concept de mesure d'aire et, pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'une unité commune. La réponse *C'est Marc qui utilisera le plus de peinture* n'a donc d'intérêt que si elle entre en conflit avec l'autre : *C'est Sophie ...*, et est suivie d'un débat.
On peut ainsi exclure les variantes d'exploitation du problème "sans intervention de l'enseignant" ou "avec une trace écrite seulement" et ne conserver que celles qui organisent une "mise en commun" des solutions trouvées par les élèves ou groupes d'élèves.
Les expérimentations de ce problème ont montré en effet que les deux réponses "Marc" - sur la base d'assemblages des différentes parties de brique - et "Sophie" - par un simple comptage de parties - apparaissent presque toujours au sein d'une même classe, aux degrés 3 ou 4 et même encore au degré 5. Les tentatives de mesurage des périmètres des deux chiffres 2 et 5, bien que longues et peu précises, sont aussi fréquentes à ces degrés, par un usage non raisonné de l'instrument qui "fonctionne" si bien pour les longueurs : la règle graduée.
Au cours de la mise en commun, les élèves qui sont capables d'opérer des échanges simples comme, par exemple, celui d'un rectangle par deux carrés, ou de manipuler des équivalences comme, par exemple : un carré vaut deux

triangles, un rectangle vaut deux carrés, et par conséquent un rectangle vaut 4 triangles, ... devraient arriver à convaincre leurs camarades qui ne tiennent pas compte de la grandeur des pièces avec lesquelles ils ont recouvert leurs deux chiffres "2" et "5".

Dans le même ordre d'idées, certains élèves qui ont compris qu'il n'est pas nécessaire de recouvrir les "0" doivent pouvoir expliquer à leurs camarades le principe d'équivalence mobilisé. Par exemple : *Comme le "0" est le même pour Marc et pour Sophie, il suffit de comparer le "2" et le "5"* .

Dans un processus de construction du concept de la mesure d'aire, il faudrait susciter, si elle n'apparaît pas spontanément, une procédure qui va au-delà d'échanges "occasionnels". La procédure générale consiste à exprimer les aires des deux chiffres au moyen d'une même unité. Par exemple : aire du "2" = 17 et aire du "5" = 18, en rectangles unités, deviennent respectivement 34 et 36 en carrés unités ou 68 et 72 en triangles unités.

Compléments didactiques :
D'un point de vue mathématique, les différentes étapes de l'attribution d'une mesure sont les suivantes :

- Identification de la grandeur parmi toutes celles qui entrent "en concurrence" à propos de l'objet physique : le mur est composé de briques dont on observe les faces visibles, qui ont un périmètre, une couleur, d'autres caractéristiques, mais dont on ne s'intéresse qu'à l'aire.

- Lorsque la grandeur est identifiée, il faut s'assurer qu'elle a certaines propriétés qui la rendent "mesurable" (dans notre cas, il faut savoir reconnaître les briques de même aire, les comparer selon cette grandeur, en "assembler" deux d'entre elles, en vue de l'addition des mesures, pour en obtenir une troisième, plus grande, les "séparer" en parties plus petites, etc).

- Par itération d'un même objet dans l'opération "d'assemblage", apparaît la multiplication par un nombre naturel, puis la "décomposition" d'un objet en parties de même grandeur conduit à la division. Ces deux opérations se combinant, elles permettront d'exprimer une grandeur en fonction d'une autre, au moyen de nombres rationnels, considérés comme des opérateurs.

- Finalement, on arrive à la mesure lorsqu'on choisit de rapporter toutes les grandeurs à une grandeur unité et le rapport s'exprime alors par un nombre positif : la mesure de la grandeur.

Les mesures de longueur peuvent s'accompagner de manipulations simples consistant à reporter la longueur-unité ou à placer une règle graduée ou un ruban le long de la longueur à mesurer. Pour les aires, les premières comparaisons se font par superposition ou recouvrement (ce qui ne sera plus possible pour les volumes).

Le principe d'addition des mesures est acquis par l'élève qui, par son expérience, admet que l'aire d'un puzzle est égale à la somme des aires de ses pièces, sait reporter des "pavés-unités" choisis en fonction des surfaces à mesurer, a déjà vu l'intérêt du carré comme unité de mesure.
Mais lorsqu'on va au-delà des constructions et des visualisations de l'espace sensible, de nouveaux obstacles apparaissent, en particulier lorsque les surfaces à comparer ne sont pas mobiles ni à proximité immédiate, ni recouvrables par un nombre restreint d'unités. Il n'existe en effet pas d'instrument de mesure adapté aux aires, comme la règle l'est pour les longueurs. On est ici en présence d'une grandeur composée, qui dépend de deux mesures de longueur qu'il faudra multiplier.

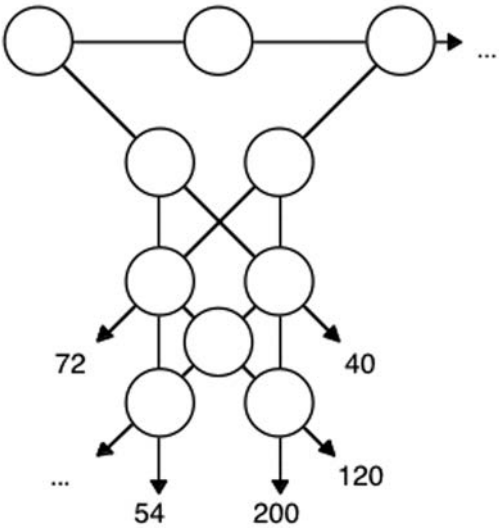
C'est un nouvel obstacle que l'élève aura à affronter, dès l'école secondaire, au passage des nombres naturels aux nombres rationnels, puis réels. Dans le cas d'un rectangle, la règle lui permettra de déterminer la mesure de la longueur et de la largeur, qu'il sait additionner ou doubler pour aboutir au périmètre. Les grandeurs à mesurer et à calculer sont de même nature, ce sont des longueurs. Pour l'aire en revanche, si les deux grandeurs à mesurer sont de même nature (des longueurs), la grandeur résultante est de nature toute différente (une aire). Le rectangle de 3 m sur 6 m a un périmètre de 18 m et une aire de 18 m². L'égalité des deux mesures "18" n'existe qu'au niveau des nombres, mais ne s'étend pas aux grandeurs.

4. PRODUITS EN LIGNE

Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?



Domaine de connaissances :
- Multiplication : décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
- Logique et raisonnement : conjonction et négation de critères.

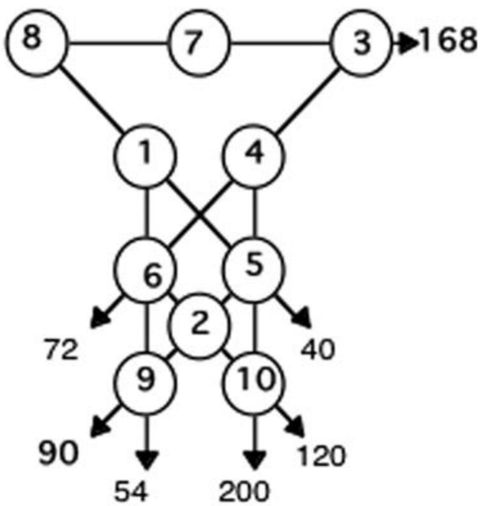
Tâche de l'élève (pour des élèves dès 11 à 12 ans)
- Lecture de l'énoncé : compréhension de "produit" et prise en considération des contraintes pour chaque alignement.

- Travailler par essais pour s'approprier les règles et constater qu'il faut organiser les recherches en tenant compte des différentes contraintes qui s'exercent sur chaque emplacement des nombres.

- Pour chacun des nombres, dresser l'inventaire des emplacements possibles et constater que les choix sont limités pour certains nombres comme le 9, le 5, le 10, le 7 en particulier.

- Placer l'un de ces nombres sur un emplacement possible (par exemple le 9 sur un des alignements "54" ou "72") et, par essais successifs, chercher à placer les autres nombres. Puis lorsqu'une disposition est trouvée, se demander s'il y en a d'autres et entreprendre d'autres essais.

- Pour éviter les tentatives longues et inutiles, analyser de manière plus approfondie la décomposition des nombres en facteurs premiers :
10 = 2 x 5 ; 9 = 3 x 3 ; 8 = 2 x 2 x 2 ; …ainsi que celle des produits à obtenir : 200 = 5 x 5 x 2 x 2 x 2 ; 120 = 5 x 3 x 2 x 2 x 2 ; 72 = 3 x 3 x 2 x 2 x 2 ; 54 = 3 x 3 x 3 x 2 et 40 = 5 x 2 x 2 x 2.
- On constate alors que le 7 est obligatoirement sur la ligne du haut, au milieu. Il n'y a alors plus que deux emplacements pour le 9 : en bas de la colonne du 54 ou en haut à droite (sur le première ligne). Si le 9 était dans cette dernière position, il faudrait que le 6 et le 3 soient dans la colonne du 54 (pour les deux facteurs "3" de ce nombre) mais pas dans l'alignement du 72 (dont les deux facteurs "3" seraient déjà pris par le 9), ni dans l'alignement du 40 (qui n'admet pas de facteur "3"). Il ne serait donc pas possible de placer le 6 et le 3 dans la colonne du 54 et, par conséquent, l'emplacement du 9 est déterminé de manière unique, en bas de la colonne du 54.



- Un raisonnement analogue sur les deux facteurs "5" qui interviennent dans 200 permet de dire que 5 et 10 occupent obligatoirement les deux emplacements inférieurs de la colonne du 200.
L'emplacement du 4 est alors déterminé de manière univoque : à l'intersection des alignements du 200 et du 72 (car 5 x 10 x 4 = 200). Le 10 ne peut alors plus se situer sur la ligne du 40 car pour compléter l'égalité 10 x … x … = 40, le 4 n'est plus disponible et le 2 n'est utilisable qu'une seule fois.
Les nombres 7, 9 4, 5 et 10 étant placés, les choix des emplacements des autres nombres se déterminent aisément, de manière aussi univoque. Il y a donc une solution unique au problème.

Développements mathématiques
L'activité "Produits en ligne" fait intervenir la décomposition multiplicative des nombres naturels. (On aborde là des propriétés essentielles de la multiplication, exprimées par les mathématiciens au travers du "théorème fondamental de l'arithmétique", qui dit que tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers.)

Comme le montre l'analyse de la tâche ci-dessus, l'expression des nombres en produit de facteurs premiers (qu'on ne peut plus décomposer) est un instrument efficace, indispensable pour toute l'arithmétique : multiples, diviseurs, communs multiples et diviseurs communs, fractions, …
Cette décomposition en facteurs permet ici de trouver les emplacements des nombres par déductions logiques plutôt que par essais successifs et éliminations. Elle permet en outre de s'assurer que toutes les solutions ont été trouvées ou de l'unicité de la solution comme dans ce cas.

Indications didactiques :
L'activité est "auto-validante" car il suffit de vérifier si les produits des nombres placés correspondent à ceux qui sont indiqués sur le schéma. L'écriture détaillée de tous ces produits constitue ainsi une exploitation minimale de l'activité.

Mais ces vérifications ne font intervenir que la connaissance de la table de multiplication et de produits élémentaires, sans exploiter la richesse de la situation du point de vue mathématique. Pour sensibiliser les élèves à l'efficacité de la "décomposition en facteurs premiers", il faut envisager une mise en commun et considérer cet atelier *Produits en ligne* comme une étape importante du parcours didactique sur les nombres premiers, dans le chapitre des multiples et diviseurs.

L'enseignant aura ici un rôle essentiel à jouer, après avoir laissé les élèves chercher la solution, au moment d'une validation collective où il faudra répondre à la question *Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?* de manière claire. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas une connaissance qui se construit spontanément : elle fait intervenir l'associativité et la commutativité de la multiplication dont les élèves sont peu conscients car ils rencontrent habituellement des produits de deux facteurs seulement ; elle demande une certaine familiarité avec les nombres premiers et les critères de divisibilité les plus courants ; elle fait appel à une méthode rigoureuse consistant à "extraire", dans l'ordre, les facteurs premiers du nombre à décomposer. C'est la raison pour laquelle l'enseignant devra être actif en fin de mise en commun, par des rappels, des suggestions et des aides. Il aura aussi la tâche de conduire les phases d'institutionnalisation qui suivront. Il devra encore proposer des activités de consolidation et d'assimilation des connaissances nécessaires à la décomposition en facteurs premiers.

CONCOURS NATIONAL TUNISIEN de MATHEMATIQUES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Instrument privilégié de motivation des lycéens pour les mathématiques, le Concours national tunisien de mathématiques organisé par l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (A.T.S.M) est ouvert aux meilleurs élèves de 3e année du secondaire , section mathématiques. Il leur permet de développer leurs aptitudes à discuter, avec les autres, des idées mathématiques, de façon précise et rigoureuse et de mettre en valeur leur capacité à appréhender les situations nouvelles faisant intervenir des qualités de patience, d'intuition, de finesse et de rigueur.

Le Concours national représente pour l'A.T.S.M et donc pour les enseignants de mathématiques en Tunisie, un des instruments privilégiés pour évaluer des aspects de l'enseignement des mathématiques, en particulier le degré d'assimilation de certains concepts importants. Il permet également de recenser quelques types d'erreurs de nature à mener les enseignants à changer d'attitude et de comportement pédagogique dans l'introduction de certaines notions.

HISTORIQUE

Le concours national se déroule chaque année au mois de mai depuis 1976. Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'A.T.S.M en vue des olympiades maghrébines, africaines et internationales. L'A.T.S.M organise aussi les phases tunisiennes (demi-finales et finale nationale) du championnat international des jeux mathématiques et logiques (FFJM).

Compétition :
Les élèves sont sélectionnés par établissement scolaire.

Épreuves :
Individuelles.
Catégorie : 3e année du secondaire.
Exercices : aucun programme officiel, aucune érudition supposée. Les énoncés sont choisis de manière à ce que les candidats puissent utiliser leurs connaissances et les méthodes qu'ils ont acquises en secondaire.
Parrains :
Ministère de l'Éducation de Tunisie.

Revue de l'A.T.S.M : Omar Khayyam.

Contacts :
Association Tunisienne des Sciences Mathématiques
43, Rue de la liberté
2019 Le Bardo
BP 286 Le Bardo
Tél (216) 71 588 198
Fax (216) 71 588198

Enoncé 1 : SUITE PARTICULIERE

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que pour tout entier $n \geq \mathbf{1}$,
$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 1$
Montrer qu'il existe un réel k tel que : pour tout entier $n \geq 1$,
$u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3ème année du secondaire (17-18 ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les suites réelles, en vue de prouver une relation de récurrence.

Analyse de la tâche :

Solution :
Cela revient à montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par $t_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}$

est constante (Remarquer que tout entier naturel n , $u_n \neq 0$).

- Constater que pour tout entier naturel $u_n \neq 0$, $u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$
et que la proposition : *il existe un réel k tel que : pour tout entier $n \geq 1$,* $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 1$ est équivalente à *la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par* $t_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}$ *est constante.*
- Il s'agit de montrer que $t_{n+1} = t_n$ et d'utiliser la relation d'hypothèse figurant dans l'énoncé.

On a le résultat : $t_{n+1} - t_n = \dfrac{\left(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}\right) - \left(u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n\right)}{u_{n+1}u_n} = 0$

Commentaires :
- La seule stratégie demandée est la compréhension du texte et la capacité à traduire la phrase : il existe un réel k tel que pour tout entier
$n \geq 1$, $u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$ (le réel k est constant et ne dépend pas de *n*).

- Les techniques et la procédure utilisées dans cet énoncé sont familières aux élèves et en principe on s'attend à une réussite de la part de la majorité des candidats.

Enoncé 2 : ÉGAL A UN

Montrer que si *a*, *b* et *c* sont trois réels tels que : $abc = 1$ et

$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, alors l'un au moins de ces réels est égal à 1.

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3ème année du secondaire (17-18ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les nombres réels, en vue de prouver un résultat.

Analyse de la tâche :

Solution :

$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}$ et comme abc = 1,

on aura $a+b+c=ab+bc+ca$

$(a-1)(b-1)(c-1)=(abc-1)+(a+b+c-ab-bc-ca)=0+0=0$

Commentaires :
- L'égalité : $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (avec abc = 1) est vraie pour *a* = 1 (ou *b* = 1 ou *c* = 1).

- Il s'agit de traduire convenablement la question : l'un au moins des réels *a*, *b* ou *c* est égal à 1
($a-1=0$ ou $b-1=0$ ou $c-1=0$) soit ($(a-1)(b-1)(c-1)=0$).

- La réussite est attendue de la part de la majorité des élèves et la factorisation ($(a-1)(b-1)(c-1)=0$) est apparente.

Enoncé 3 : INEGALITE

1) Montrer que, pour tout réel x strictement positif , $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2) Soient x_0, x_1, x_2,..., x_n des réels positifs

tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
Montrer que

$$x_n + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n + x_0$$

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3[e] année du secondaire (17-18 ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les nombres réels , en vue de prouver une inégalité.

Analyse de la tâche :

Solution :

1) $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

2) $x_{i+1} - x_i + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \geq 2$ ce qui donne les *n* inégalités :

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} &\geq 2 \\ x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} &\geq 2 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} &\geq 2 \end{aligned}$$

On en déduit, par addition terme à terme , que :

$$x_n - x_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n$$

Soit :

$$x_n + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n + x_0 \quad .$$

RALLYE DE MAHDIA

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le Rallye de Mahdia est destiné aux élèves de l'école de base (9^e, 8^e, 7^e , 6^e) et de lycée (1^{re}, 2^{nd}, 3^e et 4^e de l'enseignement secondaire). Il est organisé chaque année, par le bureau régional de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques de Mahdia.

Plusieurs régionales de l'ATSM y participent :
Monastir, Sousse, Gafsa, Nabeul, Ben Arous et Sfax.
Le Rallye se déroule par équipe et par niveau (enseignement de base et enseignement secondaire), chaque équipe est représentée par un membre de chaque bureau. Les élèves sont regroupés par groupes de 4 de niveaux différents. Ils ont trois heures pour faire le tour de la ville de Mahdia et dans chaque endroit visité, ils seront invités à résoudre un problème, dans lequel l'humour et le jeu ne sont pas oubliés.La solution sera rédigée soigneusement et présentée, avant de passer au jeu suivant, au responsable membre du jury.

L'objectif de ce rallye est de :

* Développer chez les élèves, la curiosité, le goût de la recherche et du travail en équipe et de les aider à construire une image positive de la culture mathématique.

* Faire des mathématiques en résolvant des problèmes, dans un contexte sans doute inhabituel mais plaisant.

* Faire voyager les visiteurs, jeunes et moins jeunes, dans l'univers mathématique, de sorte que cette science, si souvent considérée comme abstraite, austère, voire rébarbative pour certains, devienne un véritable terrain de jeux et une source intarissable de créations artistiques.

Nous espérons, à partir de ce rallye, valoriser, auprès des élèves une orientation vers les enseignements scientifiques et techniques.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Création du rallye en 2003 pour les élèves de l'enseignement secondaire.
Extension en 2010 pour les élèves de l'école de base.

Compétition :
Epreuve au mois de Mars
(Le dimanche le plus proche du 20 Mars)
Animation et entrainement le soir, un jour avant.

Epreuves :
Par groupe de 4 élèves, de différents niveaux et de différentes régionales.
Epreuve de dix problèmes à résoudre en trois heures.
Les élèves se déplacent d'un point à un autre pour résoudre un problème.

Partenaires :
Des bureaux régionaux de l'ATSM, en particulier celui de Monastir.
Le gouvernement de Mahdia.

Contacts :
Le bureau régional de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques de Mahdia - CREFOC de Mahdia - Tunisie.

Site : www.atsm-mahdia.net

E-mail : raoufh.thabet@laposte.net

moh1951limame@yahoo.fr

Problème 1

Compléter le tableau ci- dessous par les nombres de **1** à **6** , de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

7						

Niveau scolaire :
pour les élèves de 12 à 14 ans.

Domaine mathématique :
arithmétique, divisibilité.

Analyse de la tache :

7	1	b			c	a

Remarquons que **7** est un nombre premier donc il faut placer **1** dans la 2e case.
On note a, b et c les nombres dans les cases comme indiqué dans le tableau ci-dessus.
a divise $28 - a$ donc divise 28 d'où $a = 2$ ou 4 .
Supposons que $a = 2$
Alors c divise $26 - c$ donc c divise 26, impossible.
Donc $a = 4$
Or b divise 8 donc $b = 2$. Car d'après ce qui précède b ne peut être ni 1 ni 4.
Immédiatement l'unique solution est :

7	1	2	5	3	6	4

Les élèves en général n'arrivent pas à faire ce raisonnement, mais le problème est accessible, avec un peu de modélisation, expérimentation, et une mise en jeu de mathématiques simples, parfois remplaçables par des essais.

Commentaire et développement :
Une autre version de ce problème est :
Remplir les 7 cases vides dans le tableau ci-dessous par les nombres de 1 à 7, de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases (sauf la 1re) divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

Une discussion portée sur le nombre de la première case et un raisonnement analogue au précédent donne 7 solutions :

4	1	5	2	6	3	7

4	2	6	3	5	1	7

5	1	2	4	6	3	7

5	1	6	2	7	3	4

5	1	6	4	2	3	7

6	2	4	3	5	1	7

7	1	2	5	3	6	4

Le problème général:
soit *n* un entier supérieur ou égal à .
Compléter le tableau ci-dessous de *n* cases par les nombres de 1 à $n-1$, de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

n			....			

Pour *n* = 11
Le problème admet 2 solutions

11	1	2	7	3	8	4	9	5	10	6

11	1	4	8	6	10	5	9	2	7	3

Pour n = 13
Le problème admet 4 solutions

13	1	2	8	3	9	4	10	5	11	6	12	7

13	1	2	8	6	10	4	11	5	3	9	12	7

13	1	2	8	6	10	4	11	5	12	9	3	7

13	1	2	8	12	4	10	5	11	6	9	3	7

Pour *n* assez grand, le problème devient de plus en plus compliqué et a besoin d'un programme et d'un ordinateur.

Chose étrange, 2011 est un nombre premier et $4021 = 2 \times 2011 - 1$ est aussi un nombre premier.

D'où le problème suivant :
Pour $n = 4021$ déterminer le nombre qui doit être dans la 3e case du tableau.
Notons *x* le nombre de la 3e case et *a* le nombre de la dernière case.

4021	1	x	....			a

x divise 4022, donc *x* = 2 ou 2011

a divise $1 + 2 + 3 + \cdots + 4021 - a$

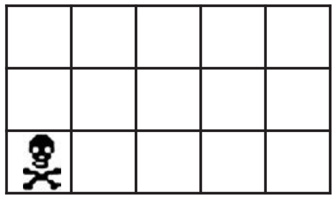
Donc *a* divise $4021 - 2011 - a$

d'où *a* divise 4021 x 2011

Immédiatement $a = 2011$

Par suite *x* = 2

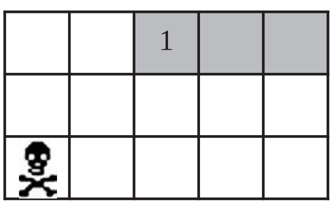
Problème 2
On considère un rectangle divisé en carrés, comme, par exemple, le rectangle 3 x 5 de la figure ci-jointe.

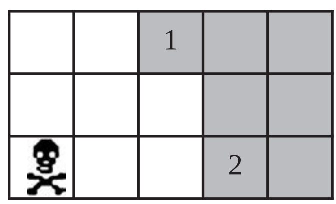


Le ***croque*** est un jeu à deux joueurs qui se joue de la façon suivante .

Le premier joueur choisit l'un des carrés, disons celui marqué " **1** " sur la figure ci-dessous et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite.

Le deuxième joueur choisit alors l'un des carrés qui n'ont pas été enlevés, disons le carré marqué " **2** " sur la deuxième figure ci-dessous, et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite. Le jeu continue de cette manière jusqu'à ce qu'il s'arrête, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un joueur enlève le carré inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie.
Le premier joueur peut-il gagner à coup sûr et comment?

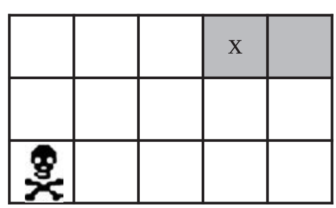




Niveau scolaire :
Pour les élèves de 12 à 17 ans.

Domaine mathématique :
Pavages, Jeux stratégiques.

Analyse de la tache :
Le problème est ouvert, on y entre assez facilement dès lors que l'on veut bien expérimenter. Toute la difficulté vient peut-être d'un balayage organisé de tous les cas possibles.



Le premier joueur gagne à coup sûr en jouant seulement comme suit :

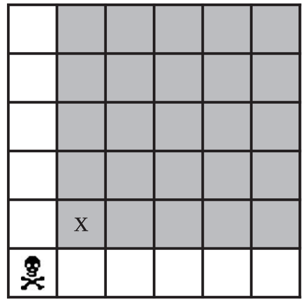
Commentaire et développement :
L'algorithme répondant à la question concernant le cas général d'un rectangle $n \times m$ quelconque (avec la convention usuelle, *n* le nombre de lignes et *n* le nombre de colonnes) reste encore un mystère pour les mathématiciens. Cependant, une démonstration surprenante prouve que le premier joueur peut forcer la victoire, mais elle ne donne pas la moindre indication sur la façon de procéder.

C'est une démonstration logique, pas une démonstration qui donne un algorithme ; elle établit l'existence d'une stratégie gagnante, mais pas sa construction. Les preuves d'existence de ce type sont appelées non constructive, et ce sont habituellement des démonstrations par l'absurde. Ce ne semble pas être le cas de celle-ci (c'est la démonstration non constructive la plus constructive qu'on puisse imaginer !)

La chose la plus évidente à propos du jeu de ***croque*** est qu'il s'agit d'un jeu dans lequel la partie nulle est impossible - après au plus un nombre fini prévisible de coups, l'un ou l'autre joueur sera obligé de prendre le dernier carré et de perdre.
Un autre fait, à peine moins évident, est l'existence d'un coup du premier joueur qui, quelle que soit la façon du second joueur d'y répondre, produira une situation que le premier joueur pourrait aussi avoir produite. Cela signifie la chose suivante : si le premier joueur enlève le carré supérieur droit, alors le carré que le second joueur choisira d'enlever était aussi disponible pour le premier joueur au début de la partie.

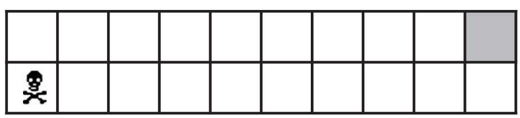
Ces deux remarques fournissent une solution du problème.
On peut prouver que le premier joueur a une stratégie gagnante par un argument du type "ou bien, ou bien". Ou bien le choix du carré supérieur droit pour le premier joueur lui permet de forcer la victoire ou bien il ne le fait pas. Dans le premier cas, il n'y a rien de plus à dire.
Considérons donc le second cas. Cela signifie que si le second joueur est face à un échiquier privé du carré supérieur droit, alors le second joueur n'est pas condamné à perdre, c'est-à-dire qu'en jouant intelligemment, il peut forcer la victoire. Que signifie "forcer la victoire" ? Cela signifie que le second joueur peut faire un coup auquel il n'y a aucune réponse gagnante. Mais, quel que soit ce coup, il était possible pour le premier joueur de le faire au début. Ou bien le choix du carré supérieur droit était un coup gagnant pour le premier joueur, ou bien il ne l'était pas- et s'il ne l'était pas la réponse à ce coup était disponible pour le premier joueur et lui permettait de gagner.
Notons deux situations où il y a un algorithme qui indique la façon par laquelle le premier joueur peut forcer la victoire.

Première situation :
L'échiquier du jeu de ***croque*** est un carré de n x n
Si le premier joueur choisit le carré situé dans la deuxième ligne et la deuxième colonne, alors après enlèvement de ce carré de tous ceux situés au-dessus et à droite, il reste une figure en forme de L, comme la partie non ombrée de la figure ci-dessous.



A partir de là, le mot magique est la symétrie, quoi que le second joueur joue, le premier joueur joue le carré symétrique pour symétriser la figure, ou, plus précisément, pour produire une configuration en L avec des côtés égaux. De proche en proche, il est clair que le second joueur est condamné à perdre.

Deuxième situation :
L'échiquier du jeu de ***croque*** est un rectangle de *2 x m* .
Si le premier joueur enlève le carré en haut à droite, laissant une configuration à deux rangées dont la rangée supérieure est plus courte d'une case que la rangée inférieure, alors, quoi que le second joueur joue, le premier joueur peut toujours reproduire la même configuration.
En effet, si le second joueur choisit un carré de la rangée du bas, il reste encore un rectangle mince ; s'il choisit un carré de la rangée du haut, le premier joueur peut enlever 1 carré de la rangée du bas qui se trouve une place à droite de celui que le joueur a enlevé et il arrive encore à la configuration *rangée inférieure = rangée supérieure plus un*. La configuration limite est celle de la figure ci-jointe. Une fois encore, le joueur est condamné à perdre.



Quelle est la réponse pour les rectangles à 2 colonnes, c'est-à-dire les rectangles $n \times 2$? Une seconde de réflexion suffit pour répondre : rien ne se passe, le même raisonnement donne la même conclusion.

Bibliographie :
Problèmes pour mathématiciens, petits et grands. Paul Hamos

RALLYE MATHEMATIQUE DE SFAX

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Concours du Bureau Régional de l'ATSM à Sfax.
L'organisation de ce concours a pour but la sélection des élèves doués en Mathématiques pour alimenter les clubs régionaux de Sfax.
Le bureau régional de Sfax encadre 5 clubs de Mathématiques.

- club pour les élèves primaires (5e et 6e) ;
- club pour les élèves 7e de l'école de base :
- club pour les élèves 8e de l'école de base ;
- club pour les élèves 9e de l'école de base et 1e année secondaire ;
- club pour les élèves 2e, 3e et 4e secondaire.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Depuis 1999, le concours se déroule chaque année au début du mois de novembre.

Compétition :
Les élèves des 5 clubs participent au rallye organisé chaque année au début du mois de Mai.

Epreuves :
Individuelle ; en novembre.
Les participants sont les élèves de 5e, 6e, 8e, 9e année de l'école de base et les élèves du 1ere, 2e et 3e année secondaire.

Partenaires :
Direction régionale du ministère de l'éducation et le bureau régional de l'ATSM. Le bureau régional organise chaque année scolaire (à fin du mois du juin) une fête pour la distribution des prix aux lauréats aux concours : au rallye et aux championnats internationaux des jeux mathématiques organisés par la FFJM, au concours EUROMATH organisé par le CIJM et aux olympiades nationales et internationales.

Contacts :
Association Tunisienne des Sciences Mathématiques ;
Sadok Ktari & Elaoud Salma.
Bureau régional de Sfax, Lycée Majida Boulila, BP : 1018 Sfax
Tel : 74444979, Fax : 74249499
Email : *ktari2008@yahoo.fr,*
salmaelaoud@yahoo.fr

LE PETIT CHAPERON ROUGE :

Sadok dit à son petit-fils Ahmed :
“Tu ne dois pas oublier d'aller apporter le déjeuner à ta grand-mère chez elle et de revenir pour lui apporter son dîner”.

Au départ de Ahmed, la montre de Sadok indique un horaire formé de quatre chiffres consécutifs écrits dans l’ordre croissant ou dans l’ordre décroissant.
De même au retour de Ahmed, la montre de Sadok indique quatre chiffres consécutifs écrits dans l’ordre croissant ou dans l’ordre décroissant.

Aidez Ahmed à trouver son heure de départ et son heure de retour.

Commentaires

Niveau scolaire :
Pour des élèves de collège (12-13ans)

Domaine mathématique :
Arithmétique : écriture en base dix, ordre dans l’ensemble des entiers naturels.

Analyse de la tâche :
- Constater qu'il s'agit de trouver deux entiers à quatre chiffres distincts et successifs.
- Exploiter les hypothèses ; déjeuner (jour) et dîner (nuit)

Solution :
A l’heure du déjeuner, il fait jour, donc l'heure de départ et 12h34.

A l’heure du dîner il fait nuit donc l'heure de retour est 23h45.

LA BANDE DES 9 /
Placer les chiffres de 1 à 9 chacun dans une case pour que les égalités suivantes soient correctes (trouver deux solutions) :

$$\square = \square - \square + \square = \square \times \square + \square = \square + \square$$

Commentaires

Niveau scolaire :
Pour des élèves du primaire (11-12ans)

Domaine mathématique :
Arithmétique : Opérations dans l'ensemble des entiers naturels.

Réponses : 7 = 9 - 8 + 6 = 1 x 2 + 5 = 4 + 3
ou
9 = 8 - 4 + 5 = 1 x 7 + 2 = 6 + 3

LES DEUX CARRES :
Un nombre entier est tel qu'en lui ajoutant 14 et en lui retranchant 75 on obtient deux carrés de deux nombres consécutifs. Quel est ce nombre ?

Commentaires

Niveau scolaire :
Pour des élèves de collège (11-12ans)

Domaine mathématique :
Algèbre : Résolution des équations dans dans l'ensemble des entiers naturels.

Réponse :
Si x est le nombre cherché, alors x est solution de l'équation :

$$\sqrt{x+14} - \sqrt{x-75} = 1$$

On obtient x **= 2011**

Vérification :
$2011 + 14 = 2025 = 45^2$ $2011 - 75 = 1936 = 44^2$

ASSOCIATION SCIENCE OUVERTE

L'association Science ouverte est née d'un travail réalisé au lycée Louise Michel de Bobigny (Seine-Saint-Denis) et dans une Maison des jeunes et de la Culture voisine, à Drancy.

Comme notre nom l'indique nous visons une ouverture, double en fait : celle des jeunes de quartiers défavorisés de la région parisienne aux sciences vivantes par des activités et une mise au contact de chercheurs et celle des sciences non seulement en direction de ces jeunes mais aussi plus généralement des citoyens.

Nos activités comportent des ateliers réguliers (notamment au sein d'un lieu qui leur est dédié, l'Espace @venir, à Drancy), des stages et universités d'été, des tutorats et du soutien scolaire, un club CNRS Sciences et Citoyens très dynamique, l'organisation de conférences... Les mathématiques y jouent un rôle central (mais non exclusif) pour au moins deux raisons : leur intérêt propre et leur attrait, trop sous-estimés, et leur fonction de porte d'entrée vers les études scientifiques.

Ainsi nous participons depuis 1993 à MATh.en.JEANs et animons plusieurs ateliers " Exploration mathématique " au sein desquels on construit, on explore, on cherche et on approfondit.

On a acquis une petite réputation avec nos polyèdres géants démontables (dont le ballon de foot - icosaèdre tronqué de 5 m de diamètre -) qu'on fait construire collectivement par le public.

Nous développons actuellement le projet "Science ouverte en Seine-Saint-Denis" en partenariat avec l'Université Paris 13 et Animath. Ce projet vise à développer pour les jeunes de ce département qui, trop souvent, se sentent prisonniers du territoire, un pôle visible qui développe leur motivation pour les sciences, leur culture, et les épaule dans leurs études secondaires puis supérieures. Il a déjà commencé grâce à deux Universités d'été centrées sur les mathématiques pour des élèves de fin de seconde. Elles ont réuni en tout 51 élèves pour lesquels nous assurons ensuite un suivi.

Nous apprécions de travailler avec de nombreux partenaires dont le CIJM. Nous échangeons savoirs faire, compétences et ouvertures.

Le jeu des chapeaux de couleur :

Ce jeu se joue avec deux équipes de trois personnes. Chaque personne porte un chapeau muni d'une pointe sur laquelle on peut planter une boule de sarbacane soit rouge, soit blanche. Chaque boule est tirée avec une chance sur deux d'être rouge et une chance sur deux d'être blanche. Chaque joueur peut voir la couleur portée par les chapeaux de ses coéquipiers mais pas celle du sien. Toute communication est interdite une fois un tirage effectué. La concertation est libre en dehors de cela.

Au signal, les trois joueurs de chaque équipe présentent simultanément une carte qui peut être soit *rouge*, soit *blanche*, soit *passe*.
L'équipe marque un point si au moins un des joueurs ne passe pas, et celui ou ceux qui ne passe(nt) pas ne se trompe(nt) pas sur la couleur qu'il porte. Sinon, elle marque zéro. Une partie peut se jouer en cinq manches.
Les équipes sont invitées à trouver la meilleure stratégie, puis à l'expliquer.

Niveau scolaire :
Il suffit de savoir compter. Le jeu peut être exploité à partir de là pour tous les publics selon les développements qu'on apporte.

Domaine mathématique :
Probabilités ; éventuellement, prolongement vers les codes correcteurs d'erreur.

Analyse de la tâche :
La plupart des équipes ne mettent pas au point de stratégie claire (ils sont engagés dans une compétition et ont peu de temps pour réfléchir). La probabilité de marquer un point lors d'une manche s'ils répondent systématiquement par une couleur est de 1/8.
Les meilleurs pensent à faire parler un seul joueur, et passer les autres. Ce n'est pas la meilleure stratégie mais cela met parfois en péril cette dernière. Ils ont une chance sur deux de marquer un point lors d'une manche
Si l'on met en réserve une équipe "championne", elle va en jouant révéler rapidement la meilleure stratégie à ses adversaires, ce qui facilitera les explications. Cette stratégie toute simple consiste pour chaque joueur à passer s'il voit deux chapeaux de couleurs opposées, et à jouer la couleur opposée s'il voit deux chapeaux d'une couleur. Ainsi, les joueurs ne passent jamais ensemble et perdent seulement si les trois chapeaux sont de même couleur, avec une probabilité de 1/4. Ils marquent donc un point avec une probabilité de 3/4. On ne peut espérer faire mieux.

Commentaires et développements :
Comme il n'y a que huit distributions possibles de couleurs, il est possible de les faire expliciter aux participants, même jeunes, puis de comparer sur le tableau ainsi réalisé les "nombres de chances" liés à différentes stratégies. Pour des plus grands, on peut travailler avec la loi binomiale et comprendre pourquoi la meilleure stratégie l'emporte presque à coup sûr sur la pire (ne pas oublier que deux équipes s'opposent) même sur des parties en cinq manches : dans ce cas de figure elle gagnera dans 97,7% des cas, et ne sera battue que dans quatre cas sur mille, donnant un résultat nul dans moins de 1,96% des cas.

Prolongement :
On oublie les équipes, et on distribue des cartes identiques bicolores (une couleur sur chaque face) à un joueur. Il doit choisir une couleur et transmettre le message constitué par cette couleur à un partenaire-destinataire à l'aide des ces cartes et d'un protocole sur lequel ils se seront mis d'accord. Le diable (un joueur), a le droit de changer ou non la couleur d'une carte parmi celles qui seront transmises.

Combien faut-il au minimum transmettre de cartes pour que le message arrive à coup sûr ?

Après quelques tâtonnements, on voit que trois cartes suffisent si on convient de les envoyer toutes dans la couleur du message. Toute manipulation d'une seule carte sera visible, et la couleur initiale sera celle qui est restée majoritaire.

Quel est le lien avec le problème des chapeaux ? Dans un cas comme dans

Quel est le lien avec le problème des chapeaux ? Dans un cas comme dans l'autre, nous n'acceptons de reconnaître une couleur que si nous en voyons deux identiques. Mais il y a plus : il y a deux informations possibles à transmettre : rouge ou blanc. Chacun de ces messages peut être reçu à partir de quatre codages : trois erronés et un correct, chaque codage erroné ne diffère que par une erreur du message correct. Si tous les codages reçus sont équiprobables, il y a donc trois chances sur quatre d'être sur un codage erroné. Le joueur qui voit un ensemble de couleurs ne comportant pas d'erreur (c'est-à-dire deux couleurs identiques) a donc tout avantage à penser que sa propre couleur correspond à un codage erroné.

Evidemment, avec trois chapeaux ce parallèle peut sembler un peu tiré par les cheveux !… il prend tout son sens avec sept chapeaux :
Avec sept cartes bicolores, on peut envoyer 128 messages différents. Si l'on autorise le diable à modifier (ou non) la couleur d'une carte, on peut en choisissant bien le message initial envoyer quand même 16 messages différents et les retrouver à coup sûr : les 128 messages possibles se classent en effet en 16 groupes de 8, constitués d'un message central et de 7 messages ne différant que sur une couleur de ce dernier (c'est ce qu'on appelle les codes de Hamming).
Si alors nous jouons au jeu des sept chapeaux, il y a une chance sur 8 de tomber sur la suite de couleurs correspondant au message central qu'on vient d'évoquer, et donc de perdre. Dans le cas contraire, seul le joueur dont la couleur diffère de celle de ce message peut le reconnaître. Les autres passent ; lui indique cette couleur différente. Son équipe marque donc un point, et ceci dans sept cas sur huit en moyenne …

Tout cela reste quand même plus utile pour le codage que pour les chapeaux !

Nous avons réalisé cette animation (présentée par des lycéens) lors du festival Paris Montagne sur l'erreur, en nous inspirant d'un article de Jean-Paul Delahaye (Pour la Science, mai 2004). Le public semble avoir bien apprécié.

Comment fabriquer 128 codes de Hamming de longueur 7 ?

On veut envoyer seize messages différents, qui sont 0000, 0001, ... 1110, 1111, en ajoutant à ces quatre chiffres trois autres choisi eux aussi parmi 0 et 1, et de telle façon qu'une erreur, à condition qu'elle soit commise sur un seul des sept chiffres transmis au total, soit immédiatement repérée et puisse être corrigée.

Une fois choisie la première partie du message, notée abcd, la seconde partie, notée ABC, sera calculée ainsi :
A est la parité de b+c+d,
B celle de a+c+d,
C celle de a+b+d
(0 si pair, 1 si impair).
Exemple : 1011 donnera le message complet 1011010
Celui qui reçoit le message vérifie les valeurs de A, B et C.

· Si a est corrompu lors du transfert, B et C sont faux
· Si b a été corrompu lors du transfert, A et C sont faux
· Si c a été corrompu lors du transfert, B et C sont faux
· Si d a été corrompu lors du transfert, A, B et C sont faux
· Si A a été corrompu lors du transfert, lui seul est faux
· Si B a été corrompu lors du transfert, lui seul est faux
· Si C a été corrompu lors du transfert, lui seul est faux
· Et si tout s'est bien passé, A, B et C sont exacts.

Prenons un message reçu au hasard : 1110111

Nous voyons que A=1 alors qu'il devrait valoir 0 ; B=1 alors qu'il devrait valoir 0 également ; C=1 alors qu'il devrait également valoir 0. Conclusion : d a été corrompu, et le message initial était 11111111.

Bien sûr, ce procédé alourdit la transmission des messages, mais il diminue considérablement le risque d'erreur (et par conséquent de panne dans bien des cas) puisque la probabilité d'une erreur, en principe faible, est élevée au carré ! Par exemple, ce n'est pas pareil pour une personne qui est d'astreinte d'être réveillée une fois par semaine, ou une fois tous les quarante-neuf jours. Si on pouvait inventer un tel système pour les bébés qui pleurent, cela rendrait la vie plus facile à bien des jeunes parents !...

Constructions avec des tiges

Construire des formes mathématiques monumentales collectivement avec un matériel réutilisable : voilà le défi.

Nous donnons l'exemple du ballon de football (icosaèdre tronqué) géant.

Niveau scolaire :
Tous niveaux scolaires à partir du collège.

Domaine mathématique :
Géométrie

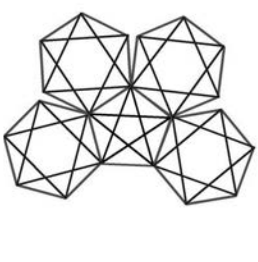
Analyse de la tâche :
On peut faire toutes sortes de constructions avec des tiges constituées de tourillon de 8 à 11mm de diamètre. On en trouve en 1m ou 2m de long dans les grands magasins de bricolage. Pour des quantités importantes, il faut commander. Aux extrêmités de chaque tige, on visse un piton circulaire qui peut s'acheter, de préférence en vrac, dans le même type de magasin. Pour relier les tiges, on utilisera du collier de serrage électrique que l'on coupe avec une pince pour le démontage.
On peut, avec ce type de matériel, construire des objets très variés, des polyèdres aux surfaces réglées, et même des fractales comme le tétraèdre de Sierpinski. Il suffit d'un peu d'imagination.
Avant la construction, il est bien de faire découvrir, grâce à la formule d'Euler, qu'un ballon de foot standard est composé de 12 pentagones noirs et 20 hexagones blancs, à 3 par sommet (ce qui est le minimum et le maximum si on veut un ballon convexe).

Ce qu'on peut faire :
1) Faire compter le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un certain nombre de polyèdres connus simplement connexes (sans trous) : tétraèdre, cube, octaèdre, prisme, tout autre exemple à disposition, et faire constater que s-a+f=2
2) Faire admettre que cette formule se généralise. On peut approcher la solution en regardant ce qui se passe si on enlève ou ajoute un sommet ou une arête en divers endroits.
3) Interroger les élèves sur la forme d'un ballon de football classique, les différents types de faces. Combien y en a-t-il de chaque type ? Les faire compter sur un vrai ballon. A cette occasion on peut montrer qu'il ne faut pas tourner le polyèdre dans tous les sens pendant qu'on compte, mais plutôt s'appuyer sur les symétries. On trouve 12 pentagones noirs et 20 hexagones blancs.

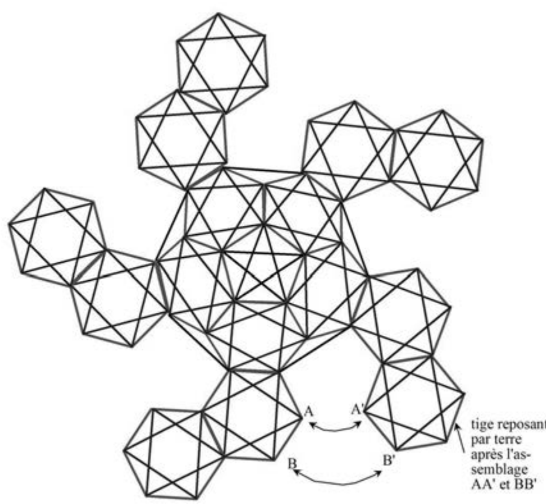
Et maintenant un peu de calcul…
Un ballon de foot a pour faces x pentagones et y hexagones, soit x+y faces. Chaque pentagone a 5 côtés ; soit 5x côtés de pentagones. Chaque hexagone a 6 côtés, soit 6y côtés d'hexagone. Les faces mettent en commun deux côtés pour faire une arête. Il y a donc (5x+6y)/2 arêtes.
De même, il y a 5x+6y sommets de pentagones et d'hexagones. Ils sont regroupés par trois pour former un sommet du polyèdre "ballon de foot". Il y a donc (5x+6y)/3 sommets.
$s - a + f = 2$ s'écrit alors : $(5x+6y)/3 - (5x+6y)/2 + x + y = 2$, ce qui en réduisant au même dénominateur et multipliant tout par 6 donne x=12 (y disparaît).

Passons maintenant à la construction proprement dite :
Matériel : 120 tiges de 1m, 120 de 1,73m, 20 de 1, 62m (respectivement pour racine de 3 et le nombre d'or). Prévoir des tiges de réserve, il y en a qui peuvent casser. Il faut au minimum 10 à 12 jeunes.

On construit d'abord les 20 hexagones avec 120 tiges de 1m et autant de tiges de 1,73 pour former deux triangles équilatéraux qui s'entrecroisent à l'intérieur de chacun d'eux. Pour que l’ensemble tienne bien, il faut que chaque côté de triangle passe alternativement sur et sous un autre, et les intersections peuvent être consolidées avec un collier de serrage, ou un petit morceau de ficelle.


Etape 1


Etape 2



Etape 3

La construction commence par le sommet ; on réalise un pentagone étoilé avec des tiges de 1,62 au centre de cinq hexagones. On monte alors l'ensemble et on assemble les côtés des hexagones adjacents : ils ont déjà un sommet commun, on lie le deuxième sommet et on ajoute deux gros colliers aux tiers des côtés pour consolider. On fera ensuite de même chaque fois qu'on assemblera deux hexagones (*Etape2*).

On ajuste alors ce "toit" à l'aide de 5 tiges de 1,62 (ou éventuellement un morceau de fil de même longueur).

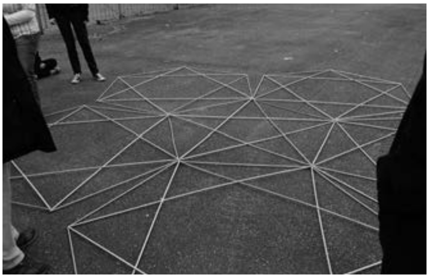
Sur chaque côté d'hexagone reposant sur le sol, on met un premier hexagone vers l'extérieur, puis un second au-delà selon le schéma de l'*Etape 3*.

C'est le moment le plus délicat : on monte tout d'un coup de deux étages (bien saisir l'objet à des endroits solides : les sommets, mais pas l'intérieur des tiges). Assembler les côtés adjacents (cinq arêtes en tout. Pendant cette opération, l'objet peut n'être tenu (solidement) qu'au niveau des arêtes qu'on assemble, et reposé sur le sol par cinq côtés d'hexagones.
On pose encore cinq tiges de 1,62m qui complètent le " cercle " qui repose par terre.
On glisse les cinq derniers hexagones par-dessous à l'intérieur, et à leur place, et on assemble les cinq arêtes. L'objet est déjà assez solide. Une dernière montée et il n'y a plus qu'à assembler un pentagone étoilé sur la face du bas et assembler les cinq dernières arêtes.

C'est une belle expérience !

On peut trouver des compléments sur ces montages et leur intérêt sur :

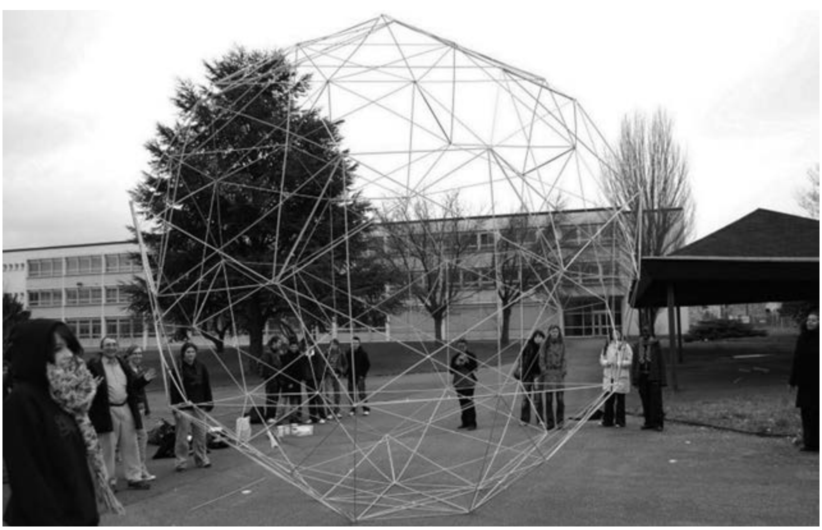
http://www.scienceouverte.fr/IMG/pdf/objetsmathematiques.pdf











COMBILOGIQUE

PRÉSENTATION
COMBILOGIQUE, épreuve originale, est préparée par la rédaction de Tangente Jeux & Stratégie, pour réunir tous les amateurs de jeux logiques. Elle est organisée par le CIJM et se déroule tous les ans sur le Salon Culture et Jeux Mathématiques.

L'épreuve est ouverte à tous, à partir de l'âge de 10 ans. Deux classements sont établis : un classement "benjamins", jeunes nés en 1996 et au-delà (catégorie A) et un classement "open" (catégorie B).

FICHE TECHNIQUE

Epreuve :
Le COMBI LOGIQUE se déroule en une épreuve de 1 heure et quart maximum. Elle comprend une série de problèmes du type de ceux qui se trouvent habituellement dans "Tangente Jeux et Stratégie", et préparée par la rédaction de ce magazine. Le temps de résolution est également comptabilisé. En cas d'ex-aequo, celui qui aura utilisé le moins de temps l'emportera. Si l'égalité persiste et concerne la première place, une finale "au finish" est organisée en public. Les inscriptions se font par correspondance ou sur le salon.

Compétition :
Toutes les grilles proposées sont à solution unique ; il faut donc trouver la solution par une suite de déductions logiques sans jamais rien écrire au hasard (ou alors procéder logiquement par essais successifs).
Nous utilisons certaines de ces grilles en animation grand public. La manipulation de jetons permet une autre approche de résolution (voir ci après deux exemples de grilles : Antimorpion et Futoshoki)

Le CIJM édite une valise de Jeux de Grilles logiques, tous conçus par Bernard Novelli, avec 6 types de jeux et 4 niveaux par types de jeux :
Les *Gratte Ciel* : la vision dans l'espace ; les *Anguilles* : la logique d'un jeu de circuit ; les *Antimorpion* : des problèmes d'alignement ; les *Voisins* : la chaîne numérique ; les *Pas Touche* : des contraintes sur grille ; les *Tricolor* : des pavages du plan.

Elle peut être commandée sur *www.cijm.org*

Aux éditions Pole-Tangente, il existe plusieurs brochures de jeux de grilles de ce type.

ANTIMORPION et FUTOSHIKI

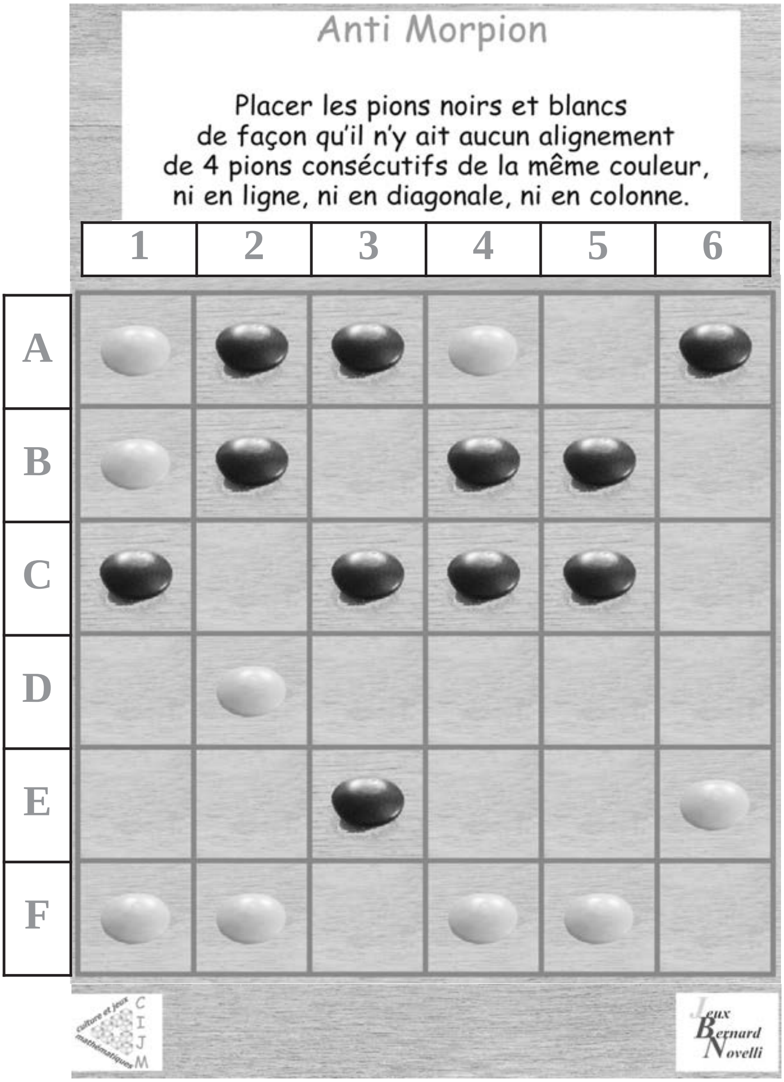
Deux exemples de jeux de grilles à solution unique

Les compétences mises en jeu pour résoudre ces grilles de jeu à solution unique nous semblent particulièrement intéressantes à proposer très tôt et même pour certaines dès la maternelle.

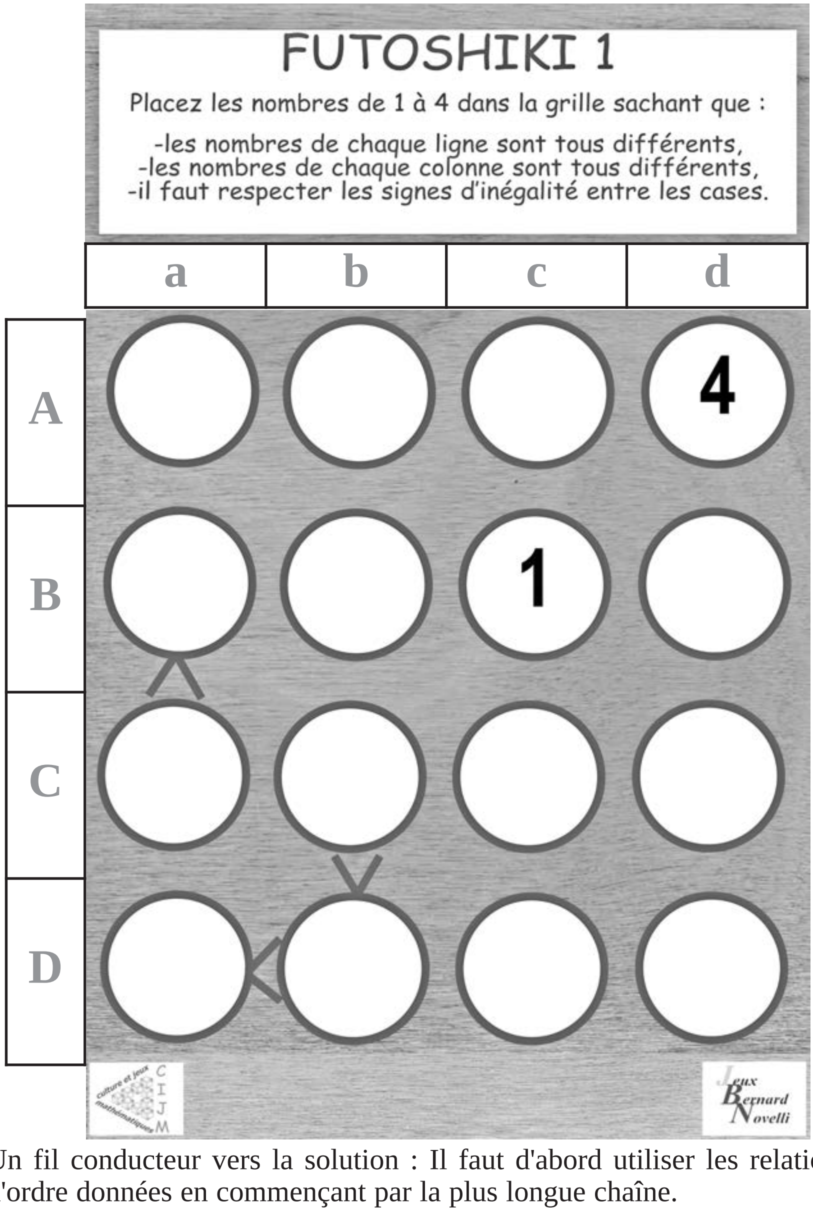
Ces jeux fournissent une très belle initiation au raisonnement déductif : rien ne doit être mis au hasard, tout positionnement peut être justifié. De ce fait ils favorisent la verbalisation de raisonnement. Ce sont aussi des exercices auto correctifs, une fois construite, on a la satisfaction personnelle d'avoir la bonne solution !

Nous allons présenter et analyser deux grilles, l'une d'ANTIMORPION où les notions mises en jeu sont géométriques (alignements horizontaux, verticaux et obliques sur un quadrillag), l' autre FUTOSHIKI (Inégalités en Japonais) où les notions mises en jeu sont numériques (ordre des nombres dans la chaîne numérique)

Dans cet ouvrage vous trouverez d'autres exemples de grilles à solution unique "Les gratte ciels" et "Vu pas Vu" dans le Rallye Mathématique de Paris (page 71)



On trouve d'abord les alignements horizontaux et verticaux puis les obliques, les plus difficiles à voir. Un fil conducteur vers la solution : On place **3 blancs** en **B3**, en **C2** et en **C6** puis **1 noir** en **F3** enfin **1 blanc** en **D3** . Pour éviter un alignement oblique de blancs on place **1 noir** en **D1** et un alignement oblique de noirs on place **1 Blanc** en **D6**. On place **2 noirs** en **B6** et en **F6**. Pour éviter un alignement oblique de noirs on place **1 blanc** en **D4**. On place **1 noir** en **D5**, **2 blancs** en **A5** et **E5** enfin **1 noir** en **E2**. Pour éviter un alignement oblique de blancs on place **1 noir** en **E4** et ... **2 blancs** en **E5** et **E1** !



Un fil conducteur vers la solution : Il faut d'abord utiliser les relations d'ordre données en commençant par la plus longue chaîne.
Le **4** est obligatoirement en **Ca** dans la colonne **a.**
En **Da** commence une chaîne (**Da, Db, Cb**) croissante de trois nombres qui ne peut se terminer par **4** ; c'est donc **1** en **Da**, **2** en **Db** et **3** en **Cb**.
Le reste se termine comme une grille de sudoku : **4** en **Dc**, **3** en **Dd**, **1** en **Cd** et **2** en **Bd**, **2** en **Cc**, puis **3** en **Ba** et **4** en **Bb** enfin **2** en **Aa**, **1** en **Ab** et **3** en **Ac** .

Et quelques grilles pour le plaisir de chercher

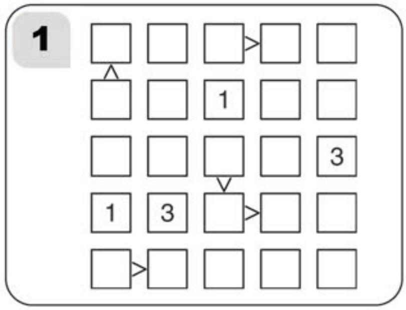
Antimorpion

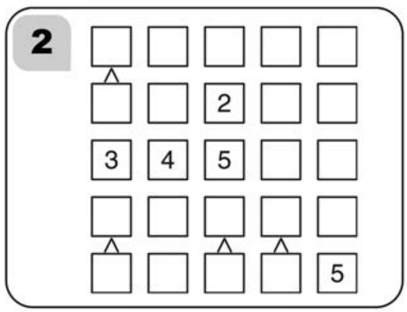
B	B	N	N		
N	B	N		B	
N		B			
					N
		N	N		N
N	N			B	

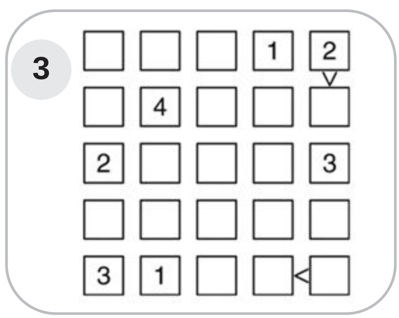
B			N	N	
B		B		B	
	B	B			
N		B		B	
N					N
N	N	N		B	

B		B	B		B
	B			B	B
N	B	N		N	
				B	
N		N		N	
	B		N	B	N

Futoshiki







COUPE EUROMATH

PRESENTATION

La Coupe Euromath des régions est une compétition mathématique unique au monde, dont la finale est une épreuve par équipes se déroulant sur scène, dans une salle de spectacle et devant un public.

Une première phase qualificative a pour but de sélectionner les meilleures équipes. Cette phase comporte des épreuves sur table, épreuves individuelles (de type Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques) et épreuves collectives plus variées (comprenant notamment des énigmes de type Championnat des Jeux Mathématiques et des jeux de grille de type Tangente Jeux & Stratégie, ou de type World Puzzle Championship).

A l'issue de la phase qualificative, les équipes sélectionnées participent à la poule finale sur scène.
A l'issue de cette première finale, une superfinale oppose les deux équipes championnes qui essaient de conquérir la coupe.

Les énigmes de la finale et de la superfinale sont à résoudre sur des grilles géantes et sont retransmises en video sur écran. Les spectateurs, qui suivent la résolution en direct, disposent d'un livret leur donnant des exemples simples des énigmes à résoudre.

Elaborées par le jury de la Fédération Française des Jeux Mathématiques, les épreuves sur scène s'adressent à un ou plusieurs équipiers (voire des équipes complètes) et comprennent
- des jeux de grilles
- des jeux de culture scientifique
- des puzzles
- des épreuves d'estimation
- des épreuves de tri.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Juin 2000 : création de la Coupe Euromath dans le cadre du 1er Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques organisé début juin à Paris à l'occasion de l'Année Mondiale des Mathématiques.

mai 2011 : douzième édition d'Euromath.

En 12 ans, la Coupe Euromath a vu la participation d'équipes d'Allemagne, d'Alsace, de Belgique, d'Ile-de-France, d'Italie, du Limousin, du Luxembourg, de Midi-Pyrénées, de Normandie, de Rhône-Alpes, de Suisse, de Tunisie et d'Ukraine.

Compétition :

Fin mai ou début juin, dans le cadre du Salon Culture et Jeux Mathématiques.

Les équipes sont sélectionnées par des compétitions mathématiques régionales.

Epreuves :

La compétition se fait par équipes ; elle comporte des épreuves individuelles et des épreuves collectives.

Chaque équipe comprend un élève de l'école élémentaire, un collégien de 1e ou 2e année de collège, un collégien de 3e ou 4e année de collège, un lycéen, un étudiant et un adulte, plus un capitaine (non joueur).

Epreuves Qualificatives :

Il s'agit d'épreuves sur papier, de type Championnat FFJM ou de type Tangente Jeux & Statégie.

Epreuves finales : Elles se déroulent sur scène, devant un public. Des images retransmises sur écran permettent au public de suivre en direct la résolution des énigmes.

Partenaire :

Calculatrices Casio, Editions POLE

Contacts :

CIJM, 8 rue Bouilloux-Lafont, 75015 Paris
tel : 01 40 37 08 95
fax : 09 72 19 29 27

www.cijm.org

FFJM 8 rue Bouilloux-Lafont, 75015 Paris
tel : 01 44 26 08 37
fax : 09 72 19 29 27

www.ffjm.org

Proches voisins

Enoncé :
Le but du jeu est de remplir toutes les cases d'une grille carrée de côté 2*p* à l'aide de nombres entiers de 1 à *n* en respectant les conditions suivantes :
- Deux cases voisines par un côté ne doivent jamais contenir deux nombres qui diffèrent de plus de 2 ;
- La grille doit contenir tous les nombres de 1 à *n*, sans trou, chaque nombre pouvant être répété ;
- *n* doit atteindre la plus grande valeur possible.

Exemples :

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	1	3

A

1	2	3	4
3	4	5	6
5	6	7	8
7	8	9	11

B

L'exemple A ci-dessus satisfait aux deux premières conditions, mais pas à la dernière, la maximalité de n n'étant évidemment pas atteinte avec *n* = 3.
L'exemple B ne satisfait à aucun des deux premières conditions. En effet, le nombre 10 n'apparaît pas dans la grille et les deux cases en gris présentent une différence égale à 3.

Domaine de compétence :
Arithmétique, logique, raisonnement, parité

Analyse de la tâche :
- Constater qu'il est nécessaire de maximiser le nombre de "pas élémentaires" (un pas élémentaire correspondant ici à un déplacement d'un roi au jeu d'échecs) entre la case contenant 1 en haut à gauche et la case contenant *n* et en déduire que 1 et *n* doivent être placés aux extrémités d'une grande diagonale du carré.

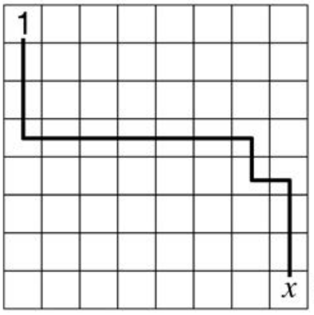
- Majorer n, le nombre de pas pour aller d'une extrémité à l'autre d'une grande diagonale étant égal à $2p - 1$. A chaque pas, on peut théoriquement passer de k à $k + 2$. On a donc $n = 4p - 3$.

-Elaborer des stratégies permettant d'approcher, voire d'atteindre ce maximum théorique (qu'il n'est en fait pas possible d'atteindre comme on le verra dans les commentaires).

Prolongements et commentaires :

- Preuve de l'impossibilité d'atteindre 4*p* - 3

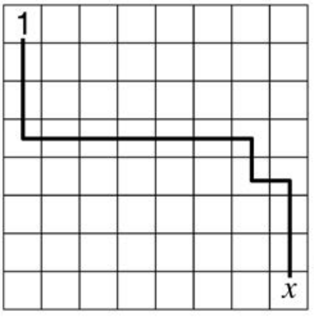
Supposons qu'il soit possible de placer $4p - 3$ dans la case en bas à droite. Chaque case de la grille appartient à un chemin de longueur $2(p - 1)$ entre les deux extrémités de la diagonale (voir la figure).



Si le maximum théorique est atteint, les cases de la grille contiennent toutes des nombres impairs et tous les entiers de 1 à n ne figurent pas dans la grille. On en déduit l'impossibilité d'atteindre $4p - 3$.

- Preuve de l'impossibilité d'atteindre 4*p* - 4

Supposons maintenant qu'il soit possible de placer $4p - 4$ dans la case en bas à droite. Tout chemin de longueur $2p - 2$ comprendrait $2p - 3$ pas avec une augmentation de 2 et un seul pas avec une augmentation de 1. Aucun chemin de longueur $2p - 2$ ne devrait présenter deux changements de parité. Or de 1 à $4p - 4$, on compte $2p - 2$ nombres impairs



et $2p$ - 2 nombres pairs. Les nombres pairs occupent nécessairement plus d'une ligne ou plus d'une colonne et il existe donc nécessairement des chemins de longueur $2p$ - 2 présentant 2 changements de parité. Dans un tel chemin, on a obligatoirement deux nombres dont la différence est au moins 3.

- Stratégie pour atteindre 4*p* - 5

Les deux figures ci-dessous indiquent l'unique stratégie permettant d'atteindre $4p$ - 5 (à symétrie près par rapport à la première diagonale). On remarquera la disposition des nombres impairs.

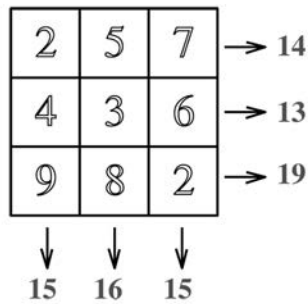
1	2	4	5
3	4	6	7
5	6	8	9
6	8	10	11

1	2	4	6	8	9
3	4	6	8	10	11
5	6	8	10	12	13
7	8	10	12	14	15
9	10	12	14	16	17
10	12	14	16	18	19

Lors de la compétition (demi-finale 2010) le problème a été posé en premier lieu à un élève de cours moyen faisant équipe avec un élève de 6^e ou 5^e sur une grille 4 x 4, puis à un élève de 4^e ou 2^e faisant équipe avec un lycéen sur une grille 6 x 6, et enfin à un étudiant et un adulte sur une grille 8 x 8. La stratégie optimale s'est peu à peu dégagée au cours du jeu, bien que la justification de l'impossibilité de faire mieux n'ait pu être établie pendant le jeu.

Cent

Enoncé :
On dispose d'un carré de trois cases sur trois, chaque case contenant un nombre à un seul chiffre (voir le dessin).

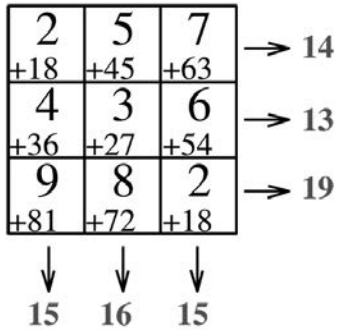


Le but du jeu est d'écrire un chiffre (de 0 à 9) dans chaque case soit à droite, soit à gauche du chiffre déjà écrit, **de façon à réaliser un total égal à 100 sur chacune des trois lignes et sur chacune des trois colonnes.**
Prenons comme exemple la case en haut à gauche qui contient un " 2 ". Si on écrit un chiffre à droite du 2, le 2 deviendra le chiffre des dizaines et le nouveau chiffre écrit celui des unités. Ainsi, si l'on écrit 4 à droite du 2, on obtiendra le nombre 24. Si on écrit un chiffre à gauche du 2, le 2 demeurera le chiffre des unités et le nouveau chiffre écrit sera celui des dizaines. Ainsi, si l'on écrit 8 à gauche du 2, on obtiendra le nombre 82. Si on choisit d'écrire un " 0 " à gauche d'un chiffre déjà écrit, on pourra ne pas écrire ce 0, et le nombre demeurera un nombre à un seul chiffre.

Domaine de compétence :
numération, arithmétique, logique, raisonnement

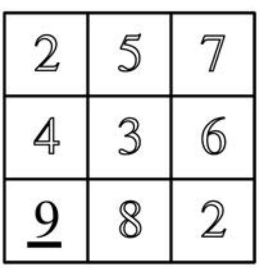
Analyse de la tâche :
- Observer que dans aucune des rangées (lignes ou colonnes), les trois chiffres des unités ne peuvent tous demeurer des chiffres des unités, puisqu'aucun total n'est un multiple de 10 au départ. Dans chaque rangée, au moins un chiffre d'une case doit passer du rang des unités à celui des dizaines.

- Pour chaque case, observer l'effet du passage du chiffre écrit du rang des unités à celui des dizaines (en supposant qu'on écrive un " 0 " à droite du chiffre initial).



Dans le diagramme ci-dessus, " +18 " écrit en bas de la case en haut à gauche signifie par exemple qu'en écrivant " 0 " à droite du 2, on augmente le contenu de la case de 18.
Ce tableau nous permet de constater que dans chaque rangée, si on faisait passer les trois chiffres initiaux du rang des unités à celui des dizaines, le nouveau total obtenu dépasserait 100. Dans chaque rangée, on a donc au moins un des chiffres initiaux qui reste dans le rang des unités.

- Considérer le " 9 " écrit en bas à gauche. Si on faisait passer ce 9 au rang des dizaines, le total de la troisième ligne serait égal à 100 à condition que l'on écrive un " 0 " à droite du 9 (90 + 8 + 2 = 100). Mais il serait alors impossible d'obtenir 100 pour la première colone : on obtiendrait 96, et tout "déplacement" du 2 ou du 4 vers le rang des dizaines nous ferait dépasser 100.



Ce " 9 " restera donc un chiffre des unités (ce que nous notons par un soulignement sur le dessin).

- Observer que si le " 8 " écrit dans la case du milieu de la troisième ligne passait au rang des dizaines, il faudrait écrire un 9 à droite de ce 8 et il faudrait que le 2 de la case en bas à droite reste un chiffre des unités. Mais on ne pourrait alors en aucun cas atteindre 100 sur la deuxième colonne.

Ce 8 restera donc un chiffre des unités et on ajoutera un " 3 " à droite du 2 dans la case en bas à droite.

2	5	7	
4	3	6	
$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 40

- Observer que si le " 7 " écrit en haut à droite passe au rang des dizaines, le " 6 " écrit en dessous doit rester à celui des unités et on doit écrire alors un " 1 " à droite du 7. Sur la première ligne, il faut faire passer le " 2 " au rang des dizaines et écrire un 4 à sa droite, le " 5 " restant au rang des unités. Dans la première colonne, on doit faire passer le " 4 " au rang des dizaines et écrire un 7 à sa droite pour obtenir un total multiple de 10. On fait ensuite passer le " 3 " de la case centrale au rang des dizaines en écrivant un 7 à sa droite.

24	$\underline{5}$	71	→ 100
47	37	$\underline{6}$	→ 90
$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 40
↓ 80	↓ 50	↓ 100	

On obtient alors le tableau ci-dessus. Il suffirait d'écrire un chiffre des dizaines à la gauche de certains chiffres soulignés de façon ce que tous les totaux soient égaux à 100 pour obtenir une solution du problème. Cela s'avère impossible car on ne peut modifier aucune case de la première rangée ni de la troisième colonne, dont les totaux sont déjà égaux à 100. Seules les deux premières cases de la troisième ligne seraient modifiables, ce qui ne permet pas de modifier le total de la deuxième ligne, égal à 90.

On en déduit que le "7" en haut à droite doit rester au rang des unités, le "6" écrit sous le 7 devant alors passer au rang des dizaines, un "0" venant obligatoirement se placer à droite de ce 6.

- Observer que le " 4 " de la deuxième ligne ne peut passer au rang des dizaines (le total de cette ligne dépasserait alors 100). Il reste donc au rang des unités.

2	5	$\underline{7}$	
4	3	60	
$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 40
		↓ 90	

2	5	$\underline{7}$	
$\underline{4}$	3	60	
$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 40
		↓ 90	

On en déduit que le " 2 " en haut à gauche doit passer au rang des dizaines, et qu'on doit écrire un 7 à sa droite afin que le total de la première ligne soit un multiple de 10.

On complète ensuite facilement la case centrale, puis la deuxième case de la première ligne. Tous les totaux sont alors des multiples de 10.

- En ajoutant un chiffre à gauche du 7 en haut à droite et à gauche du 9 en bas à gauche, on aboutit à l'unique solution représentée ci-dessous.

27	56	$\underline{7}$	→ 90
$\underline{4}$	36	60	→ 100
$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 40
↓ 40	↓ 100	↓ 90	

27	56	1$\underline{7}$	→ 100
$\underline{4}$	36	60	→ 100
6$\underline{9}$	$\underline{8}$	23	→ 100
↓ 100	↓ 100	↓ 100	

Commentaires :

Cette épreuve (demi-finale 2007) s'adressait à des compétiteurs à partir du collège (2 joueurs travaillant ensemble dans chaque équipe). Une résolution raisonnée est difficilement accessible aux plus jeunes. Ceux-ci procèdent le plus souvent par essais-erreurs, les "propriétés" se dégageant peu à peu grâce aux échanges entre joueurs.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE PARIS

PRÉSENTATION

La première édition de ce rallye s'est déroulée en 2000, Année Mondiale des Mathématiques. Depuis cette date, le rallye mathématique de Paris représente l'un des nombreux événements qui sont offerts aux visiteurs du Salon Culture et Jeux Mathématiques organisé annuellement par le CIJM.

FICHE TECHNIQUE

Sur le schéma classique du jeu de piste, des équipes de quatre personnes doivent suivre un parcours semé d'énigmes à caractère scientifique. A cette occasion les participants peuvent découvrir des lieux parisiens marqués par les mathématiques d'hier et d'aujourd'hui : rue portant le nom d'un mathématicien, centre de vulgarisation scientifique, lycée, université ou institut, mais aussi des lieux où l'empreinte mathématique est moins attendue comme le Musée du Moyen Age, une pâtisserie ou la vitrine d'un antiquaire.
La volonté pédagogique est évidemment moins grande que pour des épreuves en milieu scolaire. Il s'agit de surprendre et, tout en s'amusant, de faire pratiquer des mathématiques.

Règlement : disponible sur le site : *http://www.cijm.org*

Partenaire :
Editions POLE

Contacts :
CIJM, 8 rue Bouilloux-Lafont,75015 Paris
tel : 0140370895
fax :09 72 19 29 27
www.cijm.org

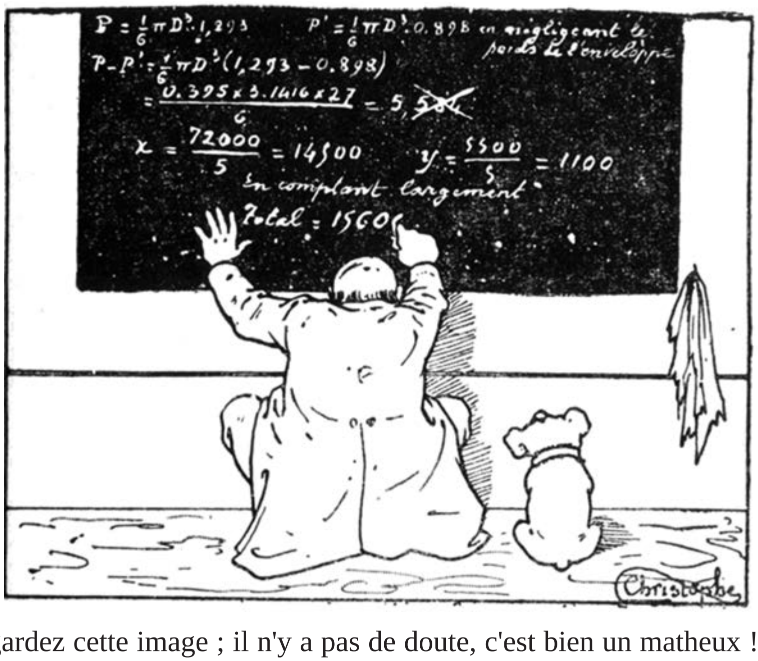
Responsable de l'organisation :
Martine Janvier *mjanvier@cijm.org*

Un exemple en mai 2007

Le parcours 2007 conduisait les concurrents devant l'Académie des Sciences. Voici une des énigmes posées à cet endroit, après une rapide présentation historique du lieu.

Aujourd'hui, l'Académie des Sciences de l'Institut de France rassemble des savants français auxquels sont associés des savants étrangers choisis parmi les plus éminents.

Commençons par le mathématicien, membre de l'Académie qui est peut-être le moins connu, Jacques Hadamard (1865-1963). Il aurait servi de modèle principal au dessinateur Christophe, auteur de *"L'idée fixe du savant Cosinus"*. Un académicien vedette d'une bande dessinée !



Regardez cette image ; il n'y a pas de doute, c'est bien un matheux !
Dans cette vignette, le savant Cosinus utilise les faits suivants, rigoureusement exacts :

- Un mètre cube d'air ambiant pèse 1,293 kg.
- Un mètre cube de néon pèse 0,898 kg.
- Lui-même pèse 72 kg et son chien, Sphéroïde, pèse 5,5 kg.
- Le principe d'Archimède : Tout corps plongé dans un fluide, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé.

1- Il y a une erreur de calcul au tableau. Quelle est-elle ?
2- Que veut calculer le savant Cosinus ?
3- Décrivez le plus précisément possible les données du problème qu'il se pose.
4- Quelles sont ses conclusions ?

Solutions
1) Il écrit 72000/5 = 14500 (au lieu de 14400).
2) Il cherche à calculer le nombre de ballons de diamètre D = 3 dm gonflés au néon nécessaires pour le transporter avec son chien.
3) Le diamètre d'un ballon est D = 3 dm (= 30 cm).
4) Sa conclusion : Il faut 14 500 ballons pour le transporter et 1 100 ballons pour transporter son chien donc 15 600 ballons au total.

Détails des calculs et du raisonnement :

Le volume d'un ballon de diamètre D est $\frac{1}{6}\pi D^3$ (en dm^3).

Donc la masse de néon contenu dans ce ballon est $\frac{1}{6}\pi D^3 \times 0,898$ (en grammes).

Le principe d'Archimède dit "Tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé."

Ici, le gaz déplacé est l'air ambiant et donc, la force exercée par ce principe ("la poussée d'Archimède") sur le ballon est équivalente au poids de l'air que contiendrait ce ballon.

La masse d'air déplacé est $\frac{1}{6}\pi D^3 \times 1,293$ (en grammes)

Le poids du ballon est dirigé vers le bas et la poussée d'Archimède vers le haut. Finalement, un ballon compense l'attraction terrestre d'une masse de

$$\frac{1}{6}\pi D^3 \times 1,293 - \frac{1}{6}\pi D^3 \times 0,898 =$$
$$\frac{1}{6}\pi D^3 \times (1,293 - 0,898) \approx (0,395 \times 3,1416 \times 27)/6$$

Soit en grammes : **5,584.**

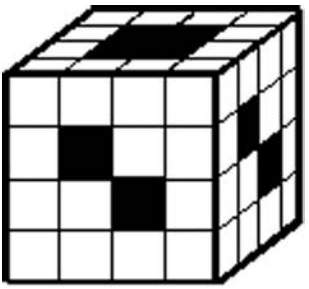
Donc, si nous accrochons une masse de 5,584 grammes à un ballon rempli de néon, le système doit (aux erreurs d'arrondi près) se stabiliser (ni s'élever, ni descendre). Mais Cosinus désire s'élever et aussi une relative sécurité (sens de l'expression " En comptant largement "). Il décide donc de ne transporter que 5 grammes par ballon.

Pour le transporter, il faut alors $\frac{72000}{5} = 14400$ ballons et pour transporter son chien, il faut $\frac{5500}{5} = 1100$ ballons.

De courtes énigmes
Au départ de la place Saint Sulpice les parcours commencent souvent par une énigme permettant de trouver le lieu où la seconde enveloppe sera remise aux participants. Cette énigme, que l'on trouve aussi en cours de déplacement, peut prendre des formes très diverses dont voici quelques exemples.

Des énigmes numériques

- Rendez-vous au n° D de la rue du Dragon, où D est le chiffre impair qui apparaît dans l'écriture du résultat de 13! (factorielle 13).
- Rendez-vous au n° B de la rue Jacob, où B est le plus petit nombre pair dont la somme des chiffres est égale à 12.
- Rue de Savoie, au n° H, où H est le nombre premier non pair qui intervient dans la décomposition de 6656 en produit de puissances de nombres premiers.
- Rue des Saints Pères : Pourquoi peut-on dire que " rue des Saints Pères les pairs sont en impair et les impairs sont en pair " ? K est le 9^{e} nombre triangulaire. Quelle est la valeur de K ? Allez au n° K de cette rue.
- Un cube est formé d'un empilement de petits cubes tous de même taille mais de deux couleurs, blancs et noirs. Quand on voit un carré noir sur une face, on sait que toute la ligne est faite de cubes noirs. Il y a P cubes blancs. Allez au n° P de cette rue.



Solutions
D=7 ; B=39 ; H=13 ; Les numéros pairs de cette rue sont dans le 7^{e} arrondissement (chiffre impair) alors que les numéros impairs sont dans le 6^{e} (chiffre pair) ; K=45 ; P=24.

Cryptogramme

Votre première destination, là où une équipe du CIJM vous donnera l'enveloppe n°2, est
2351541123112441512311415131531525513414 51
L'adresse de ce lieu est
11255143155152341143132322434151231143533453532451255 12314
(3215221411513351)

Pour décrypter ces mots, utilisez le carré de Polybe suivant :

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	J	I	H	G	F
3	K	L	M	N	O
4	T	S	R	Q	P
5	U	V	X	Y	Z

Polybe, qui vécut de 205 à 125 avant J-C, est considéré comme l'inventeur d'un système de chiffrage connu sous le nom de carré de Polybe ou encore carré de 25.

Une anagramme (en mai 2009 avec l'aide de Jacques Perry-Salkow)

- Les concurrents devaient se rendre en un lieu dont le nom est caché sous cette anagramme :

PORTES ARABES D'IVOIRE (2).

Ils recevaient alors leur deuxième enveloppe.

- Notons que cette année-là, il fallait suivre les médaillons de CARGAISON AFRO(3), se rendre rue PREFERA MEDITER (4) et NU ISOTROPE (5) ; en espérant faire AIMER L'ART DE LA METAPHYSIQUE (6) !

Solutions
(2) Observatoire de Paris ;
(3) François Arago ;
(4) Pierre de Fermat ;
(5) Rue poinsot ;
(6) Rallye mathématique de Paris

Un exemple en mai 2010

Place de la Concorde : "On nous cache quelque chose !"

Sur chaque photo ci-dessus, l'obélisque nous cache quelque chose. Vous devez retrouver les trois éléments cachés. Pour vous aider, nous vous recommandons de vous approcher de Strasbourg ! Pourquoi ?

Solutions : 1, la Tour Eiffel. 2, Le Grand Palais. 3 l’Arc de Triophe de l’Etoile. Des fontaines sont placées en bordure de la place de la Concorde, dédiès à des villes de France. Les photos sont prises près d ela fontaine dédiée à Strasbourg

Ces disparitions sont le résultat de la perspective, dans le cas du jeu GRATTE-CIEL, tout est question de hauteur et la perspective ne peut pas nous jouer de mauvais tours.
Règle du jeu (Bernard Novelli) : Un bloc de la ville de New York a été représenté dans une grille. Chaque case contient un immeuble de 10, 20, 30, 40, 50 étages. Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes. Les informations données sur les bords indiquent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante par un observateur situé à cet endroit. Par exemple, si une ligne contient la disposition 20-40-10-30, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche (le 20 et le 40) et deux immeubles sont visibles à partir de la droite (le 30 et le 40).

Vous devez compléter les deux grilles suivantes :

	2	3	2	3	1	
2						1
2						2
1						4
3						2
2						3
	2	1	3	2	4	

(A40)

			3			
4						
2						
						3
1						
		1			4	

(A41)

Encore une question de hauteur mais avec une règle un peu différente pour le jeu IMMEUBLES et JARDINS.
Règle du jeu (Bernard Novelli) : La grille suivante contient des immeubles de 1, 2, 3 étages ainsi que des jardins (0). Chaque ligne et chaque colonne comporte un immeuble de chaque taille ainsi que deux jardins. Les indices extérieurs à la grille donnent la hauteur du premier immeuble que l'on peut voir à partir de la position de l'indice. A vous de reconstituer les deux grilles.

	2	3	1	3	2	
1						2
2						3
1						2
2						1
3						2
	3	1	2	2	1	

(A42)

	3	2	1	2	3	
3						2
1						3
3						2
1						3
2						1
	2	1	3	3	1	

(A43)

Sur la Seine, en passant le pont des Arts.
Une tradition (qui perdure malgré les interdictions) permet de dire que le Pont des Arts est particulièrement attachant. Quelle est cette "tradition" ?
(A17)

Autre qualificatif pour ce pont : il est particulièrement reposant. Combien de bancs placés sur le pont permettent, en effet, de s'y reposer ?
(A18)

Petit problème :
Un bateau B1 se laisse dériver sur la Seine. En 1 heure, il parcourt 2 km. Un bateau B2 descend aussi la Seine mais à fond les machines! Il parcourt alors 5 km en une heure.
A 1950 m du Pont des Arts, il fait demi-tour et, toujours à fond les machines, il remonte la Seine. A ce moment précis, B1 passe sous le Pont des Arts et continue à se laisser porter par le courant.

A quelle distance du Pont des Arts les deux bateaux se croisent-ils ?
(A19)

Indiquez un lieu parisien devant lequel se fait ce croisement ?
(A20)

Solutions :

- A17 : les cadenas accrochés
- A18 : 12
- A19 : 1 300m
- A20 : L'Orangerie.

	2	3	2	3	1	
2	4	3	1	2	5	1
2	3	2	5	1	4	2
1	5	1	4	3	2	4
3	1	4	2	5	3	2
2	2	5	3	4	1	3
	2	1	3	2	4	

(A40)

			3			
4	2	3	1	4	5	
2	3	1	2	5	4	
	1	4	5	3	2	3
1	5	2	4	1	3	
	4	5	3	2	1	
		1			4	

(A41)

	2	3	1	3	2	
1	0	0	1	3	2	2
2	2	0	0	1	3	3
1	1	3	0	2	0	2
2	0	2	3	0	1	1
3	3	1	2	0	0	2
	3	1	2	2	1	

(A42)

	3	2	1	2	3	
3	3	0	1	2	0	2
1	1	2	0	0	3	3
3	0	3	0	1	2	2
1	0	1	2	3	0	3
2	2	0	3	0	1	1
	2	1	3	3	1	

(A43)

CHASSE AU TRESOR

PRESENTATION :

La Chasse au Trésor des Jeux Mathématiques est une compétition se déroulant tous les ans pendant la semaine de la fête de la science. Elle se déroule en deux étapes et porte chaque année sur un thème particulier tel que l'Europe, l'astronomie, la biodiversité ou encore la chimie. La première étape a lieu sur internet et est composée d'une trentaine d'énigmes de niveau progressif dont les premières sont abordables à partir de 11 ans. La seconde étape quant à elle prend place à Paris le dimanche qui achève la semaine de la première étape, les candidats suivent alors un parcours qu'ils doivent déterminer au fil des énigmes qu'ils rencontrent. Les deux étapes donnent lieu à des classements séparés.

FICHE TECHNIQUE :

Année de création :
2008

Organisateur :
Les amis des jeux mathématiques.

Fréquence :
Tous les ans, une semaine en octobre.

Public :
À partir de 11 ans.

Prix :
Gratuit.

Participation :
En 2010, 1200 candidats sur internet et 60 sur Paris.

2010 en Mésopotamie

Marco, qui vient d'apprendre la numération babylonienne, a écrit le nombre 2010 et l'a envoyé à son frère Polo. Ce dernier, ne comprenant pas, crut à un appel à l'aide et renvoya un message à son frère qui fut très surpris de recevoir comme réponse les nombres 5500, 5650, 13 et 8700876670.

Qu'a voulu dire Polo ?

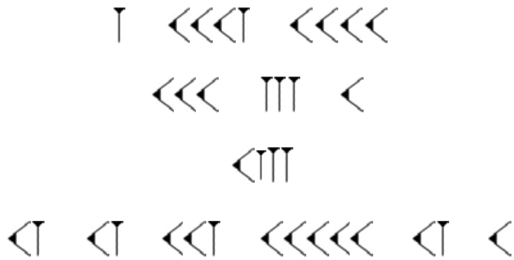
Solution :
Cette énigme nécessite à la fois de la réflexion et des recherches. Bien sûr, pour pouvoir espérer la résoudre, il est nécessaire dans un premier temps d'en savoir un peu plus sur la numérotation babylonienne.

Les babylonien utilisaient deux symboles pour noter leurs nombre. Le premier, , avait une valeur d'une unité et le second, , valait dix. De 1 à 59, les babyloniens écrivaient les nombres en juxtaposant simplement ces deux symboles, par exemple, 23 s'écrivait 
Puis à partir de 60, ils utilisaient une numération positionnelle en base 60. Ainsi, le nombre $4352=1 \times 60^2 + 12 \times 60 + 32$ s'écrivait :

Revenons à l'énigme pour savoir ce qu'à écrit Marco, décomposons 2010 en base 60 : $2010 = 33 \times 60 + 30$. En babylonien ce nombre s'écrit donc :

Pourquoi Polo a-t-il alors cru à un appel au secours ? Simplement car il ne connaît pas le babylonien, mais en revanche il connait le morse, langage dans lequel S.0.S. s'écrit • • • − − − • • • , c'est-à-dire de la même façon que 2010 en babylonien pour peu que l'on remplace les points par des  et les traits par des . Pour comprendre sa réponse, il faut donc faire la conversion de sa réponse dans l'autre sens.

Marco a cru recevoir les nombres 5500, 5650, 13 et 8700876670 en babylonien. Il a donc reçu les écritures suivantes :



En transposant cela en traits et points, on obtient :

– •• • –• •••
–••• ––– –•
•–––
•– •–• •–• •• •••– •

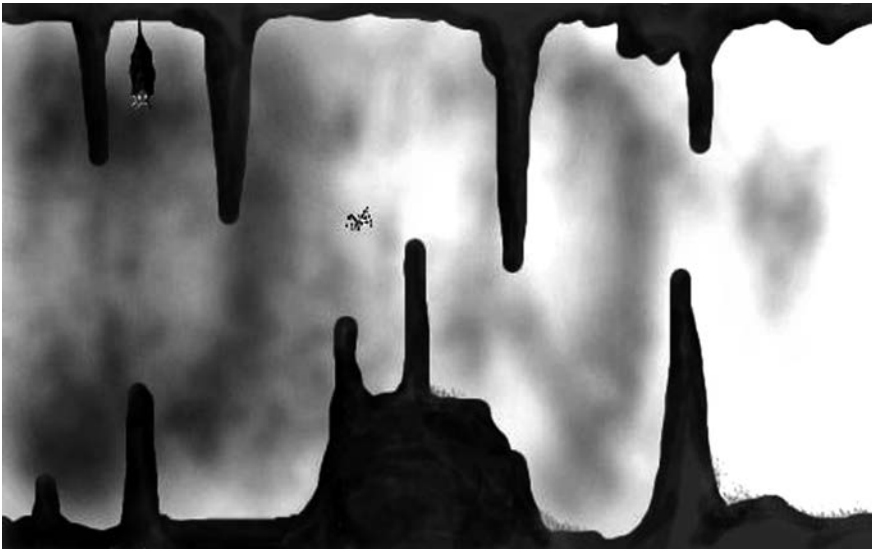
Il reste alors à traduire ce message à l'aide d'un alphabet morse pour trouver le message de Polo : "Tiens bon, j'arrive".

Indications pédagogiques :
Voilà une énigme qu'il peut être intéressant de poser à des élèves. Elle leur demande tour à tour d'effectuer des recherches sur internet, de comprendre le fonctionnement d'un système de numération différent de celui auquel ils sont habitués, de réfléchir au sens de la question posée, de partager des idées en groupe (car si tout le monde dans une classe ne connaît pas le morse, il y en aura à coup sûr un ou deux qui reconnaîtront le codage d'un S.O.S.), de transcrire un code en un autre, puis de le décoder par tâtonnement car le déchiffrage du morse n'est pas systématique et demande des essais.

L'énigme pourra par exemple être donnée aux élèves pour commencer à y réfléchir à la maison avec l'aide d'internet, avant de mettre en commun les informations obtenues par chacun au cours suivant.

Cela peut également être l'occasion pour le professeur d'effectuer quelques digressions sur les mathématiques babyloniennes et l'histoire des maths, domaine hélas trop peu considéré par les programmes scolaires.

La chauve-souris



Aidez la chauve-souris à trouver son chemin à travers sa grotte.

Dans cette énigme posée sur internet, les candidats devaient proposer une fonction dont la chauve-souris suivait le graphe. Il fallait que la chauve-souris se rendent du côté gauche au côté droit de la grotte sans se cogner dans les stalactites et les stalagmites. Par ailleurs, la fonction ne devait être exprimée qu'en fonction de la variable x, de nombres et des quatre opérations.

Solution et indications pédagogiques :
En classe, ce type de problème peut être utilisé pour faire travailler les élèves avec les fonctions de façon plus informelle. Sur le même modèle, on peut imaginer différents problèmes de niveau progressif pour lesquels une droite suffira, puis une parabole et ainsi de suite en augmentant la difficulté en ajoutant des stalagmites et des stalactites. Le professeur pourra tracer les différents profils de grotte au tableau avec l'indication de la position des obstacles et leur taille. Les élèves pourront alors chercher, avec ou sans leur calculatrice, à construire une fonction adéquate.

La première chose que les élèves devront remarquer, c'est que la présence d'une stalagmite ou d'une stalactite équivalent respectivement à une condition du type $f(a) > b$ ou $f(a) < b$.

Niveau 1, une fonction affine. En plaçant les stalagmites et stalactites de telle façon qu'une droite puisse résoudre le problème, les élèves peuvent réfléchir à la signification du coefficient directeur (est-il positif ou négatif si la chauve-souris monte ou descend ? sa valeur absolue est-elle grande ou petite selon la raideur de la pente ?) et de l'ordonnée à l'origine qui correspond à la hauteur à laquelle la chauve-souris commence son vol.

Niveau 2, une parabole. Si on place maintenant, les stalagmites et stalactites de façon à ce qu'une droite ne puisse pas passer mais qu'une parabole suffise. Les élèves vont commencer par tâtonner sur le dessin, puis, une fois qu'ils auront trouvé graphiquement quelle doit être la trajectoire approximative de la chauve-souris, ils vont devoir mettre ça en équation. En partant de la parabole standard d'équation $y = x^2$, comment la déplacer horizontalement et verticalement ? Et comment l'aplatir ou l'étirer pour la faire passer entre les obstacles ? Les élèves pourront alors découvrir que la forme la plus adaptée d'une équation du second degré pour répondre à ces questions est la forme canonique $y = a\,(x - b)^2 + \mathrm{c}$. En effet, partant de $y = x^2$, on déplace la courbe d'une distance b en remplaçant x par $x - b$, on trouve donc la courbe $y = (x - b)^2$. Puis en multipliant par une constante a, on aplatit ou étire la courbe pour lui donner la forme souhaitée, et si a est négatif, on réoriente la concavité de la courbe vers le bas. Enfin, en ajoutant la constante c, on place la courbe à la hauteur souhaitée.

Niveau 3, le cas général. La question est maintenant "***peut-on trouver une méthode générale qui permette de faire passer la chauve souris quel que soit la position des stalagmites et stalactites ?*** " On peut alors demander aux élèves de regarder à qui ressemblent les courbes d'équations $y = a /(x - b)^2 + c$ en fonction des valeurs de a, b et c. Si c est positif, il s'agit alors simplement d'une "bosse" dont la position, la hauteur et l'étroitesse peuvent être réglées en jouant sur les trois constantes comme dans le cas de la parabole. Ainsi, pour faire passer la chauve-souris à travers un décors quelconque, il suffit de lui faire suivre une courbe d'équation $y = x_0 + f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ où les fonctions f_1, f_2,... sont simplement des bosses qui lui permettent de sauter les obstacles qu'elle rencontrerait sur son parcours si elle se contentait de rester à la hauteur constante x_0.

CONCOURS ALKHAWARICHTI

REGIONALE de LILLE

PRESENTATION :

Le concours Alkhawarichti a été créé en novembre 2009 par la Régionale de Lille de L'APMEP afin d'accompagner l'introduction de l'algorithmique en classe de Seconde. Le comité organisateur souhaitait également permettre aux élèves de découvrir l'histoire des mathématiques et des mathématiciens, la grande histoire comme les petites histoires sous forme de devinettes rédigées en quatrains.

Le concours Alkhawarichti propose en 2009-2010 cinq "ch'tis quatrain" et deux"ch'tis calculs" en moyenne tous les mois. Pour être résolus, les quatrains nécessitent l'utilisation des ressources historiques et internet disponibles (chronomath.fr, wikipedia.fr…).

Les ch'tis calculs nécessitent la mise en place d'une programmation, d'un algorithme, à l'aide d'une machine ou d'un ordinateur. Ces calculs s'inspirent des calculs proposés par le Projet Euler : http://projecteuler.net/.

Chacun des défis est accessible pendant les six mois de la durée du concours (du 1er novembre au 30 avril) et les réponses (toutes sous forme numérique) peuvent être proposées à tout moment ; elles peuvent d'ailleurs être testées sur le site du concours :

http://defiapmep.free.fr/calculs/index.html.

Ce concours est proposé aux élèves des lycées de l'Académie de Lille, grâce aux enseignants qui diffusent l'information auprès de leurs élèves. La Régionale de Lille suggère aux enseignants d'amorcer le concours par un exemple travaillé collectivement, en groupe, en devoir...

Le blog de la Régionale diffuse les défis sur

http://maths5962.blogspot.com/2010/11/alkhawarichti-saison-2-episode-1.html

et quelques conseils sur

http://maths5962.blogspot.com/2010/11/conseils-pour-le-concours.html.

En novembre 2010, pour la deuxième édition, le comité organisateur a souhaité compléter la richesse des défis. Ainsi, certains *ch'tis calculs* seront des calculs complexes, n'utilisant pas d'algorithme pour leur résolution et dont l'idée se rapproche plus des Olympiades.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
2009-2010 : Création du concours Alkhawarichti
30 défis *les ch'tis quatrains*
14 défis *les ch'tis calculs*
26 participants ayant envoyé de bonnes réponses (le système de vérification des réponses ne nous permet pas de savoir combien d'élèves ont réellement participé à ce concours).

2010-2011 : deuxième saison du concours
30 défis l*es ch'tis quatrains*
6 défis *les ch'tis calculs*
6 défis *géométriques*

Epreuves :
Individuelles
Catégories : lycéens de l'Académie de Lille

Problèmes à réponse numérique (de culture mathématique, algorithmique ou de calculs plus complexes type Olympiades)

Parrains :
IREM de Lille et UFR de mathématiques de l'USTL, Lille 1

Compétitions :
· Difficulté progressive des défis au long de l'année
· Défis diffusés de manière mensuelle
· Possibilité de répondre entre le 1er novembre et le 30 avril à chacun des défis précédemment diffusés.

Contacts :
Informations, défis, formulaire de réponses et règlement :

http://defiapmep.free.fr/

apmep.lille@laposte.net

Un ch'ti Quatrain (facile) : Spirale

Enoncé :

Membre d'une éminente famille de Bâle,
Géométrie, analyse, probabilités, de tout je tâte.
Sur ma tombe est gravée une spirale,
Mais la plus connue est ma lemniscate.

Qui suis-je ? Additionne mes années de naissance et de mort et donne le résultat sous la forme d'un nombre de quatre chiffres.

Solution :

Une recherche par mots-clé avec un moteur sur internet permet assez facilement de relier la ville de Bâle à la famille Bernoulli, reste à identifier lequel. La spirale, la lemniscate, les probabilités permettent d'identifier Jakob Bernoulli (1654-1705).

Complément d'information :

Jakob Bernoulli (Jacques Ier pour les Français) fut membre d'une dynastie de mathématiciens et physiciens renommés avec ses frères Daniel et Johann puis leurs enfants.
Il travailla principalement sur l'analyse fonctionnelle, le calcul différentiel, le calcul intégral : le terme est de lui, en 1690, mais revendiqué aussi par Johann. On lui doit aussi les fonctions exponentielles, les premières méthodes de résolution d'équations différentielles et le calcul des probabilités.

On peut alors répondre au défi : $1654 + 1705 = 3359$.

Un ch'ti Quatrain (moins facile) : Plutôt deux fois qu'une

Enoncé :

La majeure partie de mes oeuvres est parue en Intégrale
et je n'ai jamais dû me répéter, malgré un nom peu banal.
Fatou et Borel furent mes collègues admirables
à propos de ma théorie des fonctions mesurables.

Quel est le jour de ma naissance ? (sous la forme jjmmaaaa)

Solution :
Les noms de Fatou et Borel renvoient sur internet à des mathématiciens, généralement français. Le terme de "fonctions mesurables" renvoie à une liste de mathématiciens, n'ayant en commun avec la précédente que très peu de noms. Parmi eux, celui de Lebesgue permet de comprendre le titre et l'allusion au "nom peu banal" et le fait de devoir se répéter. Le mot "Intégrale" est utilisé ici avec un double sens, avec l'Intégrale de Lebesgue étudiée après le bac.

Conclusion : il s'agit d'Henri-Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris), d'où la réponse : 28061875.

Un Ch'ti Calcul : Puissances des chiffres

Enoncé :
Le nombre 135 est égal à la somme de son premier chiffre, du carré de son second chiffre et du cube de son troisième chiffre.

On a $135 = 1^1 + 3^2 + 5^3$.

Quel est le plus grand nombre à 3 chiffres qui vérifie la même propriété ?

Solution :
Pour répondre à la question il suffit de passer en revue tous les nombres à 3 chiffres, c'est-à-dire les entiers de 100 à 999, et de vérifier pour chacun d'entre eux s'il possède la propriété indiquée. Comme seul le plus grand de ces entiers est demandé, on aura intérêt à commencer par 999 et à diminuer ce nombre jusqu'à obtenir la première solution qui sera alors la plus grande. Au pire, on trouvera 135, cela nous assure l'existence d'une solution.
On peut résumer cela de la façon suivante :
- le nombre à tester est 999 et on n'a pas encore trouvé de solution
- tant qu'on n'a pas trouvé de solution voir si le nombre à tester est une solution et le diminuer d'une unité si ce n'est pas le cas

De façon un peu plus formelle, en utilisant des variables, cela devient :

```
variable nombre_a_tester = 999
variable nombre_solution = 0
tant que nombre_solution = 0
        si nombre_a_tester est une solution
                alors nombre_solution = nombre_a_tester
                sinon diminuer nombre_a_tester d'une unité
afficher nombre_solution
```

Comment effectuer le test ?

Vérifier si 999 est une solution au problème n'est pas difficile, si on sait que 999 s'écrit avec les chiffres 9, 9 et 9; il suffit de calculer $9 + 9^2 + 9^3$ et de voir si le résultat est 999. Lorsque nous voyons un nombre à 3 chiffres écrit en base 10, nous savons immédiatement les 3 chiffres qui le constituent et le test à effectuer ne pose pas de problème. Malheureusemen, ce n'est pas le cas pour un ordinateur qui compte en base 2 et qui "voit" une suite de 0 et de 1, en l'occurence 0000001111100111. Il nous faut donc trouver une façon de passer d'un nombre entier entre 100 et 999 aux trois chiffres qui permettent de l'écrire en base 10.

L'idée est d'utiliser des divisions euclidiennes. Le chiffre des unités est le reste de la division par 10 et le chiffre des centaines est le quotient euclidien de la division par 100. Il reste à trouver le chiffre des dizaines qu'on obtient en soustrayant les unités et les centaines et en divisant par 10.

Par exemple, traitons le nombre 647.

- En divisant 647 par 10 on trouve 64 fois 10 et un reste de 7. Le chiffre des unités est donc 7.
- En divisant 647 par 100 on trouve 6 fois 100 et un reste de 47. Le chiffre des centaines est donc 6.
- En enlevant 7 unités et 6 centaines il reste 40 qu'il suffit de diviser par 10 pour obtenir le chiffre des dizaines.

Vers un programme : Inscrivons ces nouvelles idées dans l'algorithme présenté au début avec les conventions suivantes :

le chiffre des unités est noté *u*, le chiffre des dizaines est noté *d* et celui des centaines est noté *c*.

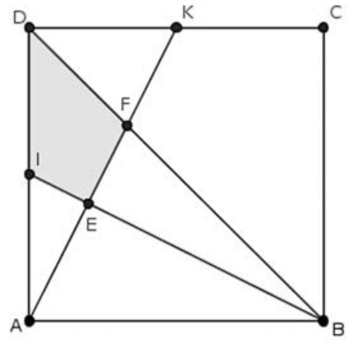
variable *nombre_a_tester* = 999
variable *nombre_solution* = 0
tant que *nombre_solution* = 0
    u = reste de la division de *nombre_a_tester* par 10
    c = quotient euclidien de la division de *nombre_a_tester* par 100
    d = (*nombre_a_tester* - *u* -100**c*)/10
    si *nombre_a_tester* = $c + d^2 + u^3$
        alors *nombre_solution* = *nombre_a_tester*
        sinon diminuer *nombre_a_tester* d'une unité
afficher *nombre_solution*

On peut facilement traduire ceci dans un langage de programmation et on obtient la réponse attendue, 598.

Cette méthode peut encore facilement être mise en oeuvre avec un tableur.

Un défi géométrique : un quadrilatère dans un carré

Enoncé :



ABCD est un carré de 10 cm de côté ; I et K sont les milieux respectifs des côtés AD et DC.
La droite AK coupe le segment IB en E et le segment DB en F.

Quelle est l'aire, arrondie à 0.001 près, du quadrilatère DIEF ?

Solution :
L'aire demandée en valeur exacte est de 35/3 cm2 soit de 11,666 cm2 à 0,001 près.
On peut le trouver par des méthodes de géométrie analytique mais aussi en faisant intervenir par exemple des homothéties.
Les triangles FKD et FAB se correspondent dans une homothétie de centre F et de rapport 2, leurs hauteurs aussi et on calcule S_{FKD} = ½ x 5 x 10/3 = 25/3
(AK) coupe (BC) en R et les triangles ElA et EBR se correspondent dans une homothétie de centre E et de rapport 4, leurs hauteurs aussi ; on calcule et S_{EIA}= ½ x 10/5 x 5 = 5.
On a donc S_{IED} = S_{IEA} = 5 et S_{DEF} = S_{DEK} - S_{DFK} = 15 - 25/3 = 20/3.
La surface du quadrilatère IEFD est donc de 5 + 20/3 cm2

Pour aller plus loin :
Le fonctionnement même du concours rend difficile l'étude des difficultés rencontrées. Le fait qu'aussi bien des Secondes que des Terminales aient bien réussi le concours la première année confirme que la difficulté est correctement dosée, la rapidité avec laquelle certains candidats répondaient dès le début du mois laisse penser que les questions étaient attendues de pied ferme. Les quatrains peuvent être réutilisés en recherche à la maison pour des collégiens ou comme amusement pour des collègues de toutes disciplines. On note des commentaires enthousiastes de la part de nombreux collègues testeurs.
Les défis nécessitant une approche algorithmique n'ont pas le même public large. Au contraire, ils visent délibérément la niche ouverte par l'introduction de l'algorithmique en Seconde sans que les collègues y soient tous formés ; les défis donnent ainsi du "corps" à la mise en place de stratégies plus sophistiquées que la recherche manuelle. A signaler : la Régionale APMEP de Lille prévoit de publier au printemps 2011 l'intégralité des défis des deux premières saisons, avec solutions commentées et analysées.

CHAMPIONNAT FFJM

PRÉSENTATION :

La Fédération Française des Jeux Mathématiques (F.F.J.M.) offre chaque année aux élèves, collégiens, lycéens, étudiants ou adultes de France ou de nombreux autres pays une compétition exaltante s'étalant sur plusieurs mois : le Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques.

Huit catégories, quatre phases successives, des centaines de milliers de concurrents, des centaines de prix de valeur et un maximum d'humour caractérisent ce que les journalistes n'ont pas hésiter à appeler "l'événement le plus astucieux de l'année", et qui a le mérite d'associer scolaires et adultes.

Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. Sont exigés de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche, mais pas réellement de connaissances. Au risque de déplaire à quelques puristes, seul le résultat compte. Encore qu'en cas de solution multiple, il faille donner le nombre exact de solutions.

Le championnat hors de France :

Le championnat voit chaque année la participation de concurrents, issus de nombreux pays. Des structures relais organisent demi-finales, finales régionales ou nationales en Belgique, Centrafrique, Italie, Luxembourg, Niger, Pologne, Québec, Russie, Slovaquie, Suisse, Tchad, République Tchèque, Tunisie, Ukraine.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Depuis le premier Championnat, en 1987, patronné par les revues Jeux & Stratégie et Science & Vie, que de chemin parcouru ! La FFJM a été l'un des artisans du renouveau de l'image des mathématiques auprès des élèves et du grand public. Les finales successives ont égrené des noms insolites et prestigieux : Cité des Sciences, École Polytechnique, Sénat, Parc Astérix et aujourd'hui Cité Internationnale Universitaire de Paris.

Le championnat est encore, à sa vingt-cinquième édition, la compétition de référence avec ses trois étapes qui sont autant de fêtes pour les participants et les animateurs de 9 à 99 ans.

Epreuves :

8 catégories :

CE = 3e année de l'école primaire

CM = 2 dernières années du primaire.

Cl = *France* : 6e - 5e, *Belgique* : 6e - primaire - 1re -secondaire ;
Suisse : 6e - 7e ; *Tunisie* : 1re - 2nd secondaire.

C2 = *France* : 4e - 3e ; *Belgique* : 2nd - 3e secondaire ; *Suisse* : 8e - 9e ;
Tunisie : 3e - 4e secondaire.

L1 = *France* : 2nd à terminales ; *Belgique* : 4e à 6e secondaire ;
Suisse : gymnase ; *Tunisie* : 5e à 7e secondaire.
L2 = Deux premières années du supérieur scientifique.
GP = Grand Public (adultes).
HC = Haute Compétition.

Deux modes de participation possibles aux quart de finales :
- Par correspondance.
- Dans les établissements scolaires.

Compétition :
Quarts de finale (décembre). Demi-finales régionales (mars).
Finale internationale et Concours parallèle open (fin Août).

Partenaires :
Casio, Tangente, Éditions Vuibert, Jeunesses Scientifiques (Belgique), Encyclopédia Universalis.

Contacts :

FRANCE : F.F.J.M.
8 rue Bouilloux-Lafont
75015 PARIS
Tél : 01 44 26 08 37
Fax : 09 72 11 05 52

BELGIQUE : F.F.J.M. Belgique
Clos de la Quièvre 22
B-7700 MOUSCRON
Tél-Fax : 32 (0) 56 33 14 53

SUISSE : F.S.J.M.
Philippe Dony et Christian Pralong
Établissement Secondaire de Prilly
CH 1008 PRILLY

ITALIE :
Angelo Guerraggio
Centro PRISTEM
Università Bocconi,
Viale Isonzo, 7
20100 Milano ITALIE

NIGER : A.N.J.M,
Mamane Voube
BP 13180, NIAMEY
Tél : (227) 74 10 64

QUÉBEC
Frédéric Gourdeau, Département de Mathématiques et de Statistique,
Université Laval,
QUEBEC G1K7P4

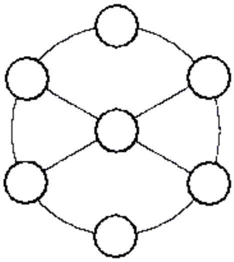
POLOGNE : F.P.J.M,
R. Rabczuk
H. Steinhaus Center
Politec. Wroclawska
50-370 WROCLAW
Tél : (48) 71320 25 23

TUNISIE : A.T.S.M.,
Bechir Kachoukh
43, rue de la Liberté
219 Le Bardo
Tél : (216) 1261455

UKRAINE
Union des Jeunes Mathématiciens

La roue magique

Enoncé :



Les cases de la roue ci-dessus contenaient les nombres de 1 à 7. Cette roue était « magique », c'est-à-dire que la somme des nombres inscrits dans chaque groupe de trois cases alignées était toujours la même.

Quel nombre était inscrit dans la case centrale ?

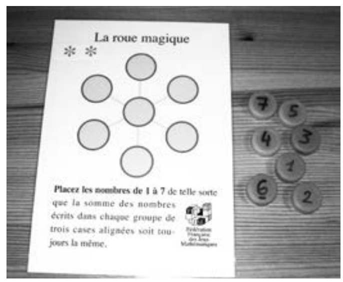
Domaine de compétence (selon le niveau scolaire) :
arithmétique, divisibilité, congruences

Analyse de la tâche :
• Constater que la somme de deux nombres placés aux extrémités d'un même diamètre doit être constante et que cette somme est égale au tiers de la somme des nombres de 1 à 7 diminuée de la valeur du nombre central.

• Le nombre central c doit donc être tel que (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) – c soit divisible par 3. On en déduit que c doit être congru à 1 modulo 3, d'où trois candidats pour le nombre central : 1, 4 et 7.

• Il faut bien sûr ensuite vérifier que ces valeurs conduisent effectivement à des solutions existantes.

Prolongements et commentaires :
Cet énoncé a fait l'objet d'une réalisation sous la forme d'un jeu plastifié utilisé dans des animations (voir photo). L'objectif est ici de poser les sept pions en respectant la condition d'égalité des sommes sur les trois alignements, deux solutions qui ont le même nombre central sont considérées comme identiques.



Nous avons pu ainsi observer les stratégies de résolution du jeu par divers publics, depuis les élèves de l'école élémentaire jusqu'aux adultes de tous âges, y compris des membres d'un club de personnes âgées dont la moyenne d'âge était supérieure à 75 ans.

Une première remarque est que généralement, très peu de gens ressentent la nécessité, une fois une solution découverte, de se demander si la solution trouvée est unique, et dans la négative de déterminer l'ensemble des solutions.

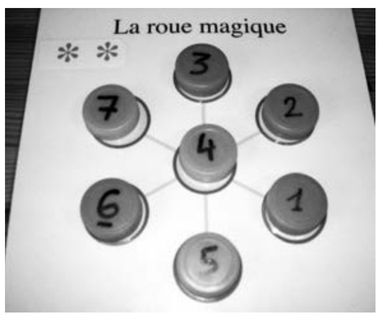
Les stratégies observées :

• Une première stratégie observée aussi bien chez des petits que chez des « grands » (sauf peut-être chez les lycéens qui essaient d'analyser le jeu avant de poser des pions) consiste à poser des pions « un peu au hasard ».

Certains mettent n'importe quel pion au centre, mais beaucoup mettent le « 1 » (premier nombre de la suite). Beaucoup continuent en plaçant le « 2 » et le « 3 » sur un même diamètre, puis réalisent que les nombres restants sont trop grands pour permettre de réaliser la somme « 6 » sur les autres diamètres, d'où la nécessité « d'équilibrer » ...

• Une deuxième stratégie consiste à poser un pion quelconque au centre (par chance, c'est souvent le « 1 », qui conduit à une solution ; parfois le choix est moins heureux lorsque le joueur pose le « 2 », le « 3 », le « 5 » ou le « 6 » au centre). Le joueur cherche ensuite à « équilibrer » les pions restants en les répartissant en trois ensembles des deux pions de sommes égales. Il découvre parfois que c'est impossible s'il avait posé au centre un nombre autre que 1, 4 ou 7, et doit alors changer ce nombre central.

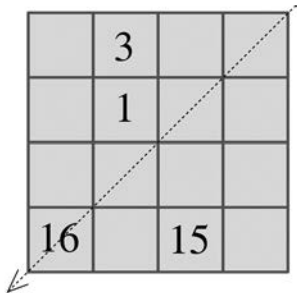
• Une troisième stratégie, observée plus rarement, consiste à additionner les nombres de 1 à 7 (le total est 28) puis à se demander quel nombre peut être placé au centre de façon que la somme des six nombres restants soit divisible par 3. Cette stratégie conduit à explorer l'ensemble des solutions et à les trouver toutes.



Une propriété est intéressante à observer : la dualité.

A partir d'une solution donnée, en remplaçant chaque nombre par son complément à 8, on obtient une solution duale, la solution avec « 4 » au centre étant « autoduale ».

Magie des différences



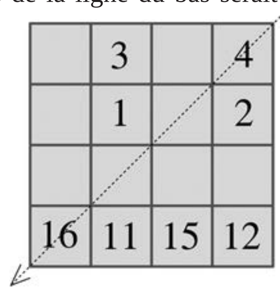
Complétez ce carré de telle sorte qu'il contienne les nombres de 1 à 16, et que la somme des différences successives, prises en valeurs absolues, des nombres écrits sur une même ligne, une même colonne, ainsi que sur la diagonale fléchée, soit toujours égale à 12.

Domaines de compétence :
• notion de valeur absolue (naguère étudiée en collège dès la classe de quatrième, aujourd'hui vue seulement en seconde et étudiée en tant que fonction en première).
• raisonnements basés sur la parité

Analyse de la tâche :
• Constater que dans une même rangée (ligne ou colonne), il y a obligatoirement un nombre pair de changements de parité (une somme ne peut être paire que si elle contient un nombre pair de termes impairs). Les deux nombres situés aux extrémités d'un même rangée sont donc de même parité **(règle 1)**.

• Constater que la différence entre deux nombres d'une même rangée est au plus égale à 12 s'il sont situés aux extrémités, à 11 si un seul est à une extrémité, et à 10 si aucun n'est à une extrémité **(règle 2)**.

Résolution :
• La case du bas de la 2^{e} colonne contient un nombre impair (règle 1). Elle ne peut recevoir qu'un nombre strictement inférieur à 12, sinon la somme des différences de la deuxième colonne serait supérieure à 12. Elle ne peut recevoir un nombre inférieur ou égal à 9, sinon la somme des différences de la ligne du bas serait supérieure à 13. Elle ne peut donc recevoir que le nombre 11. Il en résulte que la dernière case de la ligne du bas contient le nombre 12.



• En vertu de la règle 2, le nombre 2 ne peut être placé ni dans la première colonne, ni dans la diagonale fléchée, ni dans la troisème colonne. Il est donc dans la quatrième colonne (sauf dans la case du haut qui appartient à la diagonale fléchée). Mais 2 ne peut être dans la case juste au-dessus de 12, sinon il faudrait placer 4 dans la case du haut et on ne pourrait compléter la case entre le 2 et le 4 (le 3 étant déjà utilisé). On place ainsi le 2, puis le 4.

• Sur la première ligne, la case entre le 3 et le 4 contient un nombre impair (règle 1 appliquée à la troisième colonne). Parmi les valeurs impaires disponibles, on vérifie que 5 ne convient pas (il faudrait placer en haut à gauche le nombre 12, déjà utilisé), que 9 ne convient pas (il faudrait placer en haut à gauche 2 ou 4, déjà utilisés) et que 13 ne convient pas (la somme des valeurs absolues de la première ligne dépassant 12). La seule valeur possible pour cette case est donc 7 et le nombre 8 vient en haut et à gauche.

8	3	7	4
	1		2
16	11	15	12

• Sur la deuxième ligne, la case entre 1 et 2 ne peut recevoir un nombre supérieur ou égal à 8, sinon la somme des différences sur cette ligne dépasserait 12. Parmi les nombres encore disponibles, seuls 5 et 6 sont à tester. On vérifie que 6 ne convient pas (il faudrait mettre 4, déjà utilisé, sur la première case de cette ligne). C'est donc 5 qui vient dans cette case et 6 dans la première.

8	3	7	4
6	1	5	2
16	11	15	12

• Les nombres disponibles pour remplir la troisième ligne sont 9, 10, 13 et 14. 13 et 14 ne peuvent être placés dans les deuxième et quatrième colonne, sinon les sommes des valeurs absolues dans ces colonnes dépasseraient alors 12. Ils vont donc dans la première et la troisième colonne et ces deux possibilités fournissent deux solutions.

8	3	7	4
6	1	5	2
13	10	14	9
16	11	15	12

8	3	7	4
6	1	5	2
14	9	13	10
16	11	15	12

JEUX LITTÉRAIRES
ET
TROPHÉE LEWIS CARROLL

PRESENTATION :

Depuis 2004, la Fédération Française des Jeux Mathématiques, soucieuse de "sortir les mathématiques de leur tour d'ivoire" propose une compétition pluridisciplinaire : le Trophée Lewis Carroll. Cette compétition unique en son genre associe les jeux mathématiques et les jeux littéraires.

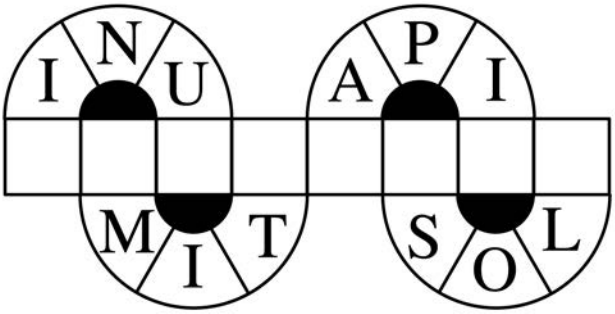
FICHE TECHNIQUE :

La compétition comporte donc deux volets : une épreuve de jeux mathématiques, dans la tradition du Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques, et une épreuve de jeux littéraires.

Pour les jeux littéraires, les participants, répartis en plusieurs catégories scolaires et une catégorie "grand public" doivent répondre à un questionnaire qui met en jeu des connaissances de vocabulaire, mais aussi la culture générale. A l'issue des épreuves qualificatives, ils peuvent participer à une seconde épreuve consistant en la rédaction d'un texte à contraintes.

Le fait de participer aux deux épreuves des jeux mathématiques et des jeux littéraires permet de concourir dans trois compétitions : le Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques, le Championnat des Jeux Littéraires, et le Combiné des Jeux Mathématiques et Littéraires qui constitue le Trophée Lewis Carroll dont la finale se déroule fin mai à Paris sur le Salon de la Culture et les Jeux Mathématiques organisé par le CIJM.

Entrelacs
Exemple de jeu littéraire



Dans cette grille figurent quatre mots de 5 lettres dont la première lettre et la dernière lettre ont été effacées. Les huit lettres effacées formant un mot (un nom commun).

Trouvez ce mot de huit lettres.

Compétences mises en jeu
Outre les connaissances de vocabulaire, cet énoncé nécessite de s'organiser pour explorer l'arbre des possibilités.

Commentaires
Une bonne approche consiste à lister les mots de cinq lettres pouvant s'inscrire dans la grille.

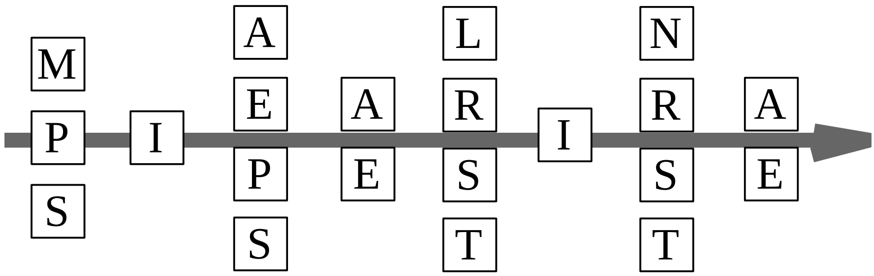
1er mot : il existe trois possibilités pour la première lettre qui correspondent aux mots MINUS, PINUP, SINUS et à deux formes conjuguées du verbe sinuer : SINUA et SINUE.

2e mot : il existe une seule possibilité pour la première lettre qui correspond à deux formes conjuguées du verbe imiter : IMITA et IMITE.

3e mot : il existe de nombreuses possibilités LAPIN, RAPIN, SAPIN, TAPIN, TAPIR, TAPIS et TAPIT (du verbe tapir).

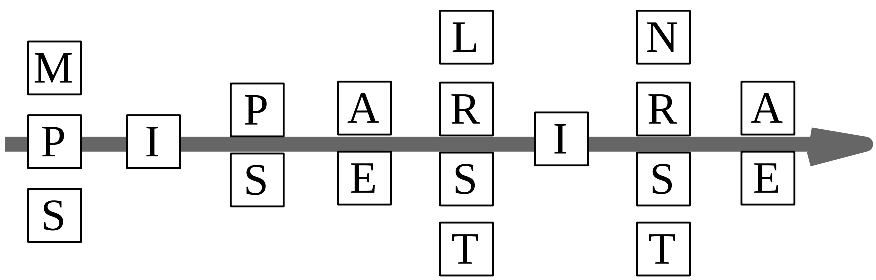
4e mot : il existe une seule possibilité pour la première lettre qui correspond à deux formes conjuguées du verbe isoler : ISOLA et ISOLE.

On obtient alors le graphe suivant où l'on doit choisir une lettre par colonne (les flèches du graphe n'ont pas été représentées) :



Si la troisième lettre était une voyelle, on aurait 3 voyelles de suite : IAA, IAE, IEA ou IEE qui ne correspondent à aucun mot français (la dernière existant mais seulement à la fin d'un mot).

On en déduit que la troisième lettre est une consonne, ce qui simplifie le graphe des possibilités :



Pour les quatre premières lettres, on n'a plus que 12 possibilités, dont une seule conduit à la solution : **PIPELINE.**

WORLD PUZZLE CHAMPIONSHIP

PRÉSENTATION :

Le World Puzzle Championship est une compétition organisée chaque année par la World Puzzle Federation. La WPF est une association qui a été créée en 1992 à l'initiative de Will Shortz, éditeur des jeux du New York Times. Selon ses statuts, cette organisation possède un seul adhérent par pays. La majorité des adhérents sont des sociétés éditrices de revues de jeux de logique. L'adhérent français à la WPF est la société Keesing France, éditrice des revues "Sport Cérébral", qui confie l'organisation des épreuves de qualification de l'équipe française à la Fédération Française des Jeux Mathématiques.

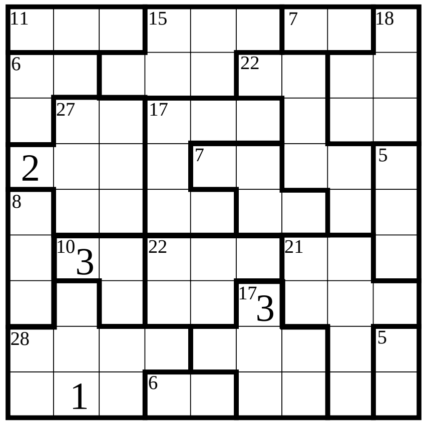
Cette compétition, qui se déroule sur trois ou quatre jours, réunit une équipe de 4 joueurs (adultes) par pays participant. Elle donne lieu à deux classements : un classement individuel et un classement par équipes. Les pays participants sont majoritairement des pays anglo-saxons et des pays de l'Europe de l'Est, auquels il faut ajouter l'Allemagne, les Pays-Bas, le Japon, la Russie, le Canada. La France et la Belgique participent au WPC depuis l'année 2000

Les énoncés des épreuves sont proposés systématiquement en anglais, quelle que soit la langue des compétiteurs. Un booklet contenant tous les textes des énoncés (sans les diagrammes ou avec des diagrammes-exemples très simples) sont envoyés aux compétiteurs quelques jours avant la compétition afin qu'ils les étudient et une séance de "questions-réponses" sur ces textes (en anglais) est prévue avant le début des épreuves.

La particularité de cette compétition est la très grande variété des jeux proposés : plusieurs dizaines de jeux différents dont très peu sont connus du grand public en France, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays comme le Japon ou les Pays-Bas.

Killer Minesweeper Star Battle
(World Puzzle Championchip, french qualification 2010)

Enoncé *(jeu créé par Denis Auroux)* :



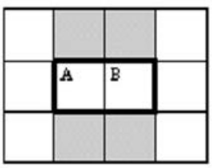
Place two stars in each column and each row of the grid. Each highlighted region contains exactly one star. The stars do not touch each other, not even diagonally. The digits given in the grid indicate how many stars can be found among the eight neighboring squares.
Then, fill the unoccupied cells with digits from 1 to 7, in such a way that each digit appears once in each column and in each row. Within each highlighted region, the digits are all different and their sum equals the given number.

Ce jeu combine plusieurs jeux classiques.
"Star Battle" est un jeu où il s'agit de placer des étoiles (une par région, deux par ligne et par colonne, les étoiles ne se touchant pas, même en diagonale).
"Démineur" est un jeu où les indices (les nombres écrits en gros) indiquent le nombre de mines (ici d'étoiles) présentes parmi les huit voisins de la case contenant l'indice.
"Killer sudoku" où il s'agit de placer dans chaque zone, dans chaque ligne et dans chaque colonne des nombres tous différents réalisant les sommes indiquées en petits caractères.

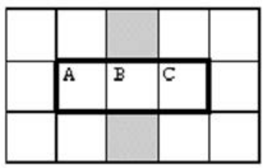
Domaine de compétence :
Raisonnement logique.

Analyse de la tâche :
- Déterminer les cases ne pouvant contenir une étoile en appliquant certaines règles.
Chaque case du jeu contient un chiffre (de 1 à 7) ou une étoile. Chaque colonne et chaque ligne contient donc les chiffres de 1 à 7 plus deux étoiles. Les cases contenant un indice en gros caractère ne peuvent contenir une étoile.

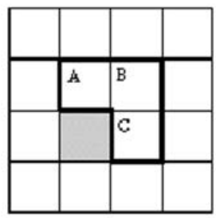
La première règle concerne l'entourage des régions de deux ou de trois cases.
Ces régions contiennent obligatoirement une étoile, ce qui, dans chacun des cas illustrés ci-dessous, interdit de placer une autre étoile dans chacune des cases grisées, ceci quelle que soit la position de l'étoile (en A ou B dans la région à deux cases, ou en A, B ou C dans une région à trois cases).



1

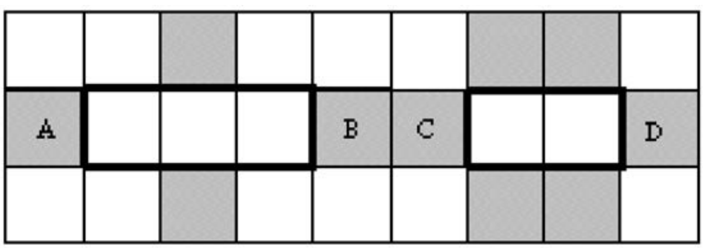


2



3

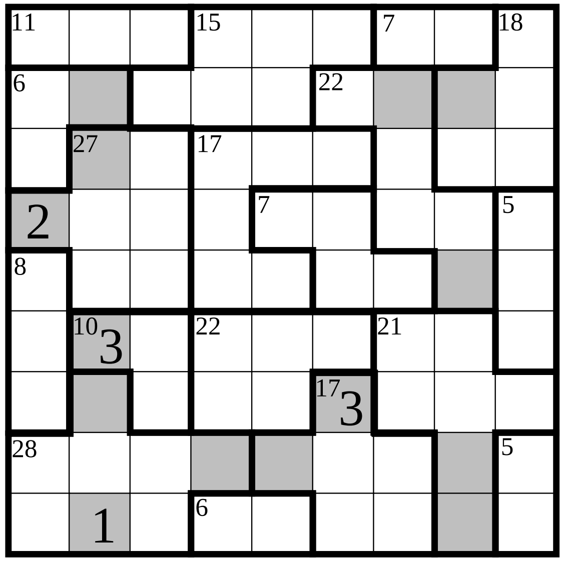
La deuxième régle s'applique lorsqu'une rangée (ligne ou colonne) contient entièrement deux régions de deux ou trois cases (voir l'exemple de la figure ci-dessous).



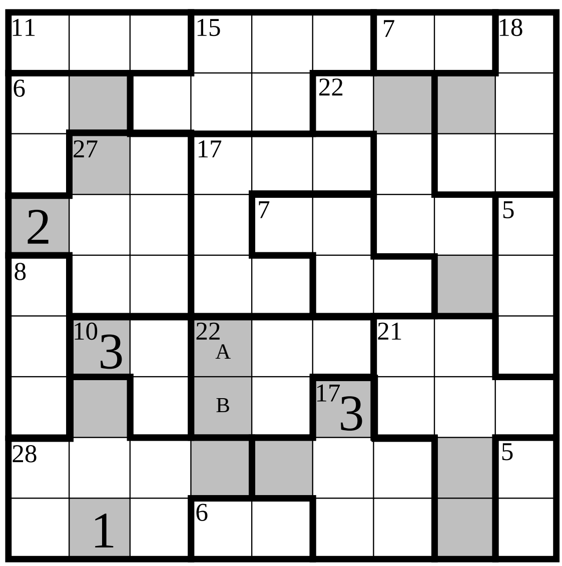
Dans ce cas, chacune des deux régions de deux ou trois cases contenant obligatoirement une étoile, on sait que les autres cases de la rangée (A, B, C et D) n'en contiendront pas. On peut donc les griser.

Lorsqu'on ne peut plus appliquer ces règles, on exploite les indices (gros chiffres) afin de placer toutes les étoiles.

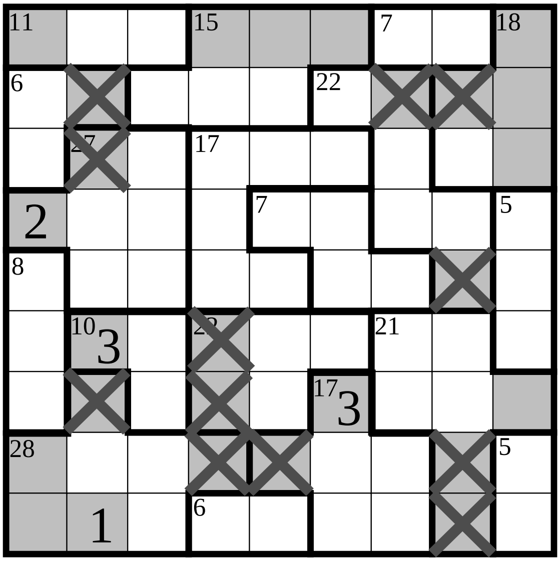
Résolution :
On applique la règle 1 :



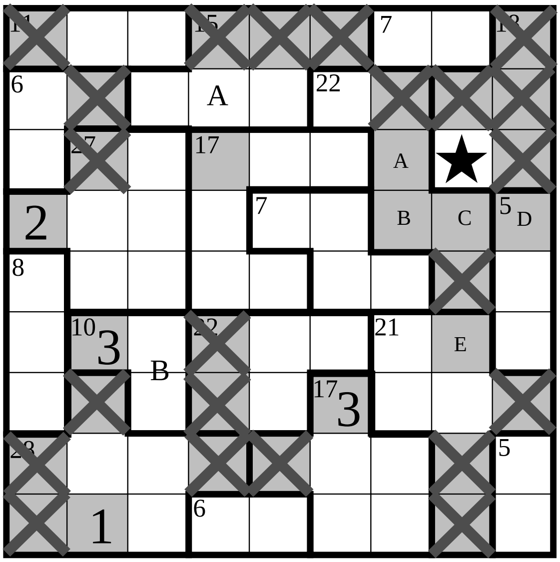
Puis à nouveau la règle 1 en A et B, la région située immédiatement à gauche étant maintenant réduite à deux cases.



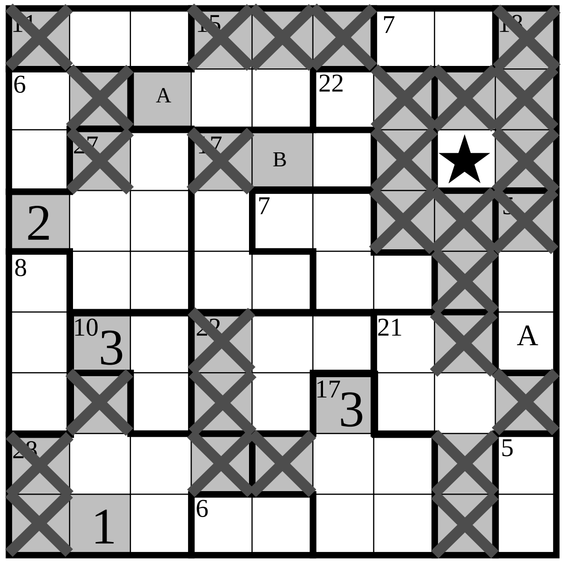
On applique la règle 2 :



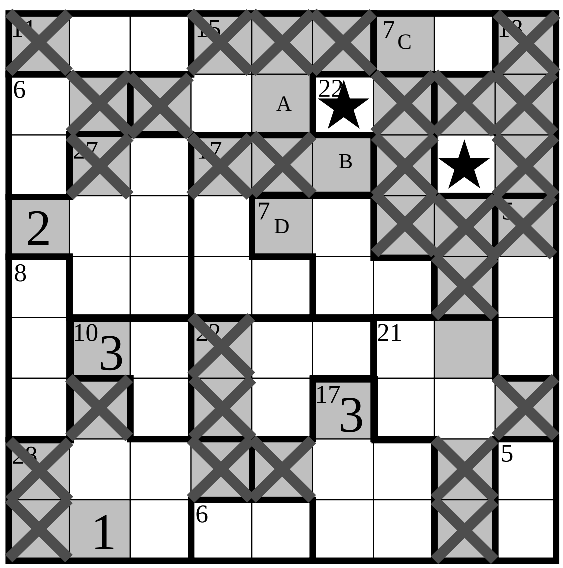
On peut alors placer l'étoile dans la région située en haut à droite (il reste une seule case disponible) et griser les cases A, B, C, D, et par ricochet, la case E.



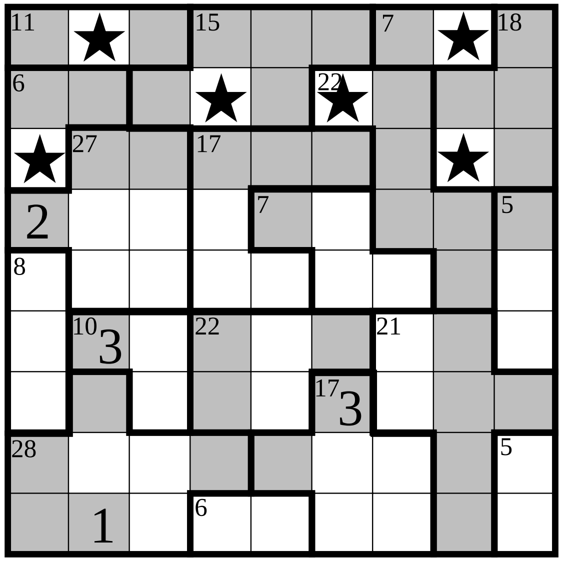
En appliquant à nouveau la règle 1, on peut griser les cases A et B.



Ce qui permet de placer une nouvelle étoile et de griser les cases A, B, C et par ricochet, D.

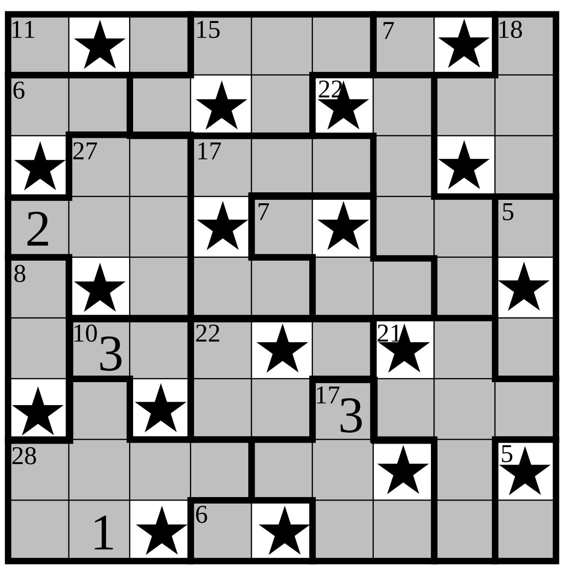


On place ainsi 6 étoiles.



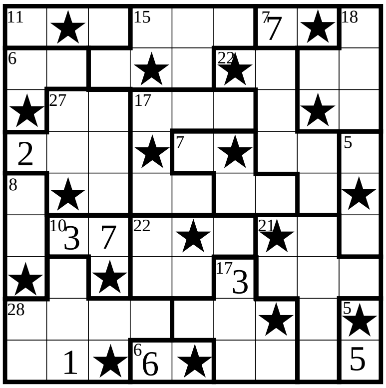
Ensuite il faut utiliser les indices (gros chiffres) qui permettent de placer toutes les étoiles.

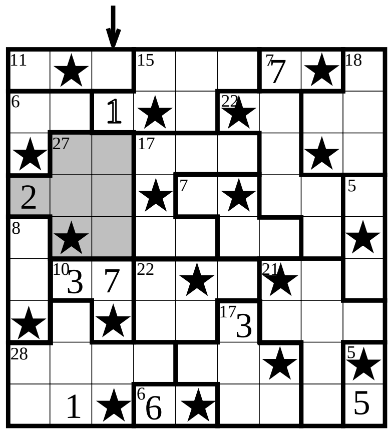
Cette partie du jeu résolue, il faut s'attaquer au "killer" qui consiste à placer les chiffres de 1 à 7 dans chaque ligne et dans chaque colonne (une région contenant obligatoirement des chiffres tous différents).

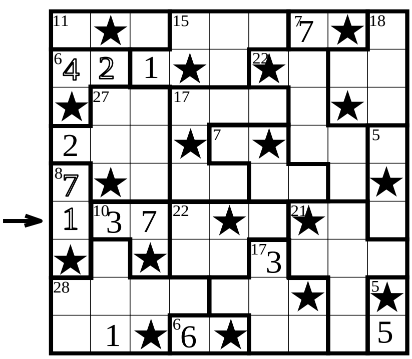


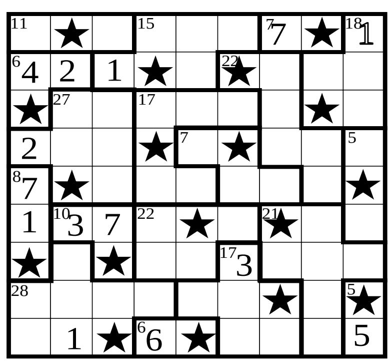
La résolution s'apparente ici au sudoku avec en plus le raisonnement sur les sommes. Six nombres de somme 27 par exemple ne peuvent être que 2, 3, 4, 5, 6, et 7. Trois nombres de somme 7 ne peuvent être que 1, 2 et 4 ...

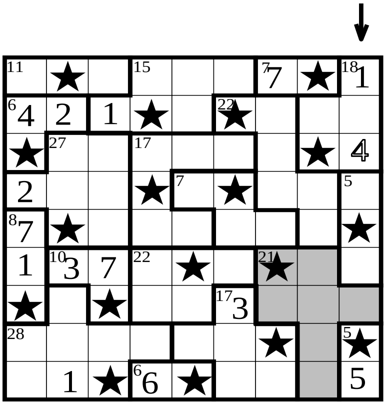
Les figures ci-dessous indiquent quelques étapes de la résolution.

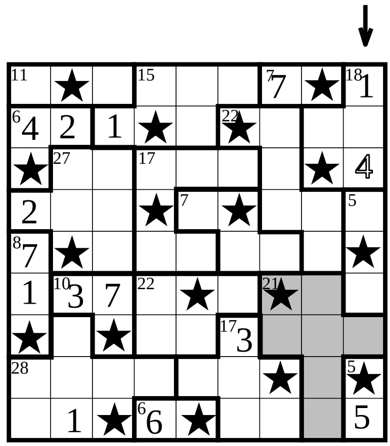


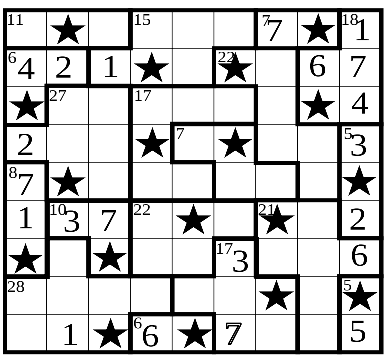


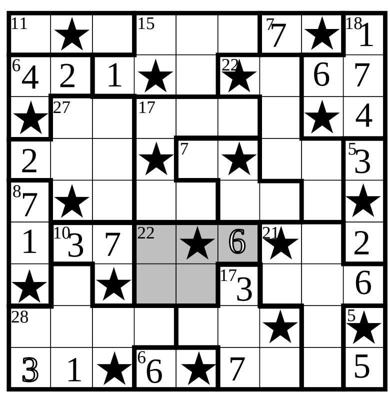


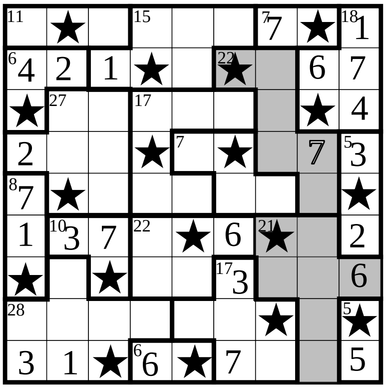


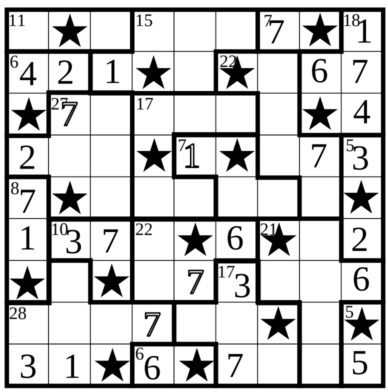


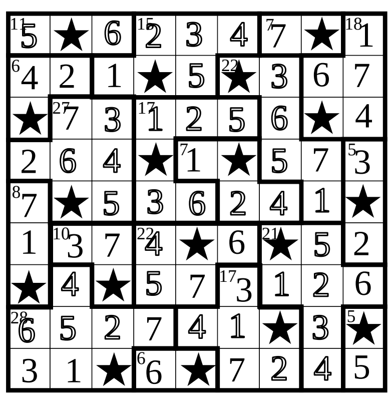












KANGOUROU DES MATHEMATIQUES

PRÉSENTATION

En 2011, le Kangourou des mathématiques fête ses vingt ans.
Après avoir, le siècle dernier, dépassé le demi-million de participants, il fait, depuis 10 ans en France, jouer avec les mathématiques et réfléchir entre 300 000 et 400 000 jeunes tous les ans.
Avec *Kangourou Sans Frontières*, association créé par André Deledicq, prix d'Alembert 1994 et prix Erdös 2004, ce sont 6 millions d'élèves du monde entier qui, chaque année, concourent le même jour quasiment à la même heure.

FICHE TECHNIQUE

Epreuves :
Les questions Kangourou sont choisies tous les ans, lors de journées internationales, par les représentant(e)s d'une cinquantaine de pays, connu(e)s pour leur implication dans la formation scientifique, esthétique et ludique, des jeunes ; elles sont à la fois proches des programmes de mathématiques et porteuses de sens.

Le Kangourou est un jeu-concours pour tous les élèves :
. Depuis plusieurs années, tous ceux qui répondent juste aux 8 premières questions (les plus faciles ; voyez, en exemple ci-après, les questions 1 à 3) reçoivent un livre (en 2010, *45 bluffs logiques et amusants* de Pierre Berloquin ou *Les récréations mathématiques* de Jacques Ozanam, deuxième classique Kangourou après *La géométrie* de Descartes).

. Les meilleurs élèves sont départagés par les 16 questions suivantes (voyez, en exemple ci-après, les questions 4 à 8) ou par les 2 questions subsidiaires (voyez, en exemple ci-après, les questions 9 et 10). Tous les ans début juin, lors d'un week-end de compétition conviviale, les dix meilleurs élèves de chaque classe participent aux *Trophées Kangourou*.

En fait, les élèves croient participer à un jeu-concours ... Certains (une centaine) gagnent effectivement un voyage, beaucoup (un sur 5) gagnent des jeux, des livres ou des cd-roms, mais tous reçoivent un magazine qui les initient à une culture mathématique plaisante et intelligente.

Compétitions :
Le kangourou a toujours lieu, partout, le troisième jeudi du mois de mars.
Cinq réponses sont proposées au choix, une seule d'entre elles étant juste.
A partir de 2011, tous les niveaux de classe peuvent jouer du CP à bac + 1.
Il y a 7 sujets différents, en particulier un sujet adapté pour les lycées pro, mais il y a un classement par niveau.

Contacts :
12 rue de l'épée de bois

www.mathkang.org

.

Voici 10 questions sorties du Kangourou 2010

Trois questions faciles ...

1.
Quand j'étais petit, je n'étais pas bien grand. Je mesurais alors 99 centimètres.
Et les gens disaient : "Il est haut comme 3 pommes "
Aujourd'hui je mesure 1,65 m.
De combien de pommes suis-je haut ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.
L'ascenseur met 6 secondes pour aller du 1er au 3^{e} étage.
Combien de secondes met-il pour aller du 1er au 6^{e} étage ?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 18

3.
Combien de droites faut-il tracer au minimum pour partager le plan en exactement 3 régions ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) il n'est pas possible de partager le plan en exactement 3 régions avec des droites.

Cinq questions raisonnables ...

4.
Trois mardis d'un même mois sont tombés sur des jours pairs.
Quel jour de la semaine est le 21 de ce mois ?

A) mercredi B) jeudi C) vendredi D) samedi E) dimanche

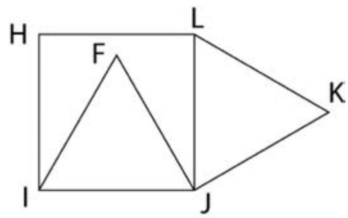
5.
Un professeur dit que le produit de son âge par celui de son père vaut 2010.
Quel est l'âge du professeur ?

A) 20 ans B) 21 ans C) 30 ans D) 57 ans E) 67 ans

6.
Sur un parking de supermarché, se trouvent deux lignes de chariots bien rangés. La première ligne, de 10 chariots, mesure 2,9 mètres de long. La seconde, de 20 chariots, mesure 4,9 mètres de long.
Quelle est la longueur d'un chariot ?

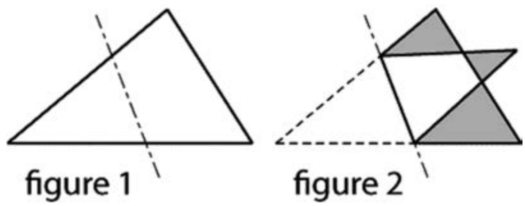
A) 0,8 m B) 1 m C) 1,1 m D) 1,2 m E) 1,4 m

7.
HIJL est un carré.
Les triangles *IJF* et *JKL* sont équilatéraux.
Si IJ = 1, combien vaut FK ?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-1$ E) $\sqrt{6}-1$

8.
Un triangle est plié le long de la ligne pointillée, comme le montre la figure 1. L'aire du triangle est 1,5 fois plus grande que l'aire de la figure obtenue après pliage.

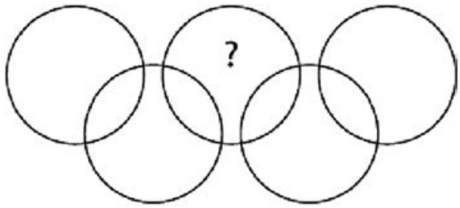


Sachant que l'aire grisée (figure 2) vaut 1, quelle est l'aire du triangle de départ ?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) impossible à déterminer

Deux questions difficiles ...

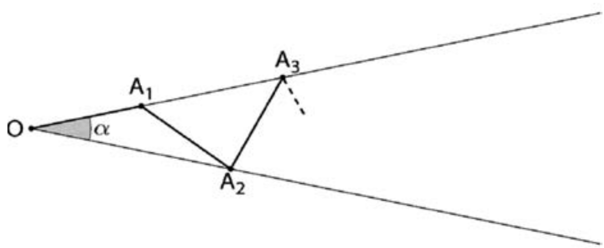
9.
L'intérieur de cette figure comporte neuf zones. On écrit les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (un par zone) de telle sorte que, dans chaque cercle, la somme des nombres soit 11.



Quel est le nombre inscrit dans la zone marquée d'un point d'interrogation ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.
On zigzague entre deux demi-droites en traçant des segments égaux comme indiqué par la figure (d'abord $[OA_1]$ sur un côté d'un angle, puis $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, alternativement sur chacun des côtés).



Si l'angle α mesure 13°, quel est le nombre maximum de segments qu'on peut construire sans qu'aucun ne recoupe un précédent ?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) pas de maximum

Solutions et commentaires

1.
Réponse B
On sait que 3 pommes mesurent 99 cm.
Une pomme mesure donc 33 cm et 165 cm est la hauteur de 5 pommes ($5 \times 33 = 165$).

2.
Réponse D
L'ascenseur met 3 secondes par étage donc 15 secondes pour les 5 étages séparant le 1er du 6e.

Si la question 1 est un exercice sur la proportionnalité, à condition de le lire avec l'humour qui s'impose, la question 2 en est un piège classique tout à fait joli...

3.
Réponse B
On ne pense pas tout de suite à des droites qui ne se coupent pas forcément ; ouvrir son imagination, c'est aussi cela les mathématiques.

Deux droites parallèles suffisent pour partager le plan en exactement 3 régions.

4.
Réponse E
La logique et le calcul modulo 7 sont au rendez-vous de ce classique des réunions de famille.

On remarque tout d'abord que, si un mardi est un jour pair, le mardi suivant est un jour impair. Pour avoir 3 mardis pairs un même mois, il faut que le mois contienne 5 mardis ; le premier et le dernier sont séparés de 28 jours ; ils ne peuvent être que le 2 et le 30.
Le 23 est alors aussi un mardi et le 21 est un dimanche.

5.
Réponse C
Si l'arithmétique simple est à la base de l'exhibition de solutions candidates, c'est le bon sens qui décide de l'adéquation de la solution au réel problème posé.

Voici toutes les décompositions de 2010 en produit de 2 facteurs entiers :
$2010 = 2010\times1 = 1005\times2 = 670\times3 = 402\times5 = 335\times6 = 201\times10 = 134\times15 = 67\times30$
Le seul de ces produits compatible avec des âges est 67 × 30.
Le professeur a donc 30 ans (et son père 67).

6.
Réponse C.
Comme beaucoup de problèmes pratiques posés par la vie de tous les jours, en voici un qui réclame une bonne intelligence de sa mise en équation : il y a plusieurs choix possibles pour les deux variables à manipuler. Il est très intéressant de comparer les choix des divers élèves.

Appelons x la longueur, en mètres, de l'arrière d'un chariot (partie qui dépasse d'un chariot rangé dans un autre) et y celle de l'avant (partie encastrée dans le chariot précédent).
On a : $10x + y = 2{,}9$
et $20x + y = 4{,}9$.
Donc : $x = 0{,}2$ et $y = 0{,}9$.
La longueur d'un chariot est $x + y$, soit 1,1 m.

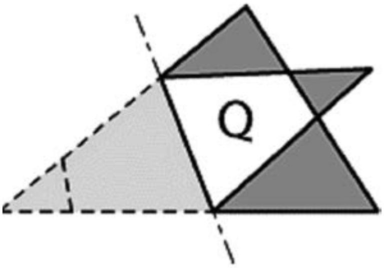
7.
Réponse A
La question peut paraître difficile et on peut y sécher quelque temps. Cependant, comme souvent, l'intervention de la bonne transformation géométrique rend les choses d'une simplicité d'aurore du monde : que la rotation de centre J d'angle 90° soit ! Il s'agit d'un très bon exercice pour faire échanger et discuter les diverses rédactions de solutions.

Le triangle FJK est isocèle ($FJ = JK = 1$) et rectangle car l'angle en J est un assemblage d'un angle de 30° et d'un angle de 60°.
On a donc $FK = \sqrt{2}$.

8.
Réponse B
Encore un joli problème que l'on doit prendre du bon côté. Le tout est de bien choisir son inconnue et de s'en contenter. Comme plus haut, la comparaison discutée des solutions d'élèves ou de groupes d'élèves est particulièrement féconde.

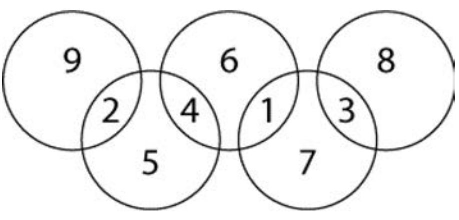
Si Q est l'aire du quadrilatère blanc, l'aire du polygone à 7 côtés obtenu après pliage est $Q + 1$ (donnée de l'énoncé). L'aire du triangle de départ est $Q + 1 + Q$ soit $2Q + 1$. La relation sur les aires donne :
$2Q + 1 = 1{,}5 \times (Q + 1)$.

D'où $0{,}5 \times Q = 0{,}5$ et $Q = 1$.
L'aire du triangle de départ vaut 3.



9.
Réponse : 6
L'analyse du problème devient ici difficile et réclame une bonne habitude de promenade dans (et hors) les sentiers mathématiques, afin d'extraire rapidement les éléments significatifs du paysage.
Ici il y deux disques contenant 2 chiffres et trois disques en contenant 3 ; l'examen de toutes les décompositions en 2 ou 3 nombres du nombre commun 11 est déterminante pour placer déjà 9 et 2.
Ensuite, on est aidé par le fait que la somme de 6 nombres doit valoir 22, alors que la somme 1+2+3+4+5+6 vaut déjà 21. La solution n'est alors pas loin !

Seule configuration possible (à une symétrie près) :



Le nombre 11 peut être soit la somme de 2 nombres de 1 chiffre (9 + 2, 8 + 3, 7 + 4, 6 + 5), soit la somme de 3 nombres de 1 chiffre (1 + 2 + 8, 1 + 3 + 7, 1 + 4 + 6, 2 + 3 + 6, 2 + 4 + 5).

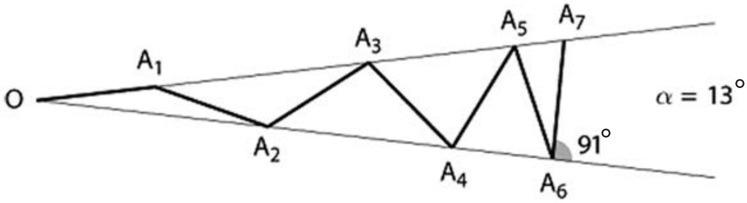
Le nombre 9 n'intervient que dans une somme qui a 2 nombres ; les nombres du premier disque sont donc 9 et 2.
Les six nombres dans les deux cercles du bas ont pour somme 22. Or la somme des cinq premiers nombres, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, vaut déjà 15.
La seule manière d'obtenir 22 avec six nombres différents est :
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7.
9 et 2 étant déjà placés, alors 8 est nécessairement avec 3 dans l'autre cercle ne comprenant que deux nombres.

Seul reste 6 pour être à la place du point d'interrogation.

10.
Réponse : 7
Comme souvent en mathématiques (mais le sait-on assez ?), la compréhension du processus de tracé passe par l'expérience : faites une figure ! Et la lumière viendra... Ou, en tout cas, une partie de la lumière.

Les triangles successifs OA_1A_2, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ … sont isocèles et leurs angles à la base sont successivement α, 2α, 3α, etc. (Propriété du triangle utilisée : le supplémentaire de l'angle d'un triangle vaut la somme des deux autres.)
La construction cesse d'être possible (sans recouper le segment précédent) à la première valeur de n telle que $n\alpha$ dépasse 90°. (Le point qui suivrait, A_8 dans la figure ci-dessous, serait en effet entre A_6 et A_4, et le processus de tracé ferait revenir vers O.)
Le premier n tel que $13n > 90$ est 7.

On pourra dessiner 6 triangles, le dernier étant $A_5A_6A_7$, ce qui donne 7 segments tracés dans le processus du zigzag.



LUDIMATHS

PRÉSENTATION DU RALLYE

Nous proposons une série de 10 énigmes riches en mathématiques et attrayantes par leur aspect ludique et manipulatoire couvrant les domaines : numérique, géométrie plane, géométrie spatiale, logique. Parmi ces 10 énigmes, une épreuve dite de "communication" met les élèves en situation de devoir échanger des informations sans le support de l'écrit.

FICHE TECHNIQUE

Epreuves :
Ces épreuves se présentent sous forme d'un énoncé et de matériel à manipuler pour accéder à la solution. L'objectif est de privilégier tout type de démarche même empirique. Cette démarche est volontaire et s'inscrit dans une logique de valorisation des processus de pensées mathématiques et scientifiques (expérimentation, formalisation, conjectures…). Chaque énigme est conçue pour permettre de valoriser des réponses partielles même si l'équipe ne réussit pas complètement. D'autre part, ces réponses ne nécessitent pas le recours à l'écrit pour être proposées ce qui permet le dépassement du barrage de la langue présent chez les élèves les plus en difficulté.

Il est bien sûr loisible à chaque organisateur de modifier, en fonction des conditions locales ou des points mathématiques à travailler et développer, le nombre d'énigmes ainsi que la durée de passation. A titre indicatif, les énigmes ont été conçues pour pouvoir correctement être abordées en une quinzaine de minutes. Des possibilités d'aménagements sont d'ailleurs proposées pour certaines énigmes. Il vous suffit pour cela de vous reporter à la rubrique "consignes" de chaque document d'accompagnement.

Equipes :
Les épreuves ont été prévues pour pouvoir être proposées à des équipes de deux à quatre élèves de CM$_2$ et de 6^e. L'objectif est ici clair : effectuer un travail collaboratif entre élèves de CM$_2$ et de 6^e en mélangeant les deux niveaux.
De plus, pour permettre une découverte ou une meilleure connaissance de leur futur établissement, chaque équipe se déplace de salle en salle pour résoudre ces énigmes mathématiques. Idéalement, dans une salle n'est présente qu'une seule énigme éventuellement en plusieurs exemplaires pour permettre l'accueil d'un plus grand nombre d'élèves. Le temps est limité pour la résolution de chacun des 10 défis rencontrés pendant cette aventure pédagogique et…ludique.

Arbitres :
Une telle organisation nécessite bien évidemment un encadrement certain : les arbitres. Les équipes passent de salle en salle, d'énigme en énigme, accueillis par un arbitre pour chaque énigme. Ces arbitres peuvent être recrutés parmi les enseignants, parents d'élèves ou autres personnes volontaires. Un établissement scolaire, comprend aussi du personnel administratif, d'entretien ou de vie scolaire. Le rallye est un moyen assez aisé d'impliquer tout le monde et d'obtenir le grand nombre d'encadrants requis pour un fonctionnement sans failles.
L'arbitre a un rôle essentiel, à la fois en vérifiant que l'équipe a correctement compris la consigne et en validant les réponses fournies. Il est important que les arbitres chargés d'encadrer une même énigme se soient au préalable mis d'accord sur leur façon d'évaluer et éventuellement d'aider, et ce dans un souci d'équité. Au vu du contenu des énigmes, de leur progressivité, de leur caractère manipulatoire, il est impensable qu'une équipe puisse ne rien réussir à faire. Dans ce cas le rôle de l'arbitre est d'encourager, éventuellement d'aider en fournissant au moment opportun un coup de pouce. A nouveau, pour cela, de précieuses indications de la rubrique "consignes" des documents d'accompagnement peuvent vous aider.

Compétition :
Afin de créer une saine émulation parmi les participants, une petite compétition peut être organisée et les énigmes évaluées. Différentes propositions de barèmes vous sont faites avec pour objectif commun d'obtenir au moins un point sur au moins une énigme.

Enigmes :
Voici la liste des 10 énigmes proposées et les thèmes mathématiques abordés au travers de chacune d'elles. L'ordre dans lequel elles apparaissent n'est donné qu'à titre indicatif mais a pour effet d'alterner les domaines mathématiques visés : numérique, géométrie plane, géométrie spatiale et logique.

"Lumineux !"
Numérique : rechercher des nombres écrits sous forme digitale comme un maximum, une parité, des multiples….

"Le puzzle de l'oncle Sam"
Géométrie plane : reconstituer diverses formes géométriques à l'aide de pièces fournies.

"Des blocs ?"
Géométrie spatiale : construction de solides à partir de deux des vues colorées de l'assemblage et de pièces fournies.

"Arlechien"
Logique : aligner des pions selon des contraintes de couleurs.

"Marchandages"
Numérique : réaliser des transactions d'objets coûtant 1, puis 2, puis 3 euros… à l'aide de billets de valeurs 5, 7 et 11 euros.

"Le retour du carreleur géomètre"
Géométrie plane : former divers rectangles à l'aide de rectangles obtenus par assemblages de carrés.

"Cube qui roule..."
Géométrie spatiale : reconstituer le parcours d'un cube qui roule en basculant sur ses faces successives et imprime à chaque étape un symbole.

"Elèves et cartables"
Logique : retrouver à l 'aide d'indices le matériel et la couleur du cartable de quatre enfants.

"A ski !"
Géométrie plane : se transmettre les informations géométriques nécessaires à la réalisation d'un parcours imposé.

"Pentanimos"
Géométrie plane : reconstituer des silhouettes d'animaux réalisés à l'aide des douze pentaminos (assemblages de cinq carrés).

Contacts :
LUDIMATHS - Association loi 1901 -
49, rue de la Station
59650 Villeneuve d'Ascq

forum : *http://www.ludimaths.forumculture.net*

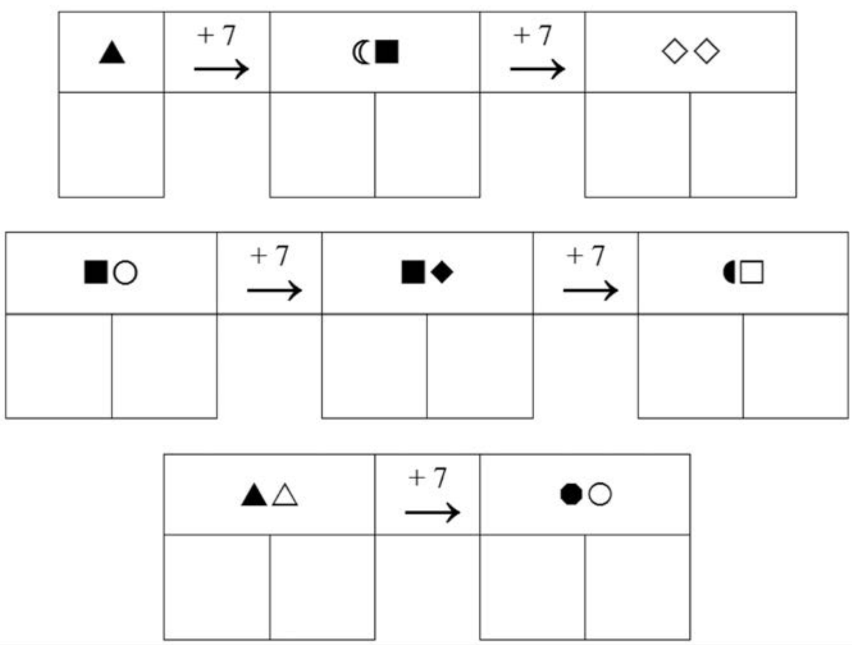
Diabolique symbolique

Enoncé :
Un malicieux magicien a modifié les dix chiffres de notre système de numération.
Vous devez découvrir la clé de ce code en vous aidant des quelques nombres proposés et des calculs qui les lient.
À noter : un symbole correspond à un seul chiffre !

Matériel :
1 énoncé.
2 plateaux .
30 pièces (3 séries de chiffres de 0 à 9).

Consignes :
Les élèves lisent l'énoncé et cherchent à résoudre l'énigme en procédant à des essais à l'aide du matériel fourni. Il n'est pas utile de préciser que la valeur des symboles change d'un plateau à l'autre, un simple essai suffit pour s'en rendre compte.

Solutions :
Plateau n°1



Dans la première série, on ajoute 14 à un nombre à un seul chiffre pour obtenir un nombre à deux chiffres identiques. La seule possibilité est d'avoir 22. Nous obtenons ainsi :

▲ = 8 ☾ = 1 ■ = 5 ◇ = 2

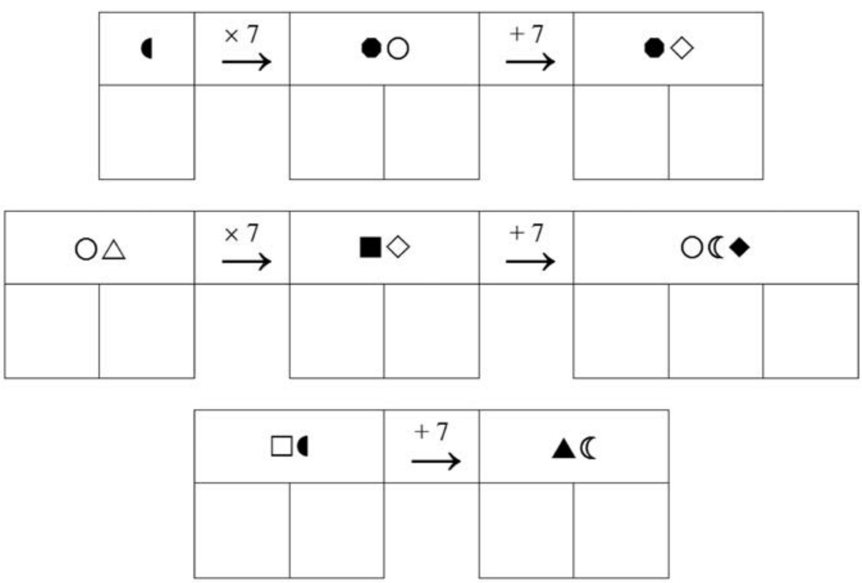
Dans la deuxième série, nous connaissons déjà le chiffre 5. D'où les possibilités 50 + 7 = 57, 51 + 7 = 58 et 52 + 7 = 59. Les chiffres 1, 2 et 8 étant déjà connus, il reste :

○ = 0 ◆ = 7 ◖ = 6 □ = 4

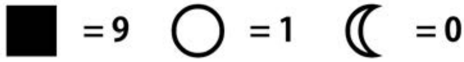
Dans la dernière série, nous avons 8 . + 7 = . 0, d'où :

△ = 3 ⯃ = 9

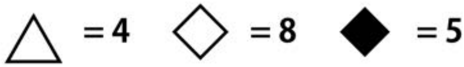
Plateau n°2



Dans la deuxième série, ayant un nombre à 2 chiffres qui augmenté de 7 donne un nombre à 3 chiffres :



Les multiples de 7 compris entre 90 et 100 sont 91 et 98, ce qui donne 13 x 7 = 91 ou 14 x 7 = 98. Comme le chiffre 1 a déjà été attribué, on obtient :



Dans la troisième série, nous avons . . + 7 = . 0 donc le symbole correspondant au chiffre 3. En remplaçant dans la première série, on trouve 3 x 7 = 21 et le symbole associée au chiffre 2.

Il reste deux symboles et deux chiffres non utilisés, ce qui donne :

Barème / évaluation :
A titre indicatif, nous pourrions par exemple simplement proposer d'attribuer 2 points pour la découverte de chacun des symboles de chaque plateau. Ce qui fait un total de 40 points répartis de manière très progressive et mettant en valeur les initiatives et les démarches réfléchies.

Prolongements :
Le prolongement, assez évident, est de produire d'autres grilles basées sur d'autres tables de multiplications telles celle de 9 par exemple. On peut également utiliser d'autres opérations que les seules additions et multiplications pour graduer le niveau de difficulté. Eventuellement, certaines grilles pourraient avoir plusieurs solutions ou des méthodes de résolution différentes comme c'est le cas pour la seconde grille proposée dans l'énigme.
Dans le même ordre d'idée, demander aux élèves de créer par équipes de nouvelles grilles peut se révéler intéressant, la validation se faisant en échangeant les grilles produites par les différents groupes.
De manière plus poussée, il est aussi intéressant de s'intéresser au codage de textes par une méthode de substitution simple comme le "chiffre de César". Le déchiffrement fait alors appel à de l'analyse de fréquence : le symbole le plus fréquemment utilisé, si le texte est suffisament long, doit être la lettre la plus employée en langue française. De nombreuses compétences statistiques peuvent alors être introduites ou mises en oeuvre.
Pour en savoir plus et bien davantage :

http://www.apprendre-en-ligne.net/crypto/

Le retour du carreleur géomètre

Enoncé :
A l'aide de 4 rectangles, un de 6 carreaux, un de 8 carreaux, un de 10 carreaux et un de 12 carreaux, vous devez en les juxtaposant former :
· un carré.
· tous les rectangles possibles.
A noter : Pour plus de clarté, chacun des 4 rectangles sera d'une couleur différente et les n carreaux pour former chaque rectangle peuvent être disposés de différentes façons.

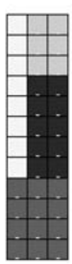
Matériel :
· 1 énoncé.
· 36 carrés répartis en 4 quantités et 4 coloris.

Consignes :
Les élèves lisent l'énoncé et cherchent à résoudre l'énigme en procédant à des essais à l'aide des carrés fournis. A priori, aucune indication supplémentaire à celles indiquées dans l'énoncé n'est nécessaire. Si le mot "juxtaposer" pose problème, l'arbitre peut très aisément l'expliciter soit en fournissant un exemple de son emploi issu du langage courant soit en proposant un synonyme. L'arbitre insistera aussi sur le fait que les carrés d'une même couleur doivent nécessairement former ensemble un unique rectangle.
En cas de blocage prolongé et persistant, il peut-être souhaitable d'orienter l'équipe vers le dénombrement des carrés fournis et ainsi vers l'aire totale des pièces évitant ainsi une absence totale de réussite.

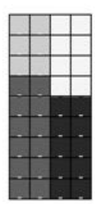
Solutions :
Hormis le rectangle 1 x 36 obtenu en mettant bout à bout tous les carrés fournis, voici un exemple des autres solutions possibles :

2 × 18

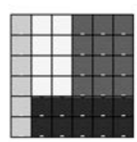
3 × 12



4 × 9



6 × 6



Barème / évaluation :
Puisqu'il y a cinq rectangles à former, chaque construction correcte peut apporter 10 points. Le total de l'énigme sera donc bien de 50 points.

Prolongements :
Une fois le raisonnement de détermination des rectangles possibles compris, il peut être intéressant de s'orienter vers la recherche d'autres configurations du même type : Sont-elles toutes aussi riches ? A quelle condition aurons-nous un carré ? Tous les rectangles existants par leurs dimensions seront-ils effectivement constructibles avec les carrés ? Par exemple, si nous prenons des groupes de 8, 10, 12 et 14 carrés, on ne peut former de carré, mais peut-être des rectangles, lesquels ?

Le passage à l'espace est lui aussi des plus intéressants : avec des lots de cubes formant des pavés, reconstituer un cube puis des pavés. Cette fois, puisque les pavés nécessitent la connaissance de 3 dimensions, les décompositions possibles sont d'autant plus nombreuses et la recherche d'autant plus riche.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES JUNIOR

UNE COMPETITION VRAIMENT INTERNATIONALE

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

C'est une compétition entre classes de CM_2 et de sixième en France et de niveau équivalent à l'étranger. Elle est organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Académie de Strasbourg.
Elle fonctionne comme sa grande sœur "Mathématiques sans frontières" qui s'adresse depuis plus de 20 ans aux classes de troisièmes et secondes.

Une équipe de professeurs des premier et second degrés est chargée de la création des sujets : 8 exercices pour les CM_2 et 1 de plus pour les sixièmes, l'énoncé du premier exercice est donné en allemand, anglais et en arabe. Chaque année, une épreuve d'entraînement est proposée aux participants pour préparer l'épreuve finale. Les exercices des épreuves antérieures sont disponibles sur le site de la compétition facilement sélectionnables grâce à une classification par plusieurs entrées : les notions du programme, les domaines mathématiques, les stratégies mises en œuvre, etc.

La compétition s'adresse aux classes entières et ne demande qu'une réponse par classe et par exercice : cela favorise donc la participation de tous, l'esprit d'équipe, l'initiative des élèves. La pratique d'une langue étrangère est également valorisée. La difficulté graduée et les thèmes variés des exercices permettent à tous les élèves d'une même classe d'apporter leur contribution et chacun peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Une classe de CM_2 et une classe de sixième peuvent choisir de s'associer pour concourir dans la catégorie jumelage favorisant une liaison inter-degrés vivante, effective et initiant des échanges de pratique professionnelle constructifs et appliqués.

Cette compétition permet de renforcer la liaison inter-degrés, d'ouvrir des frontières entre la France et les pays voisins, entre les établissements scolaires et entre les élèves d'une même classe !

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1989/90 : Première édition de Mathématiques sans frontières (classes de troisièmes et secondes) 2004/2005 : Première édition de Mathématiques sans frontières Junior 106 classes et 2 644 élèves en 2004/2005 pour la première édition 2 861 classes et 65 900 élèves en 2009/2010.

En regroupant les deux compétitions, ce sont près de 250 000 élèves qui ont concouru en 2010 !

30 secteurs d'organisation répartis dans 20 pays.

Des épreuves traduites dans une dizaine de langues différentes.

Toutes les équipes concourent à partir des mêmes sujets, élaborés par une équipe de conception internationale, siégeant à Strasbourg.

Partenaires :

INSPECTION PEDAGOGIQUE REGIONALE

IREM DE STRASBOURG

Epreuves :

Par classes entières de CM_2 et de sixième ou de niveau équivalent à l'étranger

Catégories : CM_2 : 8 exercices

6^e : 9 exercices

Les énoncés sont courts, attrayants, s'efforcent de ne mettre en œuvre que des outils élémentaires, les plus variés possibles. Ils sont conformes aux programmes de mathématiques en vigueur dans les pays participants.

Compétition :

Jusqu'en janvier : inscription des classes

Février : épreuve d'entraînement (50 min)

Avril : épreuve officielle (50 min)

Mai : remise des prix

Contacts :

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES JUNIOR -

Par courrier :

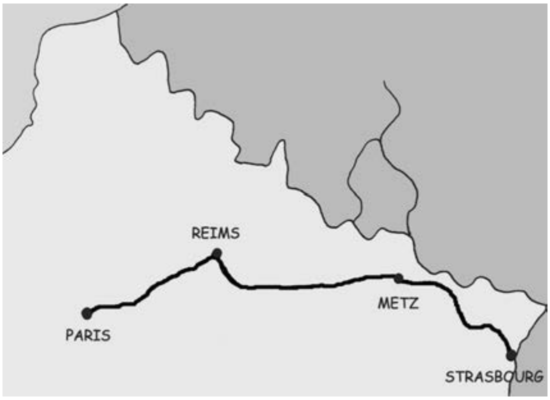
Collège J.Twinger

10, rue Ovide - 67 200 STRASBOURG - France

e-mail : *msfju@ac-strabourg.fr*

site Internet : *www.ac-strasbourg.fr/microsites/maths_*

L'autoroute (extrait de la finale 2007)



Une famille alsacienne se rend en voiture à Paris en empruntant l'autoroute A4.

Arrivée à Metz, elle découvre le panneau suivant :

La mère se retourne et aperçoit le panneau :

A Reims, au retour, les enfants voient les distances qui les séparent de Paris, Metz et Strasbourg.

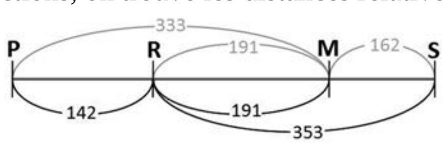
Dessine les deux panneaux qu'ils voient. (Justifie ta réponse).

Niveau scolaire :
CM_2- 6^e

Domaines mathématiques :
repérage et addition/soustraction

Analyse de la tâche :
L'énoncé comporte une quantité d'informations importante à saisir dans le détail.
- Saisir le sens de circulation (aller puis retour / point de départ et arrivée) ;
- Comprendre que les distances données sont dépendantes de l'endroit où la famille se trouve ;
- Comprendre que les distances données ne sont pas dans le même sens ;
- Comprendre que la question est, elle aussi, dépendante de l'endroit.

Une schématisation du trajet, suggérée par la carte, permet de pouvoir placer les distances 333, 191 et 162.
Par un jeu d'additions et de soustractions, on trouve les distances relatives à la question.



Reste à mettre les distances sur deux panneaux différents en regroupant sur l'un Metz et Strasbourg (sens du chemin de retour).

Commentaires et développement :
Ce genre d'exercices permet d'induire l'utilisation d'un axe sans donner cette piste directement. C'est un schéma qui a d'ailleurs été utilisé fréquemment, mais il est important de rappeler que la compétition fait travailler les élèves en groupe…

C'est un exercice qui demande d'imaginer concrètement la situation et mimer le problème (gomme qui sert de voiture) est un bon moyen de se l'approprier !

Lors de la compétition 2007, il a été pratiquement toujours abordé et réussi dans plus de la moitié des cas. Ce qui a posé le plus problème est d'avoir la réponse en 2 panneaux, les élèves n'ont pas toujours regroupé les villes correctement.

Cet exercice peut être proposé avant la classe de CM2 car il ne présente pas de difficultés techniques. Cependant il serait alors vivement conseillé de le proposer dans le cadre d'un travail en groupe pour permettre aux élèves d'échanger tant sur la compréhension de l'énoncé que sur la résolution.

L'efficacité d'un travail en groupe reste vraie pour les CM2-6^{e} !
Une variante intéressante serait un exercice où le trajet présente une fourche.

Poisson d'avril (extrait de la finale 2008)

C'est le 1er avril, Ali, Sarah, Max et Lise se collent des poissons dans le dos.
A la fin du jeu ils ont collé **6 poissons**. Chacun ne voit que le dos de ses camarades et voici ce qu'ils disent :

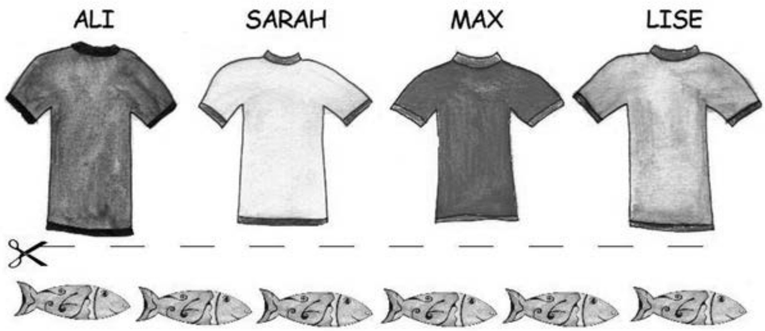
Ali : "J'ai réussi à coller des poissons à chacun des autres enfants."

Sarah : "Je vois 4 poissons en tout sur le dos de mes amis."

Max : "Aucun de mes amis n'a le même nombre de poissons."

Lise : "C'est Max qui a le plus de poissons."

Trouve combien chacun a de poissons dans son dos.



Niveau scolaire :
CM_2- 6e

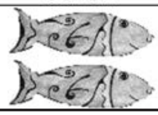
Domaines mathématiques :
raisonnements déductifs

Analyse de la tache :
L'illustration donnée suggère la manipulation et permet d'emblée de respecter la consigne des 6 poissons.
Voici une façon de procéder qui n'est pas forcément celle que choisissent les élèves.

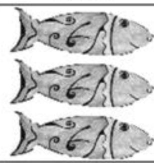
La phrase d'Ali permet de coller les poissons suivants :

Ali	Sarah	Max	Lise
			

La phrase de Sarah permet de savoir qu'elle en a deux :

Ali	Sarah	Max	Lise
			

Il reste alors deux poissons à coller et la phrase de Lise permet d'obtenir :

Ali	Sarah	Max	Lise
			

La phrase de Max sert de vérification.

Commentaires et développement :
Cet exercice a été quasiment toujours abordé par les classes et réussi par les deux tiers. Il avait été testé au préalable et, sans l'illustration, il était beaucoup moins bien réussi. En effet les élèves enchaînaient les phrases en ajoutant des poissons et la consigne de "6 poissons" présente au début de l'exercice était ensuite perdue de vue. Avoir plus de 6 poissons a été retrouvé lors de la finale mais dans une moindre mesure..

En plus d'avoir seulement 6 poissons, l'illustration proposait la manipulation. Elle a été beaucoup utilisée au départ pour l'aspect ludique qu'offrait le découpage ! Beaucoup d'élèves ont placé les poissons phrase par phrase, cependant les élèves les plus en difficulté ont pu raisonner en partie par essai-erreur.

Une erreur souvent commise est d'avoir appliquer à Ali ce qu'il disait, alors que cela ne le considérait pas.

Ce genre d'exercice permet une réelle autocorrection, et illustre que la relecture de sa solution fait partie intégrante de la résolution du problème. Il est intéressant après cet exercice de donner une variante sans illustration.

RALLYE DE L'IREM PARIS-NORD

PRÉSENTATION

Le rallye de l'Irem Paris-Nord a été créé en 1998 et va présenter en 2011 sa quatorzième édition.
Il s'adresse aux classes de CM_2 et de sixièmes de l'académie de Créteil.
L'édition 2010 a vu participer plus de 100 classes soit environ 2 500 élèves.
Il est soutenu par le rectorat de l'académie de Créteil, le conseil général du Val-de-Marne, l'université Paris 13 et la société Casio.

FICHE TECHNIQUE

Epreuves

Il se déroule au mois de mars (le 24 ou 25 mars pour l'édition 2011) et se présente sous forme de dix épreuves à résoudre par la classe entière ; ce sont les mêmes épreuves qui sont proposées aux classes de CM_2 et de sixième. La classe doit rendre une feuille-réponse unique dans un délai d'une heure.

Des informations, des conseils, des commentaires sont donnés aux enseignants par l'intermédiaire de *La Gazette du Rallye*, publication en ligne sur le site de l'Irem Paris-Nord :

http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?article84.

Cette gazette comporte trois numéros par an. En décembre, la gazette n°1 donne des informations pratiques et propose des exemples d'épreuves. La gazette n°2 paraît quelques jours avant la date fixée du rallye et donne les énoncés et les modalités pratiques. La gazette n°3 fournit les résultats, les corrections et des commentaires dans le courant du mois de mai.

Toutes les épreuves des années antérieures avec des corrections et commentaires sont disponibles à l'adresse suivante :

http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?article85

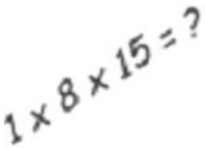
Le rallye demande un travail collectif et oblige donc la classe à s'organiser en groupes pour lire et comprendre les énoncés, conjecturer, argumenter, écouter et s'efforcer de comprendre les autres pour arrêter la réponse unique de la classe.
Des exemples de mise en place de ce type d'organisation sont disponibles sur le site de l'Irem :

http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?article82

Plusieurs collègues profitent de ce moment de l'année pour renforcer la liaison école-collège, par exemple en constituant des groupes mixtes CM_2 / 6^e

Re-comptage *Rallye 2009*

Enoncé :
Compléter les cases avec des nombres entiers pour que le produit des trois nombres de chaque ligne et chaque colonne soit le même.



1	8	15
20		

Domaine de compétence :
Arithmétique: nombres entiers, multiplication, division, équation du type ***a*** x ***x*** = ***b***.

Analyse de la tâche :
1 x 8 x 15 = 120, chaque ligne et colonne doivent fournir ce produit.
Le 6 se place immédiatement.
Sur la dernière ligne la présence de 20 implique que le produit des nombres manquants est égal à 6 soit 6 x 1 ou 3 x 2 puisque tous les nombres sont entiers. Mais le 6 ne peut être placé ni sous le 8 ni sous le 15 puisque 8 x 6 = 48 et 15 x 6 = 90 qui ne sont ni l'un ni l'autre des diviseurs de 120.
Il faut donc placer 3 et 2 sur la dernière ligne. Le 3 ne peut être placé sous le 15 car 3 x 15 = 45 qui n'est pas un diviseur de 120.

1	8	15
6	5	4
20	3	2

Le 3 et le 2 sont placés et la suite ne pose plus de problème.

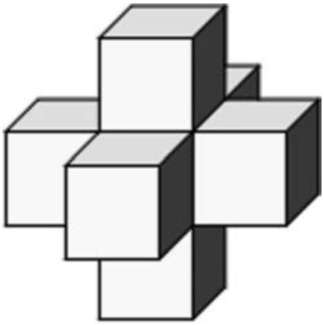
Prolongements et commentaires :
Cette épreuve peut accompagner un travail sur les carrés magiques présenté par l'Irem Paris-Nord dans le cadre de ses leçons et qu'on pourra trouver à cette adresse :

http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?article60

Ce travail a été expérimenté avec succès dans plusieurs classes de sixième.

Cubage *Rallye 2009*

Enoncé :
Ce solide est composé de cubes identiques collés entre eux.



Combien comporte t-il d'arêtes ?
Combien de faces ?

Domaines de compétence :
Géométrie dans l'espace : représentation en perspective.
Dénombrement.

Analyse de la tâche :
Ce solide comporte **60** arêtes et **30** faces.

Deux façons de voir :
1. Le cube central caché a 12 arêtes et chaque cube collé en rapporte 8 donc 8 x 6 + 12 = 60 arêtes.
2. Chaque cube présente 12 arêtes mais alors les arêtes du cube central sont comptées deux fois : 12 x 6 - 12 = 60 arêtes.
Pour les faces, chaque cube collé présente 5 faces donc 5 x 6 = 30 faces.

Prolongements et commentaires :
Cette épreuve permet de voir (ou revoir) combien le cube possède de faces et d'arêtes (d'anticiper que le nombre d'arêtes est double du nombre de faces pour cet objet) et de développer la faculté de voir en perspective.

Tous les ans, notre rallye propose une épreuve de même nature que celle-ci :
http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?article85

Nous avons pu constater que la réussite n'est pas excellente ce qui nous a incités à travailler sur le sujet et on peut trouver sur le site de l'Irem Paris-Nord de nombreuses activités en tapant " espace " dans l'option de recherche à cette adresse :
http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?rubrique12

Décodage *Rallye 2010*

Enoncé :
Chaque symbole représente un chiffre de 1 à 9.

❐ + ❐ = ❖ ⌘ = ⌘ x ❄

◆ – ❄ = ❖ ● x ● = ◆

Que représente : ● ❖ ❄ ❐ ?

Domaine de compétence :
Arithmétique : parité, carré d'un entier, élément neutre.

Analyse de la tâche :

● ❖ ❄ ❐ représente **3 8 1 4 .**

⌘ = ⌘ x ❄ permet de trouver que ❄ = 1.

❐ + ❐ = ❖ permet de trouver que ❖ est un nombre pair.

◆ – ❄ = ❖ , ❖ est un nombre pair et ❄ = 1

donc ◆ est un nombre impair

Mais ● x ● = ◆ donc ◆ est un carré impair différent de 1,

ce ne peut être que 9. La suite vient d'elle même.

Prolongements et commentaires :
Ce qui nous intéresse dans cette épreuve est la nécessité d'un raisonnement logique complet. Dans une ***véritable*** activité mathématique, la connaissance des outils et des connaissances ponctuelles ne suffisent pas ; il faut aussi ***apprendre*** à enchaîner, à ordonner, à déduire.
Nous pensons que les épreuves de type rallye permettent un tel apprentissage et préparent les élèves à la notion de démonstration.

RALLYE MATHEMATIQUE D'AUVERGNE

PRESENTATION

Le Rallye est destiné aux élèves de troisième et de seconde. La compétition n'est pas individuelle mais entre classes entières ou suffisamment représentées : plus de deux tiers.

Les classes ont à résoudre sept problème en deux heures. Les solutions doivent être rédigées. Une des solutions est présentée sous forme d'affiche.

Pour chaque exercice, le jury évalue :

- l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
- l'argumentation,
- la présentation.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Le premier Rallye a été organisé en 1998.

Compétition :
Elle a lieu un mercredi après-midi. Les centres d'épreuves sont les lycées qui accueillent aussi les collèges du secteur.

Epreuves :
Epreuves par classes. Une catégorie Troisième - Seconde.
Sept problèmes à résoudre en deux heures.

Partenaires :
Inspection Pédagogique Régionale
IREM

Contacts :
Anne CROUZIER
IREM
Complexe Scientifique Les Cézeaux
63177 AUBIERE

Exercice du rallye Auvergne-Sétif 2008 :

Enoncé :
Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour de plus, car chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant. ***Combien a-t-il mis de jours pour descendre ?***

Solution de l'auteur :
Appelons N le nombre de jours mis par le batelier pour descendre la rivière. Lorsqu'il remonte la rivière, sachant que chaque jour il fait $6\,\mathbf{km}$ de moins qu'en descendant, au bout de N jours, de remontée, il lui restera encore $6 \times N\,\mathbf{km}$ à parcourir. Comme il met un jour de plus, il parcoura cette distance en un jour. En remontant, il parcourt ainsi $6 \times N\,\mathbf{km}$ par jour et comme il met $N+1$ jours pour ce faire, nous avons :

$$6 \times N(N+1)\,\mathbf{km} = 120\,\mathbf{km}$$

ce qui après simplification par "$6\,\mathbf{km}$" donne : $N(N+1) = 20$
Quel est l'entier qui multiplié par son successeur donne 20 ? C'est 4.

Réponse : $N = 4\,\mathbf{j.}$

Vérification :
En descendant, le batelier fait $120\,\mathbf{km}/4\,\mathbf{j.}$ soit $30\,\mathbf{km}$ par jour.
En remontant, il fait $120\,\mathbf{km}/5\,\mathbf{j.}$ soit $24\,\mathbf{km}$ par jour ce qui fait bien que chaque jour en remontant, il parcourt $6\,\mathbf{km}$ de moins qu'en descendant.

Analyse de l'exercice :
Robert Noirfalise, Irem de Clermont

Nous proposons ci-dessous un inventaire des diverses solutions proposées par les 101 groupes d'élèves qui ont abordé cet exercice. 77 copies donnent le bon résultat (soit à peu près les 3/4 des groupes). 15 fournissent une argumentation complètement valide mathématiquement, 36 une argumentation partielle et 26 se contentent de donner le résultat sans justification ou en disant qu'ils ont procéder par tâtonnement mais sans donner davantage d'indications sur la démarche suivie.

Les solutions utilisées par les élèves :
On peut distinguer deux types de solutions : des solutions algébriques d'une part et des solutions arithmétiques d'autre part.

2. a. Solutions algébriques.
Les élèves ont mis le problème en équations, le plus souvent avec, a priori, deux inconnues, le nombre x de jours mis par le batelier pour descendre la rivière et y la distance parcourue chaque jour à la descente.

Mises en équations :
- Ils expriment en fonction de x la distance parcourue quotidiennement à la descente et à la remontée et traduisent en équation la différence entre les deux:
"Descente : nombre de km/jour : $\frac{120}{x}$ *"Remontée : nombre de km/jour :* $\frac{120}{x+1}$
Equation du problème : $\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$
- Mises en équations sous forme de système consistant à écrire la distance du trajet sous deux formes correspondant, l'une à la descente et l'autre à la montée.

$$\begin{cases} 120 = xy \\ 120 = (x+1)(y-6) \end{cases}$$

Résolution :
La majorité des groupes ayant réussi à résoudre le problème, a choisi d'éliminer la seconde variable, y , en l'exprimant en fonction de la première. Ils sont arrivés avec quelques variations à une équation du second degré de la forme :

$$x^2 + x - 20 = 0 \text{ ou } x^2 + x = 20$$

Ne percevant pas que ces relations traduisent une relation de divisibilité, ils ont recours à des techniques de factorisation : le fait que, le plus souvent, ils aient utilisé x au lieu d'une notation signifiant qu'il s'agit d'un entier (n par exemple) n'est sûrement pas innocent et peut justifier qu'ils ne pensent pas à des propriétés arithmétiques de divisibilité.

$$x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$$

ou encore :

$$x^2 + x - 20 = x^2 - 4x + 5x - 20 = (x-4)(x+5)$$

D'autres ont écrit :

$$x^2 + x - 20 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 20 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

ou encore

$$x^2 + x - 20 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{80}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$

Plus étonnant ces élèves qui utilisent le discriminant ;*"c'est un polynôme du second degré, on calcule le discriminant* $\Delta = 1 + 80 = 81$ " puis qui se servent des formes de solutions :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

Une petite enquête dans une des classes (il y en a trois) utilisant cette solution laisse entendre qu'elle serait le fait de bons élèves ayant repéré ce type de technique de résolution d'équations du second degré dans leur manuel de seconde (le manuel Repères).

D'autres groupes, moins nombreux, ont éliminé x et l'ont exprimé en fonction de y et sont alors arrivés à une équation de la forme :

$$720 = y^2 - 6y$$

Un groupe l'a résolu de la façon suivante en pensant à ajouter 9 aux deux membres de l'équation :

$$720 + 9 = y^2 - 6y + 9$$

$$729 = (y-3)^2$$

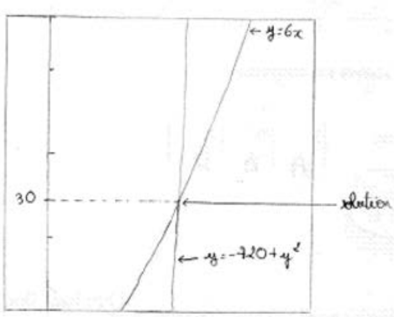
$$\sqrt{729} = y - 3$$

$$y = 30$$

Un groupe utilise aussi pour résoudre cette équation le discriminant, enfin un groupe utilise une calculatrice graphique :

"Comme nous ne pouvons résoudre cette équation algébriquement, nous l'avons résolue graphiquement à l'aide de la calculatrice."

Voici l'allure approximative de la courbe :



Nous déduisons que $y = 30$ mais nous le vérifions :

$6 \times 30 = 180$

et $-720 + y^2 = 180$

Donc $y = 30$.

Nous calculons x :

$120 = x \times 30$

$x = 4$

La solution du système est donc $(4 ; 30)$.

Cela signifie que le batelier parcourre 30 kms par un jour pendant 4 jours pour faire ses 120 kms, à l'allée (en descendant).

Mais les données sont différentes pour le retour.

Les solutions de type algébriques comme celles qui précèdent sont majoritairement le fait d'élèves de lycées mais on les rencontre aussi sous la plume de collégiens.

2.b Solutions arithmétiques

Nous avons qualifié d'arithmétiques les solutions utilisant le fait que N, le nombre de jours mis par le batelier pour descendre le fleuve, est un entier.

Certains groupes ont commencé par modéliser le problème de façon algébrique comme ci-dessus. Ils arrivent à l'équation $x^2 + x = 20$, la résolvent en remarquant que x étant entier la seule solution possible est $x = 4$.
D'autres factorisent, obtiennent $x(x+1) = 20$ et concluent.

Plus nombreux sont ceux qui utilisent d'emblée le fait que N est un entier et ils le font varier, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, trouvent ainsi que $N = 4$ convient, contrairement aux autres valeurs. Ayant trouvé une solution, ils s'en satisfont et ne justifient pas que c'est la seule. (Voir en annexe, la solution proposée par une classe de LEP).
De façon pertinente, certains limitent les valeurs de N possibles en utilisant le fait qu'*en remontant le batelier fait 6 km de moins qu'en montant,* ce qui impose que N soit inférieur à 20. Sinon, il ferait moins de 6 km par jour en descendant, ce qui ne se peut pas. Les élèves font des essais pour des valeurs de N entre 1 et 19 et s'arrêtent quand ils ont trouvé une solution qui convient.

Signalons aussi ces solutions qui supposent simultanément que N, mais aussi la distance parcourue quotidiennement en descendant sont des entiers (ce qui en toute rigueur devrait faire l'objet d'une démonstration, rien n'imposant que la distance parcourue soit un entier).

A titre de premier exemple, les élèves d'un groupe cherchent alors les diviseurs de 120, ils en font la liste et trouvent la solution en remarquant que simultanément N et $N+1$ doivent être des diviseurs de 120.

La liste des diviseurs les conduit à examiner un nombre de cas limité : 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, et ils trouvent ainsi la solution et prouvent qu'elle est unique.
Un autre groupe examine les décompositions de 120 tout d'abord comme produit de deux entiers[1], puis s'autorise que la distance parcourue ne soit pas entière tout en imposant que le nombre de jours reste entier.

$$
\begin{array}{c}
N \times Y \\
1 \times 120 \\
2 \times 60 \\
3 \times 40 \\
4 \times 30 \\
5 \times 24 \\
6 \times 20 \\
8 \times 15 \\
16 \times 7,5
\end{array}
$$

et remarquent que c'est uniquement pour la valeur $N = 4$ que l'on obtient avec l'entier suivant, en l'occurrence 5, une différence de 6 pour Y, la distance parcourue.

En conclusion, on peut dire qu'en situation de résolution de problèmes dans le cadre d'un rallye, les élèves savent faire preuve d'initiatives, de surcroît souvent heureuses, puisque cela les conduit à une réponse exacte même si celle-ci n'est pas toujours complètement argumentée

1 Cette liste est une copie d'une solution fournie par les élèves et témoigne d'essais ne se limitant pas aux entiers. La décomposition en entiers n'est pas non plus complète …

Annexe : une copie d'une classe de LEP, une seconde BEP.

Jours pour descendre la riviere	Jours pour remonter la riviere. 1 jour de plus que pour la descendre	km par jours parcourus pour descendre la riviere	km par jours pour remonter la riviere. 6 km de moin par jour	La multiplication pour remonter la riviere avec 1 jours de plus
1 jour	2 jours	120 km	114 km	2 × 114 = 228 km
2 jours	3 jours	60 km	54 km	3 × 54 = 162 km
3 jours	4 jours	40 km	34 km	4 × 34 = 136 km
4 jours	5 jours	30 km	24 km	24 × 5 = 120 km

RALLYE MATHÉMATIQUE DE BRUXELLES

PRÉSENTATION

Le rallye est destiné aux élèves de 1re et 2nd secondaire de l'enseignement belge (ce qui équivaut aux classes de 5e et 4e de collège en France).
Chaque classe a une heure pour résoudre collectivement cinq énigmes, présentées autour d'un sujet donné.
Les meilleures classes sont sélectionnées pour la finale, où elles doivent cette fois résoudre successivement quatre énigmes.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Ce Rallye Mathématique a été organisé pour la première fois en 2003, avec la collaboration du Rallye mathématique de Toulouse. Il a pris par la suite son indépendance. Sa particularité est d'être proposé à la fois à des écoles néerlandophones et francophones. Depuis 2007, l'une des cinq énigmes du rallye est proposée dans l'autre langue à chacun des groupes. Il rassemble actuellement plus de 2 000 élèves.

Partenaires :
- Haute Ecole Francisco Ferrer,
- Unité d'Enseignement et de Recherche "Mathématiques appliquées
- Ville de Bruxelles
- IREM de Bruxelles
- Texas Instruments

Epreuves :
Par classe (5e et 4e).
Enigmes proposées sous forme ludique sur un thème donné (Fibonacci, Labyrinthes, BD…) pour susciter l'intérêt et l'envie de chercher.

Compétition :
Eliminatoires : en février - mars (une heure durant le temps scolaire)
Finale : en avril - mai à la Haute Ecole Francisco Ferrer.

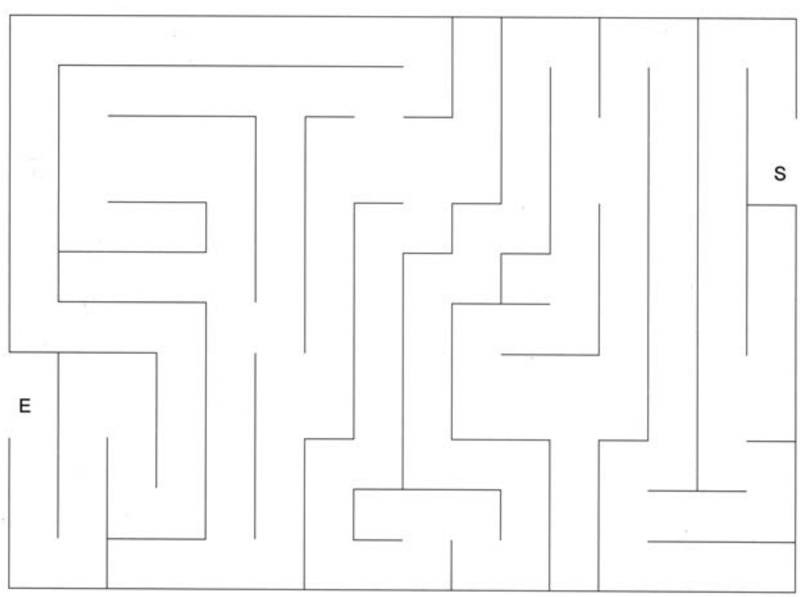
Contacts :
Daniel Justens : *daniel.justens@he-ferrer.eu*
Joëlle Lamon : *joellelamon@yahoo.fr*
Guy Ernst : *guy.ernst@scarlet.be*

AUTOUR DU LABYRINTHE

Question 1 : comprendre la labyméthode

Une méthode pour trouver à coup sûr la sortie d'un labyrinthe comportant une seule entrée et une seule sortie a été proposée vers 1890 par le français Trémaux.
La voici exposée de manière algorithmique :
1. Pour démarrer on prend le chemin qui se trouve le plus à sa droite. Si c'est un cul-de-sac, on revient sur ses pas ; si on arrive à un carrefour, on prend un chemin quelconque non exploré.
2. Si on arrive à un carrefour déjà exploré, on revient sur ses pas.
3. Si on arrive à un carrefour déjà exploré par un chemin parcouru dans l'autre sens, on choisit si possible un chemin non exploré, sinon on choisit un chemin parcouru dans un seul sens.

Pourriez-vous l'illustrer sur le labyrinthe ci-dessous en indiquant clairement à l'aide d'un trait continu comment ce labyrinthe peut être parcouru ?



Et quel est d'après vous le chemin le plus court ?

Choisissez une autre couleur pour le montrer sur le dessin. Expliquez.

Analyse de la question

Domaine : Géométrie : respect de consignes spatiales.

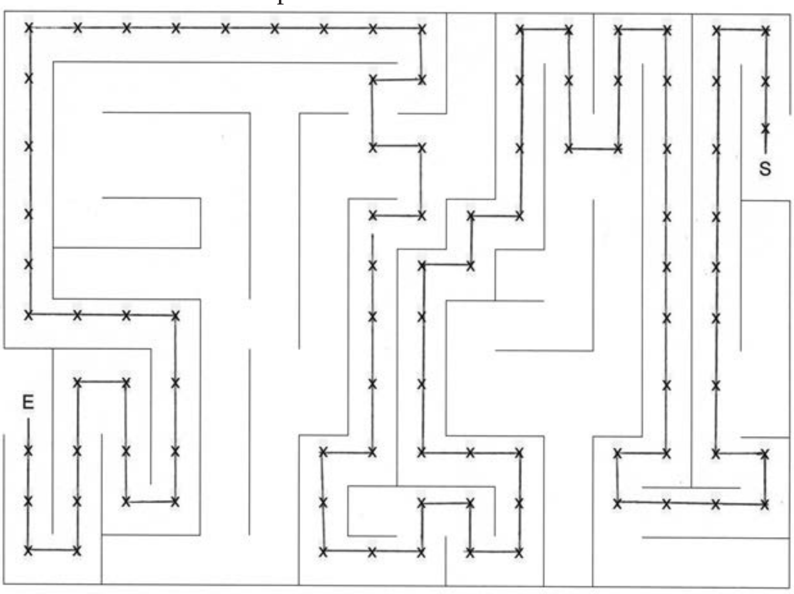
Cette question demande aux élèves d'appliquer graphiquement un procédé expliqué en français. Elle permet de travailler la lecture d'énoncés.
Il est possible de l'exploiter ultérieurement de plusieurs façons : soit par d'autres constructions géométriques expliquées, soit par la rédaction de consignes permettant de refaire une construction, soit encore en restant dans le thème des labyrinthes en cherchant d'autres méthodes, en remarquant qu'elles sont utilisées pour programmer des robots

(voir site ***http://math.umons.ac.be/an/robot08***)

Elle peut aussi être le point de départ à une recherche sur les labyrinthes (ou dédales) construits pour empêcher l'utilisation de certaines méthodes comme celle qui consiste à longer constamment une paroi, qui n'est plus valide si l'arrivée est située à l'intérieur du labyrinthe par exemple.
Pour information, un site permet de créer des labyrinthes simples de forme variée : ***http://www.echodelta.net/mafalda/mafalda.htm***

Correction et commentaires

Plusieurs solutions satisfaisant la méthode sont possibles avec l'énoncé donné. Voici le chemin le plus court :



Exemples de justifications données par les élèves pour le chemin le plus court :
- il n'y a pas de détour, il n'y a pas de culs-de-sacs (justification exacte)
- c'est le plus court (justification très partielle)
- il faut aller à vol d'oiseau de l'entrée à la sortie (refusé).

Question 2 : sortir du labynombre

Voici un tableau de nombres à parcourir en suivant certaines règles :

→	12	36	18	9	33	11	1	
	6	9	72	36	3	22	33	
	18	24	3	45	15	60	66	
	9	72	2	90	10	120	15	
	36	2	70	5	50	25	75	
	4	32	7	35	450	75	150	
	96	9	63	189	9	144	6	
	32	81	54	27	81	9	108	
	2	27	3	54	18	3	12	→

a) Indiquer un chemin permettant de sortir du labyrinthe sachant que l'on ne peut pas se déplacer en diagonale et qu'on ne peut passer d'un nombre à un autre que si le deuxième est un multiple du premier ou un diviseur impair du premier.
Par exemple, de la case 20, on peut passer à la case 40 (multiple de 20) ou à la case 5 (diviseur impair de 20), mais pas à la case 4 (diviseur pair de 20).

4	20	5
9	40	12

b)Trouver le chemin le plus court possible (et le dessiner dans une autre couleur s'il est différent du chemin précédent) et expliquer pourquoi il est le plus court.

Analyse de la question

Domaine : Arithmétique : multiples et diviseurs.

Cette question est une façon originale d'utiliser les multiples et diviseurs d'un nombre.
La justification du chemin le plus court peut être adaptée aussi pour recomposer des figures complexes en figures plus simples. Elle est un bel exemple d'argument mathématique servant à certifier la réponse trouvée.

Correction et commentaires

En italique, les cases accessibles, en gras le chemin le plus court, qui ne comporte aucun retour en arrière, et est donc constitué de 8 déplacements horizontaux et de 8 déplacements verticaux.

→	***12***	***36***	18	9	33	11	1	
	6	***9***	***72***	*36*	*3*	22	33	
	18	24	***3***	***45***	15	60	66	
	9	72	2	***90***	10	*120*	*15*	
	36	2	*70*	***5***	***50***	*25*	*75*	
	4	32	*7*	*35*	***450***	*75*	*150*	
	96	9	*63*	*189*	***9***	144	6	
	32	81	54	*27*	***81***	***9***	108	
	2	27	3	54	18	***3***	***12***	→

La plupart des erreurs sont dues à l'utilisation de diviseurs pairs.

Exemples de justifications données par les élèves pour le chemin le plus court : il n'y a pas moyen de passer par moins de 15 cases, il n'y a pas de détour, on ne se déplace que vers la droite et vers le bas, c'est le chemin qui se rapproche le plus de la diagonale.

Question 3 : construire un labycercle

Arthur veut construire un labyrinthe circulaire dans son jardin.

Il sera constitué de 5 parois, cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 et 5 m.
Chaque paroi circulaire sera ouverte à n' importe quel endroit sur 1,2 m (à mesurer sur l'arc de cercle) pour permettre un passage.

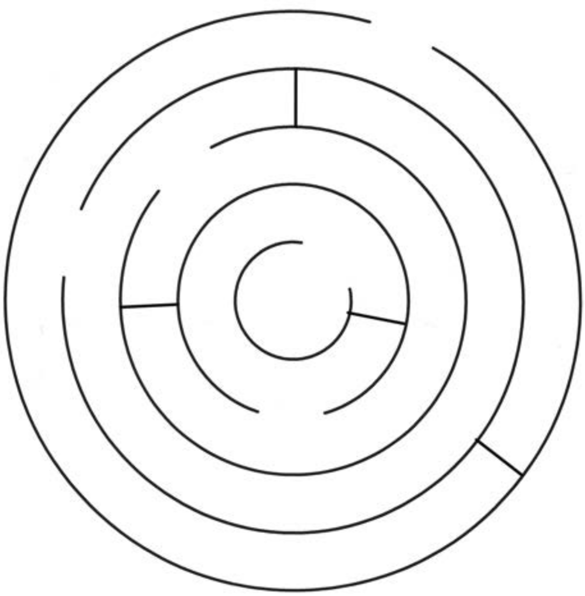
Entre les différents cercles successifs, il décide d'ajouter une paroi la plus courte possible, mais placée n'importe où.

On vous demande :
a) de dessiner sur une feuille séparée, agrafée au questionnaire, un plan possible pour ce labyrinthe à l'échelle 1/50.
b) de calculer la longueur totale des parois à prévoir en précisant votre raisonnement.

Analyse de la question

Domaine : Géométrie : cercles et périmètre, échelles.
Cette question aborde plusieurs sujets et possède donc des prolongements mathématiques multiples : travail sur l'échelle, sur la compréhension d'énoncés, sur la traduction sous forme de schéma, sur la structuration des étapes de la résolution.
Elle peut aussi permettre des développements sur l'histoire des labyrinthes, leurs rôles, leurs traces actuelles, leur présence dans des domaines artistiques variés : arts, littérature, cinéma.
Enfin, elle permet des exploitations plus ludiques : recherche de la sortie pour des labyrinthes originaux (citons par exemple ceux de France de Ranchin ou de Philippe Mignon), jeux actuels,...

Correction et commentaires :
a) Le dessin à tracer est du type suivant (l'emplacement des murs et des passages peut varier).
Les erreurs les plus fréquentes concernent les parois à placer et l'échelle.



b) Recherche de la longueur totale des parois :
Périmètre total des cercles : $2\pi(1+2+3+4+5)\,\mathbf{m} = 30\pi\,\mathbf{m}$
Longueur totale des ouvertures (à retrancher) : 1,2 x 5 m = 6 m
Parois (à ajouter) entre les cercles : 1 x 4 m = 4 m
Longueur totale des parois : $30\pi - 6 + 4 = 30\pi - 2$,
soit environ 92,248 m

Parmi les erreurs, il y a confusion entre périmètre et aire, mélange entre le dessin réel et le dessin à l'échelle, utilisation de 5 parois.

Question 4 : construire un labylibre

On vous demande de construire le labyrinthe le plus original possible avec les contraintes :
1) Le labyrinthe est un hexagone régulier dont chaque côté mesure 8 cm.
2) L'entrée et la sortie sont situées sur des côtés non opposés de cet hexagone.
3) Chaque couloir a 2 cm de large.

Analyse de la question :

Domaine : Géométrie : constructions géométriques, polygones.

Cette question permet aux élèves de laisser libre cours à leur imagination, tout en fournissant un cadre assez strict mais accessible à tous.

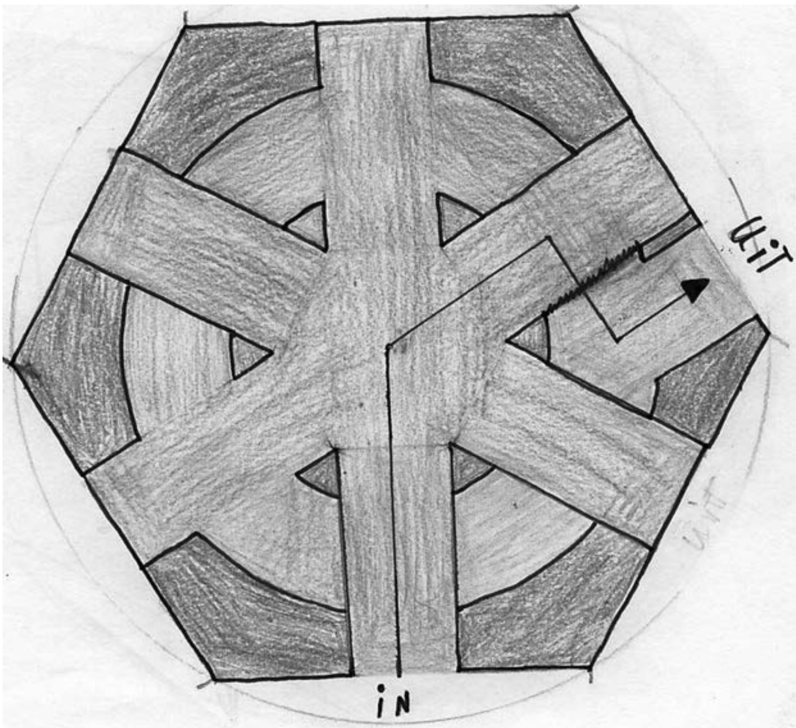
Correction et commentaires :

Les solutions proposées devaient satisfaire les 3 critères (hexagone régulier de 8 cm de côté, *Entrée et Sortie* non opposées, écart de 2 cm entre les côtés d'un couloir).

Les erreurs les plus courantes sont la difficulté de prévoir des couloirs de 2 cm et l'oubli du critère *Entrée et Sortie* non opposées.

Certains élèves ont fait preuve d'une très grande créativité, et cette question semble avoir inspiré un travail allant vraisemblablement au-delà de l'heure limite.

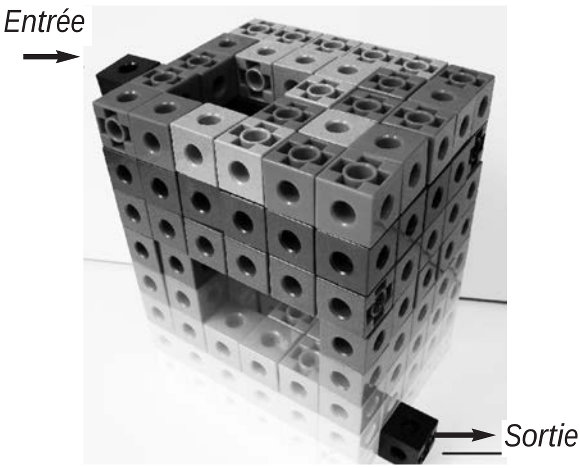
Voici l'une des nombreuses propositions reçues :



Question 5 : sortir du labycube

Sara a construit un immeuble en cubes. Elle l'a ensuite percé de 2 tunnels. Elle a également placé un robot dans le cube noir d'entrée.

Indiquez au robot le chemin le plus court pour arriver au cube noir de sortie sachant que le robot peut traverser les faces des cubes, mais doit rester à l'intérieur de l'immeuble.



Liste des commandes possibles :

avant/arrière,

haut/bas et

gauche/droite

Analyse et la question :

Domaine : Géométrie : orientation spatiale, algorithme.

Outre la compréhension de la photo, cette question fait également appel à l'orientation spatiale, ce qui rappellera à certains la tortue LOGO, et à d'autres les jeux vidéos où il faut se déplacer dans un espace à 3 dimensions. La confrontation des avis des élèves devrait aider à développer la vue dans l'espace.

Correction et commentaires :

1 x avant + 7 x bas + 1 x droite + 1 x gauche + 4 x avant + 1 x gauche + 1 x droite.

(16 mouvements)

Ici, beaucoup se sont laissés prendre au piège du "trou". Souvent, la dernière commande a été oubliée.

Les élèves ont eu beaucoup de mal à se mettre "à la place du robot".

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le Rallye Mathématique Poitou-Charentes est une compétition de classes complètes. Les élèves s'organisent en groupes de recherche et se répartissent les problèmes à résoudre. Un même groupe peut prendre en charge, sur toute la durée de l'épreuve une question spécifique, en particulier pour les questions concernant la recherche documentaire. Depuis 2004 un sujet de recherche (CDI- Internet) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le sujet. Les élèves doivent donc, avant l'épreuve, réunir une documentation qui leur servira à répondre aux questions lors de l'épreuve. Depuis 2004, les recherches ont porté successivement sur Sophie Germain, Marie Agnesi, Eratosthène, Alicia Boole-Stott, le nombre PI, Le nombre d'or, et en 2010 sur les numérations et machines à calculer.

La classe doit fournir un dossier avec une feuille par problème. On demande des explications et on apprécie l'esprit des "copies" : propreté, dessins, humour. Les problèmes sont variés pour que chacun puisse participer avec son niveau de compétences. Le palmarès, les corrigés et les commentaires sont envoyés aux classes participantes après l'épreuve. Toutes les épreuves du rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

http://apmep.poitiers.free.fr/

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1991 : création du rallye de Charente-Maritime et des Deux-Sèvres

1992 : Deuxième édition étendue aux quatre départements de l'académie.

1993 : Rallye annulé en raison de l'organisation des Journées nationales de l'APMEP à Poitiers.

1994 : Reprise du rallye

2007 : Extension du rallye aux classes de sixième, cinquième et quatrième.

2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.

Épreuve :
Collective
Classes de secondes : 2 heures avec 8 ou 9 problèmes.
Classes de collèges : une épreuve par niveau de 1 heure avec 4 ou 5 problèmes.

Compétition :
Épreuve d'entraînement envoyée à tous les collèges, lycées et LP, publics et privés de l'académie.
Épreuve finale concernant uniquement les classes inscrites où tous les documents sont permis.

Partenaires :
Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

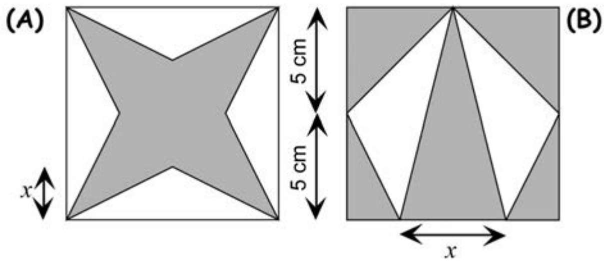
Contact :
APMEP, IREM de Poitiers, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS Cedex

Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT.

Classes de seconde

Aires louches

Pour chacune des figures carrées suivantes A et B,



Calculez la valeur de x (si c'est possible) de façon que l'aire grisée soit égale à 80 cm².

Niveau scolaire :

Cet exercice est accessible dès la classe de quatrième puisqu'il met éventuellement en œuvre des résolutions d'équations.

Domaines mathématiques :

Les aires, la résolution de problèmes par l'arithmétique ou par l'algèbre.

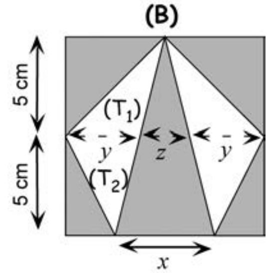
Analyse de la tâche :

Pour le carré (A), les données ne permettent pas de calculer directement l'aire de la partie grisée. D'où le calcul préalable de l'aire des quatre triangles blancs

- par l'arithmétique : Les quatre triangles ont une aire de 20 cm² ; chaque triangle a une aire de 5 cm². Connaissant la longueur de la base, on en déduit la hauteur.
- par l'algèbre : résolution de l'équation $4(5x) = 20$.

Pour le carré (B), deux méthodes possibles :

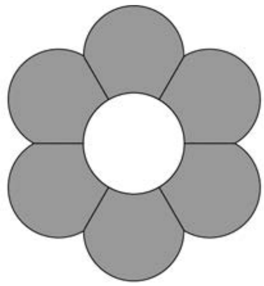
- le calcul direct de l'aire grisée en fonction de x
- le calcul de l'aire de la partie blanche en faisant intervenir de nouvelles inconnues : y et z comme le montre le dessin. Les quatre triangles T1 ou T2 ont même hauteur (5 cm) et même base y. Leur aire totale étant de 20 cm², chacun a une aire de 5 cm². D'où $2{,}5\,y = 5$, soit $y = 2$ cm. On en déduit que $z = 6$ cm et donc que $x = 12$ cm. Le problème n'a donc pas de solution.



Commentaires
La situation du carré (B) est donc très intéressante : bien que la résolution de l'équation aboutisse à une solution algébrique, il faut revenir à la situation du problème pour se rendre compte que cette solution n'est pas acceptable.

Si la première question [le carré (A)] a en général été bien résolue, beaucoup d'élèves ont été surpris par l'impossibilité à la deuxième question (lorsqu'ils s'en sont rendu compte !) et ont eu des difficultés à l'expliquer.

On vous fait une fleur



Le cœur de la fleur est un disque de rayon 1. Les contours extérieurs des pétales en gris sont des demi-cercles dont les centres sont les milieux des côtés d'un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 2.
Quelle est l'aire totale des pétales ?

Niveau scolaire :
Compte tenu des calculs à effectuer (calcul avec des racines carrées), cet exercice est accessible seulement à partir de la classe de troisième.

Domaines mathématiques :
Les aires et le calcul numérique exact.

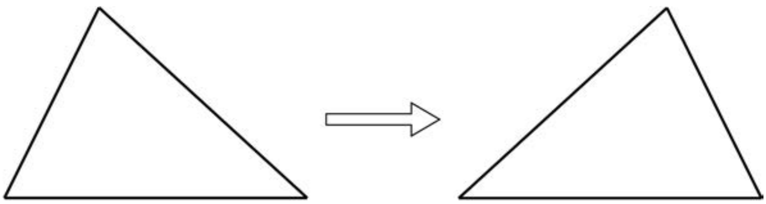
Analyse de la tâche :
Il s'agit de décomposer la figure en figures élémentaires dont on sait calculer les aires.
L'aire des pétales est égale à celle de l'hexagone (six triangles équilatéraux de côtés 2) augmentée des six demi-disques de rayon 1 et diminuée du disque central de rayon 1.

L'aire A est donc : $A = 6\sqrt{3} + 2\pi \approx 16,67$

Commentaires :
Les auteurs pensaient vraiment faire une fleur à des élèves de seconde avec un tel problème. Il n'en a rien été : 37 % des classes seulement ont réussi ce problème.
Cette question a été l'occasion d'observer des erreurs classiques [utilisation de la formule du périmètre pour le calcul de l'aire du disque], mais aussi inattendues [l'aire du triangle est égale au cube de son côté] !

Le triangle symétrique

Comment transformer un triangle en carton, qui n'est pas isocèle et dont tous les angles sont aigus, en son symétrique ? Il suffit bien sûr de le retourner !



Mais si les deux faces sont de couleurs différentes, on obtient un triangle d'une autre couleur. Il reste alors la solution de le couper en quelques morceaux bien choisis qui, réarrangés, formeront un triangle symétrique de la même couleur que l'original.

Sauriez-vous trouver un tel découpage en trois morceaux (les coupes doivent être rectilignes) ?

Niveau scolaire :
Quatrième - troisième. Les outils mathématiques mis en œuvre dans ce problème sont du niveau de la classe de sixième. Mais le traitement du problème apparaît tout de même difficile à ce niveau.

Domaines mathématiques :
La symétrie orthogonale, la médiatrice et ses propriétés dans le triangle.

Analyse de la tâche :
Les couleurs, au recto et au verso, étant différentes, on ne peut pas retourner les pièces du triangle qui seront découpées. L'idée de pièces ayant un axe de symétrie doit venir à l'esprit et amener à la propriété des médiatrices dans un triangle.

Il suffit donc de découper le triangle en trois morceaux suivant ses médiatrices : OA = OB = OC. Les pièces (1) et (2) pivotent autour de O en sens inverse l'une de l'autre pour prendre leur place indiquée dans la figure 2, la pièce (3) restant en place.

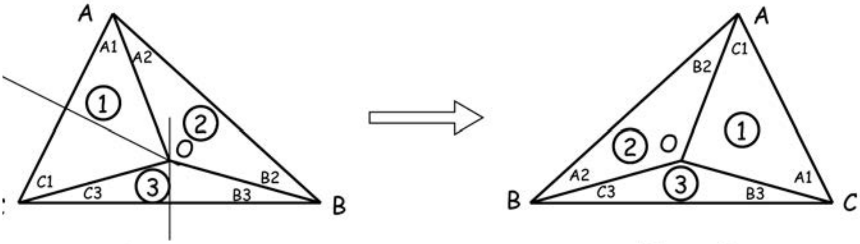


Figure 1 Figure 2

Commentaires :
Aucune classe n'a résolu ce problème qui met en évidence l'écart important qui peut exister entre la connaissance des outils mathématiques et leur utilisation dans la résolution d'un problème : " Il faut penser à… " ! Deux classes ont tout de même donné des éléments de solutions, mais n'ont pas abouti.

Classes de quatrième

Grivèlerie

Un restaurateur s'adresse à sa femme qui tient la caisse :

- Non mais tu te rends compte, ma caille, c'est incroyable ! Ce midi il y avait exactement autant de clients que de menus* possibles avec notre carte. Eh bien pas un seul client n'a commandé le même menu ! Pas un seul !
À croire qu'ils s'étaient passés le mot !

- Mon petit lapin, au lieu de t'émerveiller pour des coïncidences sans intérêt, tu ferais mieux de regarder le montant de la recette de ce midi. Oui, tu lis bien 380 € ! Il y a un client qui est parti sans payer ! Et si je compte bien c'est celui qui a choisi …

Pourriez-vous retrouver le menu choisi par le client indélicat ?

*Un menu comprend une entrée, un plat et un dessert.

Niveau scolaire :
Cinquième - quatrième. Les opérations à effectuer sont largement du niveau sixième. Mais le traitement de la situation le rend difficile à ce niveau.

Domaines mathématiques :
Dénombrement, calcul numérique.

Analyse de la tâche :
C'est tout d'abord une lecture attentive du texte qui amène à déterminer le nombre de menus possibles. Une fois ce travail effectué, les calculs sont relativement simples.
Puisque tous les menus possibles ont été choisis, il y a eu 2 x 3 x 4 = 24 clients.
Ainsi, chaque entrée a été choisie 12 fois, pour un coût de
(4 + 3,50) x 12 = 90 €.
Chaque plat a été choisi 8 fois pour un coût de
(6,50 + 8 + 12) x 8 = 212 €.
Chaque dessert a été choisi 6 fois pour un coût de
(4 + 3 + 5 + 4,50) x 6 = 99 €.
Le montant de la recette devrait donc être 90 + 212 + 99 = 401 €.
Le client qui n'a pas payé son repas a donc pris un menu à 21 €, ce qui est le seul menu le plus cher.
Il a donc choisi en entrée : l'assiette de charcuterie (4 €), en plat l'entrecôte garnie : (12 €) et en dessert : la tarte Tatin (5 €).

Commentaires :
Comme tout bon problème, ce n'est pas le contenu mathématique lui-même qui est en jeu ici mais l'analyse et le traitement de la situation. Les dénombrements ne font pas partie explicitement des programmes de mathématiques et pourtant c'est une activité très formatrice qui développe des qualités d'organisation et de méthode. Aussi, si 85 % des classes ont résolu ce problème, elles ont dépensé beaucoup d'énergie pour une telle réussite. En effet, la plupart des classes a détaillé tous les menus possibles et leur coût. Une classe a construit un arbre des possibilités et une autre classe a calculé le coût global des menus en précisant qu'il y avait "une répartition équitable".

Les situations de dénombrement sont à développer dans les classes.

Classes de cinquième

Année multiple

On dit que 2010 est une année multiple du fait que le nombre 20 formé par les deux premiers chiffres est un multiple du nombre 10 formé par les deux derniers chiffres. 2001 était une année multiple.

Combien y a-t-il d'années multiples dans ce troisième millénaire (de 2001 à 3000) et quelles sont-elles ?

Niveau scolaire :

Sixième - cinquième.

Domaines mathématiques :

Multiples et diviseurs.

Analyse de la tâche :

La définition d'une année multiple à partir de l'année 2010 et l'exemple avec l'année 2001 donnait tous les éléments pour répondre à la question posée. Il s'agissait donc de rechercher successivement tous les diviseurs de 20, 21, 22 jusqu'à 29. On ne les énumère pas ici, mais on en trouve 43.

Commentaires :

Si la notion de multiple et de diviseur est rencontrée dès le CM, la recherche systématique de l'ensemble des diviseurs d'un nombre n'est pas une tâche aisée et la réussite totale à ce problème a été très faible (10 %) ; sinon, ce sont 45 % des classes qui ont donné les bonnes années sur au moins six siècles. La principale difficulté rencontrée est l'absence de méthode dans la recherche des diviseurs. Une erreur assez souvent rencontrée aussi est
et diviseurs dans le numéro de l'année : 2040, 2060, 2080, par exemple, étaient pour eux des “années multiples” !

Classes de sixième

Pavage
Tous les motifs du carreau ci-contre sont des carrés ou des triangles rectangles isocèles. Ils sont aussi de trois teintes : blanc, gris et noir.
On choisi l'aire du carré central gris comme unité d'aire.

1°) Quelle est l'aire totale de chacune des zones : l'ensemble des motifs blancs, l'ensemble des motifs gris et l'ensemble des motifs noirs ?

2°) Quelle est alors l'aire du carreau ?

3°) En découpant ce carreau en un nombre minimum de pièces, faites deux carreaux carrés de mêmes dimensions. Dessinez ces deux carreaux.

Niveau scolaire :
Sixième - cinquième.

Domaines mathématiques :
Géométrie : dénombrement d'unités d'aire

Analyse de la tâche :
Le carré - unité étant bien repéré, il s'agit, pour chacune des trois zones, de dénombrer les unités, les moitiés ou les doubles d'unités d'aires.

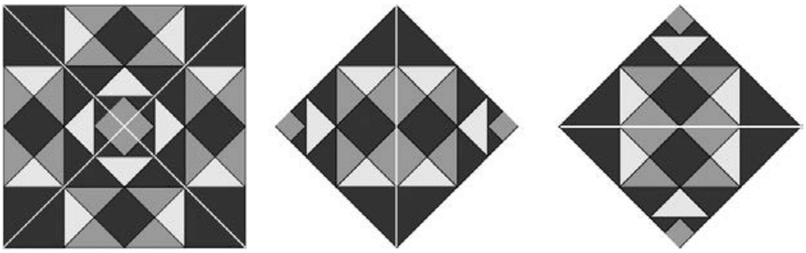
1°) Tous les triangles rectangles gris et blancs ont comme aire la moitié du carré - unité. La zone grise comporte 16 triangles et le carré central.
Son aire est donc **9**.

La zone blanche comporte 12 triangles. Son aire est donc **6**.

La zone noire comporte des triangles et des carrés de deux dimensions. L'aire du grand carré est égale au double de l'aire unité comme le montrent les pointillés au centre du dessin. Il y a 4 grands carrés, 4 grands triangles, 4 petits carrés et 4 petits triangles, et donc une aire de 17.

2°) L'aire du carreau est donc 9 + 6 + 17 = **32.**

3°) Le découpage attendu, en quatre parties, donne deux carrés aux motifs identiques.



Commentaires :
Déterminer des aires par dénombrement d'unités, sans faire appel aux centimètres carrés, est primordial pour de jeunes élèves, en particulier au CM et en 6e. Cette situation n'était pas excessivement difficile et pourtant 50 % seulement des classes ont déterminé correctement les aires des zones blanches et grises. C'est en effet au niveau de la zone noire que résidait vraiment le problème puisqu'elle avait des carrés et des triangles rectangles isocèles de deux tailles ce qui compliquait le dénombrement.

Certaines classes n'ont pas pu s'empêcher de mesurer le côté du carré - unité pour obtenir des aires en cm² !

RALLYE MATHEMATIQUE de la SARTHE

PRÉSENTATION

Ce rallye est ouvert à toutes les classes de tous les collèges sarthois.

C'est la classe entière qui travaille et doit s'organiser pour résoudre les énigmes mathématiques : la réponse est collective.

FICHE TECHNIQUE

Calendrier et contenu des épreuves :

- Deux épreuves de qualification se déroulent dans les collèges. Elles comportent généralement, dix petits problèmes et deux travaux géométriques.
- Une finale qui a lieu début juin sur un site de plein air, réunit les dix-huit classes issues des qualifications. Dix ateliers posent des problèmes dont la résolution fait appel à la logique, au calcul et à l'organisation.

Les objectifs :

- faire pratiquer des mathématiques ;
- aider à acquérir une méthode de travail en groupe ;
- entraîner au débat : argumenter, discuter de preuves, trouver des exemples et contre-exemples, vérifier…
- proposer un projet stimulant où s'impliquent tous les élèves d'une classe et qui permet des rencontres entre enseignants.

Organisation :

L'organisation est prise en charge par une équipe de professeurs (6 à 8 selon les années), avec le soutien de l'Inspection Académique de la Sarthe et des IPR.

Historique :

Le Rallye se déroule depuis 1990, avec des effectifs qui augmentent chaque année : 440 classes de 45 collèges en 2010, soit environ 11 000 élèves pour ce seul département.

Contacts :

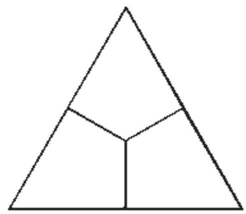
Centre de ressources : Collège Kennedy - ALLONNES (Sarthe)
Professeur responsable : Gilles Ravigné
gilles.ravigne@ac-nantes.fr

Tous les renseignements, sujets, réponses etc, figurent sur le site :
http://sarthe.cijm.org

MOSAïQUE

Conditions de travail.
Cet exercice était proposé aux élèves de 6e et 5e (11/13 ans) dans l'un des 10 ateliers de la finale 2009 du Rallye mathématique de la Sarthe (voir "Pliages et géométrie").

Enoncé
Allez au stand N° 2. où vous recevrez le matériel suivant :
- une feuille de pièces à découper. Ce sont des petites pièces triangulaires comme celle-ci ; chaque pièce est blanche et partagée en trois surfaces,
- quatre crayons de couleur : un bleu, un rouge, un jaune et un vert.



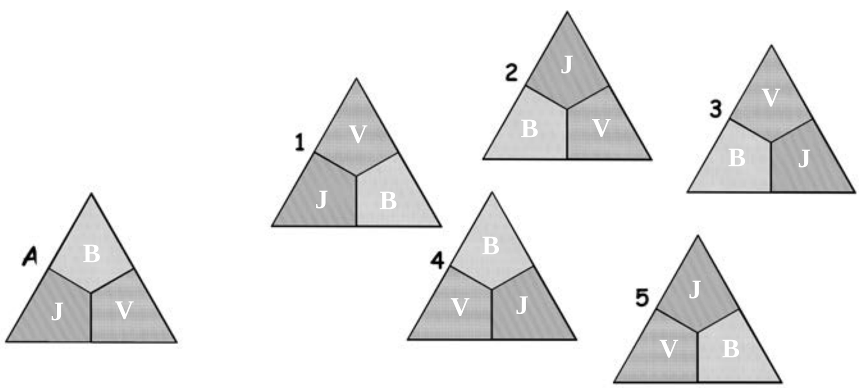
Vous allez colorier les trois surfaces de chaque pièce en utilisant une ou plusieurs couleurs mais seulement une couleur par petite surface.

Attention, ici :

jaune = J   bleu = B   vert = V   et   rouge = R

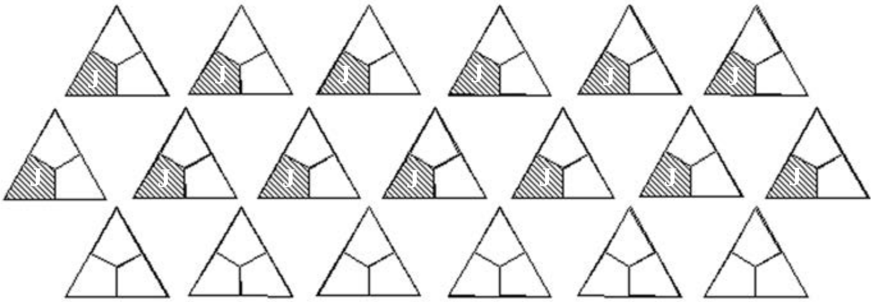
Partie 1 :

Question 1
Parmi les pièces 1, 2, 3, 4, et 5 il y a peut-être une (ou plusieurs) pièce(s) identique(s) à la pièce A. Laquelle (ou lesquelles) ?



La pièce A est identique à : …………

Question 2
Coloriez ici toutes les pièces (différentes) qui ont au moins une partie jaune.



Question 3 : ***Complétez ce tableau qui vous permettra de trouver le nombre total de pièces différentes qu'on peut obtenir. Construisez et coloriez toutes ces pièces.***
Il peut vous rester des pièces inutilisées et si vous n'en avez pas assez, vous pouvez en fabriquer (même forme, mêmes mesures).

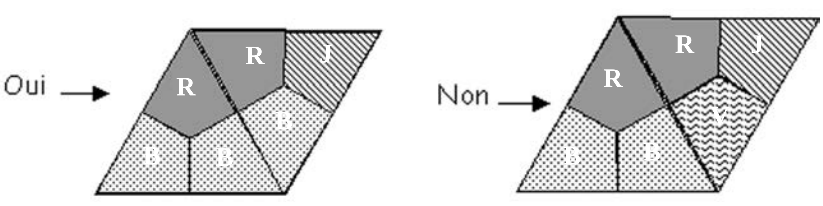
	Avec **1** couleur	Avec **2** couleurs	Avec **3** couleurs	TOTAL :
Nombre de pièces différentes				

Partie 2 :

Vous allez juxtaposer sans vide ni recouvrement (comme un puzzle ou une mosaïque) toutes vos pièces différentes coloriées, en respectant les conditions suivantes :

1) deux pièces ne peuvent se toucher que si les **deux** surfaces mises en contact sont de même couleur.

Exemple :

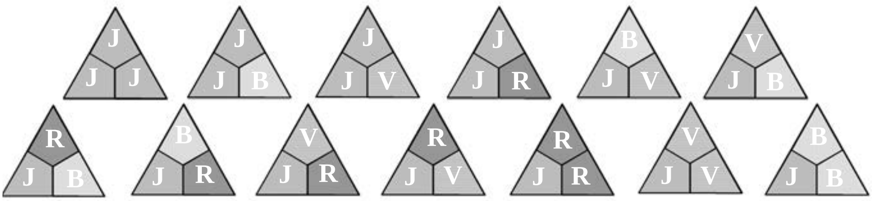


2) le polygone obtenu doit avoir le plus petit périmètre possible. L'unité de longueur est le côté d'une pièce (côté du triangle).

Question 4 : ***Quel est le périmètre de votre polygone ? Collez votre polygone en mosaïque sur la feuille réponse.***

Solution question 1 :
La pièce A est identique à : 3 et 5

Solution question 2 :



Solution question 3 : Complétez le tableau :

	Avec **1** couleur	Avec **2** couleurs	Avec **3** couleurs	TOTAL :
Nombre de pièces différentes	**4**	**12**	**8**	**24**

Solution question 4 : Le plus petit périmètre qui a été obtenu est de 20 unités de longueur.

Commentaires :

Domaines mathématiques :
Dénombrement. Aire et périmètre : optimisation d'un périmètre avec une aire constante.

Analyse de la tâche :
Cet exercice demandait une bonne lecture de l'énoncé, une analyse "tranquille" des exemples. Beaucoup des erreurs étaient dues à un passage trop rapide sur ces guides pour aller trop vite au coloriage. Cet atelier a été peu réussi car assez difficile pour des groupes d'élèves travaillant en autonomie.
L'épreuve a été préparée à partir des travaux du plasticien Philippe Rips et avec son aide. Privilégiant l'aspect esthétique et la couleur des figures mises en place, il permettait aux élèves de construire un polygone polychrome qui pouvait être très réussi lorsque la méthode de fabrication était comprise.
Quant à l'apport mathématique, au collège il y a souvent confusion entre aire et périmètre ; on a ici une situation où, travaillant à aire constante, il faut minimiser le périmètre.

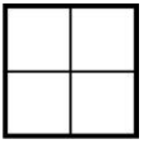
Prolongements éventuels :
Cet exercice méritait d'être repris en TP en classe. Eventuellement comme collaboration entre les cours d'arts plastiques et de maths.

D'autres figures géométriques, en particulier des carrés et des cubes, ont été conçues par Philippe Rips à partir des couleurs de base et assemblées avec différentes contraintes. En faisant varier ces contraintes un travail plus ou moins complexe de dénombrement est nécessaire qui fait souvent appel au raisonnement mathématique. Notons que la façon de procéder à ce comptage est différente de celle du plasticien et il est intéressant de confronter les deux méthodes.

Dans cette même finale 2009, un atelier analogue était proposé aux élèves de 4^e et de 3^e, avec des pièces carrées. Ce problème a été posé aussi aux concurrents du 10^e Rallye Mathématique de Paris, sous une forme un peu différente.

Il s'agissait de colorier les quatre carrés de chaque pièce en utilisant une ou plusieurs couleurs (rouge, jaune, vert, bleu) mais seulement une couleur par petit carré.

Partie 1 :
Combien de pièces différentes peut-on ainsi obtenir ? Coloriez toutes ces pièces différentes sur la feuille réponse 1.
Ne faites pas cela au hasard, réfléchissez d'abord. Pour vous aider, complétez le tableau.



Pour vous aider à organiser votre raisonnement, quelques pièces ont déjà été coloriées. Observez bien comment elles sont coloriées ; cela vous aidera.

	1C	2C	3C	4C	Total
Nombre de pièces différentes					

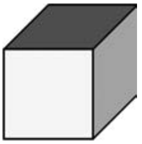
Partie 2 : ***Découpez vos pièces.***
Vous allez les juxtaposer comme une mosaïque (ou un puzzle) avec les règles suivantes :
1) Deux pièces ne peuvent se toucher que si les deux carrés mis en contact sont de même couleur.
Le but est de juxtaposer, sans vide ni recouvrement, toutes vos pièces coloriées.
2) Le polygone obtenu doit avoir le plus petit périmètre possible. L'unité de longueur est le côté d'une pièce.
Collez vos pièces sur la feuille réponse et indiquez le périmètre du polygone que vous venez d'obtenir.

Des réponses et d'autres commentaires sont disponibles sur le site
http://sarthe.cijm.org.

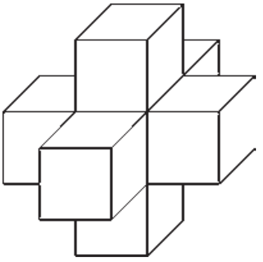
Cubes et polyèdres

Pendant l'année scolaire 2006/2007, le problème de géométrie constituait une sorte de fil rouge pour insister sur l'intérêt de corriger en classe les étapes au fur et à mesure de leur déroulement. Nous allons suivre ici les travaux de géométrie proposés aux élèves de troisième ; un travail analogue était donné dans les autres classes, adapté au programme de chaque niveau (cf. le site www.sarthe.cijm.org).

Énoncés

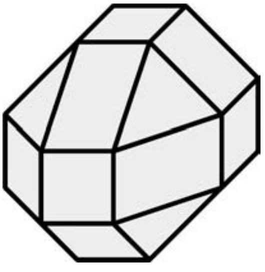


Jeudi 30 novembre 2006 - Niveau 3e
Première étape de qualification, problème de géométrie.
Les faces opposées de ce cube sont deux à deux de même couleur.
Dessus et dessous en bleu
Devant et derrière en jaune.
Droite et gauche en vert.
Sa surface a une aire totale de 96 cm².
Sur chaque face de ce cube, on colle un petit cube identique, sans retournement.
On obtient ce solide.



1) Colorier ses faces.
2) Calculer son volume.
3) Calculer l'aire totale de sa surface.
(Indiquer rapidement la méthode utilisée pour faire ces calculs ; n'oubliez pas les unités)

Mardi 6 février 2007- Niveau 3e
Deuxième étape de qualification, problème de géométrie.
Dans l'étape 1 vous avez travaillé sur ce solide, formé de 7 petits cubes dont l'arête mesure 6 cm. On veut maintenant fabriquer un étui pour ce solide. Le but de ce problème est de trouver la surface totale et le volume de cette boîte.



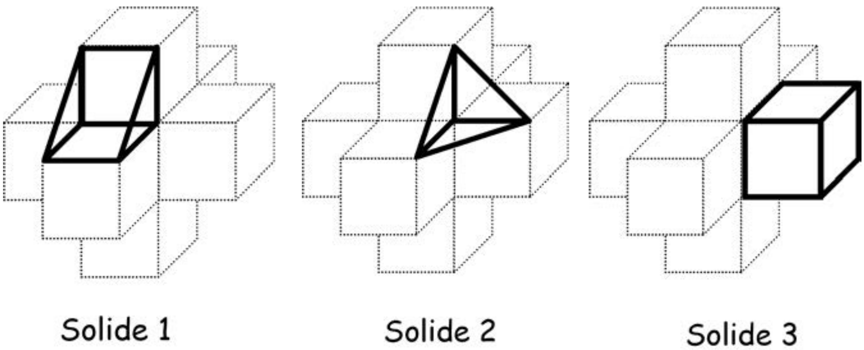
1) Analyse de la surface de cet étui pour calculer son aire.
Trois formes différentes composent cette surface.

Quelles sont-elles et quelles sont leurs dimensions ?

Compléter le tableau sur la feuille réponse.

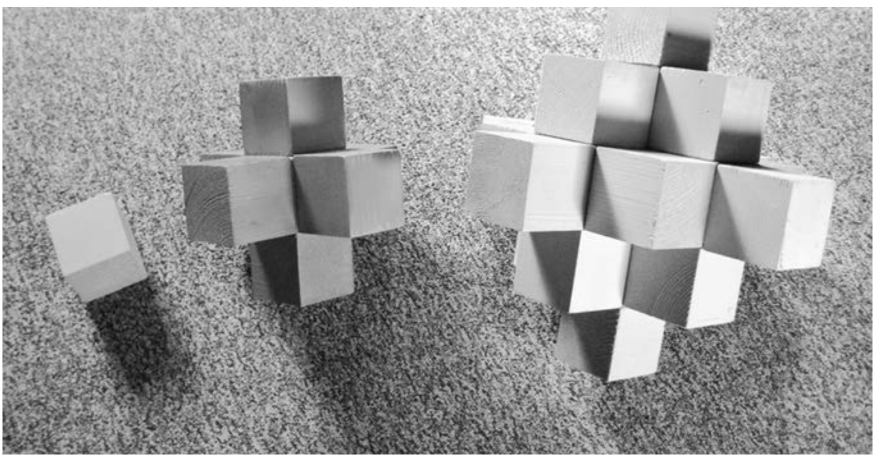
Calculer l'aire totale A.

2) Analyse du solide pour connaître le volume de l'étui.
Trois sortes de solides le composent.
Pour chacun, indiquer sa nature (son nom), le nombre et son volume.
Calculer le volume de cet étui.



Jeudi 31 mai 2007- Niveau 3e
Finale. Atelier 6

1) Observez les objets placés sur la table de l'atelier 6. Ils doivent vous rappeler les questions des étapes précédentes.
2) Calculez le nombre de cubes utilisés pour fabriquer l'objet 3. Combien de rouges ? Combien de jaunes ? Expliquez rapidement vos calculs.
3) Calculez l'aire de la surface de l'objet 3.
Vous pouvez demander un cube à l'atelier 6 pour le mesurer.
4) On pourrait poursuivre les constructions : un objet 4, puis un objet 5, etc.
- De combien de cubes serait composé l'objet 4 ?
- De combien de cubes serait composé l'objet 5 ?



Commentaires

Domaines mathématiques :
Géométrie dans l'espace, cubes et solides composés de cubes. Polyèdres. Aires, volumes. Analyse d'un objet non classique. Notion de suite. Notion de dénombrement.

Analyse de la tâche :
Ces problèmes ne présentaient pas difficultés particulières et peuvent même être considérés, pris question par question, comme des exercices très scolaires. La tâche devient différente quand il faut enchaîner les recherches et faire preuve d'endurance jusqu'aux questions finales. Les élèves et professeurs étaient avertis que les questions allaient s'enchainer d'étape en étape ; cependant l'étape 2 pouvait être faite sans avoir corrigé la première étape mais elle perd alors une part de sa pertinence.

La présence des élèves sur le site de la finale permettait une présentation visuelle de la suite de polyèdres constitués de cubes collés. La question devient alors plus concrète et permet de laisser les élèves découvrir la règle qui régit l'évolution du polyèdre.

Prolongements éventuels.
D'autres exercices basés sur des empilements de cubes ont été proposés dans le cadre du Rallye Mathématique de la Sarthe. Il s'agissait déjà de faire évoluer un polyèdre constitué de cubes assemblés selon une règle à déterminer.
D'autres assemblages sont à imaginer.

Solutions :

ETAPE 1
Calculer son volume.
96 : 6 = 16 = 4 donc l'arête mesure 4 cm. Volume : 7×43 = **448 cm3**
Calculer l'aire de sa surface totale.
6×5×16 = **480 cm²**

ETAPE 2

	C'est un ...	Nbre	Ses dimensions	Calcul de son aire	Son aire (arrondie à 1 mm²)
1e forme	**rectangle**	12	Largeur : 6 cm Longueur : $6\sqrt{2}$ cm	$6 \times 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm²	50,91 cm²
			Largeur : 6 cm Longueur ? 8,5 cm	6 x 8,5 = 51 cm²	51 cm²
2e forme	**Triangle équilatéral**	8	Côté : $6\sqrt{2}$ cm Hauteur : $3\sqrt{6}$ cm	$6\sqrt{2} . 3\sqrt{6} /2 = 18\sqrt{3}$ cm²	31,18 cm²
			Côté : 8,5 cm Hauteur : 7,35 cm	8,5x7,35/2= 31,24 cm²	31,24 cm²
3e forme	**Carré**	6	Côté : 6 cm	6²	36 cm²

On déduit l'aire totale :

$$A = 12 \times 36\sqrt{2} + 8 \times 18\sqrt{3} + 36 = 432\sqrt{2} + 144\sqrt{3} + 36 \times 6 \approx 1076,36\,\mathbf{cm}^2$$

$$A = 12 \times 51 + 8 \times 31,24 + 36 = 612 + 249,92 + 36 \times 6 \approx 1077,92\,\mathbf{cm}^2$$

FINALE
Nombre de cubes pour faire l'objet 3 : **25**
Nombre de cubes jaunes : 19 Nombre de cubes rouges : 6

Explications :
Pour compter les cubes, le plus simple est d'analyser l'objet par couches de cubes.
La couche *i* est la couche centrale (la plus grande) de l'objet de rang *i* et n_i est le nombre de cubes dans cette couche centrale. On appelle N_i le nombre de cubes de l'objet de rang *i*.

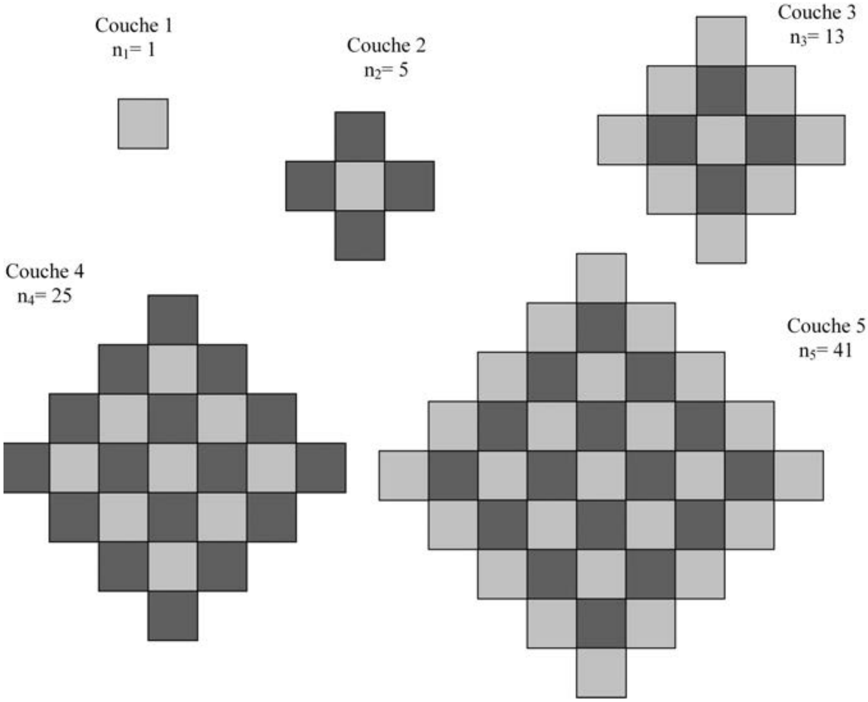
$$N_i = n_i + 2n_{i-1} + 2n_{i-2} + \cdots + 2n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

Par exemple :

$$N_4 = n_4 + 2n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

$$N_3 = n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

$$N_2 = n_2 + 2n_1$$



Objet n°1 : **1 cube**

Objet n°2 : Une couche 2 et deux couches 1 : 5 + 2x1 = **7 cubes**

Objet n°3 : Une couche 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
13 + 2x5 + 2x1 = **25 cubes**

Objet n°4 : Une couche 4 et deux couches 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
25 + 2x13 + 2x5 + 2x1 = **63 cubes**

Objet n°5 : Une couche 5 et deux couches 4 et deux couches 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
41 + 2x25 + 2x13 + 2x5 + 2x1 = 1**29 cubes**

Aire de la surface totale de l'objet 3 : **2808 cm²**

Détail des calculs : La couche extérieure est faite de 18 cubes jaunes 12 cubes montrent 4 faces et 6 cubes montrent 5 faces. La surface est donc faite de 78 carrés de 36 cm². L'aire est égale à 78x36 = 2808 cm².

Pour l'objet 4 il faudrait **63 cubes.**

Pour l'objet 5 il faudrait **129 cubes.**

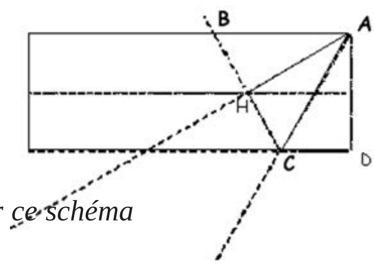
Pliages et géométrie

Conditions de travail :
Cet exercice était proposé aux élèves de 4e et 3e (13/15 ans) dans l'un des 10 ateliers de la finale 2008 du Rallye mathématique de la Sarthe.
La finale annuelle est l'une des particularités du Rallye en Sarthe. Elle se déroule sur un site de plein air, près du Mans et réunit les 18 classes qui se sont le mieux comportées lors des deux étapes de qualification : cinq classes en 6e et cinq en 5e, quatre en 4e et quatre en 3e. Les deux premières étapes se passent dans les établissements, avec le moins de matériel possible ; au contraire, la finale est l'occasion de proposer des exercices qui nécessitent du matériel et des manipulations plus complexes et contrôlables.

Dans le cas de cet exercice, les élèves recevaient des feuilles de papier cartonné ; ils pouvaient observer - sans toucher- les étapes successives des pliages.
Des réponses et commentaires sont également disponibles sur le site internet du Rallye de la Sarthe ***http://sarthe.cijm.org***

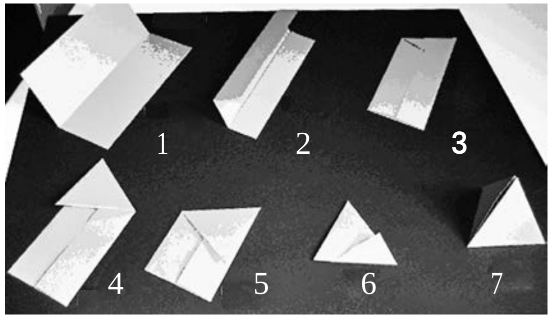
Enoncé :
A l'atelier 6 vous allez observer les étapes qui vous permettront de réaliser deux solides, sans aucun collage. Attention, n'allez pas trop vite, vous devez répondre à des questions au cours de ces réalisations.

Premier solide
Observez les plis effectués pour aller à l'étape 3.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Démontrez.



Aide : on pourra, par exemple, utiliser ce schéma

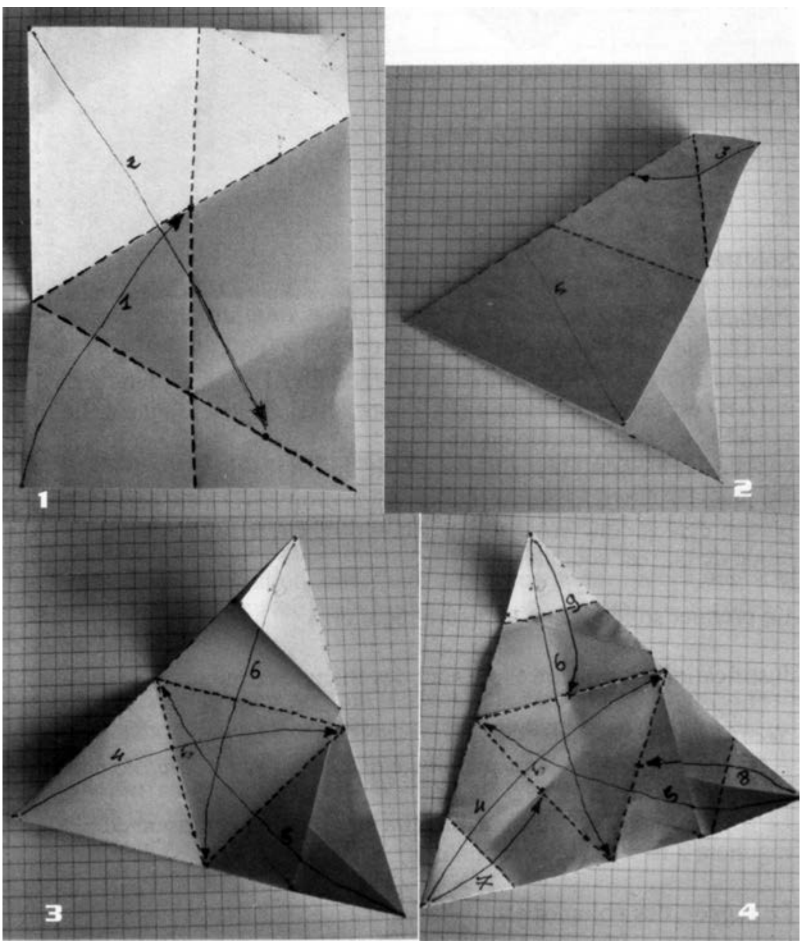
Terminez le pliage et formez le solide.
Quel est le nom précis de ce solide ?
Justifiez

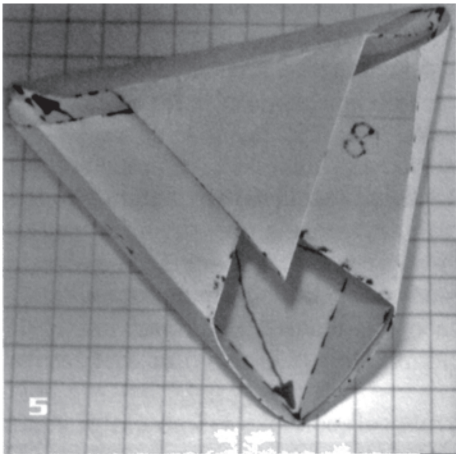


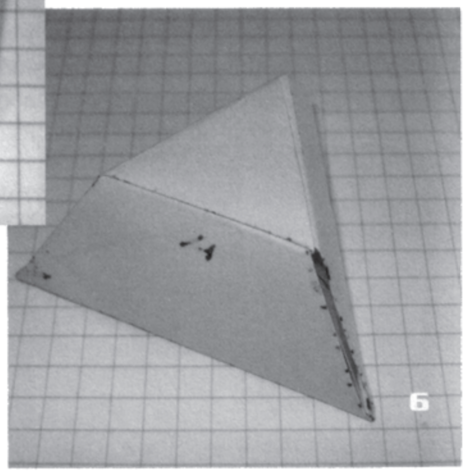
On note
V_1 son volume ;
mais on ne demande pas de le calculer.

Second solide.
En observant vos plis pour aller jusqu'à l'étape 2, comparez avec l'étape 3 du pliage précédent : c'est le même pliage mais à une échelle différente ; laquelle ?
Terminez le pliage et formez le solide.
Quel nom peut-on donner à ce solide ?
On note V_2 le volume de ce second solide ; mais on ne demande pas de le calculer.

Quel est le rapport $\dfrac{V_1}{V_2}$? Expliquez comment on obtient ce résultat







Solution :

Premier solide

Le triangle ABC est équilatéral

Démonstration : H est le milieu de [BC] donc (AH) est médiane dans ABC et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est aussi hauteur. Le triangle ABC est donc isocèle en A.

(AH) est donc aussi bissectrice de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$

De plus, $\widehat{DAC} = \widehat{CAH}$ (on a plié). L'angle droit $\widehat{BAD}$ a été partagé en trois parties égales donc $\widehat{BAC} = 2 \times 30° = 60°$. Un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral.

Ce premier solide est un tétraèdre régulier

Justification : les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

Second solide

A l'étape 2 on réalise le même pliage que dans l'étape 3 du premier solide mais à l'échelle 2.

Le solide obtenu est un tronc de tétraèdre régulier (ou tronc de pyramide régulière à base triangle équilatéral)

Le rapport des volumes est : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{8}{7}$

Justification : avant le dernier pliage on avait le même patron que pour le premier solide. Puis on a plié les trois faces latérales en leurs milieux. Le résultat est la suppression d'un petit tétraèdre régulier, réduction du grand à l'échelle ½.

Le volume de ce petit tétraèdre est $\frac{V_1}{8}$;

le tronc de tétraèdre a donc un volume $V_2 = V_1 - \frac{V_1}{8} = \frac{7V_1}{8}$

et donc $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{7}$

Domaines mathématiques.
Géométrie plane : triangle équilatéral ; géométrie dans l'espace : pyramide et tronc de pyramide. Calculs et proportionnalité, échelle, coefficient d'agrandissement/réduction.

Analyse de la tâche.
Cet exercice demandait une observation attentive du modèle puisqu'aucune consigne écrite ou orale n'était donnée, et aussi des qualités de soins pour une réalisation propre des objets. L'analyse de l'évolution du modèle permettait une mise en œuvre du raisonnement géométrique non sur un dessin mais sur des plis.

Dans la première partie du premier pliage, une démonstration était demandée. Celle proposée dans la solution n'est qu'une démonstration possible. Ce fut pour les correcteurs l'occasion -une fois de plus- de s'interroger sur les exigences à avoir devant la rédaction d'une démonstration. Ils ont été très larges dans l'évaluation, cherchant plutôt les bonnes idées même si elles étaient exprimées avec maladresse.
Prolongements éventuels.

Des travaux de pliages et origami avaient déjà fait l'objet d'ateliers pendant les finales précédentes. Ils rencontrent toujours beaucoup de succès auprès de certains élèves qui peuvent ainsi manifester des compétences sous-estimées en math ; les pliages, s'ils sont bien faits, sont esthétiques et leur réalisation demande une bonne compréhension des consignes.
Celui-ci permettait, en plus, un questionnement géométrique.

RALLYE MATHEMATIQUE
ET ATELIER JEUX MATHEMATIQUES
DE L'IREM DE TOULOUSE

PRESENTATION

L'IREM de Toulouse organise depuis 1992 un Rallye mathématique destiné aux élèves des classes de troisième et de seconde, depuis 1997 aux classes de cycle 3 de l'enseignement primaire et depuis 1999 aux classes de sixième.
Cette compétition est constituée d'épreuves écrites par classe entière : trois pour les primaires, deux pour les sixièmes et une pour les troisièmes secondes. Pour tous, une super-finale regroupe les classes gagnantes de chaque département de l'Académie ainsi que celles d'Andorre, de Galice et de Huesca. Se joignent également aux épreuves écrites des classes de l'Académie de Rouen, d'Andorre, d'Espagne, du Liban, du Maroc, de la Roumanie et de la Tunisie.
On peut estimer qu'en 2010 plus de 50 000 candidats y ont participé.

FICHE TECHNIQUE

Epreuve écrite :
Pour les classes de troisième et seconde, elle est constituée de 8 problèmes dont 6 sont communs à toutes les catégories et 2 sont spécifiques à chacune d'elles (troisième, seconde générale et seconde professionnelle). La durée est de 1 heure 30.
Pour les classes de sixième, elle se déroule en deux manches d'une heure.
Pour les classes de primaire elle est constituée de trois manches. Les élèves ont à choisir de résoudre 3 problèmes parmi 8 et à les renvoyer à une date fixée.

Super-finale :
Elle est organisée pour toutes les catégories à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Elle consiste en la résolution en classe entière de 4 exercices, chacun en dix minutes maximum. Le temps est pris en compte pour départager les aequo.

Parrains :
Rectorat de l'Académie et Inspections académiques. Conseil Régional et conseils généraux. Université Paul Sabatier, Mairies, Crédit Agricole, APMEP, Walibi Agen, Casio, Cinémas Gaumont....

Contacts :
IREM de Toulouse   Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
Tel : 05 61 55 68 83

Email : irem@cict.fr

Atelier Jeux mathématiques de l'IREM :
Initié en 2000, l'atelier Jeux Mathématiques s'est développé tout au long de cette décennie. Il est actuellement essentiellement utilisé pour :
- des animations grand public : salon des Jeux et de la Culture Mathématique à Paris, Fête à Fermat à Beaumont de Lomagne, …
- des animations destinées aux établissements scolaires : Fête de la Science (dans quatre départements), réception de classes à l'Université Paul Sabatier (deux semaines),
- des prêts aux établissements scolaires (des mallettes sont disponibles pour le cycle 2 ; le cycle 3, le collège et le lycée). Plus de 10 000 personnes sont utilisatrices de cet atelier en une année.

Exemples d'activités de remplissage de l'espace.

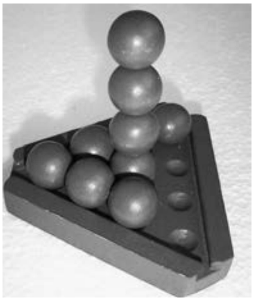
Le tas d'oranges :
Il s'agit de reconstituer, avec les quatre éléments, le tas d'oranges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire.

Le matériel se compose de deux barrettes de trois billes et deux barrettes de deux billes.

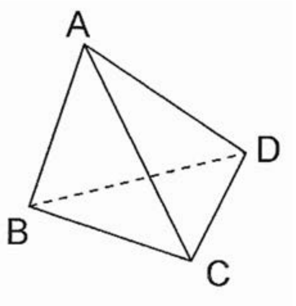
Tirer à boulets rouges :
Il s'agit de reconstituer, avec les six éléments, le tas de boulets rouges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire.

Le matériel se compose de deux barrettes de quatre billes et de quatre barrettes de trois billes.

Quelques indications :
Peut-on avoir la construction ci-contre ?
Dans les deux cas, la bille du sommet repose sur trois billes de l'étage en dessous et sur cet étage, il n'y a pas de bille à la verticale de la bille du sommet. Ce début de construction ne peut pas donner la solution.



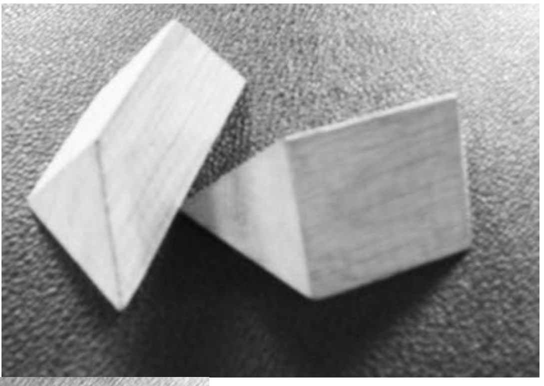
Les barrettes de trois (ou de quatre) ne peuvent pas être sur des arêtes qui ont un sommet commun (la seconde barrette aurait une bille de moins). Elles sont situées sur des arêtes opposées : [AB] et [CD], [AD] et [BC], [AC] et [BD].

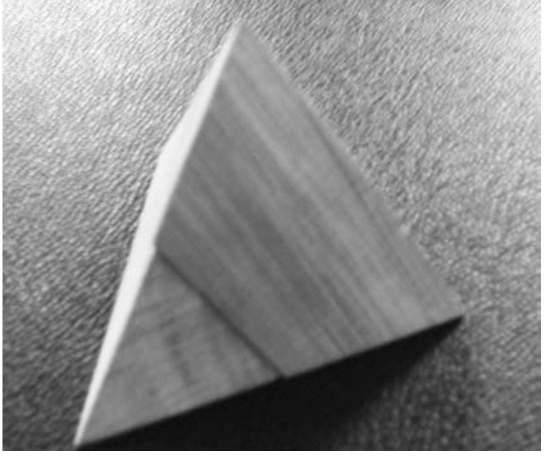


Quelle aide apportons-nous aux élèves en difficulté ?
Nous leur demandons d'observer ce qu'ils ont (les barrettes) et ce qu'ils veulent obtenir (les pyramides représentées dans les consignes). Dans le cas du "tas d'oranges", où sont situées les barrettes de trois sur la photo ? Une fois repérées sur la représentation, nous les leur faisons placer approximativement sur la base. Enfin comment combler le vide entre les deux ?

Prolongement :

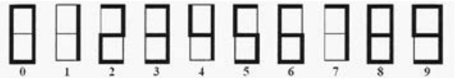
Un très joli casse-tête :





Rallye - Sixième mars 2007

Panne d'allumage :
Sur un écran électronique composé de 7 segments, les 10 chiffres de 0 à 9 s'affichent successivement comme indiqué ci-dessous : chaque chiffre est obtenu en éclairant certains des 7 segments (les segments éclairés sont représentés en gras). Par exemple, le chiffre zéro est obtenu en éclairant les 6 segments constituant le périmètre du rectangle.



On fait afficher successivement chacun des 10 chiffres ; on constate alors que seul un des 10 chiffres s'affiche correctement car une des sept lampes associée à un segment est grillée.
Quel est ce chiffre ?

Commentaire et solution :
Dans un premier temps il s'agit de déterminer, pour chacun des segments, dans combien de chiffres il est utilisé. Par exemple, le segment situé en haut est utilisé dans huit chiffres. Si la lampe correspondant à ce segment est grillée, seulement deux chiffres, le 1 et le 4, s'afficheront correctement.
On arrive ainsi au segment situé en bas à droite qui est utilisé dans neuf chiffres. Si la lampe correspondant à ce segment est grillée, il y aura neuf chiffres qui ne s'affichent pas correctement. Seul le chiffre 2 apparaîtra normalement.
Les résultats du cours ne sont pas utilisés dans cet exercice qui fait plutôt appel à l'observation, à la logique et au raisonnement.

Rallye - Troisième mars 2008

Et les Shadocks pédalaient, pédalaient ....
Les ingénieurs Shadocks ont construit un train écologique de 900 m de long dont le toit est entièrement recouvert de panneaux solaires. Malheureusement le moteur ne fonctionne que si tous les panneaux reçoivent directement la lumière du jour.
Lorsque le train entre dans un tunnel les passagers Shadocks prennent le relai en pédalant pour maintenir la vitesse de 9,5 km/h jusqu'au moment où l'arrière du train sort du tunnel.
Le plus long tunnel du pays Shadock, le " tunnel sous la hanche ", a une longueur de 1 km.

Pour traverser ce tunnel combien de minutes devront pédaler les Shadocks ?

Commentaire et solution :
Il s'agit d'un exercice relativement classique sur les vitesses, même si l'enrobage n'est pas habituel.
Les Shadocks commencent à pédaler lorsque l'avant du train pénètre dans le tunnel et s'arrêtent quand l'arrière du train sort du tunnel. La longueur du trajet fait en pédalant est de 1,9 km. La durée est donc de 0,2 h c'est-à-dire 12 min.

Rallye - Cycle 3 novembre 2006

2006 boules

On aligne 2006 boules en alternant régulièrement une petite, une moyenne et une grande. On alterne aussi les couleurs dans l'ordre : jaune, bleu, rouge, violet et vert.
La première est une petite jaune, la deuxième est une moyenne bleue.

Comment est la dernière ?

Commentaire et solution :
La réponse est une moyenne jaune.
Pour les CM_1 et CM_2 ce problème fait appel à la division euclidienne de deux entiers.

Pour les CE_2, c'est un problème multiplicatif qu'ils pourront résoudre en utilisant la calculatrice pour atteindre le nombre cible.

Prolongements :
On pourra reprendre le problème avec des valeurs différentes par exemple 2007, deux tailles de boules et sept couleurs … pour faire émerger des techniques de résolution.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE LA REUNION

PRÉSENTATION

Dans la lignée du Rallye de l'IREM de Toulouse, le groupe Rallye Mathématique IREM/APMEP de la Réunion propose depuis trois ans aux classes de 3^{e} et de 2nd un rallye mathématique.
Il se fait en partenariat avec Sciences-Réunion (instance régionale), avec le soutien de l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques et du Rectorat de la Réunion. Peuvent participer des classes de troisième et de seconde des collèges et lycées publics et privés de la Réunion et, éventuellement, selon des règles spécifiques, des classes de niveaux équivalents d'établissements scolaires français de la zone géographique : Mayotte, Maurice, Madagascar, Afrique du Sud, etc.

Les objectifs principaux du rallye consistent à :
- contribuer à améliorer la liaison troisième/seconde,
- favoriser l'esprit d'équipe et la capacité à s'organiser collectivement,
- développer des qualités telles que l'imagination, la logique, la persévérance,
- initier à certaines démarches : expérimenter, chercher, débattre, vérifier,
- améliorer l'image des mathématiques en les présentant de façon plus ludique.

Les inscriptions sont gratuites et se font, au cours du mois de février, sous couvert des Chefs d'Etablissements, par les professeurs de mathématiques sur la base du volontariat des classes.
De 1996 à 2010, on note une progression constante du nombre de collèges et de lycées participants. De 35 établissements pour 75 classes participantes en 1996, on compte en 2010, 49 collèges et lycées pour 107 classes participantes.

Le rallye se déroule en deux étapes :
- une épreuve dans les établissements scolaires au mois de mars ou avril,
- une compétition finale au mois de mai.

L'épreuve du mois d'avril, d'une durée de 1h30, est constituée d'une dizaine d'exercices dont une grande partie est commune aux deux niveaux, troisième et seconde. Les élèves s'organisent comme ils le souhaitent pour travailler : à la fin de l'épreuve, ils doivent uniquement remettre un dossier donnant les réponses, sans justifications pour la plupart. Un ou deux exercices pourront cependant demander des éléments d'explications ou une petite production (constructions, dessins, pliages, patrons,...). Les exercices sont gradués dans leur difficulté et variés dans leur forme et leur contenu afin de permettre à tous les élèves de s'investir dans la recherche. Les connaissances mathématiques à utiliser restent élémentaires et ne dépassent pas le cadre des programmes scolaires.

Cette première étape permet de réaliser deux classements distincts, l'un pour les classes de troisième et l'autre pour les classes de seconde. Deux ou trois classes de chaque niveau sont ainsi sélectionnées pour participer à la compétition finale et quelques autres classes peuvent être primées ou citées pour la qualité de leurs travaux. Seules ces classes figurent au palmarès rendu public. Les résultats et le classement des autres classes ne sont communiqués qu'aux établissements dont ces classes sont issues.
La remise des prix et des trophées est organisée à l'issue de la compétition finale. Les prix sont offerts par Sciences-Réunion. Chaque élève des classes finalistes et des autres classes primées reçoit au moins un lot individuel tel que t-shirt, brochure scientifique, "réquerre", rapporteur,... De plus, le collège et le lycée des classes ayant remporté la compétition finale se voient attribuer les trophées du rallye dont ils restent détenteurs jusqu'à l'année suivante. Ces trophées sont des "objets mathématiques" conçus par les élèves de Première Art Appliqué du lycée Ambroise Vollard.

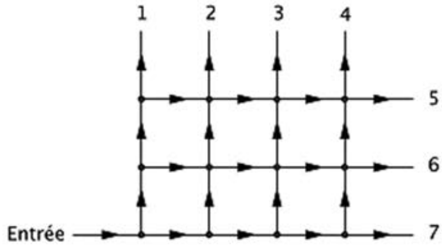
Retrouvez le rallye de la Réunion 1996 / 2010 :

http://apmep_reunion.pagesperso-orange.fr/

ou :

http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?rubrique35

Exercice niveau troisième (2010) :
Un flux de particules
Le réseau représenté ci-contre est parcouru par des particules. Ce réseau comporte une seule entrée et sept sorties numérotées de 1 à 7. À chaque intersection, le tiers des particules va vers la droite et les deux tiers vers le haut.



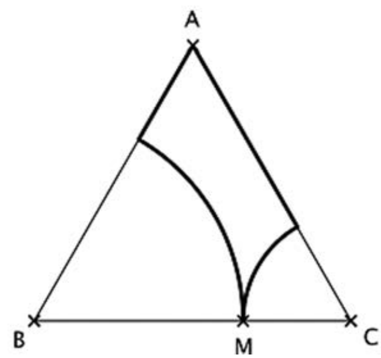
Si 729 particules sont entrées, combien de particules vont sortir du réseau à chacune des sorties ?

Solution :

Sortie	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Particules	216	216	144	80	40	24	9

Commentaires :
Très bel exercice de calculs et d'organisation de résultats . Il semble que son niveau de réussite soit très moyen pour un exercice que le jury considère comme facile. Les élèves ont du mal à s'organiser en groupe et à faire face à l'ensemble des problèmes de l'épreuve

Exercice commun aux niveaux seconde et troisième (2009)
Le " parc poules " de Ti Coq et Ti Jean
Une parcelle a la forme d'un triangle équilatéral ABC de 6 m de côté. Ti Coq le jardinier doit réaliser à l'intérieur deux parties gazonnées en forme de secteurs de disques de centres B et C tangents en un point M du côté [BC] . Son dalon, Ti Jean, doit entourer d'un grillage la partie restante qui servira de poulailler. Et leur patron leur a demandé d'utiliser le moins de grillage possible. Nous avons surpris la conversation suivante :



- Ti Coq : "Oté, Ti Jean, oussa i fo mèt lo poin M ?"
- Ti Jean : "Kass pas out tèt, mèt ali oussa ou vë !"
Montrer que Ti Jean a raison en vérifiant que la longueur de grillage à utiliser ne dépendra pas du point M choisi par Ti Coq.

Solution :

$$L = \frac{\pi}{3}x + (6 - x) + x + \frac{\pi}{3}(6 - x) = 6 + 2\pi$$

Le résultat ne dépend pas de *x*. Ainsi, quelle que soit la position du point M, la longueur de grillage à utiliser sera toujours la même , environ 12,30 m

Commentaires :
Très joli exercice, surprenant (Avec cette invariance non prévue, il fait penser au problème de la corde autour de la Terre et du ballon de foot que l'on écarte de 2 cm …)
Cet exercice entre dans le cadre de notre volonté d'adapter quelques énoncés aux préoccupations locales et le créole en est une bien sûr.
Cet exercice a été classifié difficile faisant appel à de nombreux savoir-faire cognitifs ou comportementaux (prise d'initiatives) . Certaines classes de troisième ou de seconde l'ont bien traité mais elles ont été rares. La longueur de grillage à utiliser pour entourer le "parc poules" de Ti Coq et Ti Jean a parfois été calculée, mais le plus souvent pour une ou plusieurs position(s) particulière(s) du point M uniquement, ce qui ne permettait pas de répondre à la question.
L'algébrisation du problème n'est proposée que par une dizaine de classes qui dès lors conduisent en général correctement les calculs, avec une rédaction plus ou moins satisfaisante. A noter que ces classes ne figurent pas toutes aux premières places du classement global car elles ont parfois donné des réponses fausses à d'autres exercices pourtant plus faciles, sans doute par défaut de mise en place de procédures de vérification.

Exercice niveau seconde (2010)
Quadr'aléatoire
Olga lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées 1 à 6.
Le résultat du premier lancer est noté *a* et le résultat du second lancer est noté *b*.
Dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 cm, Olga place les points Q(a,0),U(7,a), A(b,7) et D(0,b).

Quelle est la probabilité que QUAD soit un carré d'aire 25 cm² ?

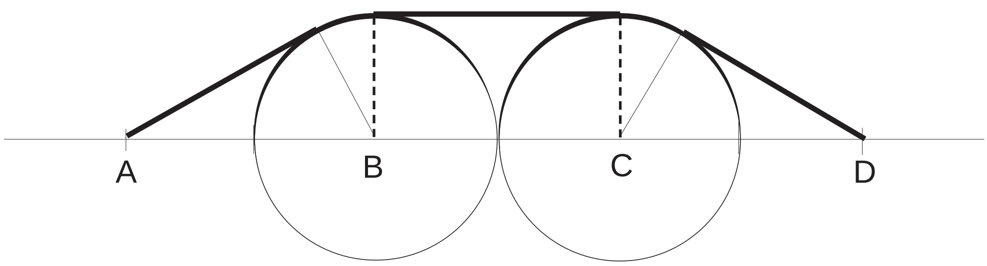
Solution :
La probabilité que QUAD soit un carré d'aire 25 cm^2 est égale à : 1/18

Commentaires :
Encore un intéressant exercice.
Cependant son échec massif (41 sur les 54 classes) est sans doute à mettre au compte de savoirs non encore réactivés à cette période de l'année.

Exercice niveau seconde (2010)
Encore en feu
Dans le désert, quatre puits de pétrole ont des centres A, B, C et D alignés dans cet ordre et régulièrement espacés de deux kilomètres. Les puits de centres B et C prennent feu et une zone de sécurité est créée : "interdiction absolue de s'approcher à moins d'un kilomètre de B et C".

Quelle distance minimale doit-on parcourir, à un mètre près, pour aller de A à D ? Représenter en couleur un des plus courts chemins possibles sur une figure à l'échelle 1:50 000.

Solution :
La distance minimale, à 1m près, pour aller de A à D est :
$d = 2\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 1\right)$ soit au mètre près 6,511km



Commentaires :
Bel exercice où intervient un beau problème de construction …mais comme pour le texte *un flot de particules*, jugé facile par le jury, il n'a connu qu'un faible tôt de réussite.

L'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

Depuis 1976, grâce à une importante équipe de bénévoles, la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française), encouragée par l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent, organise chaque année l'Olympiade Mathématique Belge (OMB), ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire belge francophone ou luxembourgeois.

Dès 1977, elle se dédouble en deux catégories, "Mini" et "Maxi", respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire est créée et désormais, il y a trois Olympiades : "Mini", "Midi" et "Maxi", destinées respectivement aux élèves des 1er, 2e et 3e degrés de l'enseignement secondaire.

Le Jury National, réunissant des professeurs des enseignements secondaire et supérieur, des inspecteurs et des conseillers pédagogiques, compose les questionnaires ; il s'efforce de privilégier les questions peu scolaires, obligeant les élèves à faire preuve de créativité sur base de leurs connaissances. De manière générale, il est responsable de l'organisation de l'Olympiade ; il est secondé par le secrétariat de la SBPMef, notamment pour les questions de courrier.

L'éliminatoire se déroule vers la mi-janvier dans les écoles inscrites, sous la responsabilité d'un professeur. Les 30 questions sont à choix multiples (pour la plupart, une réponse correcte parmi cinq, avec pénalité pour les mauvaises réponses ; mais quelques questions ont pour réponse un entier entre 0 et 999). Le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve puis envoie les résultats à son Secrétaire Régional.

Les Secrétaires Régionaux (10 actuellement : Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-la-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) ont de lourdes responsabilités : sélectionner les demi-finalistes sur base des résultats fournis par les écoles ; tenir à jour les statistiques de leur région et renvoyer l'information au Responsable National et aux écoles ; convoquer les demi-finalistes et organiser les demi-finales.

Les épreuves de la demi-finale (dans le courant de mars) sont du même type que les éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Elles sont corrigées par les Secrétaires Régionaux entourés de leurs équipes, après quoi les résultats sont transmis au Responsable National.

C'est au Jury National qu'il appartient de sélectionner les finalistes. Ceux-ci sont invités à Namur, peu après les vacances de Pâques, pour travailler 4 heures durant à la résolution de problèmes difficiles dont les réponses doivent être argumentées et correctement rédigées. Le Jury National corrige ces épreuves finales et détermine les lauréats.
Dorénavant, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ; les lauréats se partagent de nombreux prix. La SBPMef peut heureusement compter sur de nombreux mécènes qui soutiennent la compétition. Dans le tableau d'honneur, figurent également un prix d'élégance et des prix spéciaux, attribués aux élèves de 1re, 3e ou 5e qui se sont bien défendus face à leurs ainés de 2de, 4e ou 6e.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple :
- Intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition passionnante ;
- Mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique ;
- Fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Voici les derniers nombres de participants disponibles, ceux de 2010 :

	Inscrits	Demi-finalistes	Finalistes	Lauréats
Mini	13 416	1060	42	17
Midi	7 507	705	38	13
Maxi	5 922	658	33	14
Total	26 845	2423	113	44

SBPMef
Rue du Onze Novembre 24,
B - 7000 Mons
Belgique
tél. : +32.65.31.91.80 ;

courriel : *sbpm@sbpm.be* ;
site : *http://www.sbpm.be/* ;

site de l'OMB : *http://omb.sbpm.be/*

Toutes les questions des Olympiades 2007-2010 sont réunies dans un volume (A5, 188 pp.) disponible à l'adresse ci-dessus.

PROBLEME 1 ***(OMB 2010, finale Mini)***

Dans le parallélogramme $RSTU$, la longueur du côté $[RS]$ est double de celle du côté $[RU]$. Le point P est le milieu du côté $[RS]$.

1. Démontrer que la droite (UP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ et que la droite (TP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{STU}$.

2. Le triangle TUP est-il acutangle, rectangle ou obtusangle ?

Niveau scolaire :
Ce problème a été proposé à des élèves des deux premières années de l'enseignement secondaire (12 à 14 ans)

Domaine mathématique :
Géométrie plane.
Contenu des connaissances de l'énoncé.
Propriétés du parallélogramme, du milieu d'un segment, de la bissectrice d'un angle. Classement des triangles.
Contenu des connaissances dans les procédures.
Propriétés des quadrilatères, des triangles, des droites parallèles et perpendiculaires, des angles (complémentaires, supplémentaires, alternes-internes), de la médiatrice d'un segment, du triangle inscrit dans un demi-cercle.
Propriété de la somme des angles d'un triangle.
Propriétés des translations et des symétries centrales.
Cas d'isométrie des triangles.

Analyse du problème :
1) Pour démontrer qu'une droite est bissectrice d'un angle, on peut, par exemple, démontrer que cette droite :
- partage l'angle en deux angles de même amplitude (A1,B1.2),
- est médiatrice de la base d'un triangle isocèle (B1.3),
- est une diagonale d'un losange (B1.1,C).

2) Le but est de conjecturer une propriété et de la démontrer.
Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on peut, par exemple, démontrer que ce triangle :
- a un angle droit (A2, B2.3),
- a deux côtés perpendiculaires (B2.2,C),
- est inscrit dans un demi-cercle (B2.1).

A. Procédure sans construction

1. Soit un parallélogramme $RSTU$ et soit P le milieu du côté $[RS]$.

La contrainte $RS = 2RU$ entraîne le même codage des quatre segments $[RP]$, $[PS]$, $[RU]$ et $[ST]$

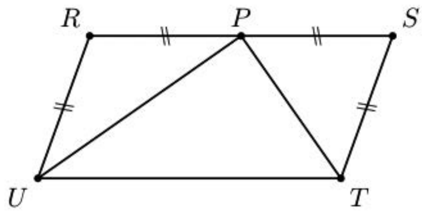


Fig. 1

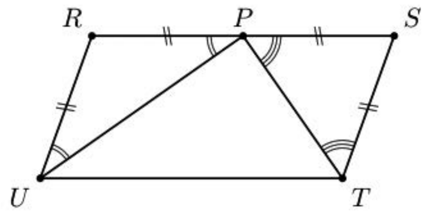


Fig. 2

Le triangle URP est isocèle en R d'où $\widehat{RUP} = \widehat{RPU}$.

Les angles alternes-internes $\widehat{RPU}$ et $\widehat{PUT}$ ont même amplitude.

On en déduit $\widehat{RUP} = \widehat{PUT}$.

La droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$.

De manière analogue, on démontre que la droite (TP) est bissectrice de l'angle $\widehat{STU}$.

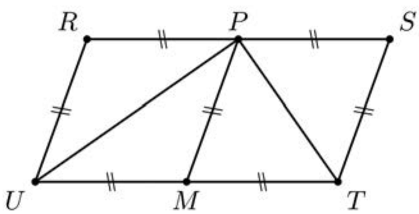
2. On peut conjecturer que le triangle TUP est rectangle en P.

Dans le parallélogramme $RSTU$, les angles consécutifs $\widehat{RUT}$ et $\widehat{STU}$ sont supplémentaires. Les angles $\widehat{PUT}$ et $\widehat{UTP}$ sont donc complémentaires et le triangle UPT est rectangle en P.

B. Procédures avec construction du point M, milieu du côté $[UT]$.

1. La droite (UP) est bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$

La droite (MP) est une médiane du parallélogramme $RSTU$. On a ainsi le même codage pour les segments $[RP]$, $[PS]$, $[RU]$, $[ST]$, $[UM]$, $[MP]$ et (MP).



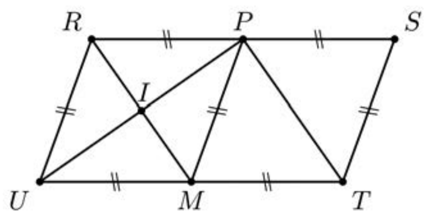


Fig. 3 Fig. 4

1.1. La diagonale (UP) du losange $RPMU$ est bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ (Fig. 3).

1.2. Les triangles RUP et MUP sont isométriques. On en déduit $\widehat{RUP} = \widehat{RPU}$. La droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ (Fig. 3).

1.3. Comme $UR = UM$ et $PR = PM$ (Fig. 4), la droite (UP) est médiatrice du segment $[RM]$.

Dans le triangle isocèle RUM, la droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUM}$.

2. Le triangle UPT est rectangle en P

2.1. Le triangle UPT est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[UT]$ (Fig. 3), il est donc rectangle en P.

2.2. Les diagonales du losange $RPMU$ se coupent en leur milieu I, elles sont perpendiculaires (Fig. 4). Dans le triangle UPT, I est milieu du côté $[UP]$ et M est milieu du côté $[UT]$.

Les droites (IM) et (PT) sont donc parallèles.

On en déduit que les droites (UP) et (PT) sont perpendiculaires.

Le triangle UPT est donc rectangle en P.

2.3. Le point I (resp. J) est le point d'intersection des diagonales du losange $RPMU$ (resp. $PSTM$) (Fig. 5).

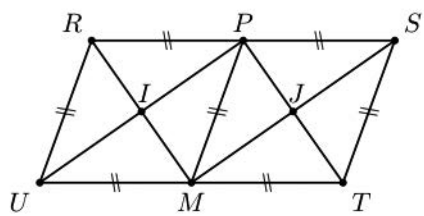


Fig. 5

Dans le triangle UPT, I (resp. J, M) est milieu du côté $[UP]$, (resp. $[PT]$, $[UT]$). Les droites (IM) et (PJ) (resp. (IP) et (MJ)) sont parallèles. Le quadrilatère $IPJM$ est donc un parallélogramme.

Il a un angle droit en I (les diagonales d'un losange sont perpendiculaires). Le parallélogramme $IPJM$ est donc un rectangle et le triangle IPJ est rectangle en P.

On peut aussi démontrer que $IPJM$ est un parallélogramme en utilisant la translation qui applique R sur P.

Cette translation applique P (resp. U et M) sur S (resp. M et T).

Les droites (RM) et (PT) sont donc parallèles ainsi que les droites (PU) et (SM).

C. Procédure avec construction du point *M* et utilisation de la symétrie de centre *P*

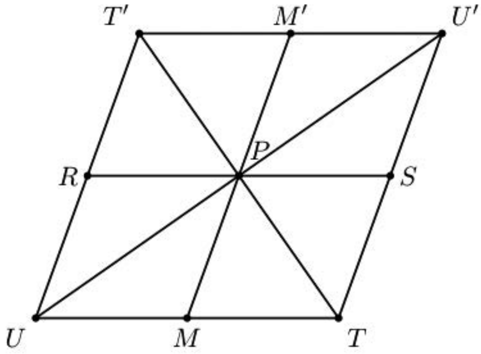


Fig. 6

On construit T' (resp. M' et U') image de T (resp. M et U) par la symétrie de centre P.

Les conditions initiales et les propriétés de la symétrie centrale (l'image d'une droite est une droite parallèle, les longueurs des segments sont conservées) permettent de dire que $UT'U'T$ est un losange. La diagonale (UP) du losange $UT'U'T$ est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ et perpendiculaire à la diagonale (TP). Le triangle UPT est donc rectangle en P.

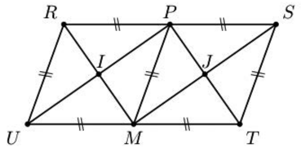
Commentaires /

1. La première démonstration est la plus simple, elle ne demande aucune construction.

2. On peut aussi définir le point M comme point d'intersection de (UT) et de la parallèle à (RU) comprenant P ou comme point d'intersection de (UT) et de la parallèle à (PT) comprenant R.

Solution d'un élève de 2e année du secondaire

Soit M le milieu de $[UT]$ (Fig. 5).



Deux cotés opposés d'un parallélogramme ayant la même longueur et dans ce cas-ci, le grand côté étant deux fois plus grand que le petit,

$$2UR = 2RP = 2PS = 2ST = 2TM = 2MU = RS = TU.$$

De plus, R une médiane du parallélogramme,

$$PM = UR = RP = PS = ST = TM = MU.$$

On a ainsi deux quadrilatères $RPMU$ et $PSTM$ ayant quatre côtés de même longueur. Ce sont donc des losanges. Puisqu'ils ont un côté commun ils sont isométriques. Les droites (UP) et (PT) étant des diagonales de ces losanges, elles sont des axes de symétrie et donc des bissectrices des angles $\widehat{TUR}$ et $\widehat{STU}$.

Les diagonales d'un losange étant perpendiculaires, $\widehat{MIP} = \widehat{MJP} = 90°$. Les deux losanges étant isométriques, leurs demi-diagonales $[MI]$ et $[PJ]$ ont même longueur. Le quadrilatère $PJMI$ est donc un rectangle, l'angle $\widehat{UPT}$ est droit et le triangle UPT est rectangle.

PROBLEME 2 ***(OMB 2010, finale Midi)***

Soit un carré $ABCD$ de centre E. La droite (CF) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$ en $F \neq B$. Quel est le rapport des aires du triangle BEF et du carré $ABCD$?

Niveau scolaire :
Ce problème a été proposé à des élèves de 3e et 4e années de l'enseignement secondaire (14 à 16 ans)

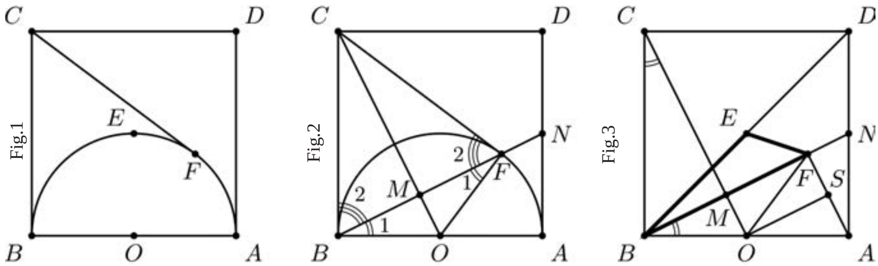
Domaine mathématique :
Géométrie plane
<u>Contenu des connaissances de l'énoncé.</u>
Propriétés du carré et des tangentes à un cercle par un point extérieur à ce cercle. Aire d'une figure.
<u>Contenu des connaissances dans les procédures</u>
Propriétés du triangle isocèle, des angles (complémentaires, à côtés perpendiculaires, inscrits dans un cercle), de la médiatrice d'un segment.
Propriétés des rotations.
Théorème de Pythagore.
Cas d'isométrie et de similitude des triangles. Rapport de similitude (resp. des aires) de deux triangles semblables.
Propriétés des aires. Différentes formules de l'aire d'un triangle.
Coordonnées d'un point dans un repère et calcul de la distance entre deux points.

Analyse du problème :
Le point F appartient au cercle de diamètre $[AB]$, au cercle de diamètre $[CO]$ et au cercle de centre C et de rayon AB. On peut le construire en appliquant la méthode des deux lieux. L'élève peut aussi "placer" le point F sur le cercle de diamètre $[AB]$ tel que $(OF) \perp (CF)$.

Le rapport des aires n'est pas donné dans l'énoncé. Pour répondre à la question, on peut calculer l'aire du triangle BEF en fonction de la longueur

côté du carré. On peut aussi partager le carré en plusieurs triangles et appliquer les propriétés des aires.

Procédure n°1



Les points B et F appartiennent au cercle de centre O, milieu du segment $[AB]$, on a $OB = OF$. Le triangle BOF est isocèle en O : angle B_1 = angle F_1 .
Comme (CF) est tangente au cercle de centre O, le triangle CFO est rectangle en F. On en déduit : $\widehat{B_2} = \widehat{F_2}$ (angles complémentaires de deux angles de même amplitude). Par conséquent : $CB = CF$.
La droite (OC) est donc médiatrice de $[BF]$, elle est perpendiculaire à la droite (BF) et coupe $[BF]$ en son milieu, noté M.
Soit N, le point d'intersection des droites (BF) et (AD). Les angles aigus $\widehat{ABN}$ et $\widehat{BCO}$ sont des angles à côtés perpendiculaires, ils ont donc même amplitude (Fig. 3).
Les triangles rectangles BAN et CBO sont isométriques.
En effet, $BA = CB$ et $\widehat{ABN} = \widehat{BCO}$.
On en déduit : $AN = 1/2 \times AD$. Le point N est donc milieu de $[AD]$.
Soit S le milieu de $[AF]$. Dans le triangle ABF, on détermine ainsi quatre triangles rectangles de même aire.
Les triangles rectangles BMO et AFN sont isométriques.
En effet, $BO = AN$ et $\widehat{BOM} = \widehat{ANF}$ (angles complémentaires de angle MBO).

On a : $\text{Aire}(AFN) = \text{Aire}(ABN)/5 = \text{Aire}(ABCD)/20$.

Comme N est le milieu de $[AD]$,

$\mathrm{Aire}(DFN) = \mathrm{Aire}(ABCD)/20$ et

$$\mathrm{Aire}(BDN) = \mathrm{Aire}(ABN) = \mathrm{Aire}(ABCD)/4$$

On en déduit : $\mathrm{Aire}(BDF) = \mathrm{Aire}(ABCD)/5.$

Comme E est le milieu de $[BD]$, $\mathrm{Aire}(EBF) = \mathrm{Aire}(ABCD)/10$.

Procédure n°2

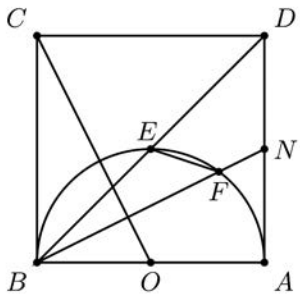


Fig. 4

Le point E, milieu de $[BD]$, appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

On a $OB = OF$ (voir procédure n°1). Par égalité des longueurs des segments de tangentes menées d'un point à un cercle, $CB = CF$.

La droite (OC) est donc médiatrice de $[BF]$, elle est perpendiculaire à la droite (BF).

On appelle r_E la rotation de centre E et d'angle 90°.

Cette rotation applique $[BA]$ sur $[AD]$ et (OC) sur (BF)

($r_E(C) = B$ et $CO \perp BF$)

Cette rotation applique donc le point O sur le point d'intersection des droites (AD) et (BF), noté N, et N est le milieu de $[AD]$.

L'angle inscrit $\widehat{EFB}$ dans le cercle de centre O et l'angle $\widehat{BDA}$ ont la même amplitude (45 °).

Les deux triangles BEF et BND sont donc semblables.

On pose $AB = 2c$. Le rapport de similitude des deux triangles est donné par $\dfrac{BE}{BN} = \dfrac{\sqrt{2}c}{\sqrt{4c^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Le rapport des aires des deux triangles est $\dfrac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(BND)} = \dfrac{2}{5}$

Comme $\text{Aire}(BND) = \text{Aire}(ABCD)/4$, on en déduit :

$$\frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(BND)} \times \frac{\text{Aire}(BND)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

.

Procédure n°3

Soit le côté c du carré. Par égalité des longueurs des segments de tangentes menées d'un point à un cercle, $CF = CB$, donc B appartient au cercle de rayon c centré en C. Par suite, il peut être défini par l'intersection des deux arcs de cercle. On fait une figure un peu précise :

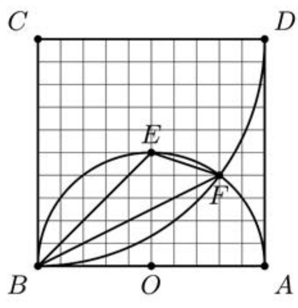


Fig. 5

On y observe que les coordonnées de F sont $(4c/5, 2c/5)$ (dans le repère "évident" $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$). Il reste à le justifier, ce qui est immédiat par calcul des distances

$$OF = \sqrt{\left(\frac{4c}{5} - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2c}{5} - 0\right)^2} = \frac{c}{2}$$

et

$$CF = \sqrt{\left(\frac{4c}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{2c}{5} - c\right)^2} = c$$

Le calcul de l'aire du triangle se fait maintenant par le procédé que l'on veut (formule de Héron, formule $\frac{1}{2}\sum(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)$, déterminant

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

théorème de Pick ou simplement comptage des petits carrés).

On obtient $\frac{\mathrm{Aire}(BEF)}{\mathrm{Aire}(ABCD)} = \frac{1}{10}$.

Commentaires :

1. Dans la procédure n°3, on peut utiliser d'autres formules de l'aire d'un triangle :

$S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$, $S = \frac{abc}{4R}$ (où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle).

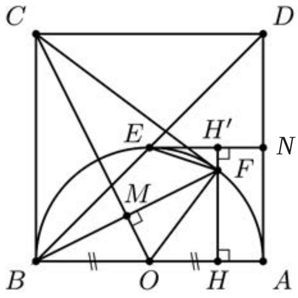
En effet, l'angle $\widehat{EFB}$ a une amplitude de $45°$ et le cercle de centre O est circonscrit au triangle BEF.

2. Le point F pourrait être défini comme le point d'intersection des droites (BN) (N milieu de $[AD]$) et (AR) (R milieu de $[CD]$).

Dans la première procédure, on a démontré que le point N (point d'intersection des droites (BF) et (AD) est le milieu de $[AD]$. On peut facilement démontrer que le point d'intersection des droites (AF) et (CD) est le milieu de $[CD]$

.

Solution d'un élève de 4e année du secondaire



Appelons $2a$ le côté du carré $ABCD$. Puisque $OF = OB$, le triangle OBF est isocèle et donc $\widehat{OBF} = \widehat{OFB}$.

Or, $\widehat{CFB} = 90° - \widehat{OFB} = \widehat{CBF}$, le triangle BCF est donc isocèle en C. D'autre part, puisque $OF = OB$, $CF = CB$ et $\widehat{CFO} = \widehat{CBO}$, les triangles CFO et CBO sont isométriques.

Le triangle BCO, rectangle en B, est tel que $BC = 2BO$. Soit M le point d'intersection de (CO) et de (BF) et N celui de (BF) et de (DA). Les triangles BCO, MBO et ABN sont donc semblables et $BA = 2NA$. N est donc le milieu de $[DA]$.

Soit H la projection orthogonale de F sur (AB).

Il est clair que les triangles BMO et BAN sont semblables. De plus, comme les triangles BMO et FMO sont isométriques, on a également les triangles FMO et BAN semblables. Donc

$$\frac{FO}{BN} = \frac{FM}{BA} \Rightarrow FM = \frac{2a \times a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

De plus,

$$\frac{BF}{BN} = \frac{FH}{NA} \Rightarrow \frac{4a/\sqrt{5}}{a\sqrt{5}} = \frac{FH}{a} \Rightarrow FH = \frac{4a}{5}$$

Soit H' la projection orthogonale de F sur (EN), on a aussi $FH' = a/5$.

Ainsi

$$\text{Aire}(ENF) = \frac{1}{2}EN \times FH' = \frac{1}{2}a\frac{a}{5} = \frac{a^2}{10}$$

$$\text{Aire}(BNA) = \frac{1}{2}a \times 2a = a^2$$

$$\text{Aire}(DEN) = \frac{1}{2}a \times a = \frac{a^2}{2}$$

donc

$$\text{Aire}(BEF) = \text{Aire}(BDA) - \text{Aire}(ENF) - \text{Aire}(BNA) - \text{Aire}(DEN) = \frac{2a^2}{5}$$

or

$\text{Aire}(ABCD) = (2a)^2 = 4a^2$,

donc finalement

$$\frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2a^2/5}{4a^2} = \frac{1}{10}.$$

TOURNOI DE CALCUL MENTAL

PRESENTATION

L'association Tournoi de Calcul Mental a été fondée en 2008 pour que ce tournoi puisse profiter à un maximum d'élèves et d'enseignants ! Le CIJM a été d'une aide précieuse. Septembre 2008 : c'est donc le lancement du premier tournoi de calcul mental national, qui fête cette année scolaire 2010-2011 sa troisième édition, avec déjà plus de 250 classes inscrites.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

La compétition a débuté en collège sensible en ZEP, avec des championnats de tables de multiplication réunissant toutes les classes de 6^e en 2003. Il s'est ensuite étendu deux ans plus tard à un concours de calcul mental avec les quatre opérations, dans le cadre d'une liaison CM_2-6^e. Il a mis en compétition l'année suivante 15 classes de CE_2, CM_1, CM_2, 6^e et 5^e du quartier, soit environ 300 élèves.

Compétition :

Quelles sont les spécificités de ce tournoi de calcul mental ?

- C'est un tournoi en deux épreuves. La première est coefficient 1 et a lieu au 2^e trimestre. La 2^{de} est coefficient 2 et a lieu au 3^e trimestre. La première épreuve est conçue pour entretenir la motivation des élèves, les projeter dans la réalité de l'épreuve et déclencher de nouveaux progrès.

- C'est un tournoi à destination des classes : pour chacune des deux épreuves, le score retenu pour le tournoi est la moyenne de tous les scores des élèves d'une même classe. Cela permet de fédérer les classes au sein d'un établissement, de développer la solidarité entre élèves et d'impliquer les élèves en grande difficulté. Les élèves d'une même classe sont tous responsables du score obtenu, de manière égalitaire, ce qui est très stimulant pour eux.

- L'association envoie aux enseignants plusieurs séquences d'entraînement couvrant toute l'année scolaire, de septembre à juin, à raison de 5 calculs par jour, 4 jours par semaine, ainsi qu'une progression annuelle par compétences. Ces entraînements sont fournis à titre indicatif, pour rendre service aux enseignants qui n'ont pas déjà leur progression de calcul mental, ou pour ceux qui débutent. Ils n'ont rien d'obligatoire. Par exemple, pour le niveau 6^e, les enseignants reçoivent une progression annuelle, 5 séquences d'entraînements de 7 grilles de 20 calculs chacune et les 5 livrets de l'élève lui correspondant.

- Les calculs proposés dans les entraînements et les épreuves respectent de manière stricte les programmes officiels de mathématiques et couvrent le maximum de compétences possible. Pour rappel, les programmes officiels de mathématiques indiquent que 5 à 15 minutes par séance doivent être consacrées à la pratique du calcul mental.

- Ces séquences d'entrainement sont toutes accompagnées d'un livret de l'élève : une grille vierge de 20 cases avec un tableau d'auto-évaluation par compétences, qui peut aider notamment l'enseignant pour la validation du socle commun de connaissances et de compétences, et dont le premier objectif est de motiver les élèves et de les faire encore progresser en leur faisant prendre conscience de leurs points forts et de leurs points faibles.

- Ce tournoi a pour volonté de rendre service aux enseignants. Pour chaque compétence, des exemples des différentes procédures possibles pour déterminer le résultat d'un calcul sont entièrement rédigées. De plus, les enseignants participent par leurs remarques à l'élaboration du Tournoi de l'année suivante, en communiquant par mail ou par téléphone, ainsi que lors de l'atelier proposé aux journées APMEP pendant les vacances de la Toussaint, ou par des rencontres sur le Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques. C'est ainsi que les entraînements s'enrichissent de nouvelles compétences chaque année.

Tournoi individuel pour les élèves de 1re et de Terminale :
Une épreuve dans l'année, essentiellement autour de la notion de fonction, de fonction dérivée, de primitive. Inscription individuelle par le professeur de mathématiques.

Tournoi tout public :
L'association organise aussi des tournois de calcul mental tout public, à l'occasion du Salon Culture et Jeux Mathématiques, des portes ouvertes d'établissements scolaires, etc., pour le plaisir partagé des petits et des grands et la valorisation de notre discipline.

Contact :
Association Tournoi de Calcul Mental
Guenièvre TANDONNET, présidente
42, rue Saint Bernard 75011 PARIS
Tél : 06 07 19 80 38
Mail : guenievre.tandonnet@gmail.com
Mail : tournoicalculmental@gmail.com
Site internet : http://tournoicalculmental.unblog.fr

Quelques exemples de calculs proposés :

Extrait de l'épreuve n° 2 des CM_1, 2009-2010 :

58 + 39 =	300 - 75 =	7 x 60 =	Dictée : 5 centaines de millions, 2 unités de mille et 7 dizaines	Le quadruple de 525 015 ?

Extrait du livret du professeur, séquence n° 2 des entraînements 2010-2011, 6e :

La moitié de 75 ? Réponse : 37,5	29,7 cm = … m Réponse : 0,297	79,5 = 79 + …/100 Réponse : 79,5 = 79 + 50/100	Dictée : 7 centièmes et 42 dizaines Réponse : 420,07	Le complément de 3,08 à 17,58 ? Réponse : 14,5

Extrait du livret du professeur, séquence n° 3 des entraînements 2010-2011, 5e :

Dictée : 98 000 100 063	(+5) + (- 7,2) = - 2,2	5/6 + 1/3 = 7/6	90 L = … hL Réponse : 0,9	0,08 : 40 = 0,002

Extrait du livret du professeur, séquence n° 1
des entraînements 2010-2011, 4e :

Factoriser $16x + 24x^2$ Réponse : $8x(2 + 3x)$	1,2 : 0,3 = 4	0,1 h = … min Réponse : 6	$(-3{,}5) + (-0{,}53)$ = - 4,03	26 x 3,9 = 101,4

Extrait du livret du professeur, séquence n° 1 des entraînements 2010-2011, 3e :

(+3,9) + (- 8) = - 4,1	350 m = … km Réponse : 0,35	Division euclidienne de 29 par 6 Réponse : 29 = 6 x 4 + 5	Combien vaut l'expression $A = 6x^2 - 25x$ pour $x = -4$? Réponse : A = 196	(-17) x (+12) = - 204

Extrait du livret du professeur, séquence n° 2
des entraînements 2009-2010, 2de :

$(4 + 5x)^2$ = $16 + 40x + 25x^2$	- 4 x 2,5 = -10	70000 m^2 = … hm^2 Réponse : 7	2 x 1/16 = 1/8	$(1+4\sqrt{3})(1-4\sqrt{3})$ = - 47

Remarques et commentaires :

Dans le grand public, comme au ministère, le calcul mental est identifié comme une des clés de la réussite en mathématiques.

Il faut cependant clairement espliquer ce que l'on sous entend derrière ce vocable et savoir distinguer entre calcul automatisé (ce qui est directement accessible dans la mémoire) et calcul réfléchi (qui demande réflexion et choix de procédure).

Il est évident que la frontière entre ces deux types de calcul mental n'est pas la même pour tout le monde, qu'elle dépend de l'âge, des acquis et de la formation de chacun.
De même dans les exercices proposés en exemples ci-dessus on peut essayer de repérer ceux qui font partie du calcul mental automatisé (tout au moins on peut l'espérer ; ex 3 - CM_1 ; ex 1- 6^e ; ex 3 - 5^e ; ex 2 - 4^e ; ex 3 - 3^e ; ex 1 et ex 2 - 2^{de}) de ceux du calcul réfléchi .

L'intérêt du calcul réfléchi est pour nous, enseignant de mathématiques, fondamental. Comme le dit Eric Trouillot dans un excellent article paru dans le bulletin vert 492 de l'APMEP : "*retournez un nombre dans tous les sens permet de mieux l'appréhender..., le décomposer lui donne de l'épaisseur et de la consistance."*

C'est tout l'intérêt des exercices suivants, qui ne devraient intervenir que dans une progression clairement définie : ex 1 et ex 2 - CM_1 ; ex 5 - 5^e ; ex 5 - 3^e ;

Ce qui vient d'être dit pour une meilleure maîtrise du nombre se retrouve un peu plus tard pour une meilleure appropriation des formules (conversion ou calculs algébriques) : ex 2 - 6^e ; ex 3 - 4^e ; ex 4 - 3^e ; ex 5 - 2^{de}.

Des questions difficiles :
Il en faut sans doute pour stimuler les meilleurs. Cependant le quadruple de 525 015 en cm ne peut se poser qu'après des questions bien plus faciles et quand on est sur que le mot "quadruple" est connu de tous …

TOURNOI DES VILLES

PRÉSENTATION

Le Tournoi des Villes est un tournoi mathématique pour les élèves de la quatrième à la terminale. Ce tournoi a démarré en Russie en 1980 et est devenu réellement nternational depuis. Aujourd'hui, plus de 100 villes dans 20 pays différents en Europe de l'Est et de l'Ouest, en Amérique du Nord et du Sud, en Asie et en Australie y participent. Ce tournoi se déroule en deux temps (une version d'automne et une version de printemps) et le meilleur des deux résultats est conservé pour établir le classement. Évidemment, rien n'empêche un candidat de ne venir qu'à une seule des deux épreuves.

Les sujets sont les mêmes dans tous les pays où le tournoi est organisé. Pour chacune des deux catégories d'âge (de la quatrième à la seconde et de la première à la terminale), deux versions de l'épreuve sont proposées (la version normale qui dure 4 heures et la version difficile qui dure 5 heures). La difficulté des problèmes est assez variée et on ne conserve, pour chaque candidat, que les points des trois problèmes les mieux réussis ce qui permet à chacun de concourir à son niveau. Le score final est affecté d'un coefficient suivant la classe du participant. Les démonstrations sont demandées.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

- 1980 : Première organisation du tournoi à Moscou, Leningrad et Riga.
- 1984 : Le tournoi est soutenu par l'académie des sciences d'URSS et devient international.
- 1988 : Première participation "occidentale" : Toronto.
- 1998 : Première participation de Paris.
- 2003 : Création d'une association en France.

Epreuves :

Individuelles

Catégories : 2 (quatrième, troisième, seconde et première, terminale)

Niveaux : 2 (normal et difficile, au choix du candidat)

Problèmes : 5 à 7 en quatre ou cinq heures (seuls les trois les mieux réussis comptent) dont les solutions doivent être rédigées.

Compétition :

Version d'automne : un dimanche matin en octobre ou en novembre.

Version de printemps : un dimanche matin en février ou en mars.

Contacts :

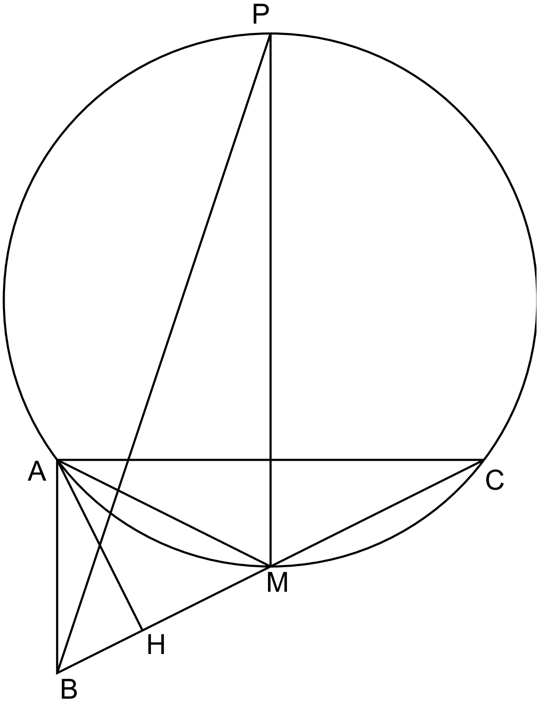
site web : *http://www.tournoidesvilles.fr*

e-mail : *infos@tournoidesvilles.fr*

Le milieu de la hauteur

Printemps 2008, première-terminale

Soient ABC un triangle rectangle en A et M, le milieu de [BC]. La droite issue de M perpendiculairement à (AC) coupe le cercle circonscrit au triangle AMC une deuxième fois au point P.



Montrer que le segment [BP] coupe la hauteur [AH] en son milieu.

Domaine de compètence :

Géométrie : homothéties, triangles rectangles, cercles circonscrits.

Analyse de la tâche :

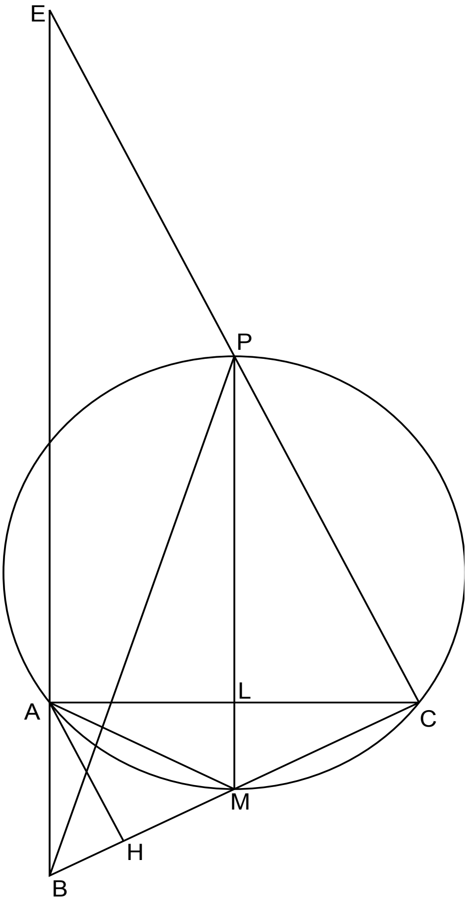
(première-terminale)

Comme souvent, la difficulté de ce beau probléme de géométrie ne réside pas tant dans la technicité que dans une forme de créativité. En effet, une fois la construction complétée, la preuve devient étonnamment simple.

Ainsi, cet énoncé peut être posé plus tôt en donnant une indication.

Notons par ailleurs qu'une preuve analytique, plus technique et beaucoup moins créative est bien sûr possible.

Pistes de recherche :



La première piste de recherche qui vient à l'esprit est celle des triangles semblables. En effet, tous les triangles rectangles de la figure sont semblables au triangle ABC (AHC, AHB, PMC, PMA, ...). Cependant, cette idée est une fausse piste et ne permet pas seule de conclure.
De fait, ce sont deux homothéties, celle de centre C et de rapport 2, qui envoie la droite (PM) sur (AB) et celle de centre B qui envoie la droite (CP) sur la droite (AH) qui permettent de conclure.

Pour ce faire, il faut un peu compléter la figure.

Solution :
On note L l'intersection de (AC) et (PM) et E l'intersection de (CP) et (BA). Les droites (BE) et (MP) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). Par conséquent, elles sont parallèles. De plus, M est le milieu de [BC]. Par conséquent, l'homothétie de centre C et de rapport 2 envoie M sur B, L sur A et P sur E. On en déduit que P est le milieu de [CE] et que L est le milieu de [AC].

La droite (MP) est perpendiculaire à [AC] et passe par son milieu : c'est donc sa médiatrice. Par conséquent, le centre du cercle circonscrit à ACM et sur la droite (MP). Ce cercle est aussi circonscrit au triangle MPC qui est donc rectangle en C. Finalement, (CE) et (AH) sont toutes les deux perpendiculaires à (BC) et sont donc parallèles.

L'homothétie de centre B qui envoie C sur H envoie donc le triangle BCE sur le triangle BHA. De plus, cette homothétie stabilise la médiane (BP) du triangle BCE. Par conséquent, (BP) est aussi la médiane issue de B de BHA et coupe donc [HA] en son milieu.

Les jolis rectangles de Julie
Printemps 2008, troisième-seconde

Les cases d'un échiquier 10×10 sont coloriées en blanc, gris et noir. Deux cases qui ont un côté commun sont toujours de deux couleurs différentes. On sait qu'il y a 20 cases grises. Julie trouve un rectangle 2×1 joli s'il est composé d'une case blanche et une case noire.
a) ***Montrer que Julie pourra toujours découper dans l'échiquier 30 jolis rectangles.***

b) ***Trouver un coloriage qui permet de découper 40 jolis rectangles (et expliquer pourquoi il convient).***

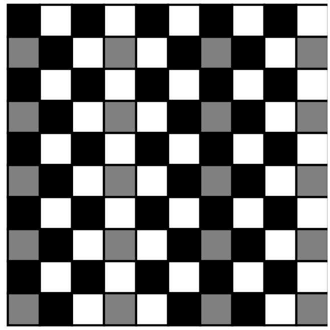
c) ***Trouver un coloriage qui ne permet pas de découper plus de 30 jolis rectangles (et expliquer pourquoi il convient).***

Domaine de compétence :
Un peu de dénombrement, beaucoup de recherche et de raisonnement.

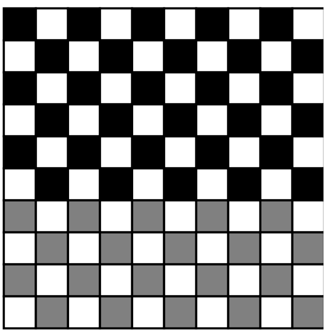
Analyse de la tâche :
Ce problème est à ce niveau assez dicile. L'ordre des questions n'est pas forcément le plus facile pour le résoudre. En effet, pour réussir la première question, il faut réfléchir sur un certain nombre d'exemples. Les deux autres questions demandent justement de trouver deux exemples qui sont extrémaux (en effet, la question **a** montre que l'exemple de la question **c** contient le minimum possible de jolis rectangles ; par ailleurs, comme il y a 80 cases blanches ou noires, il ne peut pas y avoir plus de 40 jolis rectangles donc l'exemple de **b** réalise l'autre extremum). Par conséquent, il pouvait être judicieux de commencer par chercher ces exemples extrêmaux.

En pratique, beaucoup de candidats ont résolu la question **b** (dont la preuve est immédiate une fois que l'exemple est donné), un peu moins la question **c.** La question **a** donne souvent lieu à des raisonnements approximatifs. En effet, la preuve la plus courte est astucieuse et on peut assez facilement se perdre dans des études de cas fastidieuses si l'on ne voit pas la bonne méthode.

Solution :

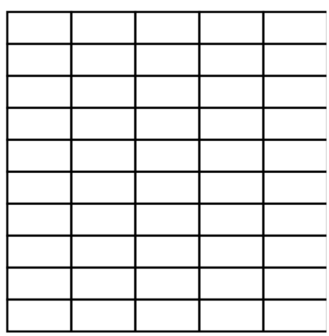


b) Le coloriage suivant permet facilement de découper 40 jolis rectangles (tous horizontaux) :



c) Le coloriage suivant permet facilement de découper 30 jolis rectangles (tous horizontaux), et pas plus, car il n'y a au total que 30 cases noires :

a) On remarque dans nos deux exemples que l'on peut se contenter de découper des rectangles horizontaux (bien entendu, on pourrait aussi en découper des verticaux, mais ce n'est jamais obligatoire). Cette observation simple donne l'idée de la preuve.Supposons que l'on a un échiquier colorié comme dans l'énoncé. On peut découper 50 rectangles 2×1 horizontaux (jolis ou pas, peu importe pour l'instant) :

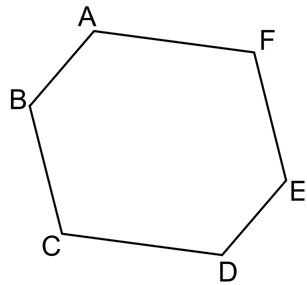


Comme deux cases voisines ne sont pas de la même couleur, chacun des 50 rectangles découpés a exactement deux couleurs. Parmi ceux-ci, 20 exactement ont une case grise puisqu'il y a 20 cases grises au total. Par conséquent, parmi les rectangles découpés, 30 sont jolis et ceci ne dépend pas du coloriage. Bien entendu, cette méthode ne permet pas de découper le nombre maximum possible de jolis rectangles.

Hexagone presque régulier

Printemps 2008, troisième-seconde

Les côtés opposés d'un hexagone convexe *ABCDEF* sont deux à deux parallèles :
(*AB*) // (*ED*), (*BC*) // (*FE*)
et (*CD*) // (*AF*). De plus on a $AB = ED$.



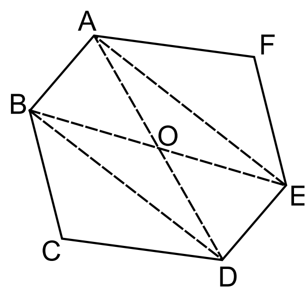
Montrer que, dans ce cas,
BC = FE et CD = AF.

Un hexagone est *convexe* s'il est non croisé et n'a aucun angle rentrant ou plat.

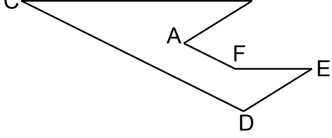
Domaine de compétence :
Géométrie : symétrie centrale

Analyse de la tâche :
Ce problème est assez facile. Une figure bien faite permet de « voir » la symétrie et la preuve est ensuite élémentaire et tout à fait accessible en fin de collège. La seule subtilité réside dans l'utilisation correcte de la convexité. Ce point n'était pas trés important dans l'appréciation de la solution.

Solution :



Comme *ABCDEF* est convexe, le quadrilatère *ABDE* est aussi convexe. De plus, comme [*AB*] et [*ED*] sont parallèles et de même longueur, *ABDE* est un parallélogramme. Notons *O* le centre de ce parallélogramme. La symétrie centrale ***s*** de centre *O* échange *A* et *D* d'une part et *B* et *E* d'autre part. Comme les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles et qu'elles passent respectivement par *B* et son image *E* par ***s***, la symétrie ***s*** échange (*BC*) et (*EF*). De même, la symétrie ***s*** échange (*AF*) et (*CD*). Finalement, ***s*** échange l'intersection *C* de (*BC*) et (C*D*) avec l'intersection *F* de (*EF*) et (*AF*). Finalement l'hexagone est symétrique par rapport à *O* et donc $BC = FE$ et $CD = AF$.



Remarque :
Comme le montre l'exemple ci-contre, le résultat est faux si l'hexagone n'est pas convexe.

TOURNOI MATHEMATIQUE DU LIMOUSIN

PRÉSENTATION

Le Tournoi, qui s' adresse aux élèves de quatrième et aux lycéens, travaillant par équipe de deux, obtient la participation de tous les lycées et de plus de trois collèges. sur quatre dans les trois départements de la Région : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.

Développer le goût de la recherche scientifique, promouvoir l'image des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, tels sont ses objectifs. La remise des prix, grande fête des mathématiques et des jeunes a lieu au printemps. Un grand nombre de jeunes de toutes sections y sont récompensés.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Le Tournoi mathématique du Limousin, association "loi 1901", a été créé en 1987 par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Limoges, l'Inspection Pédagogique Régionale, l'IREM de Limoges. Chaque année, quatre mille élèves de quatrième et deux mille lycéens environ participent au Tournoi Mathématique du Limousin.

Partenaires :

Rectorat ;
Conseil Régional du Limousin ;
Conseils Généraux de Corrèze, Creuse et Haute-Vienne ;
CASDEN Banque populaire.

Compétition :

Épreuve 4^{e} en janvier (2 heures durant le temps scolaire).
Épreuve en lycée en janvier (3 heures durant le temps scolaire).
Remise des prix au printemps, dans le grand amphithéâtre de la Faculté de Droit à Limoges.

Épreuves :

Par équipe de 2. Catégories: 4^{e} et 2de/ 1re / terminales. Les textes proposés, sous forme ludique, donnent envie de chercher, nécessitent une solution rédigée et sont susceptibles de prolongement.

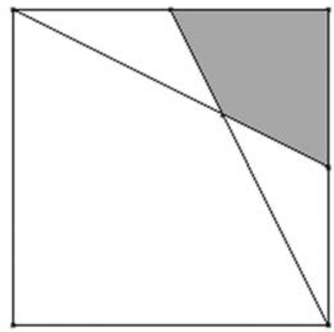
Il peut se faire que le même texte soit proposé en collège et en lycée. Les copies sont corrigées et récompensées selon les séries.

Contacts :

Tournoi Mathématique du Limousin:
IREM - 123, av. Albert Thomas
87060 Limoges CEDEX
Tél : 05 55 45 72 49

Jean Centaire

Les enfants de la famille Centaire doivent se partager équitablement, c'est-à-dire de façon que les parts aient toutes la même aire, un terrain carré de 100 m de côté.
Jean a dessiné sa parcelle (grisée sur le dessin) en prenant des milieux de côtés.



Combien y a-t-il d'enfants dans la famille Centaire ?

Quel est le périmètre de la parcelle de Jean ?

Terminez le partage de façon qu'il soit équitable.

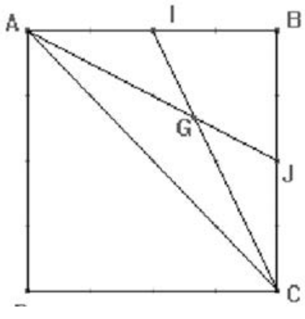
Niveau scolaire :
A partir de la classe de seconde des lycées

Domaine mathématique :
Géométrie plane : propriétés du triangle et de son centre de gravité

Analyse de la tache :
Plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice.
Nous en présentons trois.
La première étant celle que les élèves nous ont le plus souvent proposée, souvent bien incomplètement. Elle est aussi la plus laborieuse.

Etudions le dessin

Les triangles BJG et BJA ont même hauteur issue de B et JG = JA / 3 car G est le centre de gravité du triangle BCA.
Donc, aire (BJG) = aire (BJA) / 3



Les triangles BJA et BCA ont même hauteur issue de A et BJ = BC / 2 .
Donc, aire (BJA) = aire (BAC) / 2.
Aire (BAC) = aire (ABCD) / 2.

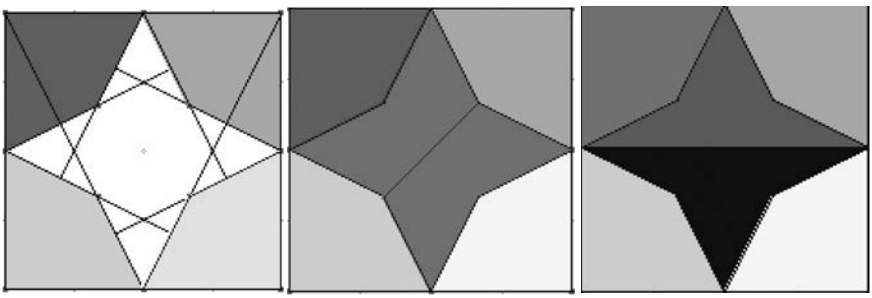
En conclusion, aire (BJG) = aire (ABCD) / 12.
La parcelle de Jean correspond au quadrilatère IBJG dont l'aire est le double de celle du triangle BJG.

La parcelle de Jean a pour aire : aire (ABCD) / 6 ; les enfants de la famille Centaire ayant des parcelles de même aire, il y a 6 enfants.

$$AC = AB \times \sqrt{2} \qquad AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = 5 \times AB^2/4$$

$$AJ = AB \times \sqrt{5}/2 \qquad GJ = AB \times \sqrt{5}/6$$

Périmètre de la parcelle de Jean : AB x $\sqrt{5}$ / 3 + AB = AB (1 + $\sqrt{5}$ / 3).
Pour terminer le partage, on peut constituer 3 autres parcelles analogues à celle de Jean et partager le terrain restant selon un de ses axes de symétrie, par exemple :

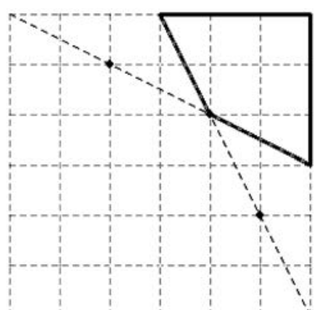


Une deuxième idée, bien plus simple mais les idées les plus simples ne sont pas toujours celles qui viennent spontanément !

Exploration de la feuille quadrillée

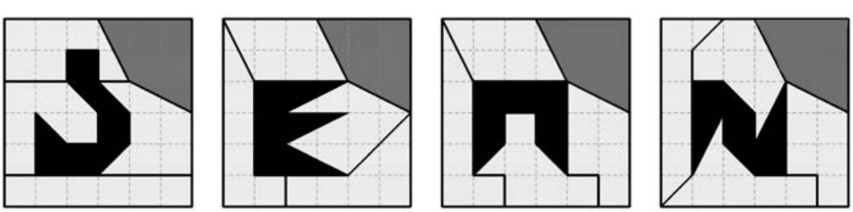
Considérons un carré de 6 carreaux de côté que nous tracerons sur une feuille quadrillée.

L'aire de la parcelle de Jean est de 6 carreaux, ce qui correspond à 1/6 de l'aire totale du carré.

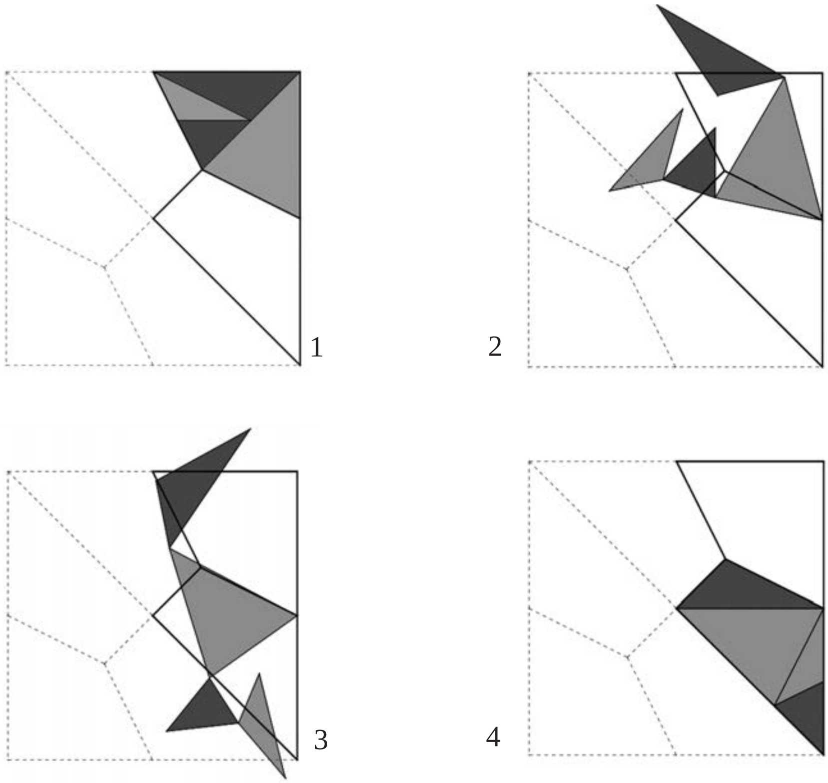


On peut maintenant découper le carré en 6 parts de même aire en s'aidant du quadrillage.

Ci-dessous quelques exemples.



Une troisième méthode : à la façon d’un puzzle articulé



Commentaires

Ce texte nous semble un excellent sujet pour une épreuve de Tournoi. Son énoncé est ouvert et ne semble pas à priori imposer de méthode. Poser une question numérique sur un dessin est en soit un peu déroutant. Le nombre de façons de résoudre le problème peut conduire en classe à des discussions intéressantes sur des comparaisons de méthodologie et sur les méthodes de recherche.

Certains partages de ce carré sont à l'origine de très beaux puzzles que nous proposons ensuite en animation grand public.

On peut aussi essayer de dénombrer toutes les solutions ; l'ordinateur est alors un outil précieux. On peut alors imaginer un jeu de mémory et d'observation en les représentant toutes sur une grande planche et individuellement sur des cartes puis jouer à celui qui retrouvera la carte sur la grande planche.

Enfin pour les plus courageux on peut inciter à une recherche de partage encore plus équitable : la même aire mais aussi la même périmètre ! C'est plus compliqué et met en jeu des méthodes d'analyse (étude de fonctions) .

Il était deux fois ... 2001 Collège

Vous allez écrire un nombre à huit chiffres, le plus grand possible, répondant aux conditions suivantes :
Il y a deux fois le chiffre 4, deux fois le chiffre 3, deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 1 .
Entre les deux chiffres 4 il y a quatre chiffres, entre les deux chiffres 3 il y a trois chiffres, entre les deux chiffres 2 il y a deux chiffres et entre les deux chiffres 1 il y a un chiffre.
Racontez-nous comment vous faites.

Niveau scolaire :
Pour les élèves de 9 à 12 ans.

Domaines mathématiques :
Arithmétique : écriture décimale des nombres, ordre dans les entiers.

Analyse de la tâche :
Un très bel exercice !!
Les élèves ont cherché et souvent trouvé même si hélas ils n'ont pas toujours su nous dire comment ils cherchaient…
Remarquons qu'en demandant le plus grand nombre, nous donnions le point de départ de la recherche. En demandant le plus petit, les choses se seraient un peu compliquées puisque ce nombre commence par deux.
Peu d'élèves ont remarqué l'unicité de la disposition.

Commentaires et développements :
Cet exercice est souvent proposé en animation grand public et en milieu scolaire dès la fin du cycle 2. Il est intéressant d'observer les différences entre la recherche papier crayon et la recherche par manipulation des jetons. Enfin notons que les enfants aiment à lire le grand nombre obtenu, peuvent chercher le plus petit et découvrir l'unicité de la disposition.

C'est un cas particulier du problème publié par le mathématicien écossais C.D. Langford en 1958 qui, en observant des alignements de cubes de couleurs rouge, bleue et jaune réalisés par son jeune fils, avait noté qu'il y avait un seul cube entre deux cubes rouges, deux cubes entre deux cubes bleus et trois cubes entre trois cubes jaunes. En utilisant des nombres à la place de couleurs (1 pour le rouge , 2 pour le bleu et 3 pour le jaune on obtient la configuration suivante : 3 1 2 1 3 2.

Le problème général posé par C.D. Langford est : "*Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à n tel que la paire de 1 encadre un seul nombre, la paire de 2 encadre deux nombres, …., la paire de n encadre n nombres ?*"
Le jeu avec les cubes donnent la solution pour $n = 3$, l'exercice du tournoi pour $n = 4$.

On montre qu'il n'y a pas de solution pour *n* égal à 5 ou 6. Par contre pour $n = 7$, il y a 26 solutions.
On sait que les valeurs de n qui donnent des arrangements de Langford sont de la forme $n = 4k + 3$ et $n = 4$. Il n'y a pas d'algorithme simple qui permette de trouver tous ces arrangements.

On peut rapprocher ce problème de celui des "Suites de Skolem"

Albert Thoralf Skolem est un mathématicien norvégien (1887- 1963), contemporain de Niels Abel. Ses contributions à la logique et à la combinatoire sont très importantes.

Les suites de Skolem vérifient la contrainte suivante :
"Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à *n* tel que les deux 1 soient contigus, la paire de 2 encadre un seul nombre, …., la paire de *n* encadre *n* -1 nombres ?"
On peut montrer qu'il n'existe des suites de Skolem de longueur $2n$ que pour $n = 4k$ ou $n = 4k +1$

Il y a 6 solutions pour $n = 4$, 504 solutions pour $n = 8$ et déjà 455 936 pour $n = 12$!!

Pour explorer les solutions de ce problème et en faire un jeu de manipulations concrètes, Jean Brette a imaginé de remplacer les nombres par des cavaliers. Chercher une suite de Skolem pour le nombre *n* est équivalent à positionner *n* cavaliers dont les jambes sont respectivement écartées de 1, 2, 3, …, *n* cases de manière à ne laisser aucun espace libre entre leurs pieds.

Il est intéressant de développer ce problème du *Jeu des cavaliers* avec des élèves et de trouver avec eux des situations où il y a plusieurs solutions et d'autres sans solution.

Un site pour jouer avec les Cavaliers de Jean Brette :
http://euler.ac-ersailles.fr/webMathematica/versailles/skolem/skolem.jsp

Une expérience pédagogique autour du problème des suites de Skolem a été développée sous la direction de Jean Brette et Jean Pierre Bourguignon dans plusieurs classes de CM1 et CM2 de Chilly Mazarin en 2000 et elle a conduit à l'élaboration d'une sculpture Skolem "*choc de blocs et chiffres au vent*" qui est aujourd'hui dans les jardins de l'IHES à Bures sur Yvette dans l'Essonne.

Cette aventure mathématique est longuement racontée dans un petit ouvrage "*Jeux mathématiques et vice versa*" publié dans la collection le Collège de la Cité chez Le Pommier. Vous y trouverez bien d'autres idées de généralisation de ce type de problèmes.

Un peu de bibliographie à propos de ces exercices :

1] Th. Skolem : On certain distributions of integers in pairs with given differences. Math. Scand 5 (1957).

[2] C.D. Langford : Problem. Math. Gaz. 42 . N°341 (Oct. 1958).

[3] J. Brette : Pair et impair : problèmes des drapeaux. Revue du Palais de la Découverte. Vol 7, n°63, Dec 1978.

[4] J. Brette : Jeu des 12 cavaliers, Bulletin de l'APMEP n°321, Dec 1979.

[5] M.Criton : A propos du problème des cavaliers, Bulletin de l'APMEP n°323, Avri1980.

[6] J.C.Bermond, A.E.Brouwer, A.Germa : Systèmes de triplets et différences associées. Problèmes combinatoires et théorie des graphes. Colloque CNRS. Orsay 1976, CNRS 1978.

[7] J.C.Bermond : Sur le jeu des cavaliers. Bulletin de l'APMEP n°328, Avril 198.

CLUBS UNIVERSITAIRES ET STAGES D'ÉTÉ

du nouveau du côté des activités périscolaires en mathématiques

Martin Andler,
professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin,
président d'Animath

Cet article est le premier d'une série visant à présenter les différents types d'activités mathématiques proposées aux collégiens et lycéens en dehors du temps scolaire (d'où le nom "activité périscolaire"). Les lecteurs impatients pourront prendre connaissance d'autres initiatives en se rendant sur le site d'Animath

(www.animath.fr)

ou en consultant

[Andler 2009]

Il existe d'assez nombreux clubs et ateliers[1] de mathématiques fonctionnant dans les collèges et lycées, certains d'entre eux, mais pas tous, étant impliqués dans Maths en Jeans

(http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm).

Nombreux voulant dire de l'ordre de quelques centaines, alors qu'il existe environ 10 000 établissements scolaires (collèges, lycées de différents types). On constate que la pérennité de ces structures est fragile, car elle sont dépendantes de l'enhousiasme et du dévouement des enseignants de ces établissements.

Les clubs universitaires :
Avec des objectifs un peu différents sont apparus ces dernières années plusieurs clubs universitaires. Le plus ancien est le club de mathématiques discrète de Lyon, créé par Bodo Lass, spécialiste de combinatoire, chercheur CNRS en mathématiques à l'institut Camille Jordan (UMR 5208 CNRS-UCBL), et maintenant animé par Bodo Lass, Theresia Eisenkölbl (MCF à l'université Claude-Bernard) et Pierre Dehornoy (doctorant à l'ENS de Lyon). Voici comment le club se présente lui-même :

1 La dénomination "atelier" fait référence à la notion d' "atelier scientifique" reconnue par l'Education nationale. Les textes de référence sont les circulaires 2001-046 du 21.3.2001 (BOEN du N°13 du 29.3.2001) et 2004-086 du 25.5.2004 (BOEN du 3.6.2004) et on trouve une description complète du dispositif sous la référence
[http://eduscol.education.fr/D0109/ASTDISP.htm].

«Ce club s'adresse essentiellement aux collégiens et lycéens de la région Rhône-Alpes, mais tous les jeunes matheux sont les bienvenus. Il sagit de pratiquer les mathématiques comme un loisir. Cette activité doit être mise sur le même plan que faire du violon au conservatoire, par exemple. Si tu aimes les mathématiques et les défis qu'elles posent, si tu jubiles à résoudre des problèmes, si tu cherches des énoncés, méthodes et solutions, si tu souhaites aller plus loin dans cette voie et te demandes : "pourquoi n'y a-t-il pas des clubs, des conservatoires ou des classes de maths comme il y a des classes musicales ou sportives", rejoins-nous : on peut commencer à tout moment.
Le but principal n'est pas de préparer un concours, mais de faire des mathématiques jolies, élégantes, amusantes, efficaces, profondes, importantes et passionnantes. Néanmoins, la plupart des participants se présentent à des jeux-concours tels que les Olympiades internationales de mathématiques (OIM), le Tournoi des villes, le concours hongrois KöMaL, les Olympiades académiques de première, le Concours général, le Concours intégral, le Kangourou des mathématiques, le Championnat des jeux mathématiques et logiques, etc.»

Ces dernières années, le club, qui se réunit le dimanche tous les 15 jours, a attiré des élèves de toute la France, dont la plupart des jeunes qui ont représenté la France à l'Olympiade internationale en 2010, voir

http://www.animath.fr/spip.php?article105

pour des informations sur l'équipe française et le site officiel, très bien fait, de l'OIM

(http://www.imo-official.org/).

La page web du club de Lyon est :

http://math.univ-lyon1.fr/~lass/club.html

Le club olympique d'Orsay est un peu plus récent. Créé à l'initiative de Louis Santaroubane, MCF de mathématiques à Orsay, dans le cadre d'un partenariat entre l'université Paris-Sud, l'Olympiade française de mathématiques" (Claude Deschamps), et l'académie de Versailles" (representée par Pierre Michalak, IA-IPR de mathématiques), il est maintenant animé principalement par David Zmiaikou et Bernardo da Costa, deux doctorants d'Orsay.

Les objectifs du club d'Orsay sont :
«- d'enseigner aux élèves des mathématiques élémentaires ingénieuses, de les encourager à étudier des sujets profonds,
- de développer leur intuition, créativité et ténacité dans la résolution des problèmes. Notre espoir est que les séances d'entrainement, les séminaires et stages que nous organisons encourageront les élèves à choisir une carrière scientifique.»

Le club est à l'initative d'un tournoi international (International Tournament of Young Mathematicians : www.itym.org), qui s'est déroulé à Orsay en 2009 et 2010. Compétition par équipe d'un type nouveau et très original, sur laquelle nous reviendrons prochainement, et qui sera complétée en 2011 par une compétition analogue au niveau français. Le site du club est :

http://matholympia.blogspot.com/

Le laboratoire de mathématiques d'Orsay soutient fortement cette initiative, notamment en utilisant les nouvelles dispositions du Contrat doctoral qui permettent de valider un monitorat par l'encadremet d'actvités de ce type.

Le "Cercle mathématique de Strasbourg" est tout récent : il a été créé à la rentrée 2010, à l'initative de Tatiana Beliaeva, spécialiste de géometrie arithmétique, MCF à l'université de Strasbourg, avec l'appui de l'IRMA. Il se présente de la manière suivante :

«Le cercle est destiné à tous le lycéens (tous les niveaux et filières confondus) qui s'intéressent aux mathématiques. Encadrés par des enseignants et chercheurs de l'IRMA et de l'IREM, les élèves vont y découvrir des mathématiques autres que celles du programme du lycée, ou d'autres aspects des mathématiques déjà connues.»

Son site est : **http://www-math.u-strasbg.fr/CercleMath/**

Le club de Lille, créé par le département de mathématiques de l'université de Lille 1 à l'initative de Mihai Tibar, géomètre algébriste et professeur de cette université, est encore dans les limbes, mais il devrait également commencer à fonctionner cet automne, combinant plusieurs activités à destination des lycéens et des professeurs :
«1° Cours/ateliers de préparation aux Olympiades de Première, 4 séances d'une demi-journée, entre octobre et février.
2° Projets "Maths en Jeans", où un chercheur propose un thème de recherche a étudier par groupes de 2-4 élèves, sous la direction d'un professeur du lycée. La réalisation peut être présentée par les élèves au congrès national Maths en Jeans au mois de mars.»

Les informations sur ce club se trouvent à

http://math.univ-lille1.fr/~tibar/Stage/stageSeconde.html

Stages d'été :
Le club de Lille est un prolongement d'un stage d'été destiné à des élèves de Seconde qui s'est déroulé fin juin début juillet à Lille (voir la page web ci-dessus). Trois stages de ce type se sont déroulés l'été dernier : outre celui de Lille, celui organisé par l'association Science ouverte à Bobigny en association avec l'université Paris-Nord (deux semaines du 21 juin au 2 juillet 2010), et celui organisé par le centre Galois à Orléans en lien avec l'université d'Orléans et les diverses institutions mathématiques régionales. Dans le cas du stage de Bobigny, l'objectif n'était pas de s'adresser spécifiquement à des élèves très doués en mathématiques, mais de les recruter sur la base de la motivation seule, et de leur lieu d'habitation, la Seine Saint-Denis. L'analyse suivante est éloquente : 24 jeunes venant de 16 établissements et 18 communes de Seine-Saint-Denis, dont 46% de garçons et 54% de filles, 66% de boursiers. L'objectif du stage d'Orléans (deux stages distincts d'une semaine, du 21 au 25 juin, puis du 28 juin au 2 juillet) était très similaire. Nous reviendrons plus longuement sur ces expériences qui sont appelées à se développer (prolongement vers les élèves de Première etc.).

Dès maintenant, on peut obtenir des renseignements sur les sites :

Science ouverte :
http://scienceouverte.fr/spip/index.php

Centre Galois :
http://centre-galois.fr/

Université de Lille :
http://math.univ-lille1.fr/~tibar/Stage/stageSeconde.html

Ces différentes initiatives sont de nature à changer profondément l'attractivité des études scientifiques, et en particulier mathématiques pour les jeunes, que leur talent soit déjà très affirmé ou pas, et aussi l'attractivité des universités. Dans beaucoup de pays, ce genre de structure, clubs et stages pendant les vacances, existent depuis de longues années. Il est instructif de constater que les quatre clubs mentionnés plus haut ont tous été créés par des collègues ayant fait leur scolarité ailleurs qu'en France et ayant connu, comme élèves, ce genre d'expérience. Il y a maintenant un savoir-faire qui ne demande qu'à se généraliser à d'autres universités !

Références
[2009g] Les activités mathématiques périscolaires I et II, Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public 482 et 489 (2009).

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES DE PREMIÈRE

PRÉSENTATION

Les Olympiades académiques de mathématiques ont été créées dans le but de stimuler chez les élèves le goût de l'initiative et de la recherche.
Ce concours est destiné à tous les lycéens de première de toutes séries.
L'inscription se fait auprès des professeurs, sur la base du volontariat.
Les connaissances nécessaires sont basées sur les programmes des classes de collège et de seconde , complétées par les parties communes des programmes des différentes classes de première.
Dans chaque académie, le dispositif est suivi par une cellule, présidée par un responsable désigné par le recteur.
La correction des copies, la mise au point du palmarès académique sont assurés par la cellule académique. La remise des prix fait l'objet d'une cérémonie académique, présidée par le recteur ou son représentant, en faisant appel à des partenaires locaux ou régionaux..
La cellule académique fait parvenir au groupe national les meilleures copies ; le groupe national établit le palmarès national.
La remise des prix nationaux fait l'objet d'une cérémonie organisée en collaboration avec le ministère chargé de l'éducation nationale et différent partenaires associatifs ou privés.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Créées en novembre 2000 pour les élèves des classes de premières scientifiques et technologiques.
A compter de la session 2005 s'adressent à tous les lycéens de première de toutes séries.

Epreuves :
Individuelles.
Durée quatre heures.
Quatre exercices dont deux sont communs à toutes les académies, deux autres sont choisis par la cellule académique.

Contact :
BO n° 35 du 30/09/2004.
Annales publiées par l'APMEP

LILLE

Deuxième exercice académique

Série S

Des couples parfaits

Énoncé

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant :

Pour i allant de 10 à 88
    Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier
        Alors écrire i et $i+11$
    Fin du Si
Fin du Pour

Cécile propose l'algorithme suivant

Pour i allant de 4 à 9
    Si $\sqrt{i^2+11}$ est un entier
        Alors écrire i^2 et i^2+11
    Fin du Si
Fin du Pour

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (**Si**) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

a. Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable i.

b. Quel est le temps de l'algorithme de Cécile.

Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

(a) Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ?
Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?

(b) Quelle est la réponse au problème posé ?

(c) René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

Partie III

Dans le cas des couples d'entiers 'a trois chiffres (compris entre 100 et 999), que vont donner les algorithmes adaptés de Bernard et Cécile ?
Quelle est la réponse au problème posé ?

Éléments de solution

Partie I

a. Soit (a^2, b^2) le couple d'entiers cherché.
Dans l'algorithme de Bernard i représente a^2

b. Dans l'algorithme de Cécile, i représente a et le temps est 9-3=6.

Partie II

1. Bernard doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme : :

```
Pour i allant de 1000 à 8888
    Si √i est un entier et √(i+1111) est un entier
        Alors écrire i et i+1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 7889.
Cécile doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme :

```
Pour i allant de 32 à 99
    Si √(i²+1111) est un entier
        Alors écrire i² et i²+1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 68.

2. La réponse est (2025, 3136), obtenue pour $i = 45$.

3. On a $b^2 = a^2 + 1111$ ou $b^2 - a^2 = 1111 = 11 \times 101$ produit de deux nombres premiers.
D'où $b + a = 101$ et $b - a = 11$, d'où $b = 56$ et $a = 45$, puis $a^2 = 2025$ et $b^2 = 3136$; on vérifie que $3136 = 2025 + 1111$.
L'alternative $b + a = 1111$ et $b - a = 1$ qui conduirait à $b = 551$ ne convient pas car $551^2 > 10000$.

Partie III

On a maintenant $b^2 = a^2 + 111$
d'où $b^2 - a^2 = 3 \times 37$ produit de deux nombres premiers
d'où $b + a = 37$ et $b - a = 3$ d'où $b = 20$ et $a = 17$,
$b^2 = 400$ et $a^2 = 289$; on vérifie que $400 = 289 + 111$.

L'alternative $b + a = 111,\ b - a = 1$ donnerait $a = 55$ et $b = 56$ donc $b^2 = 3136$ qui a quatre chiffres et donc ne convient pas.

PARIS

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Un octogone particulier

Énoncé

Un octogone convexe $A_1A_2A_3\dots A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul.
$A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4.

Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Éléments de solution

Ce problème à l'énnoncé très court est très ouvert et comporte de nombreuses voies d'attaque et de résolution ; nous en proposons quatre ici.

Calculs préliminaires

Le côté d'un carré d'aire 5 mesure $\sqrt{5}$ et sa demi diagonale $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Un rectangle d'aire 4 et de diagonale $2\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{10}$ a des côtés de longueurs a et b tels que $ab = 4$ et $a^2 + b^2 = 10$ d'où $(a+b)^2 = 18$ et $(a-b)^2 = 2$, puis $a = 2\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.

L'angle $\widehat{BOC} = \theta$ est tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ et $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

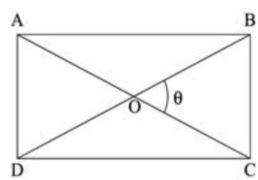


figure 1

1. Voie expérimentale

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on construit successivement

- En noir un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
- En vert, un rectanngle $A_2A_4A_6A_8$ inscrit dans $(\mathcal{C})$ tel que $A_2A_4 = A_6A_8 = \sqrt{2}$ et $A_4A_6 = A_8A_2 = 2\sqrt{2}$ et ses diagonales.
- En rouge, un carré $A_3A_5A_7A_1$ de côté $\sqrt{5}$ et tel que A_3 soit dans le petit arc $\widehat{A_2A_4}$, et ses diagonales.

On calcule alors l'aire de l'octogone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, comme somme d'aires de triangles ou rectangles.

On anime la figure 2 (page suivante) en gardant fixe le rectangle vert et en faisant parcourir à A_3 l'arc $\widehat{A_2A_4}$. On constate que l'aire est maximum quand A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$ et donc A_1 au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$. Elle est alors égale à $3\sqrt{5} \approx 6,708$.

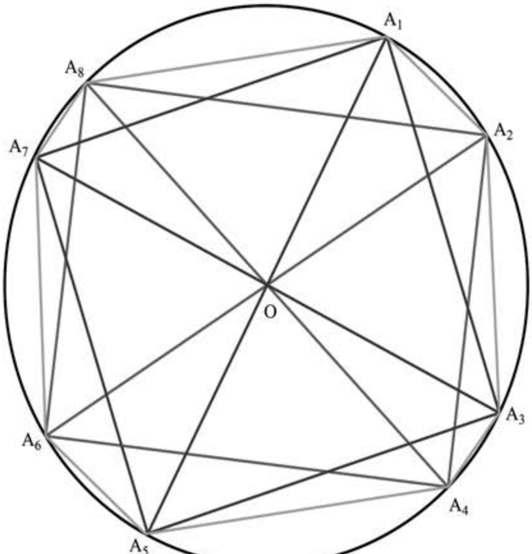


figure 2

2. Voie géométrique

L'aire de l'octogone est la somme des aires
- du rectangle $A_2A_4A_6A_8$ égale à 4
- des quatre triangles $A_8A_1A_2$, $A_2A_3A_4$,$A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$

Commençons par démontrer que si un point A décrit un arc de cercle $\widehat{BC}$, l'aire du triangle BAC est maximum quand A_0 est au milieu de l'arc.
En effet, abaissons de A et A_0 les perpendiculaires (AH) et (A_0H_0) à la droite (BC) et traçons la tangente à l'arc en A_0. Pour tout point D de la bande fermée limitée par cette tangente et la droite (BC), on a $DK \leqslant D_0K = A_0H_0$.
En particulier, $AH \leqslant A_0H_0$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0.
Mais l'aire du triangle BAC est égale à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et on a $\dfrac{BC \times AH}{2} \leqslant \dfrac{BC \times A_0H_0}{2}$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0. (cf. figure 3).

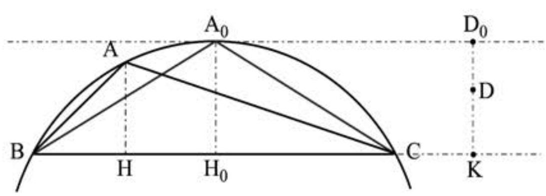


figure 3

Mais (cf. figure 2) A_1A_5 et A_3A_7 sont les diagonales d'un carré et donc perpendiculaires ; si A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$, A_1 se trouve au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$, de sorte qu'on maximise en même temps l'aire des deux triangles $A_8A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$, donc aussi celles de $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$ (cf. figure 4, page suivante).

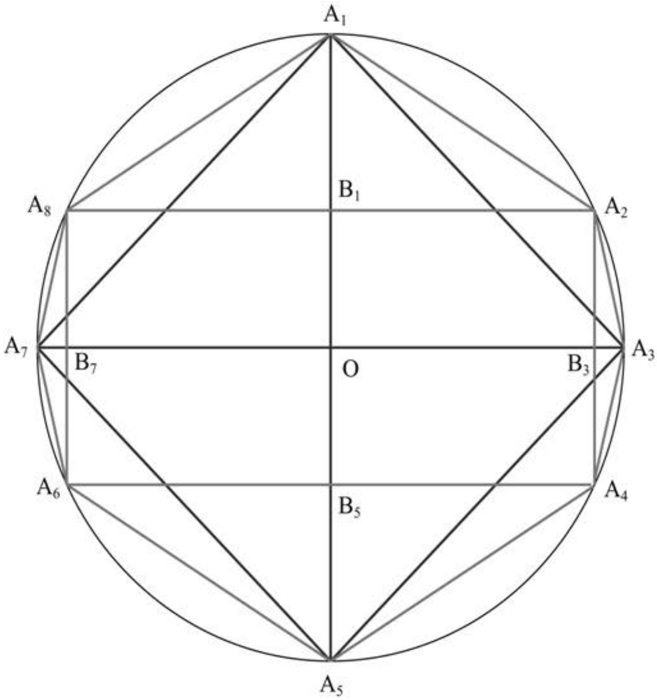


figure 4

L'aire de l'octogone est alors :

$$4 + A_2A_8 \times A_1B_1 + A_2A_4 \times A_3B_3 = 4 + a\left(R - \frac{b}{2}\right) + b\left(R - \frac{a}{2}\right)$$
$$= 4 + R(a+b) - ab = 3\sqrt{5}.$$

3. Voie de l'analyse

Posons (cf. figure 5) :
$\widehat{A_3OA_4} = \varphi$, $\widehat{A_2OA_4} = \theta$ donc $\widehat{A_2OA_3} = \theta - \varphi$.
De $\widehat{A_3OA_1} = \widehat{A_3OA_5} = \dfrac{\pi}{2}$, on déduit
$\widehat{A_1OA_2} = \dfrac{\pi}{2} - \theta + \varphi$ et $\widehat{A_4OA_5} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.
L'aire de l'octogone est la somme des aires des huit triangles :
A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5, A_5OA_6, A_6OA_7, A_7OA_8, A_8OA_1 qui sont égales deux à deux en raison de la symétrie de l'octogone par rapport à O.
L'aire du triangle A_iOA_{i+1} est égale à $\dfrac{R^2}{2}\sin \widehat{A_iOA_{i+1}}$. Celle de l'octogone est donc

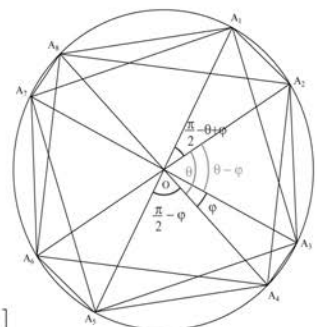


figure 5

$$R^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varphi\right) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

$$= R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

et quand A_3 décrit l'arc $\widehat{A_4A_2}$, φ varie de 0 à θ.

Posons $f(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi$
f est dérivable sur $[0, \theta]$ de dérivée f' donnée par $f'(\varphi) = \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) + \cos\varphi - \sin\varphi$
f' s'annule pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

Si $0 \leqslant \varphi < \dfrac{\theta}{2}$, $\theta - \varphi > \varphi$, $\sin(\theta - \varphi) > \sin\varphi$, $\cos(\theta - \varphi) < \cos\varphi$ donc $f'(\varphi) > 0$.
De même si $\dfrac{\theta}{2} < \varphi \leqslant \theta$, $f'(\varphi < 0$.
f passe donc par un maximum pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.
L'aire de l'octogone est alors $2R^2\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}\right) = 2 \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

4. Voie trigonométrtique

Nous partons de l'expression de l'aire de l'octogone obtenue ci-dessus :

$$R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\phi + \cos\phi\right]$$

On peut écrire $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi\right]$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

et $\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)$.

L'aire s'écrit donc

$$R^2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)\right] = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos(2\varphi - \theta)\right]$$

La fonction $\varphi \mapsto \cos(2\varphi - \theta)$ a pour courbe représentative un arc de sinusoïde.

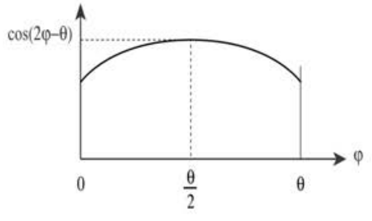


figure 6

Elle atteint son maximum 1 pour $2\varphi - \theta = 0$ ou $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

L'aire maximale est donc

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 5(\sin\theta + \cos\theta) = 3\sqrt{5}$$

OLYMPIADES INTERNATIONALES

La plus prestigieuse compétition mathématique pour lycéens a été créée en Roumanie en 1959. Elle se déroule en juillet, dans un pays différent chaque année (2009: Allemagne, 2010: Kazakhstan, 2011 :Pays Bas, 2012: Argentine ...).
Actuellement, plus de 100 pays y participent, en sélectionnant chacun six candidats(non bacheliers de moins de vingt ans) qui doivent résoudre, en deux épreuves de 4 h 30 chacune, six problèmes de difficultés inégales : les problèmes 3 et 6 sont plus difficiles que 1 et 4. Chaque problème est noté sur 7, et toute solution juste, même inélégante, vaut 7 points ; s'il manque des éléments non essentiels, la note est ramenée à 6, 5 ... Une copie qui n'atteint pas la solution mais contient des idées utilisables mérite 1, 2 ... Sur 600 candidats, certains atteignent le score maximum (42/42), les 50 premiers environ obtiennent une médaille d'or, les 100 suivants une médaille d'argent et les 150 suivants une médaille de bronze. Chine, Russie, Etats-Unis ... sont souvent les meilleurs pays, mais c'est une Allemande, Lisa Sauermann, qui a battu tous les records en obtenant 4 médailles d'or et 1 médaille d'argent en 5 participations (alors que 90% des candidats sont des garçons).
Pour tout savoir sur cette compétition, énoncés, résultats, vous pouvez consulter le site : ***www.imo-official.org***.
La France participe aux Olympiades Internationales depuis 1969, et les a accueillies à Paris en 1983. Plusieurs compétitions (Olympiade Académique, Kangourou, FFJM, ...)permettent de repérer des candidats potentiels, mais certains élèves nous sont signalés par leurs professeurs, nous acceptons même des candidatures spontanées. Plusieurs clubs (Lyon, Orsay, ...) ainsi que les stages d'Animath familiarisent les élèves aux techniques olympiques : le stage d'été d'Animath accueille une quarantaine de stagiaires sélectionnés parmi quelque deux cents candidats, au moyen d'un test en temps limité dans les établissements scolaires. C'est l'Olympiade Française de Mathématiques qui, en définitive, choisit les candidats français à l'Olympiade Internationale, en organisant pour une vingtaine d'élèves sélectionnés en début d'année scolaire des envois mensuels d'exercices, des stages et des tests en temps limité. Elle envoie également une équipe aux Olympiades Balkaniques qui se déroulent début mai. La France se situe actuellement aux alentours de la trentième place aux Olympiades Internationales, car certains pays investissent beaucoup plus que nous dans le repérage et la préparation des candidats : depuis 2005, par exemple, l'Italie est meilleure que la France, ce qui n'était pas le cas précédemment. La plupart de nos candidats sont en terminale mais il nous arrive d'envoyer des élèves dès la seconde, et nous nous efforçons de repérer certains élèves dès le collège, enorganisant par exemple des stages" junior" (seconde, troisième, quatrième) à laToussaint.

Elémentaire, mais infaisable...

Peut-on se permettre d'utiliser ces deux adjectifs pour qualifier le même exercice ? c'est moins contradictoire qu'il n'y paraît !

L'exercice suivant a été proposé à la session d'octobre 2008 de la "pépinière de mathématiques", qui, à l'initiative d'un Inspecteur Pédagogique Régional, réunissait à Versailles des élèves de collège. Il a été repris à d'autres occasions, par exemple au stage olympique junior d'octobre 2010, destiné à initier les élèves de seconde et collège aux techniques de raisonnement des Olympiades Internationales de Mathématiques.

Enoncé :

Soit a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a \geq b \geq c$

Montrer que :

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a-4b+c$$

mais rares sont les mathématiciens, même confirmés, qui trouvent la solution par eux-mêmes !

Remarquons que la solution, une fois trouvée, est incontestablement élémentaire. En effet il suffit d'écrire :

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} = \left(\frac{a+b}{c}\right)(a-b)+\left(\frac{c+b}{a}\right)(c-b)+\left(\frac{a+c}{b}\right)(a-c)$$

étant donnée l'hypothèse $a \geq b \geq c > 0$, $\left(\frac{a+b}{c}\right) \geq 2$, $\left(\frac{c+b}{a}\right) \leq 2$

mais $(c - b) = 0$, $\left(\frac{a+c}{b}\right) \geq 1$, d'où finalement :

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 2(a-b)+2(c-b)+(a-c) = 3a-4b+c$$

Peut-on poser ce problème à des élèves de collège ou de lycée ? Faut-il le présenter différemment, par exemple demander de prouver que :

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 2(a-b)+2(c-b)+(a-c)$$

s'agit-il alors du "même" problème ?

Quelle géométrie faut-il enseigner ?

Aux Olympiades Internationales de Mathématiques, la géométrie joue un rôle bien plus important que dans l'enseignement scolaire.

A Lyon, Bodo Lass a fondé le "club de mathématiques discrètes" qui attire, un week-end par mois, des élèves de plusieurs villes de France et même de Belgique, notamment la plupart des futurs candidats à l'Olympiade Internationale de Mathématiques. Bien que chercheur en combinatoire, Bodo Lass se passionne pour la géométrie. Mais pas n'importe quelle géométrie ! la géométrie projective…

Cette discipline rarement enseignée repose sur l'idée que si, à partir d'un point de l'espace, on projette une figure plane sur un autre plan non parallèle, les propriétés d'alignement et d'intersection de droites notamment sont conservées. Or il est toujours possible de trouver une telle projection qui envoie, par exemple, un cercle et un point quelconque intérieur au cercle en un cercle et son centre, et plus généralement une figure compliquée en une autre où le problème posé est bien plus évident.

La géométrie projective introduit également le birapport de quatre points d'une droite ou d'un cercle.

Sur une droite, il est défini par : $$(A,B,C,D)=\frac{\left(\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)}{\left(\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right)}$$

où $\overline{CA}$ désigne la mesure algébrique de CA. On en déduit le birapport de quatre droites (a, b, c, d) passant par un même point O : c'est la valeur invariante du birapport (A, B, C, D) si A, B, C et D sont les intersections d'une droite quelconque ? avec les quatre droites a, b, c, d. Puis le birapport de quatre points A, B, C, D d'un cercle : c'est la valeur invariante du birapport des quatre droites (MA, MB, MC, MD) lorsque M parcourt le cercle. Or un certain nombre de transformations qui envoient une droite ou un cercle sur une droite ou un cercle laissent invariant ce birapport.

Aux Olympiades Internationales 2010, ceci a permis à un candidat Grenoblois de résoudre de manière remarquable un problème difficile :

Énoncé. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et soit Γ son cercle circonscrit. La droite (AI) recoupe Γ en D. Soit E un point de l'arc $\widehat{BDC}$ et F un point du coté $[BC]$ tels que

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Soit enfin G le milieu du segment $[IF]$.

Montrer que les droites (DG) et (EI) se coupent en un point de Γ.

* * *

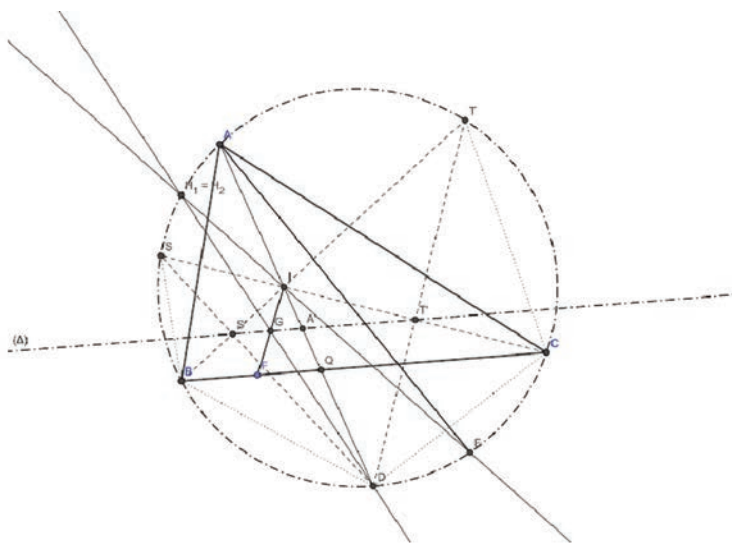
Solution projective (due à Matthew Fitch).

Tout comme D est le pôle sud de A, appelons S et T les pôles sud de C et B, H_1 et H_2 les seconds points d'intersection respectivement de (DG) et (EI) avec le cercle Γ. L'idée est de construire une transformation, conservant le birapport, qui transforme chacun des points S, T et A en lui-même et le point H_1 en H_2. Comme, pour S, T, A donnés, le birapport de $STAH$ détermine H de manière unique sur Γ, cela prouvera que $H_1 = H_2$.

Or les transformations suivantes conservent chacune le birapport (voir figure ci-après) :

1. L'inversion de pôle D qui envoie Γ sur la parallèle (Δ) à (BC) passant par G. Cette inversion transforme S, T, A et H_1 en S', T', A' et G, intersections de (Δ) avec (DS), (DT), (DA) et (DH_1) respectivement. Comme pour tout point M de (BC), le milieu de $[IM]$ appartient à Δ, S' et T' sont les milieux de $[IB]$ et $[IC]$ car, les triangles DBI et SBI (tout comme DCI et TCI) étant isocèles (théorème du pôle sud), (DS) est médiatrice de $[BI]$ - et (DT) de $[CI]$.
2. L'homothétie de centre I et de rapport 2 qui transforme (Δ) en (BC), envoyant S' et T' en B et C, A' en le pied Q de la bissectrice (AI) et G en F.
3. L'involution de centre A qui échange B et C, en transformant (BC) en Γ, F en E et Q en D.
4. L'inversion de pôle I qui conserve Γ, envoyant C en S, B en T, D en A et E en H_2.

La composée de ces quatre transformations envoie bien S, T, A et H_1 en S, T, A et H_2 respectivement, ce qui achève la démonstration.



Bien évidemment, un problème intéressant, notamment en géométrie, admet le plus souvent bon nombre de solutions totalement différentes, et celui-ci ne faisait pas exception. Beaucoup d'entre elles n'étaient pas projectives, et certaines faisables à partir des seuls programmes scolaires. Par exemple celle-ci :

Énoncé. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et soit Γ son cercle circonscrit. La droite (AI) recoupe Γ en D. Soit E un point de l'arc $\widehat{BDC}$ et F un point du coté $[BC]$ tels que

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

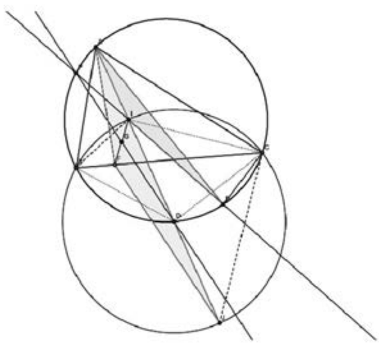
Soit enfin G le milieu du segment $[IF]$.

Montrer que les droites (DG) et (EI) se coupent en un point de Γ.

* * *

Solution élémentaire.

Une « chasse aux angles » élémentaire suffit à montrer, classiquement, que le triangle DBI est isocèle (puisque $\widehat{BDI} + 2\left(\widehat{IBC} + \widehat{CBD}\right) = \pi$), tout comme le triangle DCI (voir figure ci-après). Le cercle de centre D passant par I passe donc par B et C, et recoupe (AD) en un point J diamétralement opposé à I (et centre d'un cercle exinscrit de ABC, puisque $\widehat{IBJ} = \frac{\pi}{2} = \widehat{ICJ}$, mais cela ne nous est pas utile). Non seulement D est milieu de $[IJ]$, ce qui prouve que (DG), droite des milieux du triangle IJF, est parallèle à (JF), mais $\widehat{AJC} = \widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI}$. Comme en outre $\widehat{JAC} = \widehat{BAI}$, les triangles AJC et ABI sont semblables : $\frac{AJ}{AB} = \frac{AC}{AI}$. Or les triangles ABF et AEC sont eux aussi semblables, puisque par hypothèse $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$ et que manifestement $\widehat{ABF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$, angles inscrits dans Γ, sont égaux. D'où : $\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$. De ces deux relations résulte : $AJ \times AI = AB \times AC = AE \times AF$, ou encore : $\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI}$. Compte tenu de l'hypothèse $\widehat{JAF} = \widehat{EAI}$, cela fait apparaître deux nouveaux triangles semblables : AJF et AEI, donc une nouvelle égalité d'angles : $\widehat{AJF} = \widehat{AEI}$. Si (DG) et (EI) se coupent en P, (DP) étant parallèle à (JF), $\widehat{ADP} = \widehat{AEP}$, ce qui suffit à prouver que A, D, P et E sont cocycliques.



Encore fallait-il y penser ! La géométrie notamment est un domaine où le fait d'avoir sous la main une palette riche de méthodes utilisables augmente les chances de trouver une solution. Bodo Lass affirme que tous les problèmes géométriques intéressants peuvent être résolus avec des méthodes projectives. Aux Olympiades Internationales 2010, un autre candidat français est parti d'une idée projective pour construire une démonstration qui, dans sa rédaction finale, n'était pas projective.

ASSOCIATION FERMAT SCIENCE

PRÉSENTATION

Fermat Science, installée dans la maison natale du célèbre mathématicien Pierre Fermat à Beaumont de Lomagne (82), reçoit des scolaires et du tout public toute l'année autour d'activités mathématiques et scientifiques (ateliers, jeux visites, chasse au théorème, mallettes pédagogiques, expositions…).

FICHE TECHNIQUE

Exemples d'activités sur planches pédagogiques

Les élèves utilisent ces planches individuellement ou en binôme, après une explication générale des consignes donnée par l'enseignant.
Cependant toutes les informations pour résoudre les problèmes se trouvent sur la planche.
Les planches sont magnétiques et des jetons sont à disposition des élèves pour qu'ils puissent y répondre.

La planche "*Carte de France au 17ème siècle*" fait partie de notre mallette pédagogique BENJAMIN (niveaux CM1 à 5ème).
Pour cette planche les pistes didactiques les pistes sont importantes (ex : les frontières de la France au 17eme siècle, la science au 17eme...).

Les trois planches "*Mon village*", "*De 5 en 5*", et "Illusions de grandeur"
ont partie de dans notre mallette pédagogique POUSSIN (Niveau CP, CE1, CE2).
Cette mallette comprend une vingtaine de planches utilisables avec un matériel particulier.

Ces mallettes sont prêtées gratuitement à tous les établissement scolaires. Les enseignants disent massivement leur satisfaction quant à leur utilisation auprès de leurs élèves.

Contacts :
Fermat Science
3 rue Pierre Fermat
82500 Beaumont de Lomagne
05.63.26.52.30
www.fermat-science.com

UBI
(mot latin qui signifie où)

Où sont nés ces savants du XVII^{ème} siècle ?

VIETE est né en 1540 (en B-3) à Fontenay-le-Comte,

Note sur la carte du XVII^{ème} siècle, où sont nés les autres savants.


FERMAT est né entre 1601 et 1608 (en C-2) à Beaumont de Lomagne.

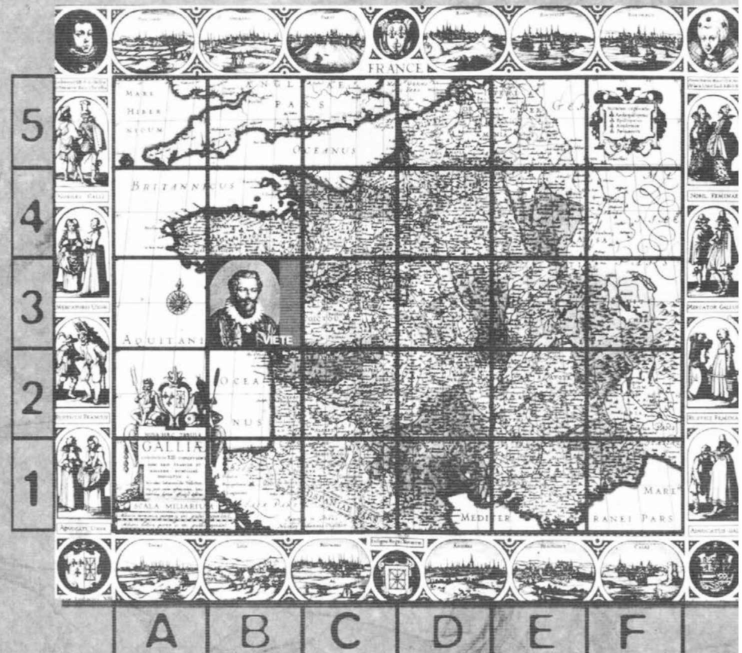

PASCAL est né en 1623 (en D-2) à Clermont (actuel Clermont-Ferrand).


DESCARTES est né en 1596 (en C-3) à Tours.

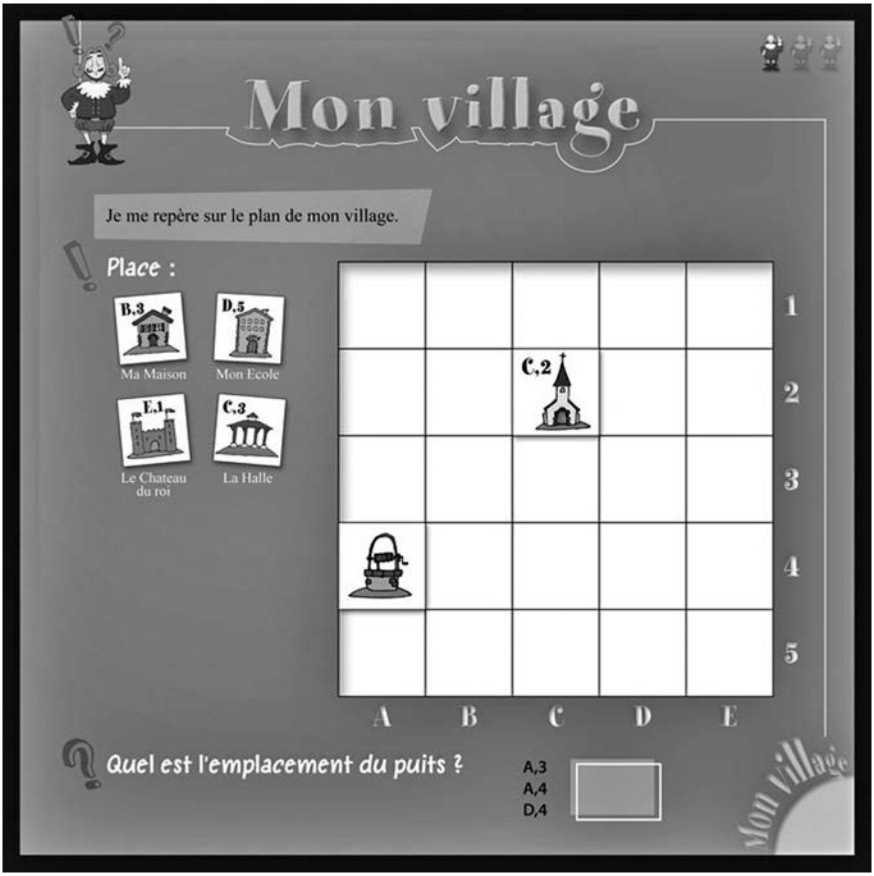

MERSENNE est né en 1588 (en C-4) à Oizé.


GASSENDI est né en 1592 (en E-1) à Champtervier.


ROBERVAL est né en 1602 (en D-4) dans la ville de Roberval.



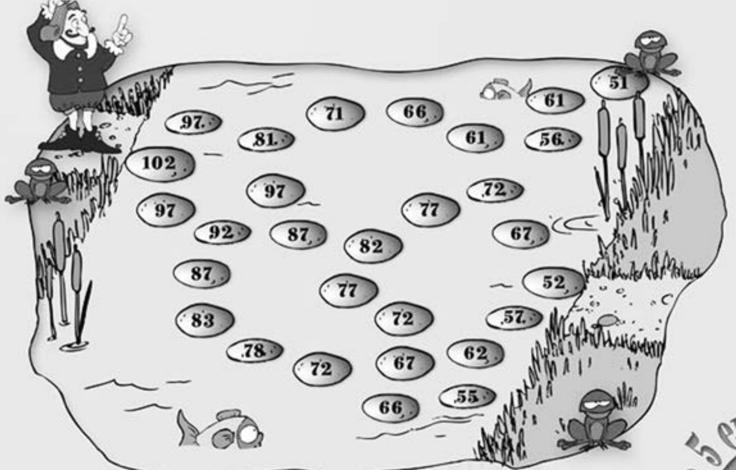
Carte de France sous Louis XIII


Mon village
Je me repère sur le plan de mon village.
Place :
B,3
Ma Maison
D,5
Mon Ecole
E,1
Le Chateau du roi
C,3
La Halle
C,2
1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
Quel est l'emplacement du puits ?
A,3
A,4
D,4
Mon village

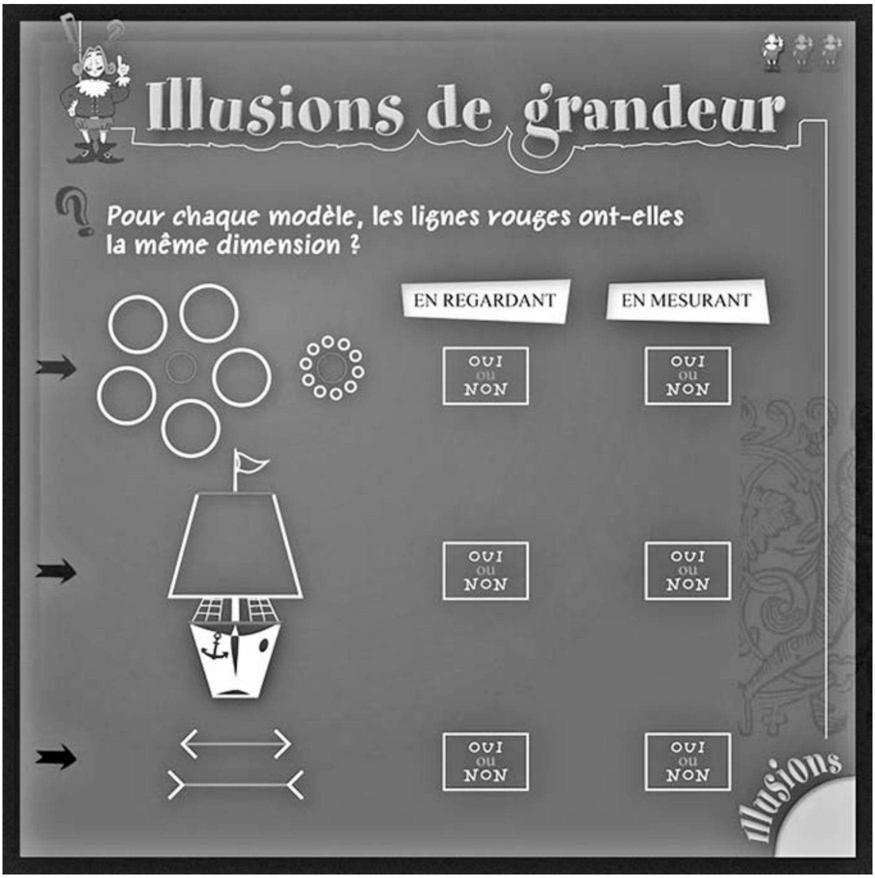
De 5 en 5

Je veux traverser la Gimone sans me mouiller les pieds.
Je saute d'une pierres à l'autre en enlevant 5 à chaque saut.

Indique-moi le chemin avec les jetons.



De 5 en 5


Illusions de grandeur
Pour chaque modèle, les lignes rouges ont-elles la même dimension ?
EN REGARDANT
EN MESURANT
OUI ou NON
OUI ou NON
OUI ou NON
OUI ou NON
OUI ou NON
OUI ou NON
Illusions

ASSOCIATION UKRAINIENNE
DES JEUNES MATHÉMATICIENS

PRÉSENTATION

L'Association Ukrainienne des Jeunes Mathématiciens milite pour un enseignement des mathématiques par le jeu.

FICHE TECHNIQUE

Historique : Création en 1994 - la Ligue de jeune mathématiciens fonctionne grâce au bénévolat. Avril 2002 - enregistrement officiel de la Ligue jeunes mathématiciens auprès des autorités. Décembre 2009 - un enregistrement d'une nouvelle organisation : Ligue de jeunes mathématiciens et Comité des compétitions intellectuelles internationales.

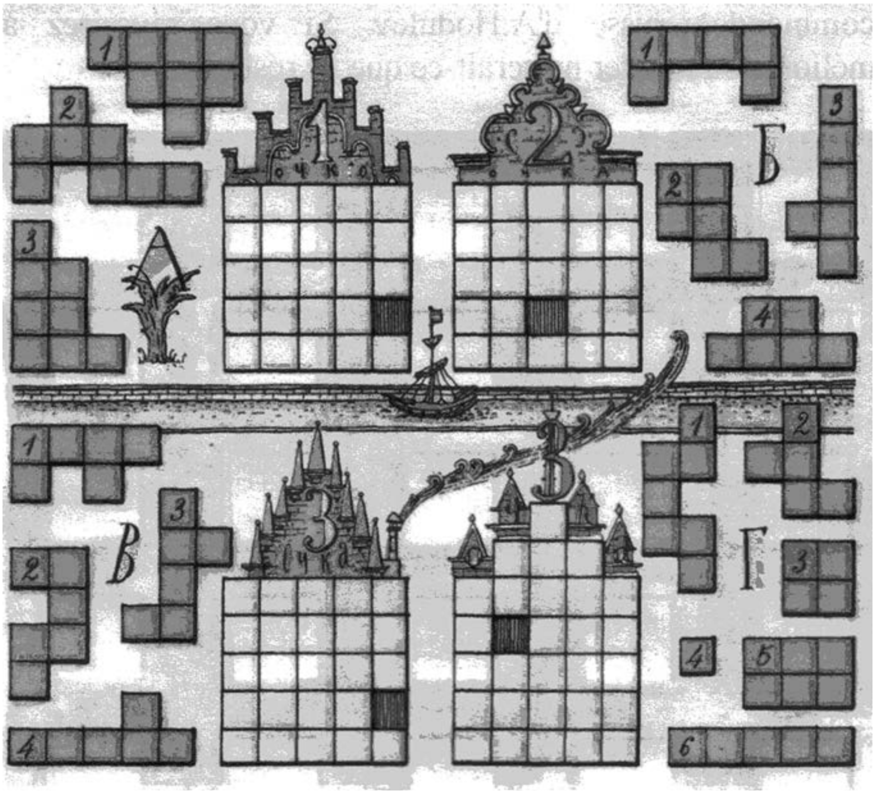
Compétitions organisées :
-Tournoi des intellectuels (une épreuve) - primaire, collège et lycée
-Virtuoses du calcul mental (deux épreuves) - primaire, collège et lycée
-Coupe mathématique de la ville de Vinnitsa (une épreuve) - collège et lycée
-Toumoi Intemational des Villes (deux étapes organisées localement) - collège et lycée.

Autres activités :
Expositions : concours de dessins et de photos sur des sujets mathématiques.
Intervention en milieu scolaire pour populariser le mouvement olympique ainsi que les mouvements " Mathématiques pour tous " et Mathématiques sans frontières ".
Publications régulières dans la presse spécialisée.
Animation dans le Centre d'intégration de l'espace européen et international de l'enseignement.

Partenaires :
Officiels : Ministère de l'Éducation et des sciences d'Ukraine ; Département de l'Education de la ville de Vinnitsa et de sa région ; Mairie de Vinnitsa ; Institut régional de l'enseignement post-universitaire .pour les professeurs, Université pédagogique d'État de la ville de Vinnitsa, Comités nationaux qui organisent les concours "Kangourou" (les mathématiques) et "Petit épi"{sciences naturelles). Privés : Fond de bienfaisance "Confiance".

Contact :
lhor Kryvosheya
+ 38 050 9566566 (mobile)
+38 0432 613795 (de travail)
+38 0432 468260 (domicile)

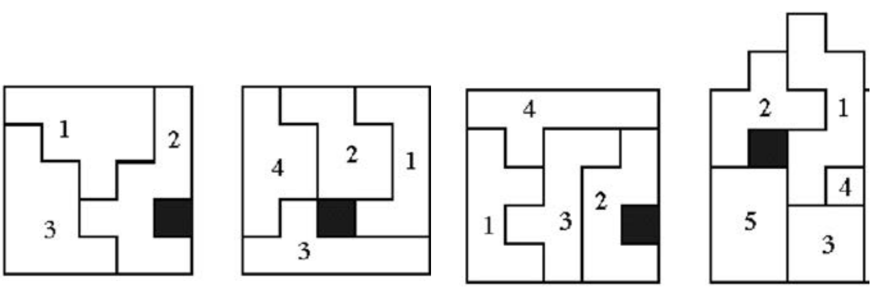
Le long des canaux d'Amsterdam



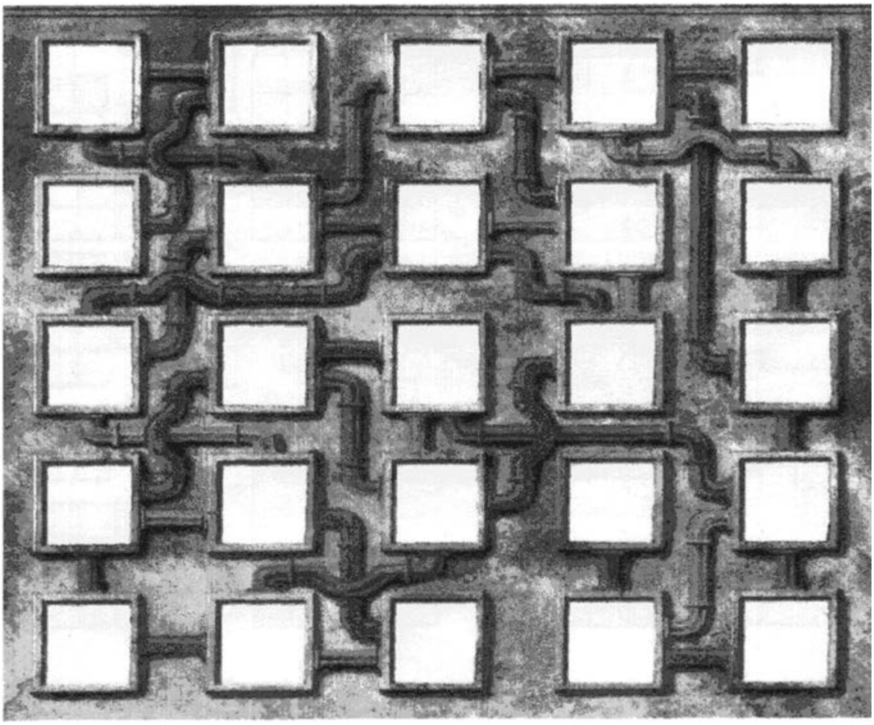
Il s'agit de placer les pièces dans les fenêtres qui présentent chacune une case vide. On peut les tourner, mais pas les retourner.

Domaines de compétences :
Observation, vision géométrique et raisonnement logique

Solution :



Les grandes différences



Le but du jeu est de placer dans les cases des nombres tous différents au plus égaux à 25 de telle sorte que la différence entre les nombres placés dans des cases reliées par un tuyau ne soit jamais inférieure à 10.

Si tous les nombres de 1 à 25 n'ont pu être placés en respectant ces règles, une pénalité égale à la somme des nombres non utilisés est appliquée. Lors du WPC de 1996 à Utrecht, le meilleur score obtenu à ce jeu (par un participant russe A. Hodulev) a donné lieu à une pénalité de 4 points.

CASIO

Calculatrices et enseignement des maths quel problème pour l'avenir?

Depuis sa création en 1889 par Don E. Felt, la calculatrice, appelée à cette époque le "comptomètre" est devenu un objet qui a pris une place importante dans l'usage des mathématiques et sciences appliquées.

Que ce soient en lycée, au collège ou en primaire, le choix d'une calculatrice est souvent difficile voire épineux. La plupart des enseignants sont confrontés à trois types de problèmes : La formation aux calculatrices est-elle suffisante pour les enseignants ? Le nombre et la diversité des calculatrices ne posent-t-ils pas un frein au développement de celles-ci en classe ? Les élèves savent-ils tous utiliser leur matériel ?

Tous ces aspects nous permettent d'envisager une autre issue : l'utilisation de l'ordinateur en tant que calculatrice. On a tous déjà essayé d'utiliser la calculatrice de Windows et on a pu constater combien cet outil n'était pas en adéquation avec la pédagogie de l'enseignement. Il nous faut donc trouver un autre moyen à l'utilisation d'une calculatrice. C'est à ce moment qu'intervient la calculatrice "virtuelle". Qu'appelle-t-on calculatrice virtuelle ? Ce sont ces calculatrices qui se branchent sur un vidéo projecteur ou via une interface sur ordinateur. Voilà un merveilleux outil permettant d'être utilisé en classe et répondant aux trois questions posées ci-dessus. C'est aussi un moyen de palier à l'isolement de l'élève face à sa machine. Cette approche permettrait aussi de comparer les modèles et de voir l'étendue de chacune d'entres elles et leurs limites respectives.

Avant toute chose la calculatrice doit être et rester un outil pour construire intuitivement les notions formelles des mathématiques.

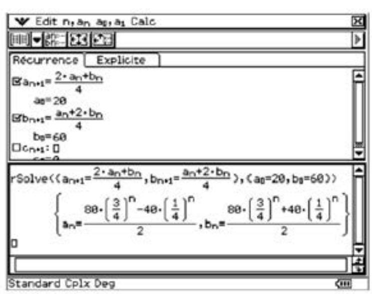
Les calculatrices dotées du calcul formel peuvent produire des expressions mathématiques symboliques alors que d'autres ne peuvent que saisir des expressions numériques ou des graphiques.

L'avantage du calcul formel est de mettre l'accent sur les concepts, les chapitres posant des difficultés. Il permet d'insister et de répondre aux questions posées traditionnellement par le professeur : "Pourquoi ?" et "Comment ?".
Par exemple, grâce au calcul formel, une expression mathématique peut être manipulée plus aisément par un élève et donc être résolue plus facilement. Si l'enseignant souhaite résoudre l'équation suivante $3x + 5 = 10x - 6$ alors la calculatrice utilisant le langage formel donnera la réponse $x = 11/7$ à l'aide d'étapes telles que $7x - 6 = 5$. Ce qui s'averra bénéfique pour l'apprentissage de la méthode puisque l'élève comprendra visuellement le raisonnement qui mène au résultat.

De même une représentation graphique des fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2$ et $h(x) = (x - 2)^2$, permettront de visualiser la fonction de référence x^2 mais aussi ses translations par rapport aux axes pour $g(x)$ et $h(x)$. Ce qui fournira une approche complémentaire sur les axes de symétrie et donc une introduction à une notion supplémentaire.

Le calcul formel permet de se concentrer sur le raisonnement conceptuel, l'exploration et la résolution de problèmes avec précision et rapidité. L'élève peut en outre accomplir une tâche bien plus complexe en établissant une relation entre une expression algébrique et son graphique correspondant. Tout cela suggérant un avantage considérable pour l'élève sur l'interprétation et la résolution d'un problème. Un enseignant peut les aider à donner donc un sens aux mathématiques et à conceptualiser un exercice en se focalisant davantage sur la réflexion et l'interprétation que sur la simple application d'un théorème ou d'une propriété.

Cependant grâce au calcul formel, un professeur peut et dispose de plus de facilité et donc de flexibilité sur la planification de son enseignement. Il peut introduire une propriété ou des concepts qui ne semblaient pas possible d'introduire auparavant. C'est une démarche empirique, elle permet à l'élève d'élargir son sens critique. Le but premier de l'enseignement est que les élèves acquièrent un esprit critique et soient en mesure d'analyser un exercice ou un problème et de ne pas devenir uniquement un manipulateur de l'outil mathématique. Néanmoins on ne doit pas uniquement miser l'apprentissage sur le calcul formel.



Exemple de calcul formel sur une calculatrice moderne

En effet, la rapidité d'exécution ainsi que l'efficacité de la résolution par la méthode formelle peut avoir l'inconvénient de négliger l'apprentissage "traditionnel" des définitions et des théorèmes. Il ne faut donc pas oublier que le calcul formel doit rester un outil d'apprentissage et qu'il ne peut se substituer à un cours magistral.

Il est clair qu'à l'ère de l'informatique et de l'Internet, le calcul formel utilisé par les calculatrices permet de tirer un avantage indéniable sur l'apprentissage des mathématiques et a fortiori des sciences en générale. L'élève aura plus tendance a être motivé en utilisant un outil moderne issu de sa génération. Cet apprentissage visuel peut être traité en petit groupe d'élèves afin d'échanger des idées, tels que le font les TICE. En conséquence l'utilisation de calculatrices à ce niveau est un atout majeur.

Exemples de jeux proposés à la coupe Euramath avec utilisation des calculatrices CASIO

Cryptarithme

Comme dans tout cryptarithme, deux lettres différentes remplacent toujours deux chiffres différents, deux chiffres différents sont toujours remplacés par deux lettres différentes et l'écriture d'aucun nombre ne commence par un 0.

Quelle opération se cache derrière :

MATHS + MATHS = CASIO ?

Ici, MATHS est un nombre premier et CASIO ne comporte que des chiffres impairs sauf le chiffre remplacé par la lettre "O".

Solution :

Si **C** est impair, il existe une retenue provenant du rang précédent.
A ne peut donc valoir que **9**.
Comme I est impair, il existe une retenue provenant du rang des unités.
S est donc un chiffre impair strictement supérieur à 5 (avec **S** = 5, MATHS ne serait pas un nombre premier). On a donc **S** = 7 (9 étant déjà pris).
On en déduit **O** = 4 et **T** = 8.
Il reste à trouver **C** et **I** qui peuvent prendre chacun une valeur dans {1 ; 3 ; 5}.
En testant si C9714 / 2 est ou non un nombre premier, on trouve l'unique solution : 29 867 x 2 = 59 734.

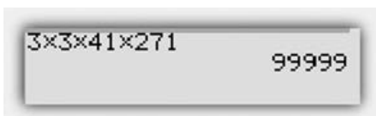
Une division qui dure...

Trouvez une fraction ayant le plus petit numérateur possible et telle qu'en divisant le numérateur par le dénominateur, on obtienne une écriture décimale illimitée périodique de la forme 0, CASIOCASIOCASIO-CASIO... où les lettres C, A, S, I et O représentent cinq chiffres tous différents et tous non nuls.

Attention à ne pas confondre la lettre " O " avec un chiffre " 0 " !

Solution :
Posons **N** et **D** deux entiers premiers entre eux, tels que
N/D = x = 0, CASIOCASIOCASIOCASIOCASIO…
Ainsi 100000 N/D = CASIO, CASIOCASIOCASIOCASIO…
donc 99999 N/D = CASIO
D est donc un diviseur de 99999.

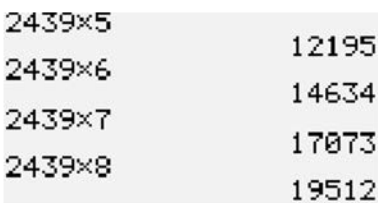
La décomposition est



99999 en produit de facteurs premiers donne
99999 = 3^2 x 41 x 271

Les diviseurs de 99999 sont : 1, 3, 9, 41, 123, 271, 369, 813, 2 439, 1 111, 33 333 et 99999. D est donc l'une de ces valeurs.

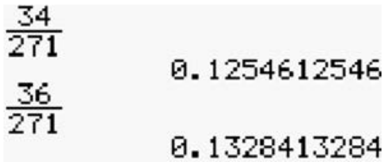
Si D = 41 alors l'égalité 99999 N/D = CASIO devient
2439 N = CASIO. Il s'agit de trouver un multiple de 2439 s'écrivant avec 5 chiffres tous différents et tous non nuls.



On constate qu'il n'existe aucune solution pour D = 41 et pour D = 123.

Si D = 271 alors l'égalité 99999 N/D = CASIO devient
369N = CASIO. Il s'agit de trouver un multiple de 369
s'écrivant avec 5 chiffres tous différents et tous non nuls.

D = 271 conduit à la solution : 34/271



Les solutions qui suivent sont entre autres :

36/271, 42/271, 43/271, 46/271, 49/369, 65/271, 69/271, 73/271, 73/369, 77/271, 89/271, 101/271, 103/369, 105/271, 108/271, 112/271, 113/271, 116/813, 118/369,

Un autre cryptarithme :

EURO + MATH = CAS1O

Trouvez la plus grande valeur de CAS1O.

Solution :
On a H = 0 et C = 1.

Si E et M valent 8 et 9, A vaut au plus 7. Mais 7 ne convient pas car on aurait alors A > S d'où une retenue.

Si E et M valent 7 et 9, A vaut au plus 6. Mais 6 ne convient pas car la seule possibilité serait U = 2 et S = 8, or il y a obligatoirement une retenue provenant des dizaines.

Il faut ensuite tester les cas où E et M valent 7 et 8 ou 6 et 9.

Un seul de ces cas conduit à la solution :
9 273 + 6 540 = 15 813,
les valeurs de E et M pouvant permuter, de même que celles de R et T.

INDEX
ALPHABETIQUE ET THEMATIQUE

PETITS PROBLEMES
AVANT DE SE QUITTER

Proposés par la ***FFJM***

1. La bonne moyenne

L'année 2011 a une bonne moyenne : la moyenne de ses chiffres (2+0+1+1) / 4 est un nombre entier. Cela ne sera pas le cas en 2012 puisque (2+0+1+2)/4 = 1,25.

Quelle sont les trois prochaines années dont la moyenne des chiffres sera un nombre entier ?

2. Multiple de l'année

2011 s'écrit avec deux chiffres " 1 ". Son double, 4022 avec deux chiffres " 2 ".

Quel est le plus petit multiple non nul de 2011 qui s'écrit sans chiffre répété ?

3. Les huit jetons

1	1	2	2	3	3	4	4

Disposez ces huit jetons de telle sorte qu'il y ait un jeton entre les deux 1, deux jetons entre les deux 2, trois jetons entre les deux 3 et quatre jetons entre les deux 4.

4. Elle et lui

Dans cette opération à décoder, chaque lettre représente toujours le même chiffre et deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents. De plus l'écriture d'aucun nombre ne commence par un zéro.

Quelle est la plus grande valeur possible d'EUX ?

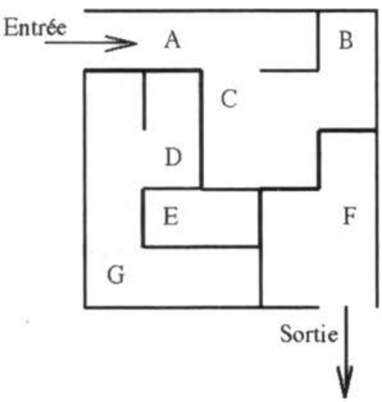
$$\begin{array}{rccc} & & I & L \\ + & & E & L \\ + & & L & E \\ = & E & U & X \end{array}$$

5. Symdoku

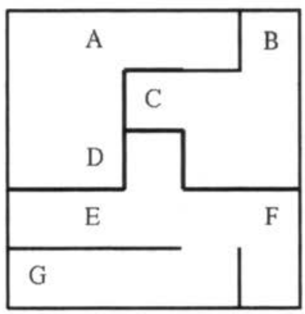
La grille ci-dessous est une grille de sudoku classique dans laquelle on a la règle supplémentaire suivante :
la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre de la grille est toujours égale à 10.

								1
						5		
					7			9
			2	○				
	6							
								4
	3				5			6
					4	8	2	

6. Le siège du CIJM



Plan du rez-de-chaussée



Plan du 1er étage

Voici les plans du futur siège du CIJM. Le dessin de gauche représente le rez-de-chaussée et le dessin de droite représente le 1er étage. Chaque niveau comporte des cloisons, mais il n'y a aucune porte. Les ascenseurs entre le rez-de-chaussée et l'étage sont désignés par des lettres (à chaque lettre, on peut prendre l'ascenseur ou continuer).

Indiquez, dans l'ordre, la liste des ascenseurs à utiliser pour aller de l'entrée à la sortie en utilisant un nombre minimal d'ascenseurs.

ET LEURS SOLUTIONS

Réponse 1 : 2015, 2019 et **2059.**

Réponse 2 : 13 X 2011 = **26 143**.

Réponse 3 : l'une de ces deux dispositions :

4	1	3	1	2	4	3	2

2	3	4	2	1	3	1	4

Réponse 4 : 210 (89 + 29 + 92 = 210).

Réponse 5 :

5	8	2	6	7	1	4	9	3
4	9	3	5	8	2	6	7	1
6	7	1	4	9	3	5	8	2
2	5	8	1	6	7	3	4	9
3	4	9	2	5	8	1	6	7
1	6	7	3	4	9	2	5	8
8	2	5	7	1	6	9	3	4
9	3	4	8	2	5	7	1	6
7	1	6	9	3	4	8	2	5

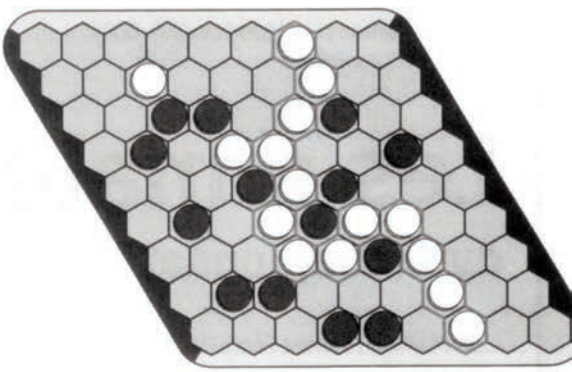
Réponse 6 : ---> **A D G F** --->

Le jeu de Hex se joue à deux joueurs sur un plateau en forme de losange pavé par des hexagones. Deux bords opposés du plateau sont blancs, les deux autres sont noirs. Le joueur qui a les pions blancs commence.

Il place un de ses pions sur la case de son choix. Ensuite, chaque joueur, à tour de rôle, place un de ses pions.

Le premier joueur a avoir relié les deux bords de sa couleur a gagné !

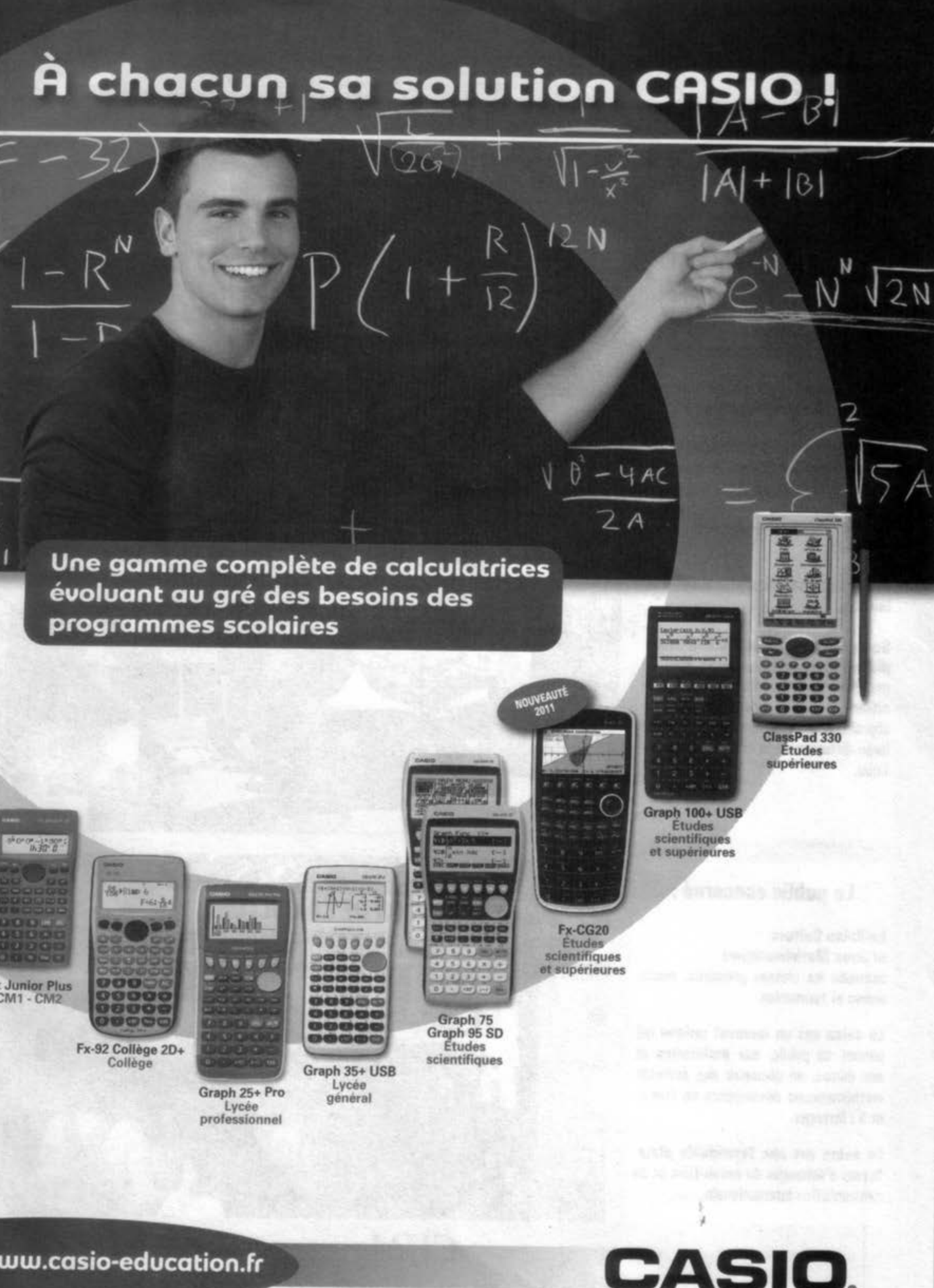
Dans la partie ci-contre, les blancs ont gagné car un chemin de pions blancs relie les deux bords blancs.



Exemple :
C'est aux noirs de jouer. Essayez de trouver le coup qui leur permet de gagner quel que soit le jeu des blancs.

Solution. Les noirs doivent jouer sur la case B ci-contre. De cette façon ils créent deux maillons, l'un reliant A et B, l'autre B et C. Vous pouvez essayer de vous convaincre que si les noirs jouent sur n'importe quelle autre case, alors ce sont les blancs qui deviennent gagnants car ils menacent eux aussi de créer plusieurs maillons entre leurs pions.


RCS B 588 505 354 – 09/11



À chacun sa solution CASIO !
Une gamme complète de calculatrices évoluant au gré des besoins des programmes scolaires
NOUVEAUTÉ 2011
ClassPad 330
Études supérieures
Graph 100+ USB
Études scientifiques et supérieures
Fx-CG20
Études scientifiques et supérieures
Graph 75
Graph 95 SD
Études scientifiques
Graph 35+ USB
Lycée général
Graph 25+ Pro
Lycée professionnel
Fx-92 Collège 2D+
Collège
Junior Plus
CM1 - CM2
www.casio-education.fr
CASIO

Salon
Culture & Jeux Mathématiques

Organisé chaque année par le CIJM, le salon c'est :

Quatre journées d'intenses activités ludiques et culturelles inédites ;

Soixante-quinze animations ;

25 000 visiteurs qui portent un autre regard sur les mathématiques ;

5 000 élèves et leurs professeurs, de tous les niveaux et de tous les quartiers, accueillis ;

3 livrets jeu pour tous les âges distribués ;

de nombreuses compétitions CIJM et invitées.

Sur le thème du salon, 10 000 exemplaires d'une brochure écrite avec de grands noms de la recherche, une **exposition** associée et des **rencontres** chercheurs grand public permettent une large diffusion de la culture mathématique.

Le public concerné :

Le Salon Culture et Jeux Mathématiques accueille les classes primaires, secondaires et terminales.

Le salon est un moment unique qui permet au public, aux professeurs et aux élèves, de découvrir des activités mathématiques développées en France et à l'étranger.

Le salon est une formidable plateforme d'échanges de savoir-faire et de confrontation internationale.

CIJM

8 rue Bouilloux-Lafont 75015 PARIS Tél : 01 40 37 08 95 Fax : 09 72 19 29 27 cijm@cijm.org

www.cijm.org

Panoramath 5

Avec ce ***Panoramath 5***, le CIJM innove et complète sa collection initiée en 1996. En demandant à chaque compétition de choisir deux ou trois de ses sujets les plus originaux, les plus significatifs et de les analyser, ce ***Panoramath 5*** a pour ambition d'être un outil pédagogique permettant de donner le goût de la recherche.

33 compétitions et associations ont participé à cette brochure. Vous trouverez pour chacune d'entre elles, une présentation de son histoire, de ses objectifs et de son mode de fonctionnement.

Une grande diversité règne ! Il y a donc de nombreuses pistes et un cocktail d'idées à explorer.

Cet ouvrage devrait permettre aux enseignants, aux animateurs de clubs, d'ateliers scientifiques ou aux organisateurs de compétitions mathématiques, l'utilisation de l'activité ludique en mathématique dans la classe ou en animation grand public. Il expose la richesse de ces activités, leur impact pédagogique et leur place dans l'acquisition des connaissance ainsi que leurs prolongements possibles.

9 782954 043104