

# MATHS EN CARTES

*Express*

*Comité International des Jeux Mathématiques*

# SOMMAIRE



Préface 1

Marie José Pestel

## I - Des cartes témoins d'un savoir mathématique

L'art de la cartographie chinoise 3

Jean-Marc Bonnet-Bidaud

Les cartes de l'empire du Milieu 9

Jean-Marc Bonnet-Bidaud

Des nombres négatifs chez les anciens Mayas 15

André Cauty et Jean-Michel Hoppan

## II - Des cartes pour mieux comprendre

Les mathématiques derrière les cartes météorologiques 21

Laurène Hume

Des cartes continues aux spatialités discrètes 27

Enka Blanchard

La gestion de la voirie 33

Antonin Pavard

Apparier les données géographiques 39

Antonin Pavard

La meilleure projection pour représenter une Terre « égalitaire » 45

Boris Giacometti

Des cristaux à la carte 51

Florentin Waligorski

Des cartes mentales pour l'apprentissage 57

Audrey Candeloro et Emmanuelle Rabin

## III - Des cartes et des défis

Le théorème des quatre couleurs 63

François Lavallou

Des cartes à découper en deux régions superposables 69

Michel Criton

La tortue qui prenait son chapeau pour Einstein 75

Florentin Waligorski et Enka Blanchard

Les géométries des cartes animées 81

Jean-Jacques Dupas

Des maths cachées dans les tours de cartes 87

Dominique Souder

Un jeu de cartes pour simuler tous les ordinateurs 93

Nath François

Ours 99

## PRÉFACE

Marie José Pestel

Vice-présidente du CIJM

Chères lectrices, chers lecteurs,

C'est une tâche importante que de préfacier ce vingtième numéro de notre collection «*Maths Express*». Vingt numéros pour témoigner du caractère universel des mathématiques, pour dire à quel point elles imprègnent notre vie quotidienne, notre histoire culturelle et artistique et participent à la construction de notre avenir.

Plus de deux cents auteurs, chercheurs ou autodidactes, professionnels ou amateurs, ont eu la volonté de trouver les mots les plus simples possibles pour parler à toutes et à tous de problématiques parfois fort compliquées. Comment les remercier pour ce travail de bénévolat, pour ce dévouement désintéressé à mettre gratuitement, à la disposition de tous les publics, leurs connaissances au travers de ces vingt numéros ?

Construire brique à brique ce *Maths en cartes Express* fut, comme chaque année, une belle aventure. Avec un thème à la fois large et pourtant encadré, nous sommes allés, d'article en article, de découvertes en surprises : de nos problèmes de voirie à la magie, des cultures chinoise et maya au célèbre théorème des quatre couleurs, des découpages de cartes aux pavages du plan en passant par la cristallographie, le GPS, la météorologie ou encore les machines de Turing... Jugez-en vous-même !

Ce vingtième numéro ne veut pas être une conclusion. La brochure que vous tenez dans vos mains peut être un nouveau départ pour cette diffusion de la culture mathématique pour tous : une merveilleuse aventure éditoriale qui a donné satisfaction à tous ceux qui s'y sont impliqués et à tous ses lecteurs !

Une telle diffusion est plus que jamais indispensable dans un monde passionnant mais difficile à comprendre et à appréhender. Les mathématiques sont au cœur de tous les défis qui nous attendent demain : trouver la juste place de l'intelligence artificielle dans nos vies, combattre les épidémies, lutter contre le dérèglement climatique, développer de nouvelles ressources énergétiques, réfléchir à des formes plus justes de représentation populaire *via* des systèmes électoraux démocratiques, continuer l'exploration spatiale et améliorer notre compréhension de l'univers, garantir la confidentialité des communications et des données personnelles et surtout réconcilier le public avec les mathématiques !

Ces thèmes étaient chers à Hervé Lehning, grand vulgarisateur des mathématiques de ces dernières décennies. Hervé a apporté sa contribution à plusieurs de nos brochures dans de nombreux domaines. Il nous a quittés récemment et nous lui rendons hommage.

Si vous doutez que les mathématiciennes et les mathématiciens ont leur mot à dire sur ces sujets de société (et sur bien d'autres), relisez nos brochures comme *Maths société Express* (2016), *Maths au carrefour des cultures Express* (2014), *Les maths ? Oui, ça sert ! Express* (2020) !

Souhaitons ensemble que cette aventure continue !

Marie José Pestel

Retrouvez sur notre site notre collection *Maths express*, nos expositions et nos nombreuses activités pédagogiques, à l'adresse suivante :

<https://www.cijm.org>

## L'ART DE LA CARTOGRAPHIE CHINOISE

Jean-Marc Bonnet-Bidaud

Service d'astrophysique du Commissariat à l'énergie atomique  
et aux énergies alternatives

L'Europe a toujours eu du mal à imaginer que le reste du monde ait pu contribuer utilement au développement des connaissances. Pourtant, un pays comme la Chine a systématiquement devancé de plusieurs siècles, voire millénaires, les connaissances européennes. Ainsi, l'Europe a dû attendre à partir du XIII<sup>e</sup> siècle pour accéder au papier et à l'imprimerie qui initiera enfin la Renaissance, après une longue période de stagnation. À l'opposé, la Chine développait dès le début de l'ère moderne une véritable culture des textes et des documents. Avec l'invention de la soie comme support de l'écriture puis du papier après le I<sup>er</sup> siècle et de l'imprimerie par estampage puis par xylographie, ce sont des millions de textes imprimés qui vont circuler dès le VI<sup>e</sup> siècle (!) dans les domaines les plus variés : littérature, histoire, philosophie, poèmes et romans, traités scientifiques et... cartes géographiques et célestes.

### Des méthodes cartographiques produisant des résultats précis

Les principes mathématiques à la base des cartes chinoises ont été établis par le célèbre géographe Pei Xiu (224–271), qui explique très clairement les règles à suivre, conservées dans le *Livre des Jin* (entre 265 et 420) :

« Dans la réalisation d'une carte, il y a six principes observables :

- (1) les divisions graduées, qui sont les moyens de déterminer l'échelle de la carte ;
- (2) la grille rectangulaire (de lignes parallèles en deux dimensions), qui est la manière de représenter les relations correctes entre les différentes parties de la carte ;
- (3) arpenter les côtés des triangles rectangles, ce qui est la manière de fixer les longueurs des distances dérivées (c'est-à-dire le troisième côté du triangle, qui ne peut pas être parcouru) [...].

Ces trois principes sont utilisés selon la nature du terrain, et sont le moyen par lequel on réduit ce qui sont réellement des plaines et des collines [littéralement : des falaises] à des distances sur une surface plane [...]. Ainsi,

*même s'il existe de grands obstacles sous la forme de hautes montagnes ou de vastes lacs, des distances immenses ou des endroits étranges, nécessitant des montées et des descentes, des retraits de marches ou des détours, tout peut être pris en compte et déterminé. Lorsque le principe de la grille rectangulaire est bien appliqué, alors le droit et le courbe, le proche et le lointain, ne peuvent rien nous cacher de leur forme. »*

Pei Xiu reprenait ainsi des méthodes déjà établies sous la dynastie des Han, notamment par le mathématicien polymathe Zhang Heng (78–139), dont les cartes avaient été perdues. L'école chinoise de cartographie, d'abord mobilisée au service de l'empereur pour établir des cartes militaires locales, va culminer sous la dynastie Song (de 960 à 1279) dans de somptueuses cartes complètes de l'empire, gravées sur pierre en l'an 1137 pour être reproduites par estampage en de multiples exemplaires.

Conservée aujourd'hui à Xian (capitale de la province du Shaanxi), au musée des stèles de Beilin, la carte intitulée *Carte des vestiges de Yu* représente ainsi, dans un rigoureux quadrillage, l'ensemble de la Chine avec une notable précision. D'une dimension de 80 cm de côté, elle est orientée avec le Nord en haut et le cartouche du haut spécifie le contenu, la date et l'échelle : *« Chaque carré est la réduction de cent li [lieue chinoise] de terrain. Noms des montagnes et des cours d'eau du tribut de Yu. — Noms anciens et modernes des arrondissements et des commanderies. — Noms anciens et modernes des montagnes et des fleuves. — Gravé sur pierre le quatrième mois de la septième année fou-chang [soit 1137]. »* (voir ci-contre)

Cette carte globale, qui couvre un territoire d'environ 3 500 km de côté, synthétise ainsi une multitude de relevés de terrains, y compris le relief, mis patiemment bout à bout de façon rigoureuse, à l'aide d'une orientation conservée et d'une échelle unique. Elle contient la désignation explicite de plus de quatre cents lieux. Elle démontre la puissance d'un empire centralisé, capable de mobiliser une armée de fonctionnaires pour ces relevés et de mathématiciens-géomètres pour la calculer. Comparée à une carte moderne, la précision du cours des rivières et du tracé des côtes est particulièrement saisissante.

Malheureusement, seul le résultat présenté à l'empereur a été conservé ; nous n'avons pas le détail exact des opérations. Sur l'autre face de la même stèle de pierre figure une seconde carte plus descriptive et plus figurative, sans échelle quadrillée mais avec de nombreuses notices historiques indiquant que son contenu a été composé en 1043.



Carte des vestiges de Yu, gravée sur pierre en 1137. Composée vers 1043, elle montre l'ensemble de la Chine selon un quadrillage de cent lieues de côté (échelle proche de 1:4 000 000). La précision du tracé des côtes et des fleuves est spectaculaire.

Source : *Les deux plus anciens spécimens de la cartographie chinoise.*  
Édouard Chavannes, *Bulletin de l'École française d'Extrême-Orient* 3, 1903

# Du monde réel à la représentation symbolique, abstraite

La carte est une écriture de l'espace et, avant tout, une opération mentale abstraite qui fait correspondre une représentation symbolique au réel. On a souvent reproché à la science chinoise ancienne d'être avant tout pragmatique et assez peu abstraite. L'utilisation des échelles, des unités, des symboles et des projections de ces cartes démontre, au contraire, une maîtrise des concepts abstraits depuis les époques les plus anciennes (voir l'article suivant, *Les Cartes de l'empire du Milieu*).



Carte de Chine et des pays barbares (1137).

Description de l'ensemble de la Chine, accompagnée de nombreuses annotations historiques.

Source : *Les deux plus anciens spécimens de la cartographie chinoise.*  
Édouard Chavannes, *Bulletin de l'École française d'Extrême-Orient* 3, 1903



Cette démarche a été facilitée très tôt par une normalisation des mesures, et notamment par une large adoption du système décimal. Alors que l'Europe a fait face jusqu'au XVIII<sup>e</sup> siècle à une complexité d'unités locales – et encore aujourd'hui pour la mesure du temps –, la Chine a généralisé communément depuis deux mille ans l'usage décimal pour les unités de distance, d'angle et de temps. Ainsi le pied (*chi*) chinois contient dix pouces (*cun*) et cent lignes (*fen*). Le jour (*tian*) est divisé en cent quarts d'heure chinois (*ke*) contenant cent minutes (*fen*) contenant cent secondes (*miao*).

## Les arpenteurs de l'empire, mille ans avant les Cassini !

L'une des illustrations les plus spectaculaires des méthodes d'arpentage qui ont conduit aux cartes terrestres est fournie par l'expédition mémorable ordonnée par le mathématicien Yi Xing (683–727) et l'astronome Nangong Yue. Elle donnera lieu en l'an 725 à une définition astronomique de la lieue chinoise (*li*), basée sur une mesure de méridienne, dix siècles avant la définition analogue du mètre en France en 1799. L'expédition va se dérouler de 721 à 725, avec l'installation de dix stations le long d'un arc de méridienne (grand cercle reliant les deux pôles), selon une direction Nord-Sud approximative couvrant plus de 23° de latitude, soit environ 2 500 km. Chaque station sera dotée d'un gnomon de pierre d'une hauteur de huit pieds chinois (un peu moins de 2 m) pour mesurer la longueur de l'ombre du Soleil aux solstices d'hiver et d'été. Les mesures de chaque station furent collectées pour obtenir une relation fiable entre la distance parcourue et la variation de l'ombre du gnomon.

Jusqu'à cette époque, pour évaluer les distances, on se basait sur une règle approximative simple : la longueur de l'ombre du gnomon variait d'un pouce chinois (*cun*) toutes les mille lieues (*li*). La mesure de méridienne de Yi Xing va fournir un résultat bien différent, avec une variation de l'ombre de 1 *cun* pour seulement 250 *li*, qui correspond à une variation de hauteur du Soleil de 1° (en termes modernes, 1° de latitude) pour une distance de 351,27 *li*, soit 155,6 km. Pour la première fois, les distances terrestres étaient établies par une mesure astronomique exacte.

Beaucoup plus tard, en 1702, à la demande de l'empereur Kangxi (contemporain de Louis XIV), la même mesure va être reproduite en Chine avec la collaboration des missionnaires jésuites dirigés par le Belge Antoine Thomas (1644–1709) ; ils trouveront une variation de 1° pour 195,02 des lieues de l'époque, correspondant à 108 km. Devant ce résultat, Kangxi modifia la lieue

pour avoir exactement deux cents lieues pour 1°. La lieue chinoise fut ainsi redéfinie comme la 72 000<sup>e</sup> partie de la circonférence terrestre.

Les jésuites envoyaient en France des comptes-rendus réguliers de leurs activités. Il est donc tout à fait possible que ce résultat, obtenu en Chine dans la lignée de Yi Xing, ait pu inspirer directement le premier projet de mesure de méridienne des astronomes de la famille Cassini, lequel fut mené à bien en France seulement quinze ans plus tard, en 1718, aboutissant à la première carte à l'échelle du pays.

La détermination sera ensuite reprise sous la Révolution pour aboutir, en 1799, à la définition officielle du mètre comme «la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle Nord et l'équateur». Cette définition correspond à une variation de 1° de latitude pour 111 km.

Le résultat de Yi Xing, obtenu mille ans plus tôt avec une mesure de 155 km, était donc loin d'être déraisonnable. Pour établir ces relevés et ces cartes, Yi Xing pouvait s'appuyer sur des traités mathématiques très complets, comme le célèbre *Neuf Chapitres sur l'art mathématique* ou le *Classique de l'île Maritime* du mathématicien Li Hui (vers 225–295). Ce dernier texte est très explicitement consacré aux calculs d'arpentage et de relevés géodésiques, avec la résolution de problèmes comme «la mesure de la hauteur d'une île par rapport au niveau de la mer» ou «la taille d'une ville vue d'une montagne». Malheureusement, ici aussi, nous n'avons pas le détail exact des méthodes pratiques de triangulation de Yi Xing. Celui-ci, moine bouddhiste, s'est probablement également appuyé sur une trigonométrie fraîchement introduite depuis l'Inde avec le bouddhisme, à la suite des travaux du mathématicien Aryabhata (476–550).

*J.-M. B.-B.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Les sciences de l'Empire du milieu.* Jean-Marc Bonnet-Bidaud, Belin, à paraître (septembre 2023).

*4 000 ans d'astronomie chinoise.* Jean-Marc Bonnet-Bidaud, Belin, 2017.

*Les cartes du ciel du VII<sup>e</sup> siècle de la dynastie Tang.* Jean-Marc Bonnet-Bidaud, *Maths au carrefour des cultures Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2014.

*Maths de la planète Terre Express.* Comité international des jeux mathématiques,

## LES CARTES DE L'EMPIRE DU MILIEU

Jean-Marc Bonnet-Bidaud

Service d'astrophysique du Commissariat à l'énergie atomique  
et aux énergies alternatives



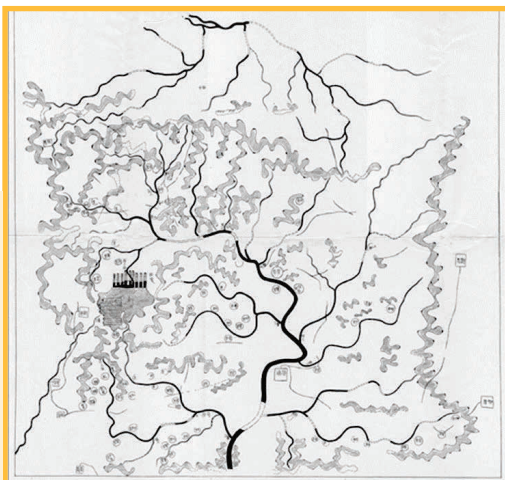
Les cartes chinoises ont été établies très tôt au service de l'empereur, à la fois pour connaître l'étendue exacte de l'empire et pour mener des campagnes militaires. Bien qu'attestées dès le début de l'époque des Han (de -202 à +220), très peu ont subsisté. La *Carte des vestiges de Yu* datée de 1137 (voir le précédent article, *L'Art de la cartographie chinoise*) est longtemps restée la plus ancienne connue. Mais depuis cinquante ans, d'importantes découvertes archéologiques ont mis au jour d'autres documents exceptionnels.

### Les cartes millénaires de Mawangdui

C'est dans un tombeau au lieu-dit Mawangdui («la tombe du roi chevalier»), dans la province du Hunan, qu'a été découverte en 1972 une sépulture datée de -168 qui, en dehors d'abriter un corps mystérieusement parfaitement conservé et de multiples tissus, objets de laque et bronze, contenait un grand «*Livre de soie*» inscrit de cartes et de textes philosophiques inestimables. Inscrites à l'encre sur la soie, elles figurent ainsi trois cartes différentes, topographique, militaire et préfectorale, d'une même région.

Carte de Mawangdui. Inscrite à l'encre sur soie, elle représente un territoire d'environ 180 km par 180 km (à l'échelle 1 : 180 000) avec indication des fleuves, montagnes et lieux.

© Mawangdui Han Tomb Silk Book.  
Presses des reliques culturelles, Pékin, 1977



D'une taille de 96 cm de côté, la carte topographique est orientée avec le Sud vers le haut et couvre une région d'environ 180 km par 180 km, à l'est de l'actuelle Guilin (Guangxi) et au sud-ouest de Changsha (capitale du Hunan). Elle porte les symboles des montagnes, fleuves et plus de cent noms de lieux.

Avec une échelle double, la carte militaire couvre, elle, un gros quart sud-est de la même région, avec de nombreux symboles d'édifices et de garnisons. Ce sont les plus anciens documents authentiques connus portant une carte réelle. Leur découverte dans le tombeau d'un simple noble, le marquis de Dai, démontre que ce type de documents, certes précieux, étaient déjà largement répandus.

Des fragments de cartes encore plus anciennes ont été découverts en 1986 sur le site funéraire de Fangmatan (Gansu) contenant des sépultures datant de la période dites «des Royaumes-Combattants» (de -476 à -221). Sept cartes inscrites à l'encre noire sur des blocs de bois d'une dimension d'environ 27 cm par 17 cm ont été mises au jour. Assemblées bout à bout, elles couvrent une région d'environ 108 km par 68 km. Y sont portés plus de soixante-dix noms de lieux, montagnes et rivières, et même des indications de ressources de bois disponibles.

Ces découvertes mettent en lumière les efforts systématiques très précoces des géomètres et mathématiciens chinois pour établir des représentations rigoureuses des territoires, et même des ressources.

Pour mieux apprécier ces résultats, il convient de les mettre en regard avec

ceux obtenus en Europe. L'ouvrage de référence en Occident a longtemps été le *Traité de géographie* attribué à l'Égyptien de culture grecque Claudius Ptolémée (vers 90 ; vers 168), mais son statut est totalement différent des sources authentiques chinoises. Tout au contraire, le texte qui est attribué à Ptolémée est loin d'être authentique, et même sans doute totalement apocryphe. Il serait le résultat d'une suite de contributions de différents auteurs au cours des siècles.



Carte de France tirée d'une édition de la  
*Cosmographie* de Ptolémée  
(entre 1450 et 1500).

Source : Gallica/  
Bibliothèque nationale de France

Comme pour tous les travaux des Grecs de l'Antiquité, il n'existe absolument aucun document original. Tous les textes ont été reconstitués à partir de copies très tardives, le plus souvent des traductions en arabe, postérieures au IX<sup>e</sup> siècle, soit... mille ans plus tard!

La carte tirée de *La Géographie de Ptolémée*, qui représente «le monde habité» autour de la Méditerranée, a été ainsi reconstituée à partir d'un texte dont la plus ancienne copie date du XIII<sup>e</sup> siècle. Dans une version du XVI<sup>e</sup> siècle, la France y est encore représentée de façon très approximative, sans comparaison avec la carte de Chine établie en 1137 sur un territoire beaucoup plus vaste. Les progrès des cartes européennes n'interviendront qu'un peu plus tard avec des mathématiciens géographes comme Gérard Mercator (1512–1594).

## Des précurseurs également dans les cartes maritimes

Les cartographes chinois vont également être précurseurs dans des cartes maritimes qui indiquent plus spécifiquement les amers (points de repères sur terre visibles de loin) et les caps à prendre pour la navigation. Environ un siècle avant les explorations maritimes de Vasco de Gama (vers 1469–1524) et Christophe Colomb (1451–1506), une flotte entière de plusieurs centaines de navires chinois allait ainsi explorer, à sept reprises, de 1405 à 1425, l'océan Indien sous la direction de l'amiral Zheng He (1371–1433), atteignant la mer Rouge et les côtes africaines de Zanzibar sur un périple de dizaines de milliers de kilomètres. À la différence de l'Europe, la marine chinoise bénéficiait déjà de l'usage de la boussole magnétique.

L'orientation magnétique, déjà utilisée sous les Han pour des usages de divination, sera adaptée vers 1088 pour devenir une aiguille de fer aimantée très légère flottant sur l'eau. C'est grâce à cette boussole que Zheng He pouvait effectuer sans encombre de larges traversées en pleine mer de plus de deux mille kilomètres, sans aucun repère en vue.

Par chance, les cartes que Zheng He a établies et utilisées ont été préservées dans le *Traité de préparation au combat*. Elles représentent les différents repères et décrivent les caps et temps de parcours. On y lit ainsi : «*Partez de Sumatera, guidé par la direction de qianxu [307,5°] sur la plaque indiquée par l'aiguille de la boussole, naviguez environ 12 geng [403 km], et vous atteignez les îles de Beras. Puis, au départ des îles de Beras, guidé par la direction de Xinxu [292,5°], naviguez pour 10 geng [336 km], et vous pourrez ensuite apercevoir l'île de Nicobar.* »

Ces cartes préfigurent les «portulan», documents équivalents qui vont apparaître progressivement en Europe.

## Les cartes du Céleste Empire et leurs projections

La grande efficacité des méthodes chinoises de cartographie est également démontrée par les cartes célestes établies avec un usage de méthodes de projection très en avance par rapport à ce qui se pratiquait en Europe. Le document le plus exceptionnel est la célèbre carte d'étoiles de Dunhuang, découverte dans une cache secrète d'un monastère abandonné, à l'extrémité ouest du désert de Gobi. Miraculeusement préservée par le climat aride, elle a été retrouvée en 1900 parmi une collection de quarante mille manuscrits sur papier.

Véritable objet d'art, elle représente l'ensemble du ciel chinois, presque trois cents constellations consciencieusement notées par leurs noms regroupant plus de mille trois cents étoiles. C'est la plus ancienne représentation graphique du ciel chinois. Datée de la période 648–685, d'après le texte qui l'accompagne, sa grande originalité est sa disposition. Le document, d'une longueur de deux mètres, comporte une partie rectangulaire centrée sur l'équateur céleste selon une projection cylindrique de type Mercator, complétée par une deuxième partie centrée sur le pôle qui utilise une projection azimutale. Cette présentation est totalement similaire à celle encore en vigueur aujourd'hui pour les atlas géographiques modernes du globe terrestre !

La précision et rigueur des projections ont pu être vérifiées à l'aide des étoiles les plus brillantes, avec une exactitude de l'ordre du degré sur les positions. C'est aujourd'hui la plus ancienne carte céleste complète du ciel visible du Nord connue au monde. La présence, dans le texte qui précède la carte, du nom de Li Chunfeng (602–670), célèbre mathématicien contemporain, suggère très fortement qu'il en soit l'auteur.



La carte céleste de Dunhuang (plus ancien atlas céleste complet connu au monde) représente l'ensemble des constellations chinoises selon une double projection moderne : cylindrique (le long de l'équateur céleste) et azimutale (autour du pôle Nord).

© British Library

Au gré des époques, les astronomes et mathématiciens chinois ont utilisé divers types de projections pour rapporter la sphère céleste complète sur un plan, alternant entre des projections cylindriques et azimutales. Ainsi, une carte complète du ciel en projection azimutale a été conçue en 1193 pour l'éducation de l'empereur Ningzong (1168–1224). Gravée sur pierre et conservée au musée de Suzhou (Jiangsu), elle est particulièrement détaillée, incluant même la délimitation de la Voie lactée.

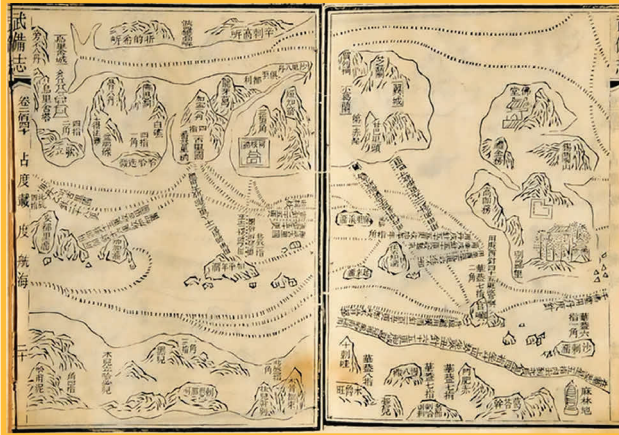
## Des techniques pour résoudre les problèmes d'arpentage

Même si, la plupart du temps, les méthodes exactes ne sont pas spécifiées dans les textes, l'existence d'une multitude de cartes terrestres ou célestes authentiquement datées démontre indéniablement que les mathématiques chinoises ont permis de résoudre rigoureusement moult problèmes d'arpentage et de projection. Ces techniques étaient déjà totalement maîtrisées entre le VI<sup>e</sup> et le XII<sup>e</sup> siècle, précédant des résultats que l'Europe n'atteindra que de nombreux siècles plus tard. Paradoxalement, c'est précisément lorsque la révolution scientifique démarrera en Europe, après le XVII<sup>e</sup> siècle, que débutera le lent déclin de la science chinoise. La dernière dynastie étrangère des Qing (1644–1912), par l'opposition qu'elle induira entre les conquérants mandchous et les Chinois de tradition classique, puis les invasions européennes, accentueront la déchéance. La science chinoise subira alors un long hiatus de trois siècles.

Le renouveau, initié déjà depuis plusieurs décennies, promet de nouvelles innovations. Ainsi, les cartographes chinois viennent de produire une carte utilisant une projection étonnante pour mettre en valeur la symétrie entre les réserves de glace des deux pôles géographiques et les grands glaciers de l'Himalaya, troisième source principale d'eau douce sur Terre. Dans cette vision, surprenante pour l'œil habitué aux projections classiques, ce « troisième pôle » de l'Himalaya est placé au centre. Créée en 2002 par le jeune géophysicien Hao Xiaoguang (né en 1982) et publiée en 2012, la carte utilise une projection cylindrique transverse dans laquelle la sphère terrestre est développée selon un cylindre, non pas le long des longitudes (comme usuellement) mais perpendiculairement, le long des latitudes. Contrairement à ce qui a été parfois évoqué, il ne s'agit pas de la « carte du Monde officielle » en Chine mais d'un document établi pour l'Administration arctique et antarctique chinoise, qui aurait également servi pour mieux optimiser la position des satellites et stations du GPS chinois Beidou. Centrée sur l'Himalaya et la Chine, la carte verticale obtenue rejette l'Amérique aux deux extrémités et fait notamment apparaître que les voies de communication les plus courtes

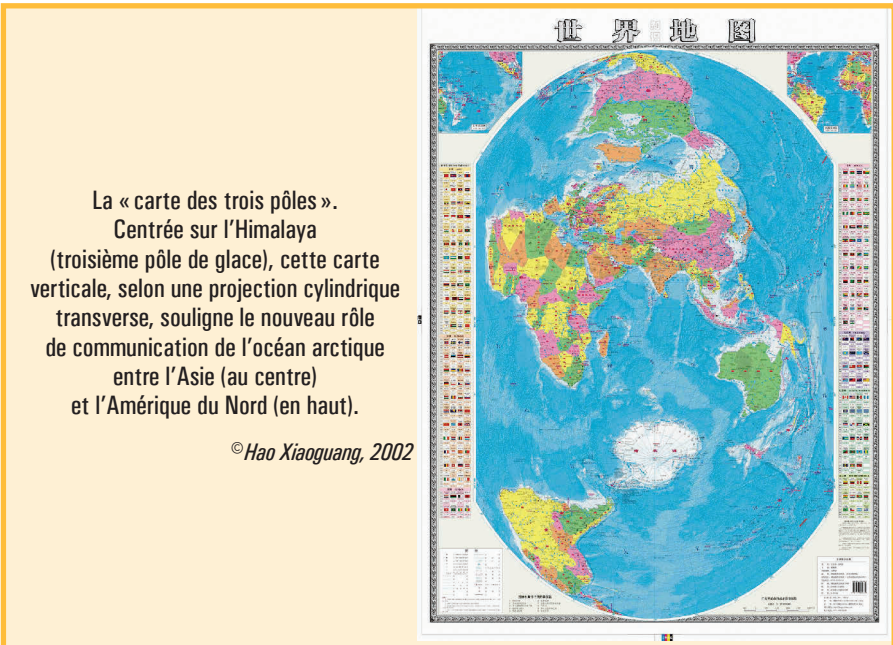
entre l'Asie et l'Amérique du Nord ne passent pas par le Pacifique mais par l'Arctique. Le réchauffement climatique qui s'annonce rendra bientôt mieux navigable l'Océan arctique et il n'est pas fait mystère qu'en tant que deuxième puissance mondiale, la Chine souhaite désormais être associée comme membre du Conseil de l'Arctique. Plus que jamais, comme depuis les plus anciennes dynasties, les cartes gardent leur caractère hautement stratégique.

*J.-M. B.-B.*



Carte maritime établie en 1431 par l'explorateur Zheng He, portant l'indication des caps magnétiques. La partie droite décrit le trajet de Ceylan aux côtes africaines.

© Library of Congress



La « carte des trois pôles ». Centrée sur l'Himalaya (troisième pôle de glace), cette carte verticale, selon une projection cylindrique transverse, souligne le nouveau rôle de communication de l'océan arctique entre l'Asie (au centre) et l'Amérique du Nord (en haut).

© Hao Xiaoguang, 2002



## DES NOMBRES NÉGATIFS CHEZ LES ANCIENS MAYAS

André Cauty et Jean-Michel Hoppan

Association d'ethnolinguistique amérindienne  
Ingénieur d'études au CNRS

Après une gestation de plusieurs siècles, le nombre négatif est attesté en Chine vers 200 avant notre ère, par l'usage de baguettes représentant différemment les positifs et les négatifs. Quelques siècles plus tard, en Inde, Brahmagupta (598–660), premier savant à définir zéro comme différence d'un nombre avec lui-même, étend aux relatifs les règles de calcul des entiers. Environ à la même époque, les Mayas, alors à leur apogée culturelle, furent les seuls Mésoaméricains à avoir l'intuition des entiers négatifs et à créer, plusieurs siècles avant son apparition fin Moyen Âge en Europe, une graphie pertinente de l'opposition négatif/positif.

Par bonheur, des milliers d'inscriptions de l'époque maya classique (III<sup>e</sup>–X<sup>e</sup> siècle) ont résisté, grâce à leur support – monuments, objets de prestige, vaisselle d'apparat –, ainsi que les copies de trois manuscrits (ou *codex*) qui ont survécu aux affres du temps, au climat et aux destructions des religieux espagnols. Conservées en Europe, elles contiennent des almanachs divinatoires. Cachée sous les égalités calendaires ponctuant les inscriptions, l'arithmétique maya se laisse dévoiler dans les tables de ces codex. L'*Almanach 53* du codex de Dresde (Allemagne) prophétise les phases de Chak Ek', la « grande étoile », selon que Vénus est du matin ou du soir, ou invisible durant les conjonctions.

### Un calendrier maya des phases de Vénus

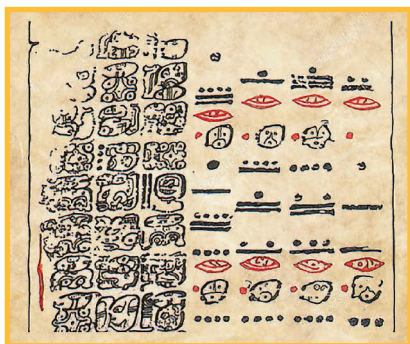
Ciment culturel d'une moitié des Mésoaméricains, le *choltun* est une chronologie absolue en années (*tun*) et jours (*kin*). Son secret précède d'un millénaire le système de Joseph Juste Scaliger (1540–1609) et Frederick William Herschel (1792–1871), qui ont introduit en Occident le *jour julien*, à savoir l'idée de numérotter les jours (1, 2, 3...) après être convenus d'un « jour origine »,  $O_{cm}$ . Sa durée, trois cent soixante jours, est une approximation entière des années solaire (365,25...) et mésoaméricaine (18 vingtaines). Son nom, *tun* (« pierre »), dit la coutume d'ériger chaque vingt *tun* un monument de pierre. On date un jour par sa distance à  $O_{cm}$  : le scribe de La Corona (un site archéologique situé au Guatemala) datait « 3 825 ans et 144 jours » (sous-entendu : depuis  $O_{cm}$ ).



Codex de Dresde (extrait de la page 24), vers 1400.

On lit ici : 6 Ahau (en rouge, le point comptant 1 et la barre comptant 5 désignent « 6 »),  
1 Ahau (un point et deux barres), 3 Ahau (trois points) et 8 Ahau (trois points et une barre).

© André Cauty (Amérindia), 1998



Codex de Dresde (extrait de la page 24),  
vers 1400.

© André Cauty (Amérindia), 1998

La page 24 de l'*Almanach 53* a permis de comprendre pourquoi un anneau entoure parfois le dernier chiffre d'une durée. La page est divisée en deux. À droite, un tableau de quatre colonnes étale cinq lignes de quatre blocs. Chaque bloc contient une date formée d'une tête **Ahau** précédée d'un composé rouge de points et de barres. Surplombant les blocs, des composés noirs sont des multiples de nombres, notés ici **8;2.0** ou **13.0** par exemple. L'utilisation du point-virgule dans les transcriptions des nombres sert à distinguer graphiquement l'irrégularité

due au fait qu'il y a dix-huit vingtaines de jours dans un *tun* et non vingt. L'écriture **8;2.0** signifie ainsi «  $8 \times 360, 2 \times 20$  et  $0 \times 1$  ».

À gauche figurent trois colonnes de texte. Chacune finit par un bloc analogue à ceux du tableau : un entier (à zéro terminal) surplombant une date **Ahau**, suivie d'une date noire (point/barre+glyphe). Voyons comment les Mayas écrivaient les nombres et les dates.

Écrits en numération vigésimale (« en base 20 ») de position, les nombres mayas disent des durées. L'écriture des chiffres utilise trois signes : zéro, point, barre. Le point vaut une unité, la barre cinq points (19 s'écrit ainsi avec quatre points et trois barres, et 20 avec un point et un zéro ; voir la brochure *Maths en pleines formes Express* publiée par le CIJM en 2022). Les chiffres se placent dans l'ordre croissant ou décroissant des unités de temps. La plus petite est le *kin* (un atome indivisé avant la période hispanique). Le premier ou dernier chiffre est donc celui des *kin*. Si le compte est rond, ce chiffre est zéro. Sinon, de 1 à 19, il s'écrit en points et barres. Le zéro des codex est rouge, en forme de

coquille. Le deuxième ou pénultième chiffre est celui des *uinal* (vingtaines de *kin*). Entorse à la vigésimalité, le suivant n'est pas celui des vingtaines de *uinal*, mais celui des *tun*. Puis viennent le chiffre des *katun* (vingtaines de *tun*, 7 200 *kin*) et celui des *baktun* (vingtaines de *katun*, soit 144 000 jours). Le *choltun* ne s'arrête pas au *baktun*.

Numéroter au jour près parle peu à l'imagination. Pour y remédier, on place les jours dans différents cycles. Notre Jour de l'An 2023 s'appelle «Nouvel An», «Dimanche» (dans le cycle de la semaine) ou «1<sup>er</sup>-Janvier» (dans le cycle du mois). Un Maya utilisait surtout trois cycles. Le *tzolkin*, de formule  $13 \times 20$ , est un cycle à caractère sacré lié à la divination. Le *haab*, de formule  $(18 \times 20) + (1 \times 5)$ , est à usage pratique et festif. L'usage simultané des deux génère le troisième, dit *calendar round* («calendrier circulaire»). Noté CR ou *tzolkin*  $\otimes$  *haab*, il a dix-huit mille neuf cent quatre-vingts jours.

Une date *tzolkin* combine un entier et un nom de jour. On les obtient toutes en puisant en même temps un entier du cycle (1, 13) et un nom du cycle des vingt signes «astrologiques» ci-dessous. Ainsi, le numéro 1 correspond à 1 *Imix*, le numéro 2 à 2 *Ik*... et le numéro 260 à 13 *Ahau*. Le *haab* est une année de dix-neuf périodes : dix-huit *uinal* de vingt jours et un épagomène *Uayeb* de cinq jours (afin de corriger le décalage entre l'année civile et l'année solaire). Les dates *haab* combinent un entier et un nom de période. Les entiers vont de CHUM, «zéro, assise», à 19 pour les vingtaines, et à 4 pour *Uayeb*.

$\begin{matrix} \text{g} \\ \text{X} \\ \text{h} \end{matrix}$	<i>Imix</i> <sub>1</sub>	<i>Ik</i> <sub>2</sub>	<i>Akbal</i> <sub>3</sub>	<i>Kan</i> <sub>4</sub>	<i>Chicchan</i> <sub>5</sub>	<i>Cimi</i> <sub>6</sub>	<i>Manik</i> <sub>7</sub>	<i>Lamat</i> <sub>8</sub>	<i>Muluc</i> <sub>9</sub>	<i>Oc</i> <sub>10</sub>	<i>Chuen</i> <sub>11</sub>	<i>Eb</i> <sub>12</sub>	<i>Ben</i> <sub>13</sub>	<i>Ix</i> <sub>14</sub>	<i>Men</i> <sub>15</sub>	<i>Cib</i> <sub>16</sub>	<i>Caban</i> <sub>17</sub>	<i>E'danab</i> <sub>18</sub>	<i>Cauc</i> <sub>19</sub>	<i>Ahau</i> <sub>20</sub>
1	1	222	183	144	105	66	27	248	209	170	131	92	53	14	235	196	157	118	79	40
2	41	2	223	184	145	106	67	28	249	210	171	132	93	54	15	236	197	158	119	80
3	81	42	3	224	185	146	107	68	29	250	211	172	133	94	55	16	237	198	159	120
4	121	82	43	4	225	186	147	108	69	30	251	212	173	134	95	56	17	238	199	160
5	161	122	83	44	5	226	187	148	109	70	31	252	174	135	96	57	18	239	200	
6	201	162	123	84	45	6	227	188	149	110	71	32	253	214	175	136	97	58	19	240
7	241	202	163	124	85	46	7	228	189	150	111	72	33	254	215	176	137	98	59	240
8	21	242	203	164	125	86	47	8	229	190	151	112	73	34	255	216	177	138	99	60
9	61	22	243	204	165	126	87	48	9	230	191	152	113	74	35	256	217	178	139	100
10	101	62	23	244	205	166	127	88	49	10	231	192	153	114	75	36	257	218	179	140
11	141	102	63	24	245	206	167	128	89	50	11	232	193	154	115	76	37	258	219	180
12	181	142	103	64	25	246	207	168	129	90	51	12	233	194	155	116	77	38	259	220
13	221	182	143	104	65	26	247	208	169	130	91	52	13	234	195	156	117	78	39	260

Ordre « diagonal » des  $13 \times 20$  dates d'un *tzolkin*  
(les vingt signes « astrologiques » du *tzolkin* figurent verticalement).

© D'après André Cauty, 2022

## Dates introductrices du calendrier de Vénus

La distance  $C^{te}$  du «lundi 01/01/−4713 julien ou 24/11/−4713 grégorien» au «zéro» de la chronologie maya spécifie l'isomorphisme liant *choltun* et le système des jours juliens. Pour convertir les dates mayas en dates grégoriennes, certains utilisent la valeur 584 283 de la constante  $C^{te}$ , d'autres  $C^{te}=584\,285$ . On propose la constante  $584\,284\pm 1$ . Retournons en page 24 de l'*Almanach 53*. On lit en bas à gauche trois dates :  $D=4\text{ Ahau } 8\text{ Cumku}$ ,  $A=1\text{ Ahau } 18\text{ Kayab}$  et  $B=1\text{ Ahau } 18\text{ Uo}$ .



Codex de Dresde, extrait de la page 24.

On lit bien, dans la première colonne, de haut en bas : un point et une barre (« 6 »), deux points (« 2 »), un zéro (« coquille ») entouré d'un anneau, soit  $D = 6;2.0..$

© D'après André Cauty (*Amerindia*), 1998

« Jour zéro » de la chronologie maya, le **4 Ahau 8 Cumku** était au moins aussi parlant pour un Maya que le mardi 11 septembre 2001 pour qui ferait débiter l'histoire du XXI<sup>e</sup> siècle au jour des attentats islamistes aux États-Unis. Outre D, A et B, on voit un « anneau (à nœud) » (en rouge) autour du chiffre 0. de la durée  $D=6;2.0..$ , et deux autres durées (sans anneau) :  $A=9.9.16;0.0.$  et  $B=9.9.9;16.0..$  Égales à 2 200, 1 366 560 et 1 364 360, une soustraction peut les relier. Calculant les distances (D, A), (A, D), (D, B), (B, D), on constate que seule (D, A), qui est négative, est égale à  $D=6;2.0..$ , et que  $-2\,200$  fait passer du  $/12/08/-3113\pm 1/$  au  $/03/08/-3119\pm 1/$ . Les égalités :

$$2200=10 \text{ (modulo 365) et}$$

$$2200=120 \text{ (modulo 260)}$$

confirment les distances de **8 Cumku** ( $348^e$ ) à **18 Kayab** ( $338^e$ ) et de 4 Ahau

( $160^e$ ) à 1 Ahau ( $40^e$ ). Soit deux translations possibles :  $A=9.9.16;0.0.$  est le 72<sup>e</sup> multiple de la durée 18 980 (52 *haab* ou 73 *tzolkin*) dont les multiples conservent les dates CR. Pour continuer la lecture, il faut puiser un correctif dans le tableau de la page 24, et obtenir des mayanistes une lecture des dates atteintes. Ce travail fructueux entre mathématiciens et mayanistes permet de donner lieu à des conjectures historiques intéressantes, que des recherches supplémentaires permettront de confronter, de confirmer ou d'invalider.

<b>1 Ahau 18 Kayab</b>	←	$O_{cm}$	→	<b>7 Ahau 18 Cumku</b>
<b>6;2.0.</b>	=	<b>6;2.0. − (0/13).0.0;0.0.</b>	+	<b>6;2.0.</b>
<b>−2 200</b>	=	<b>2 200 − 0</b>	+	<b>+2 200</b>
<b>03/08/−3119 ± 1</b>	←	<b>12/08/−3113 ± 1</b>	→	<b>20/08/−3107 ± 1</b>

© A.C. & J.-M. H., 2023



Codex de Dresde,

les éléments correctifs du tableau de la page 24.

Dans la colonne de gauche, on reconnaît A = 9.9.16;0.0.. Dans la colonne de droite, on lit B = 9.9.9;16.0.. Dans l'écriture de ces deux nombres A et B, remarquez que les zéros ne sont pas entourés.

© D'après André Cauty (Amerindia), 1998

On a ainsi montré que l'anneau de **6;2.0.** dit de quel côté aller par rapport au zéro qu'est l'origine **4 Ahau 8 Cumku**. C'est un opérateur unaire, pas un signe de soustraction de deux entiers. Signe de négativité/positivité, il dit: «(x) et (-x) sont l'un plus grand et l'autre plus petit que zéro»:

$$6;2.0+9.9.16;0.0.=9.9.9;16.0. (\neq 9.10.2;2.0.).$$

## Le « nombre anneau » découvert à Xultún (Guatemala)

Jusqu'en 2010, on connaissait une douzaine de « nombres anneaux » du codex de Dresde, et quelques exemples moins clairs du codex de Madrid. En 2010, au cours de fouilles sur le site archéologique de Xultún, l'équipe de l'Américain William Andrew Saturno découvrit des tables numéro-calendaires sur les murs décorés d'une construction codée Structure 10K-2. C'est une maison habitée au début du IX<sup>e</sup> siècle par un scribe « compteur de temps ».

Date et « nombre anneau » sur la Structure 10K-2  
(site de Xultún, Petén, Guatemala, IX<sup>e</sup> siècle).

© D'après un relevé de David Stuart



L'étude des tables fut confiée à l'épigraphiste américain David Stuart. Regardant l'entier **10**, le nom **Cimi**, et une ellipse autour du dernier chiffre de **4.15;5.14.**, il reconnut un « nombre anneau » analogue à ceux du codex de Dresde, dont celui de la page 24. Cette forme épurée fait reculer de 34 314 jours à partir du « jour zéro ». L'égalité «  $(584\ 284 \pm 1) + (-34\ 314) = 549\ 970 \pm 1$  » résume les relations numéro-calendaires qui interprètent l'écriture trouvée sur le site de Xultún. Le copiste du Dresde aurait rétabli [4 Ahau 8 Cumku] et peint **10 Cimi** [4 Cumku] **4.15;5.14.** le résultat du recul :

-4.15;5.14.	-4.15;5.14.	[0.0.0;0.0.]
<b>10 Cimi</b> [4 Cumku]	←	[4 Ahau 8 Cumku]
-34 314 = 31/08/-3207 ±1	<b>-34 314</b>	O <sub>cm</sub> = 12/08/-3113 ± 1

© A.C. & J.-M. H., 2023

Égal à  $-254$  (modulo 260) et à  $-4$  (modulo 365), le «nombre anneau»  $-34\ 314$  fait reculer de deux cent cinquante-quatre places dans le *tzolkin* et de quatre dans le *haab*. Soit encore de **8 Cumku** à **4 Cumku**, et de **4 Ahau** ( $160^{\text{e}}$  place) à **10 Cimi** ( $166^{\text{e}}$  place), car  $160 - 254 = 166$  (modulo 260).

Les Mayas ont utilisé des «nombres anneaux», c'est-à-dire «négatifs». Ils sont attestés par les découvertes faites sur le site de Xultún, et on en recense une douzaine dans le codex de Dresde. En deux ou trois millénaires d'histoire maya, la notion de négatif apparaît sporadiquement durant les sept ou huit derniers siècles avant l'époque hispanique. La saga mathématique montre qu'il fallut plusieurs siècles aux Chinois et aux Indiens pour passer de la notion de négatif à l'extension des règles de calcul aux entiers relatifs. La graphie épurée (ellipse sans nœud ni couleur) du plus ancien trait de négativité/positivité suggère que la notion avait cours depuis un certain temps. Elle pourrait être du VII<sup>e</sup> ou du VIII<sup>e</sup> siècle. On ignore si les scribes mayas étendirent l'arithmétique des entiers naturels aux entiers relatifs. Dépendant de découvertes analogues à celle de Xultún, l'avenir dira si les Mayas franchirent ce Rubicon.

*A.C. & J.-M. H.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Lire et faire parler un texte.* André Cauty, *Amerindia* 23, 1998.

*Arithmétique maya.* André Cauty, Peter Lang, 2020.

*Parlons maya classique.* Jean-Michel Hoppan, L'Harmattan, 2014.

Le blog « *Intelligence arithmétique maya* », administré par André Cauty de 2011 à 2013, disponible en ligne.

Les archives numériques du Sedyl (Structure et dynamique des langues), dirigées par Stefano Manfredi et Sophie Vassilaki, disponibles en ligne.

## LES MATHÉMATIQUES

### DERRIÈRE LES CARTES MÉTÉOROLOGIQUES

Laurène Hume

Ingénieure de recherche  
et docteure en mathématiques appliquées

Quand il est question de savoir le temps qu'il fera aujourd'hui ou demain, le réflexe le plus naturel en 2023 consiste à consulter un bulletin météo qui sera capable d'annoncer l'arrivée de la pluie, du soleil ou du vent avec une certaine précision. Jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la coutume était pourtant de se fier à des dictons populaires, et les prévisions se faisaient au gré d'un ensemble de proverbes que l'on aime encore parfois énoncer. À chacun son favori, de « Pluie avant 7 heures, beau temps à 11 heures » à « Quand les grenouilles chantent le soir, il fait beau le lendemain », en passant par « S'il pleut pour Saint-Médard, le beau temps vient tard ». Tous ces bons mots, bien qu'ils puissent parfois faire sourire, sont pourtant basés sur la première étape nécessaire à toute prévision du temps : l'observation.

C'est à partir du XX<sup>e</sup> siècle que les premiers modèles mathématiques ont permis de mieux formaliser les phénomènes météorologiques. Ces modèles se sont appuyés sur les connaissances grandissantes en mathématiques et en physique, notamment en exploitant la mise en équation de plus en plus fine de la mécanique des fluides. On est ainsi devenu capable de questionner plus en profondeur les mécanismes qui se cachent derrière une averse ou un ciel dégagé : les proverbes sont devenus équations, avec leurs inconnues et leurs paramètres. C'est alors que les mathématiques sont devenues une précieuse boîte à outils pour prédire la météo : lorsque l'on sait comment résoudre les équations qui modélisent la météo ou que l'on sait comment approcher leurs solutions, alors on sait prédire et représenter le temps qu'il fera dans le futur. Couplées aux capacités informatiques du calcul scientifique qui ne font qu'augmenter depuis les années 1950, les mathématiques sont ainsi au cœur de la réponse à la fameuse question : « Il fait beau demain ? »

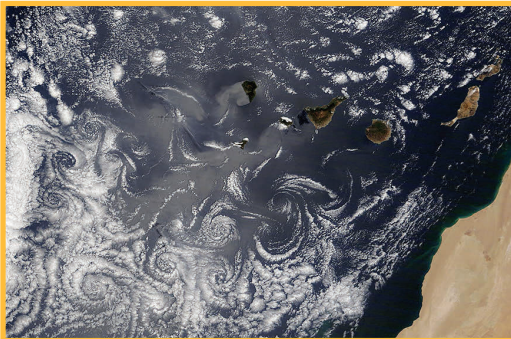
### Choisir le bon modèle : le rôle des données et des équations

Au-delà des observations par l'homme depuis le sol, les moyens d'observation sont aujourd'hui nombreux : stations météorologiques sur terre ou en mer,

ballons sondes, radars météo, avions de mesure ou encore satellites. Placés sur la surface du globe et jusque dans la stratosphère, ces outils récoltent une quantité phénoménale de données sous diverses formes (température, force du vent, quantité de précipitations, images des couches nuageuses...). Les mesures à un instant  $T$  de l'état de l'atmosphère serviront de point de départ aux calculs de prévisions, mais elles permettront également d'affiner les modèles en les confrontant aux données réelles : leur précision et leur fiabilité sont donc capitales !

Les données récoltées par les dispositifs de mesure, à savoir la vitesse des vents, la pression, la température, l'humidité et la teneur en eau de l'atmosphère, sont précisément celles que l'on souhaite prédire dans le cadre d'un bulletin météo. Elles jouent donc le rôle des inconnues (ou variables) du modèle de prévision. Ce dernier est composé d'un système d'équations qui décrit les liens physiques entre les variables. Parmi les équations utilisées couramment, on se sert des équations de base de la physique et de la mécanique : on retrouve par exemple l'équation du mouvement, l'équation de conservation de la masse totale, l'équation d'état des gaz parfaits ou l'équation de la thermodynamique. Il s'agit d'équations d'évolution, qui dépendent de l'espace mais aussi du temps. Cela veut dire que si l'on connaît la valeur de toutes les variables à un instant donné  $T$ , les équations décrivent l'évolution de ces variables à tous les instants qui ont lieu avant ou après  $T$ . On appellera ainsi *condition initiale* l'ensemble des valeurs des variables au temps  $T=0$ , qui sert de point de départ à la modélisation. Cette condition initiale fait partie des données nécessaires pour bien définir le modèle.

Dans les modèles actuels, on utilise un système d'équations découlant des *équations de Navier–Stokes*, qui décrivent de la façon la plus complète possible le comportement des fluides de l'atmosphère (voir la brochure *Maths Société Express*, 2016). En particulier, ce type d'équations permet de bien représenter les régimes « turbulents », que l'on peut visualiser sous la forme de tourbillons et qui jouent un rôle majeur dans l'évolution des conditions météorologiques.



Capture en couleurs réelles d'un tourbillon de nuages au sud-ouest des îles Canaries (archipel espagnol situé au large de la côte nord-ouest de l'Afrique) par le satellite Terra de la Nasa.

Source : NASA/Worldview



Nous avons donc à disposition un ensemble d'équations, qui modélisent plutôt fidèlement les comportements physiques, ainsi qu'une condition initiale que l'on peut tirer des mesures réelles. Si nous savions résoudre directement les équations du système, c'est-à-dire si l'on était capable d'exprimer mathématiquement la fonction solution en tout point de l'espace, alors nous obtiendrions l'expression exacte de la météo en tout temps et en tout lieu !

Malheureusement, ce monde parfait n'existe pas (encore) : à ce jour, aucun mathématicien n'a encore réussi à résoudre exactement les équations de Navier-Stokes de façon théorique et complète. Pire encore, on ne sait même pas prouver qu'il existe une seule et unique solution pour chaque condition initiale possible ! Ceux qui réussiront à prouver ce résultat (ou à l'invalider) pourront se targuer d'avoir résolu l'un des problèmes du millénaire de l'Institut de Mathématiques Clay, et empocheront au passage un million de dollars. Avis aux amateurs !

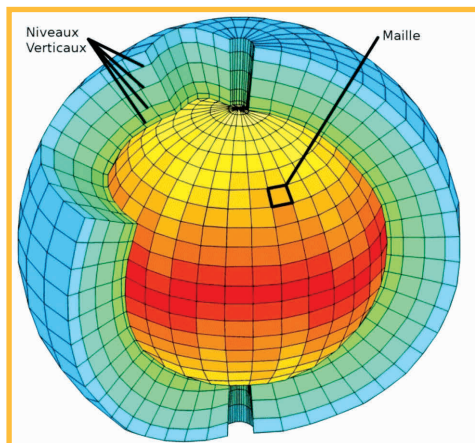
## Passer du modèle de départ continu à un modèle discret

À défaut de solution exacte, on devra donc se contenter de produire une solution approchée pour obtenir nos prévisions. On part alors du modèle de départ, continu en temps et en espace, et on le transforme en une version discrète pour le manipuler sur ordinateur. On cherche ainsi à calculer la solution en des points fixés à l'avance (et non en tous les points) et en des incréments de temps réguliers (et non pour tous les temps). Afin de représenter numériquement les données mesurées et calculer les valeurs des prévisions, il est en effet nécessaire de les connaître sur une grille fixe.

Cette grille est aussi appelée *maillage* et recouvre, à l'aide de *mailles* (les blocs délimités par la grille), tout l'espace dans lequel les paramètres sont mesurés et calculés.

Sur ce maillage, on construit alors un modèle numérique de prévision reposant sur trois étapes :

On utilise d'abord la mesure de l'état de l'atmosphère à un instant donné  $T$  pour disposer d'une condition initiale sur le maillage.



Un maillage de l'atmosphère en trois dimensions.

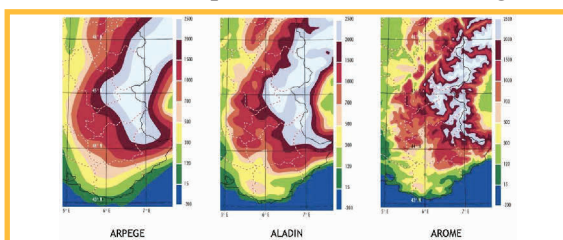
Source : Météo France

Ensuite, on calcule l'évolution des variables de proche en proche. À partir de la condition initiale en  $T_1$ , on construit (à l'aide des équations de Navier–Stokes) la solution approchée à un instant  $T_n$  dans le futur supposé «proche» de  $T_1$ . Puis, à partir de cette nouvelle «condition initiale» en  $T_n$  (et toujours à l'aide des équations de Navier–Stokes), on construit la solution approchée à un instant  $T_{n+1}$  «encore un peu plus loin» dans le futur, et ainsi de suite.

Pour finir, une fois que l'on a atteint l'instant pour lequel on souhaite notre prévision, on affiche les valeurs obtenues par la solution approchée.

Le travail consistant à calculer de proche en proche l'évolution des variables, est le plus difficile car il y est nécessaire de manipuler le modèle pour être capable de déduire facilement une solution en l'instant  $T_{n+1}$  à partir de celle en l'instant  $T_n$ . Les méthodes qui le permettent reviennent toutes à réécrire les opérations présentes dans les équations (comme les dérivées ou les opérateurs) sous une forme discrète, c'est-à-dire adaptée à notre maillage (notre découpage en temps et en espace). Avec ces méthodes d'approximation, mais aussi les hypothèses simplificatrices que l'on pose au départ pour avoir un nombre acceptable de paramètres, et la connaissance de données mesurées (qui peut être, là aussi, approximative), c'est inévitable : on accumule des erreurs numériques à chaque étape. Même si elles sont «très petites», ces erreurs s'additionnent et peuvent complètement dérégler nos solutions que l'on se donne tant de mal à trouver. Il est donc souvent nécessaire de réajuster notre solution au fur et à mesure, ce qui se fait idéalement en la comparant avec des données réelles mesurées, ou des paramètres dont on connaît bien le comportement théorique sans erreur numérique.

Évidemment, plus le maillage utilisé est fin, plus il y a de valeurs à approcher, et plus le calcul informatique est long... mais plus on est précis. Selon l'échéance de la prévision, on cherchera ainsi à adapter la résolution du maillage utilisé. Pour des prévisions à court terme, on pourra utiliser un maillage fin, composé de cellules de petite taille. Cela permet de représenter des données précises et de suivre leur évolution fidèlement sur de petites échelles de temps. Le modèle AROME de Météo France, qui utilise des mailles de 1,3 km de large en moyenne, permet ainsi d'obtenir des



Représentation du relief des Alpes à l'aide des trois résolutions de grilles des modèles ARPEGE, ALADIN et AROME (du plus grossier au plus précis).

Source : Météo France

prévisions à une échéance de trois à trente-six heures. Pour des prévisions à moyen ou long terme (de 1 à 5 jours), on préférera un maillage relativement grossier, comme celui du modèle ARPEGE avec des cellules de 7 à 36 km de large.

Il convient dans tous les cas de savoir trouver un compromis entre précision et temps de calcul : si l'on souhaite savoir s'il pleuvra demain au-dessus de la pointe de la Tour Eiffel mais qu'il faut trois jours de calcul pour faire cette prévision très précise, elle ne sera pas très utile... C'est pour cela que les avancées technologiques sur les supercalculateurs et sur la gestion de grandes masses de données sont importantes, parfois au-delà des avancées mathématiques sur les modèles.

## Et la fiabilité dans tout ça ?

En principe, et sous réserve d'obtenir une solution (exacte ou approchée) des équations du modèle, on pourrait donc imaginer que l'on sera un jour en mesure de prévoir le temps qu'il fera à n'importe quelle échéance, et à n'importe quel lieu, en exploitant le caractère déterministe des équations d'évolution. Mais là encore, ce serait bien trop simple : la nature des équations du modèle les rend très sensibles aux conditions initiales. Au tout début du XX<sup>e</sup> siècle, le mathématicien français Henri Poincaré (1854–1912) avait déjà une intuition à ce sujet :

*« Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelques certitudes ? [...] Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. »*

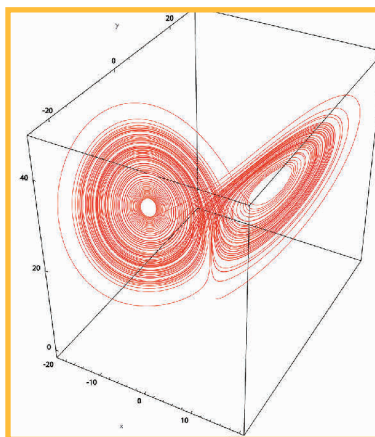
En d'autres termes, et pour revenir à la description sous forme de modèle : si l'on prend une condition initiale  $A$  et une autre condition initiale  $A_E$  « très proche » de  $A$ , les variables du modèle devraient évoluer de façon similaire au départ, et donc donner lieu à des prévisions assez semblables en partant de  $A$  ou de  $A_E$ . Mais, au cours du temps, les variables vont inévitablement commencer à évoluer de plus en plus distinctement, de sorte que les prévisions à moyen ou long terme seront très différentes, selon qu'on est parti de  $A$  ou de  $A_E$ .

Ce problème de stabilité des solutions traduit l'aspect « chaotique » des modèles météorologiques. Parmi les théories qui étudient ces aspects, celle des *attracteurs de Lorenz* met en valeur le comportement étonnant des solutions d'un système qui ressemble à celui que nous avons décrit. Cette théorie développée dans

les années 1960 a permis de démontrer que les solutions du système décrivant le phénomène physique de convection finissent toutes par se comporter de façon chaotique, dans un temps plus ou moins long, et suivent une trajectoire en forme d'«ailes de papillon» qui ne se recoupe jamais elle-même.

Il est ainsi primordial de bien sélectionner la condition initiale du modèle pour espérer en tirer une prévision fiable. C'est d'ailleurs à partir de cette idée que l'on obtient le fameux *indice de confiance* présenté dans les bulletins météo pour les prévisions à quelques jours. En prenant une condition initiale A et plusieurs conditions initiales «proches» de celle-ci, on obtient en effet plusieurs scénarii possibles d'évolution

des variables : cela donne un «panache» de prévisions. Si le panache est étroit, alors on peut considérer que la prévision liée à la condition initiale A est fiable. L'indice de confiance est élevé. À l'inverse, si le panache s'élargit très vite, alors la prévision est très sensible à la précision de la condition initiale et on considèrera qu'elle est moins fiable. L'indice de confiance est bas. Au final, plus on veut prévoir à l'avance à l'aide d'un modèle météorologique, moins on est exact. Pour prévoir à plus longue échéance, par exemple pour les scénarios climatiques dans les prochaines décennies à l'échelle mondiale, la stratégie mathématique est complètement différente (le climat est en effet la statistique du temps). On a alors recours à des méthodes statistiques, qui permettent de prédire la météo sous forme de moyennes, sur une région et une période de temps données.



L'attracteur de Lorenz,  
en forme d'ailes de papillon.

©D.328, 2008

L. H.

### Pour en savoir (un peu) plus

*Faire des mathématiques au moyen d'une station météo.* Jacques Taillet, *MathémaTICE* 61, 2018, disponible en ligne.

«*Quelles mathématiques pour les prévisions météorologique et climatique ?*» Conférence de Marie Farge à l'Institut Henri-Poincaré, samedi 10 octobre 2015, 80 min, disponible en ligne.

«*Les modèles numériques pour prévoir le temps.*» Conférence de Joël Collado à l'Institut Henri-Poincaré, samedi 10 octobre 2015, 65 min, disponible en ligne.

## DES CARTES CONTINUES

## AUX SPATIALITÉS DISCRÈTES



Enka Blanchard

CNRS, LAMIH et Centre Internet et Société

Vous vous promenez dans une prairie. Peu importe la direction vers laquelle vous marchez, la notion de distance qui s'applique est assez naturellement la distance euclidienne (dans un espace assimilé à un plan). Cette observation n'est pas anodine : la distance euclidienne joue un rôle, somme toute, limité dans nos vies.

Si l'on remplace la prairie par une ville américaine comme New York, à moins d'être Superman volant au travers des bâtiments, la personne devra contourner les blocs des gratte-ciels et les pâtés de maison. Cette autre notion de distance (qui porte plusieurs noms, dont *distance de Manhattan* et *distance-taxi*) reste encore assez intuitive. Elle est même plus facile à calculer de tête. Si je suis à l'intersection des rues  $x_1$  et  $y_1$  et que je dois aller au point  $(x_2, y_2)$ , la distance parcourue sera simplement  $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ . Pas besoin d'extraire une racine carrée, contrairement à la distance euclidienne (qui serait la racine carrée de  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ). Ces deux notions sont différentes mais restent liées. En réalité, il existe toute une classe de fonctions, que l'on appelle *distances*, qui possèdent des propriétés en commun. Ces dernières sont la *symétrie* (qui traduit que la distance du point  $x$  au point  $y$  est la même que celle de  $y$  à  $x$ , soit  $d(x, y) = d(y, x)$ ), la *séparation* (si  $d(x, y) = 0$ , alors  $x = y$ ; dit autrement, si la distance entre deux points est nulle, c'est que ces deux points sont confondus) et l'*inégalité triangulaire* ( $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ), ce qui formalise l'idée qu'il est plus court d'aller directement de  $x$  à  $z$  que d'aller de  $x$  à  $z$  en passant par  $y$ .

### Un petit détour par les transports publics et par les graphes

Selon l'espace où l'on se trouve, on peut aussi mettre en relation une distance avec une autre. Ainsi, sur un plan euclidien, la distance de Manhattan ne peut pas être plus petite que la distance euclidienne, et elle est au maximum  $\sqrt{2}$  fois plus grande. Cela donne d'ailleurs une deuxième différence : le chemin le plus court n'est plus unique. On peut les dénombrer ; il en existe

$$(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)! / (|x_2 - x_1|! |y_2 - y_1|!).$$

Si cette deuxième distance s'appelle aussi distance-taxi, c'est parce qu'on peut facilement imaginer un taxi forcé de suivre les routes plutôt qu'un humain pouvant parfois traverser certains bâtiments ouverts au public. Cependant, les sens interdits existent et rendent tout cela beaucoup plus compliqué en pratique. Avant de retourner à ces histoires automobiles, faisons un détour par les transports publics. Supposons que je veuille aller de Paris à Valence (environ 475 km en distance euclidienne) ou à Bordeaux (peu ou prou 500 km). Cela me prend respectivement deux heures douze et deux heures huit (il y a une légère différence de vitesse entre les lignes). Par contre, alors que Bordeaux et Valence ne sont séparées que de 430 km, en train, le plus court trajet (en temps) de l'une à l'autre passe par Paris et prend plus de quatre heures trente (avec une marge pour changer de gare). C'est ce qu'on appelle la *distance SNCF* et cela se vérifie hélas un peu trop bien : la plus courte distance ferroviaire entre deux villes françaises passe généralement par Paris, sauf quand les deux sont sur le même axe venant de Paris.

On peut alors se demander si cette distance respecte bien l'inégalité triangulaire (et donc si c'est bien une distance). C'est effectivement le cas, mais pour le voir on doit comprendre le réseau ferré comme un graphe. Celui-ci est composé de *sommets* (qui représentent les villes), reliés par des *arêtes* (les chemins de fer), que l'on munit ici d'un *coût* (en kilomètres ou en temps de trajet). Le coût d'un chemin entre deux sommets est alors la somme des coûts des arêtes empruntées. La distance entre deux points est donc le chemin le moins coûteux. Même s'il y a une ligne directe entre deux points, l'arête correspondante n'est pas automatiquement le plus court chemin (au sens de notre distance).



Représentation simplifiée d'une carte des trains ouverts aux vélos en France en 2019. Sa structure est un graphe.

© Isabelle Lesens, 2019

Ce modèle avec des graphes est très utile pour modéliser de nombreux systèmes de transports à la fois physiques (trains ou avions) et virtuels (réseaux de communication). Il peut aussi se généraliser de multiples manières, en faisant attention à deux questions.

Tout d'abord, on peut envisager la possibilité d'avoir des arêtes de coût négatif

(ce qui a peu de chance d'arriver sur nos modèles pratiques SNCF). On sort alors du cadre strict des distances, mais certains résultats tiennent encore parfois. Il faut cependant éviter d'avoir des *cycles* (un chemin qui part d'un sommet et revient sur celui-ci) de coût négatif, sinon un chemin de  $x$  à  $y$  peut avoir un coût arbitrairement bas ! Il suffit d'aller de  $x$  au cycle, de répéter le cycle autant de fois que désiré, et de revenir à  $y$ .

Une deuxième manière de généraliser est d'autoriser l'asymétrie des distances, une hypothèse raisonnable en pratique dès que l'on sort d'un espace euclidien. Cela veut dire qu'au lieu d'avoir une arête  $X$ - $Y$ , on obtient des arêtes orientées  $\overrightarrow{XY}$  et  $\overrightarrow{YX}$ . Ainsi, on peut modéliser une ville en prenant comme sommets ses carrefours, et en mettant des arêtes dans chaque sens (ou bien une arête dans un seul sens en cas de sens interdit).

### Des algorithmes pour gérer les distances de graphe

Les graphes étant des objets mathématiques très naturels et aux nombreuses applications, ils ont été étudiés en détail depuis le milieu du XX<sup>e</sup> siècle avec le développement parallèle d'algorithmes de plus en plus spécialisés et de problèmes de plus en plus sophistiqués. Si certains sont faciles à résoudre (comme trouver le plus court chemin entre deux points), d'autres le sont beaucoup moins et le coût de calcul de la solution optimale peut devenir exponentiel en pratique. La distinction entre ces problèmes est rarement intuitive. Ainsi, trouver le plus court chemin entre toute paire de points dans un graphe peut se faire de manière efficace, mais trouver le plus court chemin passant par un sous-ensemble des points est non seulement presque impossible, mais même en trouver une approximation de bonne qualité reste presque impossible en pratique !

### Des travaux dans les rues de New York à ceux de Dominil-Copin

On a maintenant les outils dont on avait besoin pour revenir à New York, que l'on considère désormais comme une *grille*, c'est-à-dire un graphe correspondant à un quadrillage. Cette fois, notre problème est le suivant : il y a des travaux dans la ville et certaines des rues sont barrées. On peut supposer que ces obstacles sont indépendants ; par exemple, chaque rue pourrait avoir une probabilité  $p=1/100$  d'être condamnée. On peut alors se demander si l'on peut aller d'un bout de la ville à un autre. Il est facile de vérifier l'existence d'un chemin en ayant accès à la liste des rues condamnées, mais la question est plutôt de connaître la

probabilité que ce chemin existe, à partir de la seule probabilité d'avoir un obstacle. On peut déjà donner deux bornes faciles. Si chaque rue partant du point de départ est condamnée (ce qui arrive avec probabilité  $p^4 = 10^{-8}$ ), on ne pourra pas se déplacer.

Dans l'autre sens, supposons que l'on connaisse un chemin de longueur  $d = 15$  entre les deux. Alors, avec la probabilité  $(1-p)^d$ , soit environ 0,86, aucune rue sur le chemin ne sera condamnée.

Les mathématiques nécessaires pour calculer plus précisément ces probabilités sont le sujet d'étude d'un domaine appelé *théorie de la percolation*, dont le parrain de l'édition 2023 du salon culture et jeux des mathématiques, le mathématicien français Hugo Duminil-Copin, est un expert de renommée internationale. Un résultat majeur de cette théorie est que ces graphes ont généralement un *paramètre critique*  $p_c$ , tel que les structures obtenues sont radicalement différentes selon que  $p < p_c$  ou  $p > p_c$ . Dans l'un des cas, on aura trop de routes condamnées et seulement des petits îlots isolés. Dans l'autre, il y aura une grande partie du graphe qui restera navigable. Calculer ce  $p_c$  est cependant difficile : le cas de la simple grille en 2D est resté une conjecture pendant plusieurs dizaines d'années avant que l'Américain Harry Kesten prouve en 1980 que  $p_c = 1/2$ .



Harry Kesten (1931–2019).

© É. Thomas, 2010



Hugo Duminil-Copin (né en 1985).

© É. Thomas, 2018

Ces concepts nous permettent de faire des modèles intéressants pour comprendre les mobilités, à l'échelle des villes comme à l'échelle des continents. Ils permettent tout d'abord d'analyser les comportements individuels et sont

derrière les algorithmes des outils de navigation GPS. Mais on s'en sert surtout pour comprendre comment faire évoluer les réseaux existant. On a deux types principaux d'exemples :

Le premier correspond à la création d'un réseau comme lorsqu'une ville considère la possibilité de construire un métro. Il faut alors trouver le nombre optimal de stations et leurs positions. Cependant, même si toute la population de la ville était sur une ligne droite, le problème resterait complexe et nécessiterait des mathématiques diverses, dont des méthodes de calcul différentiel ou de



transport optimal, nécessitant de grosses capacités de calcul informatique. On doit aussi inclure des contraintes de plusieurs types et l'optimisation de plusieurs variables (le temps pris, le nombre de changements, le coût d'entretien du réseau, l'impossibilité de mettre des stations à certains emplacements...). Certains de ces problèmes mathématiques se prêtent d'ailleurs à une adaptation en jeux vidéo (comme *Mini Metro*, édité par Dinosaur Polo Club et sorti en 2015), le cerveau humain étant plutôt doué lorsqu'on lui demande d'optimiser ces questions à petite échelle.

Dans le deuxième cas, on ne considère plus un réseau ferroviaire que l'on doit créer à partir de rien mais un réseau préexistant auquel on doit rajouter des éléments (nouvelles stations, nouvelles rues). Ce problème d'optimisation est hautement complexe, d'autant plus quand on doit se laisser la possibilité de pouvoir gérer dans le futur l'augmentation de la demande de manière imprédictible. En outre, on se frotte à de nouveaux problèmes comme le *paradoxe de Braess*. Celui-ci montre qu'il existe des configurations dans lesquelles, lorsqu'on ajoute une nouvelle route entre deux points (ou une nouvelle ligne de métro), la congestion du réseau augmente ! Ce phénomène est lié au fait que chaque usager se déplace en faisant des choix individuels qui ne correspondent pas à une coopération optimale, et le fait d'ajouter une arête peut changer les stratégies individuelles en faisant apparaître des phénomènes apparentés au dilemme du prisonnier. En utilisant la théorie des jeux, des mathématiciens ont donc pu montrer qu'il est relativement fréquent que la suppression d'une route majeure augmente la fluidité du trafic, les automobilistes se répartissant mieux sur le reste du réseau.

## Sciences sociales : importance d'une bonne intuition mathématique

Ces modèles successifs nous amènent enfin à une remarque plus générale : l'espace dans lequel les humains évoluent se comporte de moins en moins comme un espace euclidien au fur et à mesure que l'on change d'échelle. Notre environnement immédiat est euclidien, mais les murs (et, à plus grande échelle, les frontières) créent des obstacles infranchissables. L'utilisation d'une voiture introduit une autre version de la distance, qui reste cependant proche d'une approximation euclidienne. À l'échelle maximale, le temps de trajet en avion, surtout avec escales, a peu à voir avec la distance euclidienne.

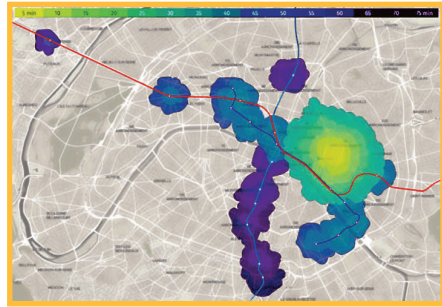
Cependant, une catégorie d'humains a un rapport naturellement moins euclidien avec le monde : les personnes en situation de handicap. Pour une large variété de handicaps, le rapport à l'espace est ainsi transformé : au lieu de pouvoir *explorer* la ville, la personne se retrouve généralement *transportée* d'un point A à un point B.

La mobilité est ainsi réduite, ce qu'amplifie l'accessibilité plus qu'imparfaite des transports en commun. Cependant, cela ne suffit probablement pas à expliquer pourquoi, alors que 20% à 30% de la population française est handicapée (dont plusieurs pourcents avec un handicap visible), il reste si rare de les voir arpenter les rues. Une piste d'explication est la suivante : étant donné que les obstacles ne sont pas connus en avance, on peut se demander si leur fréquence est telle que la probabilité  $p$  dépasse le seuil critique  $p_c$ . La crainte (calculée) de ne pas pouvoir atteindre sa destination augmenterait alors potentiellement le coût de sortir se balader, au point que cette activité devienne rare. Cette idée, explorée dans des travaux contemporains, est un exemple de mathématique interdisciplinaire où ce ne sont pas les outils mathématiques qui répondent à une question de sciences sociales, mais l'intuition mathématique qui permet de poser de nouvelles questions.



Carte isochrone montrant le temps qu'il faut à un passant au centre du XI<sup>e</sup> arrondissement de Paris pour accéder à différents endroits en marchant et en utilisant les transports en commun.

© E.B., 2020



Réplique de la carte précédente prenant en compte les contraintes liées à l'utilisation d'un fauteuil roulant électrique (autonomie limitée, certains transports interdits, y compris le bus ici, ces derniers n'étant pas toujours fiables).

© E.B. & L. Gabasova, 2020

E. B.

### Pour en savoir (un peu) plus

*Spatialités et temporalités du handicap I: des corps discrets dans un monde discret.* Enka Blanchard, *EspacesTemps.net*, 2020, disponible en ligne.

*Station location-complexity and approximation.* Steffen Mecke, Anita Schöbel et Dorothea Wagner, *5<sup>th</sup> workshop on algorithmic methods and models for optimization of railways (ATMOS'05)*, 2006.

## LA GESTION DE LA VOIRIE

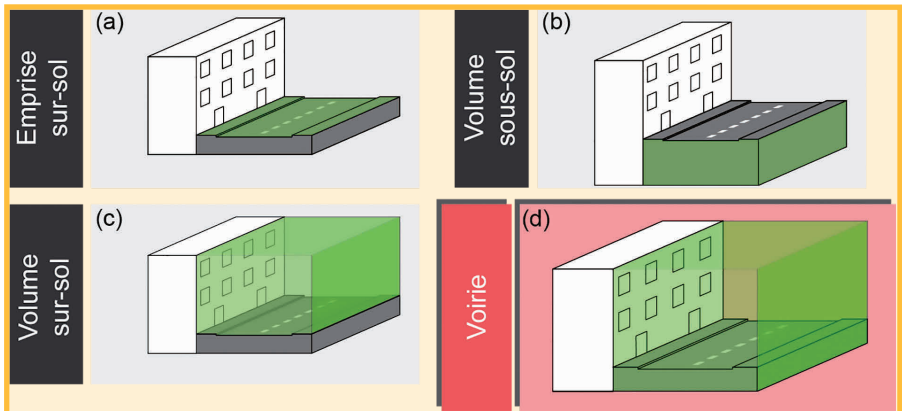
Antonin Pavard

École de technologie supérieure de Montréal (ÉTS)  
et chercheur associé UMR Géographie-cités (CNRS)

Le réseau de voirie français est long de plus d'un million de kilomètres. À neuf, ce patrimoine est estimé à deux mille milliards d'euros. Son entretien est le deuxième poste de dépense des communes, après l'éducation. Malheureusement, chacun le constate, la voirie se dégrade. Avec l'avancée des technologies numériques, ne peut-on pas optimiser la gestion de la voirie ?

### Qu'est-ce qu'une voirie ?

La conscience collective conduit à plusieurs erreurs lorsqu'il est question de la voirie. La figure ci-après traduit ces erreurs de perception et présente une vision de la voirie réaliste.



La voirie, une infrastructure multidimensionnelle.

© A.P., 2021

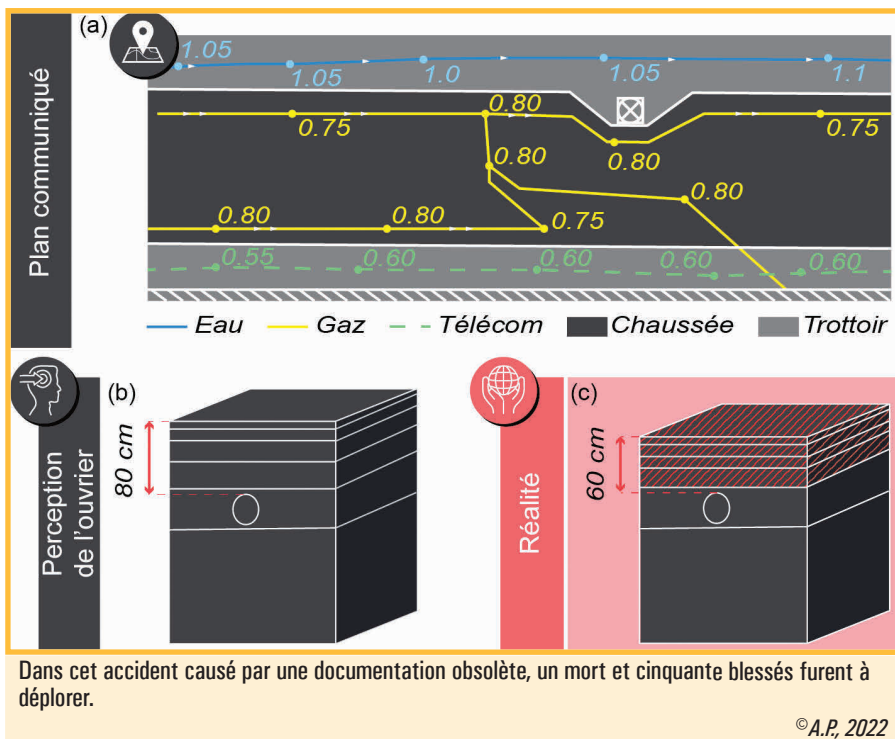
D'abord, le terme « voirie » est associé à un espace unique et homogène en termes d'usages : *la chaussée*, sur laquelle circulent les véhicules. La chaussée est bien l'élément central, mais elle est aussi bornée par des *dépendances* de

voirie, telles que les trottoirs, les fossés... La chaussée et les dépendances occupent une emprise en sursol (a). Ensuite, seule la partie visible de la voirie, le *revêtement*, est considérée. Or, un élément de voirie tel que la chaussée est composé de plusieurs *couches* de différentes natures et épaisseurs. Il s'agit de la structure, qui occupe un volume en sous-sol (b). Celle-ci permet à la chaussée de garder son intégrité tout en répondant aux sollicitations, dont l'*agressivité du trafic* (impacts mécaniques liés au trafic). Finalement, la voirie occupe aussi un volume en sursol (c). Pour qu'elle assure ses fonctions, des *équipements* sont installés à sa surface : lampadaires, signalétiques, murets séparatifs... Par son emprise et ses volumes en sous-sol et sursol, la voirie est donc une infrastructure multidimensionnelle (d).

## Un référentiel de voirie, pourquoi ?

Divers spécialistes interviennent sur la conception de la voirie, son aménagement ou encore sa gestion. Par exemple, des spécialistes des travaux publics *dimensionnent* (choix de composition et d'épaisseur des couches) et construisent les voiries, tandis que d'autres aménagent la voirie en sursol, ou encore organisent sa gestion et sa *maintenance* (travaux de prévention, d'amélioration et de restauration). La voirie est aussi du ressort des non-spécialistes de l'infrastructure. En effet, elle est le support d'activités variées qui nécessitent des installations en surface ou en sous-sol, dont les réseaux de distribution (gaz, eau...). Tous les intervenants doivent communiquer entre eux, afin que chaque intervention, sur la voirie ou sur un équipement intégré, soit adaptée en termes de délais, de méthodes, de sécurité... Généralement, la communication autour de projets à emprise spatiale est facilitée par la mise en place d'un *référentiel*, c'est-à-dire un outil permettant de représenter chaque élément du projet dans son contexte, et permettant de stocker des informations sur ces éléments.

Malheureusement, ces outils ne sont pas toujours adaptés ou à jour. Cette situation peut entraîner des accidents. Par exemple, le 30 octobre 2007, une conduite de gaz a été arrachée lors de travaux sur voirie au centre-ville de Bondy (Seine-Saint-Denis). La raison ? L'utilisation de documents obsolètes de référencement des travaux. La figure ci-après illustre le problème : le plan (a) de l'ouvrier indiquait une conduite de gaz à 80 cm de profondeur, alors qu'une modification structurelle de la chaussée avait réduit cette dernière. L'ouvrier avait alors une perception faussée (b) puisque la conduite se trouvait finalement à 60 cm (c).



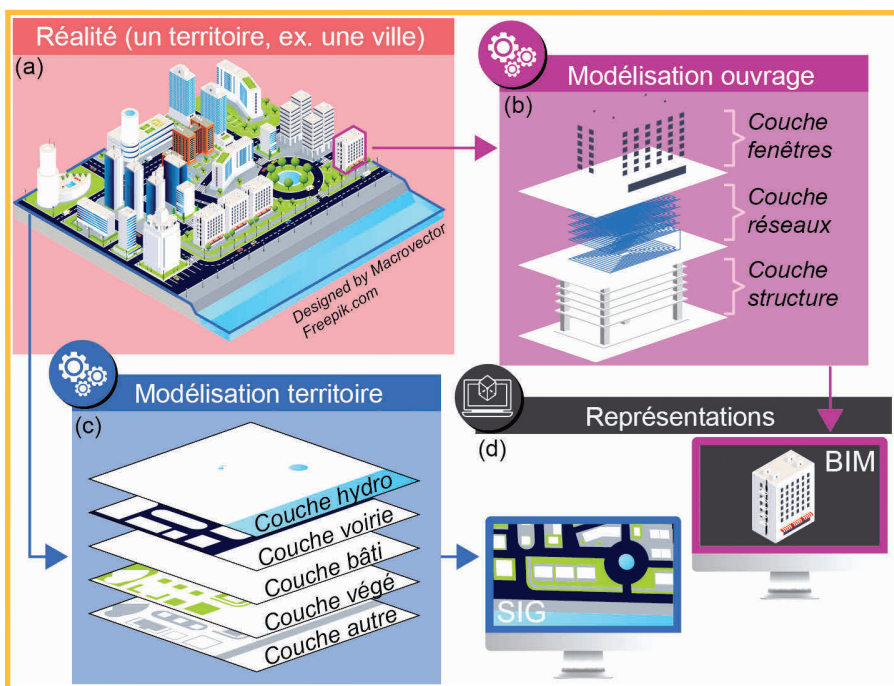
## Un référentiel de voirie ? Oui, mais lequel ?

Les informations sur la voirie sont saisies, lors de sa conception, sur des plans et des rapports techniques. Le gestionnaire de l'infrastructure (à savoir, une collectivité territoriale) fait ensuite un *récolement*, c'est-à-dire une mise à jour des informations. Les voiries françaises sont anciennes et le papier est le support traditionnel pour stocker ces informations. Avec l'avènement du numérique, des technologies de numérisation et de représentation ont été développées, mais ce n'est que récemment que le secteur de la construction se les est appropriées *via*, par exemple, le *bâti immobilier modélisé* (ou *building information modelling*, BIM) ou les *systèmes d'information géographiques* (SIG). C'est deux technologies, illustrées par la figure ci-après, permettent de modéliser la réalité (a).

Le BIM sert à modéliser un ouvrage (b) et à représenter ses informations techniques en 3D (d). Il s'agit d'une représentation à l'échelle de l'ouvrage. Aujourd'hui, il est surtout utilisé pour la conception et la livraison d'un bâtiment, mais l'ingénierie des infrastructures (routes, voies ferroviaires...) tend à se l'approprier pour référencer leurs ouvrages.

Les SIG servent à modéliser des objets du monde réel ayant une empreinte spatiale (c), et à les représenter en 2D à l'échelle du territoire (d). Des spécialistes les utilisent pour diverses raisons comme, par exemple, pour construire des *modèles numériques de terrain*, soit une représentation de la topographie d'une zone, ou pour gérer des services tels que les transports à l'aide d'analyses d'accessibilité et de mobilité. De façon plus générale, les SIG servent à recueillir, stocker et analyser des données spatiales avant de communiquer les résultats à l'aide de la cartographie. Ce vaste champ scientifique est appelé *science de l'information géographique* ou *science géomatique*, et fait le lien entre la géographie et l'informatique, ou plus largement les mathématiques.

Les deux technologies ont des avantages indéniables pour la gestion de la voirie dans son environnement : le BIM permet de produire un référentiel ouvrage à l'aide d'une représentation de la voirie dans ses dimensions techniques, les SIG permettent de produire un référentiel spatial à l'aide d'une représentation de la voirie dans son environnement.



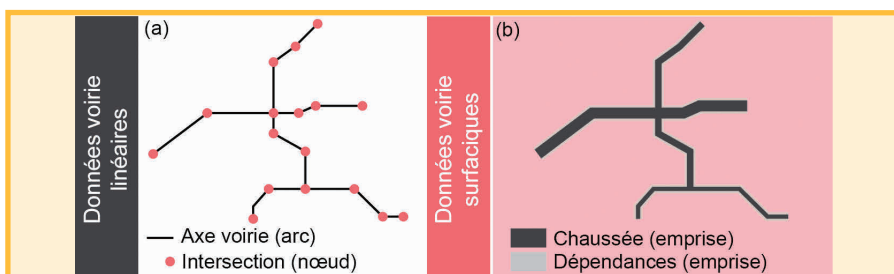
Bâti immobilier modélisé (BIM) et systèmes d'information géographiques (SIG).

Aujourd'hui, l'intégration des deux technologies dans un processus global n'est pas assurée et fait l'objet de recherches. L'un des principaux objectifs est d'améliorer la gestion de la voirie par rapport à son environnement, dont les réseaux. Pour cela, les chercheurs souhaitent proposer des outils aux gestionnaires de voirie. Les SIG étant plus largement utilisés par les principaux gestionnaires de voirie, développons brièvement ici cette solution.

## Un référentiel spatial de voirie. Oui, mais comment ?

La construction d'un référentiel s'effectue en plusieurs étapes : *i*) identifier et sélectionner les objets du réel ; *ii*) organiser les objets sélectionnés et décrire leurs relations (typiquement, une chaussée appartient à un tronçon de voirie) ; *iii*) construire les données géographiques par le biais de processus informatiques et mathématiques ; *iv*) enrichir les données géographiques par des données descriptives (par exemple, les matériaux et épaisseurs des couches des structures de chaussées). Présentons la troisième étape, qui fait intervenir de nombreuses notions mathématiques.

La figure suivante présente deux types de données géographiques de voirie. Les plus fréquentes sont les données *linéaires* (a). Elles sont utilisées par vos GPS pour les calculs de *plus court chemin*. Ces calculs s'appuient sur la théorie des graphes (ici, un graphe est une représentation abstraite d'un réseau, composé d'arcs reliant des nœuds). Les graphes de voirie représentent les axes de circulation (arcs) reliant les intersections routières (nœuds) ; les données *surfaceutiques* (b) représentent les emprises de voirie. Ces données sont utiles pour gérer la voirie, mais sont peu utilisées en pratique en raison du manque de méthodes pour les construire simplement.

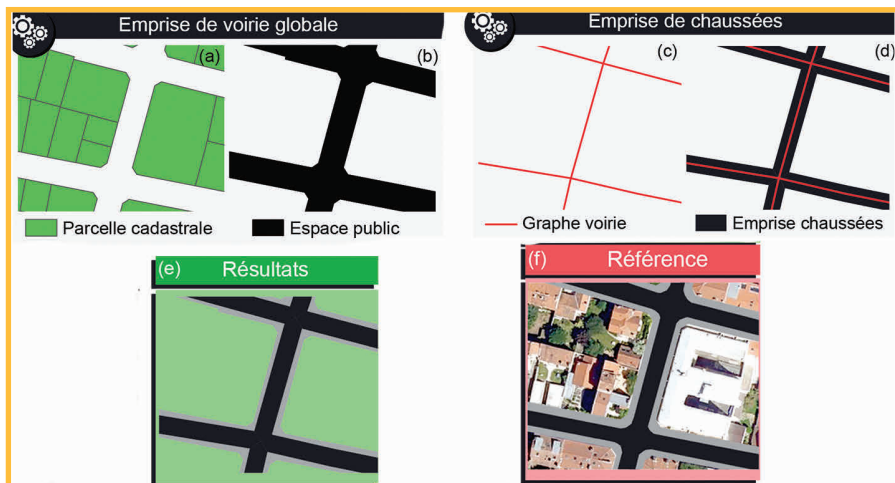


Un graphe est une représentation abstraite d'un réseau.

© A.P., 2022

Des processus simples de construction de ces données existent. La figure ci-après présente les grandes étapes de l'une de cette méthode. D'abord, on construit l'emprise globale de voirie à l'aide des parcelles cadastrales d'une commune, soit les portions de terrains du domaine privé. Ce qui ne relève pas

de l'espace privé (a) constitue l'espace public, lequel est en grande partie occupé par la voirie (b). Ensuite, on détermine l'emprise des chaussées à l'aide du linéaire de voirie, en appliquant à chaque segment (c) une formule déterminant la largeur de sa chaussée. Celle-ci dépend de la classe administrative (nationale, communale...), de la nature des voies (chemin, route à une ou deux chaussées...), ou encore du nombre de voies de circulation. Les largeurs obtenues permettent alors de construire les *polygones englobants*, qui reflètent l'emprise des chaussées (d).



Les résultats (e) sont comparés à des données de référence (f) construites à l'aide d'un processus manuel dont chaque étape est maîtrisée. Ce processus est une numérisation par l'interprétation visuelle d'images aériennes. Des écarts de 5 à 10% selon les communes sont observés. Ils s'expliquent notamment par les largeurs hétérogènes des chaussées de nos villes, à l'héritage médiéval. Ce point est améliorable en affinant les paramètres de la formule pour calculer les largeurs de chaussées.

**A.P.**

### Pour en savoir (un peu) plus

« *Présentation des systèmes d'information géographique (SIG).* » Emmanuel Fritsch, 3'30", vidéo pédagogique, 2021, disponible en ligne.

« *Cogestion voirie et réseaux.* » Antonin Pavard, 4', vidéo pédagogique, 2018, disponible en ligne.

*Interactions entre voirie et réseaux enterrés.* Antonin Pavard, Journées techniques « Routes », poster, 2019, disponible en ligne.

*Modéliser la voirie urbaine pour une gestion de l'infrastructure routière : étude comparée de deux conceptions de données surfaciques de voirie.* Antonin Pavard, *Belgeo* 3, 2021, disponible en ligne.



## APPARIER LES DONNÉES GÉOGRAPHIQUES

Antonin Pavard

École de technologie supérieure de Montréal (ÉTS)  
et chercheur associé UMR Géographie-cités (CNRS)

Le monde réel est composé d'objets géographiques tels que les villes ou la voirie. Ces objets sont modélisés et représentés dans différentes bases de données (BD) géographiques pour répondre à nos besoins. Par exemple, il existe des BD de voirie construites pour représenter les axes de circulation ou pour calculer les temps de trajet, et d'autres BD pour représenter les emprises d'infrastructures sur l'espace. Parfois, il est nécessaire de relier différentes BD représentant des objets géographiques identiques. Pourquoi et comment relier ces bases de données géographiques ?

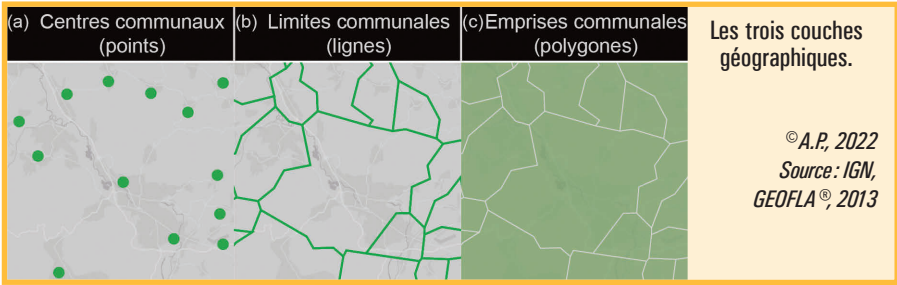
### Relier des bases de données géographiques : pourquoi ?

En science de l'information géographique, les systèmes d'information géographique (SIG) permettent de représenter les objets dans leur environnement à l'aide de deux composantes : *spatiale* et *descriptive*.

La composante spatiale correspond à la géométrie. Elle donne une information sur un objet géographique : sa position dans l'espace, son étendue et sa *topologie* (c'est-à-dire les relations spatiales entretenues avec d'autres objets). Dans un SIG, trois *objets primitifs* sont utilisés pour reconstituer la géométrie d'un objet géographique : le *point*, la *ligne*, le *polygone*. Le choix de ces objets primitifs dépend des usages de la BD produite.

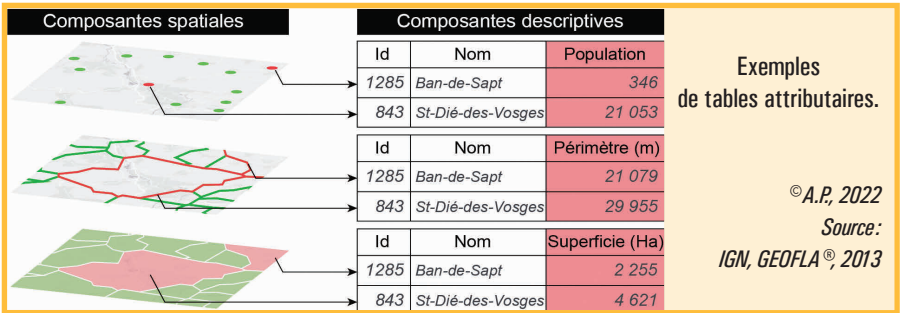
La figure suivante illustre le cas d'une BD communale, où l'objet « commune » est représenté dans trois *couches géographiques* différentes :

- par un point pour sa localisation (a). On parle alors de données *ponctuelles* ;
- par une suite associée de segments de ligne, une *polyligne*, pour ses limites géographiques (b). On parle dans ce cas de données *linéaires* ;
- par un polygone pour son emprise (c). On parle de données *surfaciées*.



La *composante descriptive* donne des informations thématiques sur les objets géographiques à l'aide d'*attributs alphanumériques*. Ces informations sont structurées et organisées dans des *tables attributaires*. La figure suivante illustre ce point dans le cas de la BD communale. Par exemple :

- deux attributs identiques sont associés aux objets des couches géographiques (ici, un identifiant et le nom des communes) ;
- des attributs distincts apportent des informations supplémentaires sur les objets géographiques selon les couches, telles que la population pour la couche points, la longueur du périmètre pour la couche lignes et la superficie pour la couche polygones.



L'association de la composante spatiale à la composante descriptive est une force des SIG. Grâce à elle, il est par exemple possible de sélectionner «en un clic de souris» toutes les villes se trouvant dans un certain rayon de la capitale mondiale de la géographie, qui se trouve dans les Vosges, à Saint-Dié-des-Vosges. Quant aux informations descriptives, elles permettent d'analyser le territoire et d'en comprendre certains des enjeux qui peuvent y être associés (en croisant des données sur les populations et sur les emplois par exemple, ou encore en calculant des densités démographiques à l'aide des superficies et des populations). De telles analyses nécessitent d'associer des données contenues sur plusieurs couches de données distinctes.

Dans l'exemple donné ci-contre, le transfert d'une table de données à l'autre

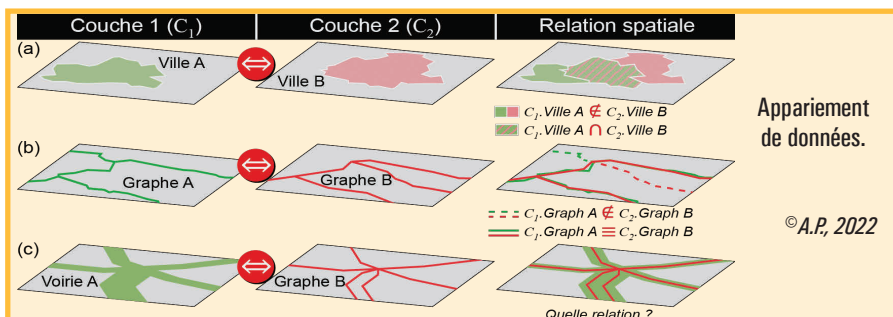
se réalise simplement car la composante spatiale est reliée par *un identifiant unique* : 843 pour Saint-Dié-des-Vosges. On dit alors que les données sont *appariées*. Ici, l'appariement est assuré dès la phase de construction des données : les couches constituant la BD communale Geofla (IGN, 1997), devenue Admin Express en 2016, sont produites par un organisme unique, l'Institut national de l'information géographique et forestière (IGN). Dans d'autres cas l'appariement est réalisé *a posteriori*. Des recherches portent par exemple sur le cas de :

- deux couches surfaciques (a) lors d'analyse sur les villes. Différentes définitions des villes donnent des emprises différentes ;

- deux couches linéaires (b) lors d'analyse sur réseaux. Un même réseau de voirie peut être représenté à l'aide de graphes ayant soit des *généralisations* différentes, soit des différences au niveau de la *sélection* et de la *schématisation* des objets à représenter ;

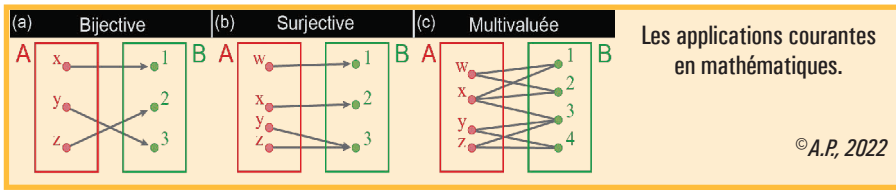
- une couche linéaire et une couche surfacique (c) lors d'analyses sur des objets géographiques de type réseau, nécessitant de prendre en compte l'emprise.

Intéressons-nous ici à ce cas, qui est moins traité en recherche.

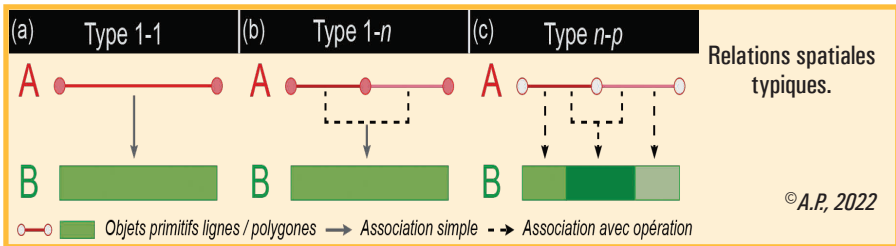


## L'appariement : des mathématiques aux SIG

Pour les questions d'appariement, les mathématiques sont essentielles. Elles permettent d'expliquer les relations entre deux ensembles de données : l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Ici l'ensemble de départ  $Ed$  correspond à nos données lignes, et l'ensemble d'arrivée  $Ea$  à nos données polygones. Chaque ensemble comporte un à plusieurs éléments, tels que des lignes ou des polygones. Les relations sont des *applications* lorsque tous les éléments de l'ensemble de départ sont liés aux éléments de l'ensemble d'arrivée. Les trois applications les plus courantes en mathématiques sont la *bijective* (1-1) lorsque chaque élément de  $Ea$  correspond à un seul élément de  $Ed$  ; la *surjective* ( $n-1$  ou  $1-n$ ) lorsque chaque élément de  $Ea$  correspond à au moins un élément de  $Ed$  ; la *multivaluée* ( $n-p$ ) lorsque chaque élément d'un ensemble correspond à plusieurs éléments de l'autre ensemble.



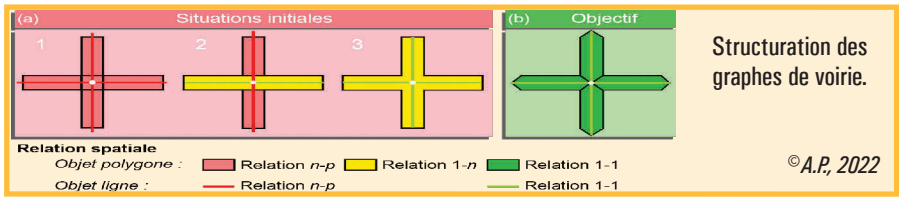
Dans la figure ci-dessus, ces applications sont transcrites pour décrire des relations spatiales les plus typiques entre des objets primitifs lignes et polygones dans le cas de données géographiques de type réseau : le type 1-1 (a) est une relation forte et permet une association spatiale facile ; le type 1-n ou n-1 (b) est une relation moyenne, dont l'association spatiale nécessite une opération simple ; le type n-p (c) est une relation faible, dont l'association spatiale est la plus difficile et nécessite une opération sophistiquée.



## Appariement de données linéaires et surfaciques : comment ?

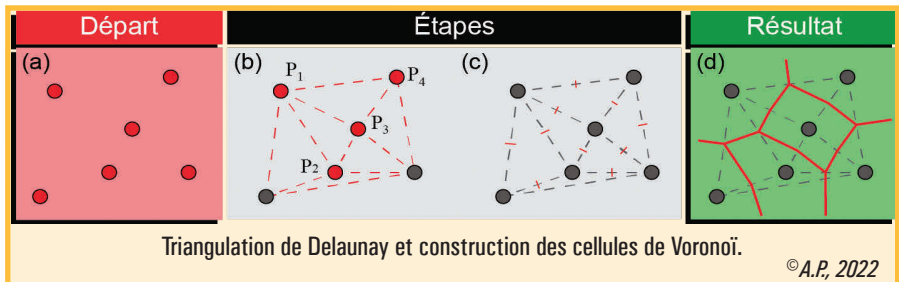
La voirie est un bon exemple pour illustrer l'appariement de données linéaires de type graphe et surfaciques. D'abord, rappelons que la voirie est composée de *carrefours* (ou *intersections*) et de *sections courantes* reliant les extrémités des impasses. L'appariement entre les objets primitifs lignes et polygones est alors surtout important au niveau des carrefours. En effet, on y observe les relations de type n-p. Pour simplifier, appuyons-nous sur le cas suivant : le carrefour «en croix», soit lorsque quatre sections courantes débouchent sur une intersection.

Les graphes de voirie sont toujours structurés de la même façon : des *arcs* figurant les sections courantes relient des nœuds représentant des carrefours ou des extrémités d'impasses. Les données surfaciques peuvent varier. Ainsi, elles sont construites classiquement (a) soit en modélisant distinctement les carrefours (1), soit en associant un carrefour à deux sections courantes (2), soit en agrégeant l'ensemble (3). Les relations spatiales sont au mieux «moyennes». De façon à simplifier les relations spatiales et assurer l'appariement, il est possible de structurer les objets surfaciques de sorte qu'un objet polygone ne soit lié qu'à un seul objet linéaire (b).



Notre solution consiste à diviser les polygones aux carrefours en autant de portions que de sections courantes qui y débouchent. Pour cela, on utilise la *tessellation*. Cette technique mathématique consiste à couvrir la totalité d'un espace avec un nombre fini de polygones non chevauchants construits autour de points sources. En d'autres termes, la tessellation est une partition, qui divise un territoire donné en autant de régions (polygones) que de points sources. Chacune de ces divisions, appelées *cellules de Voronoï*, englobe un unique point source. Une cellule de Voronoï représente l'ensemble des points du plan « les plus proches » (au sens de la distance euclidienne usuelle) de ce point source. Voici comment construire ces cellules.

On part d'une situation initiale (a), à savoir des points répartis sur un espace. Les points sont reliés entre eux de sorte à produire une triangulation (b). Elle est *de Delaunay* lorsque aucun autre sommet que ceux participant à un triangle ne se trouve dans le cercle inscrit de ce triangle. Par exemple, les points  $P_2$  et  $P_4$  ne peuvent être reliés pour former le triangle  $P_1P_2P_4$ , sans quoi le sommet  $P_3$  se trouverait dans le cercle circonscrit de ce triangle. Ensuite, les milieux de chaque segment des triangles sont repérés (c). Pour finir, on construit le diagramme de Voronoï (d) de sorte que chaque cellule n'englobe qu'un seul point. Pour cela, une cellule est obtenue en reliant les milieux de tous les segments partant d'un point donné.



La figure ci-après illustre les étapes à travers un cas abstrait d'un carrefour, puis son application sur des données décrivant un territoire réel :

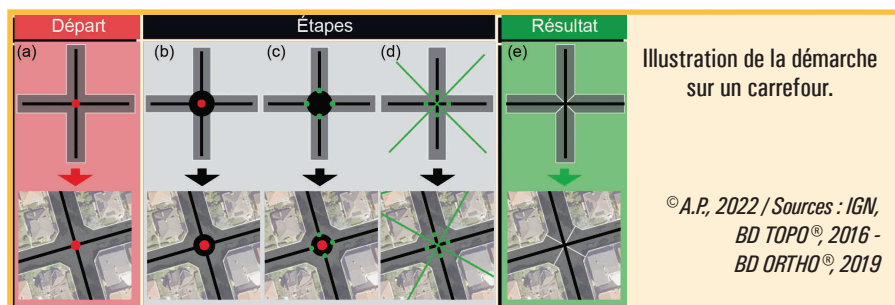
- au départ, on dispose de deux jeux de données, un linéaire et un surfacique représentant un carrefour (a) ;

- la tessellation construit une cellule pour un point source. Ainsi, partir d'un seul point situé au centre du carrefour conduit à englober celui-ci dans une seule cellule. L'objectif est de diviser le carrefour en autant de portions que de sections courantes. Pour cela, on construit une zone tampon ayant un diamètre supérieur à la largeur d'une chaussée, de façon à englober le carrefour (b);

- les points sources sont construits à l'intersection de la zone tampon et des objets linéaires représentant le carrefour (c);

- les points sources servent à construire les cellules de tessellation dont les limites s'établissent à égale distance de chaque point source (d);

- finalement, les données surfaciques de voirie sont fractionnées à l'aide des cellules de tessellation (e).



Cette méthode appliquée sur l'ensemble des données de voirie d'un territoire permet d'appareiller une couche linéaire et une couche surfacique décrivant une même voirie. À partir de là, il est possible de transférer des données du linéaire vers le surfacique (et inversement). Des informations de trafic traditionnellement cartographiées sur des objets linéaires sont associées aux objets surfaciques de façon à réaliser, par exemple, des vérifications de dimensionnement (voir le précédent article). La méthode d'appariement actuelle, bien qu'opérationnelle, doit encore être améliorée de façon à traiter les configurations les plus élaborées, telles que les échangeurs autoroutiers.

*A. P.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Diagramme de Voronoï et partition de Delaunay.* Gérard Villemin, blog « Nombres – curiosité, théorie et usages », 2014, disponible en ligne.

*Les diagrammes de Voronoï.* Guillaume Reuiller, Découverte 359, novembre-décembre 2008, disponible en ligne.



## LA MEILLEURE PROJECTION POUR REPRÉSENTER

## UNE TERRE « ÉGALITAIRE »

Boris Giacometti

Technicien géomètre

Parce que la Terre s'apparente à une sphère tridimensionnelle aplatie aux pôles, modélisée mathématiquement par un ellipsoïde de révolution, les projections cartographiques permettent de représenter la surface de la planète Bleue sur une carte plane. La principale difficulté est qu'il est impossible de représenter une sphère  $S$  de manière précise sur une surface plane  $P$  sans déformer certaines caractéristiques de  $S$ . Les projections cartographiques utilisées depuis des siècles sont donc des compromis entre la précision, la forme et la taille des régions de  $S$  représentées sur la carte  $P$ . Les projections permettent ainsi d'introduire et d'étudier autant de belles transformations géométriques (et leur lot de paramétrages et d'équations) qu'on le souhaite ! Une problématique plus subtile est que le choix d'une projection induit nécessairement des biais de représentation qui sont d'autant plus puissants qu'ils sont visuels : ils resteront longtemps ancrés dans vos esprits. Quiconque de malintentionné ayant conscience de ces biais peut aisément détourner des données, manipuler une information.

### À chaque besoin, sa projection !

Les premières tentatives de projections sont réalisées en Occident par des scientifiques grecs comme Ératosthène et Hipparque au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère. Au cours des siècles suivants, des scientifiques, comme Ptolémée au II<sup>e</sup> siècle, et des cartographes continuent à travailler sur des projections plus précises, en utilisant des méthodes mathématiques et trigonométriques avancées. En Asie, les savants chinois s'illustrent tout particulièrement (voir les articles de Jean-Marc Bonnet-Bidaud dans cette même brochure). Au XVI<sup>e</sup> siècle, le géographe néerlandais Gerardus Mercator (1512–1594) crée une projection qui deviendra très populaire car elle permet de naviguer facilement sur les mers.

Le choix d'une projection cartographique dépend en fait de l'utilisation prévue de la carte et des compromis que l'on est prêt à faire en termes de précision et de fidélité géographique. Certaines projections conservent localement les angles (ce sont les projections *conformes*), d'autres conservent les surfaces (ce sont les projections *équivalentes*), d'autres encore conservent les distances sur les méridiens (ce sont les projections *équidistantes*).

Les projections conformes sont celles qui conservent les angles locaux sur la surface de la Terre. Ainsi, les angles mesurés sur la carte sont les mêmes que ceux mesurés sur le terrain. Les projections conformes sont utiles pour les cartes topographiques et pour la navigation, car elles permettent de tracer des routes droites et de mesurer des distances avec précision. Les *projections de Lambert* et de *Mercator* en sont des exemples emblématiques (voir plus loin). Les projections équivalentes, en revanche, préservent les superficies relatives des régions (en d'autres termes, les aires des régions sur la carte sont proportionnelles à leur taille réelle sur la Terre). Elles sont utiles pour les cartes thématiques et pour la visualisation des données statistiques, car elles permettent de comparer les superficies de différentes régions avec précision. La *projection de Mollweide*, connue aussi sous le nom de *projection de Babinet* ou *projection elliptique*, en est un exemple typique.

Certaines projections peuvent être ou bien conformes, ou bien équivalentes, tandis que d'autres peuvent être *aphylactiques*, c'est-à-dire ni conformes, ni équivalentes.

La *projection de Bonne* est une projection équivalente qui respecte l'échelle réelle le long du méridien central et de tous les parallèles. Plusieurs de ses

variantes, comme la *projection de Flamsteed modifiée* (ou *projection sinusoïdale* ou encore *projection de Sanson–Flamsted*) et la *projection de Werner*, sont considérées comme des projections équivalentes même si elles perdent en équivalence aux pôles. En effet, les parallèles terrestres sont transformés en cercles concentriques équidistants. Ces transformations sont équivalentes le long des méridiens d'origine, ce qui les rend utiles pour les cartes de régions de « faible » extension est-ouest, mais elles ne préservent pas les angles sur toute la surface de la carte (elles ne sont donc pas conformes). Cela les rend, bien entendu, moins pratiques que leurs concurrentes pour les cartes topographiques et de navigation (lesquelles nécessitent une préservation des angles précise).



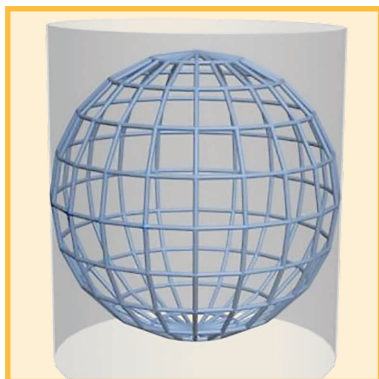
Image de la Terre  
en forme de cœur  
l'aide d'une projection de Bonne.

© Mdf, 2007 / Micheleth, 2008



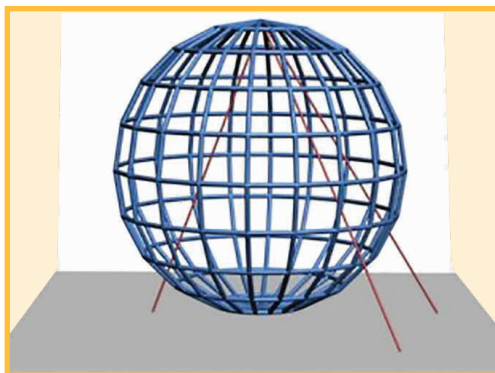
La *projection conique conforme de Lambert* est une projection cartographique conçue en 1772 par le mathématicien Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Elle est conforme et conserve les angles locaux, mais elle déforme les distances et les superficies des régions éloignées de l'équateur. C'est une projection qui minimise les distorsions suivant les méridiens. Elle est obtenue à l'aide d'un cône sécant au globe, de sorte que les deux se rencontrent le long d'une ligne de latitude (comme si on enroulait une carte de la Terre autour d'un cône). Elle est utilisée pour les cartes aux latitudes moyennes (pour l'hémisphère Nord en particulier). C'est ce type de projection que l'on utilise en France en géodésie, en topographie, et pour les cartes IGN (Institut géographique national, aujourd'hui Institut national de l'information géographique et forestière), avec toutefois la particularité de prendre un cône sécant (et non tangent) à la Terre.

Les deux parallèles coupés par la projection sont des lignes projetées sans aucune



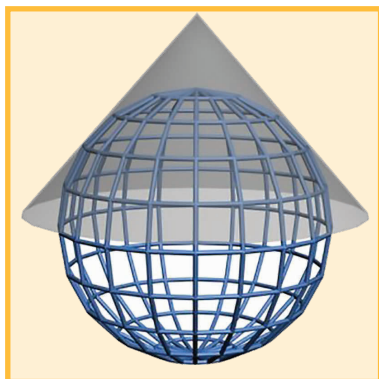
Projection cylindrique.

© Traroth, 2005



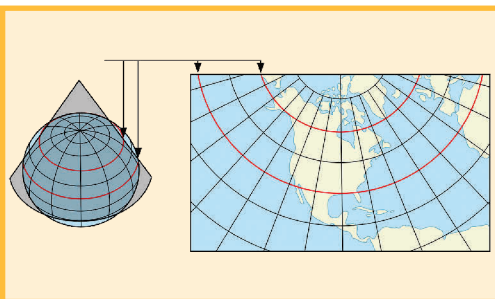
Projection azimutale stéréographique.

© Traroth, 2005



Projection conique,  
avec cône tangent à la sphère.

© Traroth, 2005



Projection conique conforme de Lambert,  
avec cône et sphère sécants.

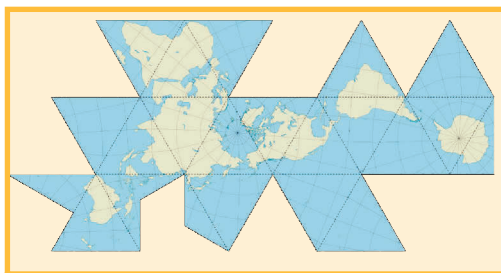
© Onfijn

déformation de distance. Plus on s'écarte de ces lignes, plus la déformation en distance est importante.

La projection de Mercator est une projection cartographique cylindrique conçue en 1569. Elle est obtenue à l'aide d'un cylindre placé sur le globe, de sorte qu'il touche une ligne de latitude. Cette projection conforme doit son succès au fait qu'elle était très appréciée des marins qui souhaitaient conserver les angles pour leur navigation. Elle permet de tracer des itinéraires sur des cartes en conservant les angles droits entre les routes (une telle courbe suivie par un navire qui coupe les méridiens sous un même angle est une *loxodromie*). La projection de Mercator étire les régions aux latitudes élevées, ce qui rend le Groenland et l'Antarctique plus grands qu'ils ne le sont en réalité, tandis que les régions équatoriales sont déformées en longueur. Cette distorsion de taille relative est souvent appelée la *déformation de Mercator*. Bien qu'elle soit très utile pour les cartes maritimes et de navigation, la projection de Mercator est trompeuse pour les cartes thématiques telles que les cartes de la densité de population ou les cartes climatiques, où la taille relative des régions est importante. En outre, elle est souvent critiquée pour son utilisation historique dans la représentation des pays colonisateurs, qui apparaissent plus grands qu'ils ne le sont en réalité, renforçant ainsi leur suprématie.

La *projection azimutale équivalente de Lambert* place le centre de la projection au-dessus de la Terre et projette les points de la surface terrestre sur un plan tangent à un point spécifique. Elle est souvent utilisée pour représenter une région ou un point spécifique, tels que le pôle Nord ou le pôle Sud, ou pour les cartes de densité de population, les limites politiques...

Les *projections icosaédriques*, également connues sous le nom de *projections de Snyder*, sont un groupe de projections cartographiques développées dans les années 1990 par le géographe américain John Parr Snyder (1926–1997). Elles sont basées sur un solide régulier, l'icosaèdre (polyèdre à vingt faces triangulaires équilatérales). Elles ne sont pas couramment utilisées en cartographie en raison de la complexité de leur construction et de leur utilisation.



Exemple de projection icosaédrique: la *projection Fuller*, 1954, par l'Américain Richard Ber Fuller (1895 – 1983).

© *Cartographie(s) numérique(s)*

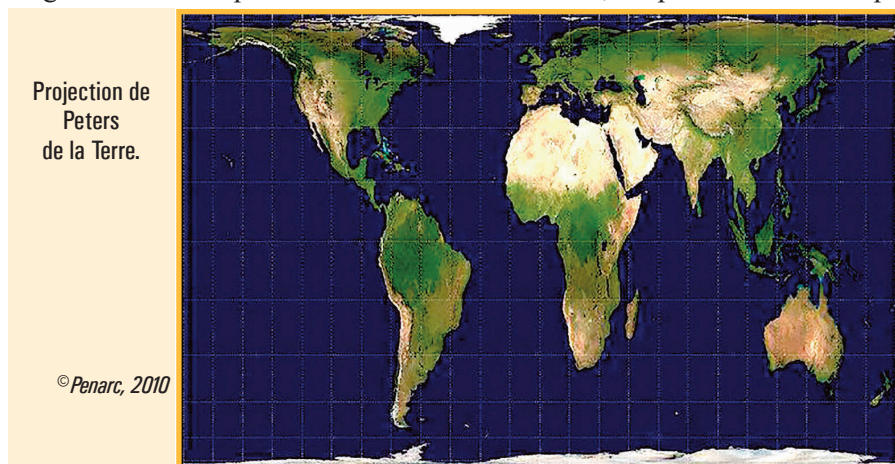
Elles ont aussi inspiré les artistes avec la construction de puzzles. Le concept derrière les projections icosaédriques (et bien d'autres projections polyédriques qui s'en sont inspirées ensuite) est de diviser la surface de la Terre en triangles équilatéraux qui peuvent ensuite être projetés sur les faces de l'icosaèdre. L'avantage de cette mé-

thode est qu'elle permet de minimiser la distorsion de forme et de taille tout en conservant une représentation globale de la Terre.

## Vers de nouvelles projections égalitaires

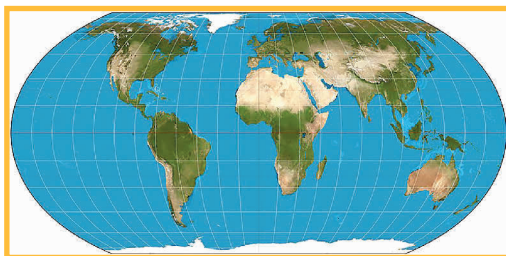
En 1973, l'historien et cartographe allemand Arno Peters (1916–2002) a présenté une projection de carte identique à la projection orthographique de l'astronome amateur écossais James Gall (1808–1895). La *projection Gall–Peters* tente de répondre aux distorsions de la projection de Mercator en prenant en compte la taille réelle des continents. L'Afrique apparaît bien quatorze à quinze fois plus grande que le Groenland.

Les institutions éducatives ont commencé à utiliser la projection de Gall–Peters dans certains de leurs documents et publications pour mettre en évidence les inégalités économiques et sociales dans le monde, en particulier en ce qui



concerne les pays en développement. Elle est souvent préférée à la projection de Mercator, qui a été utilisée pendant des siècles.

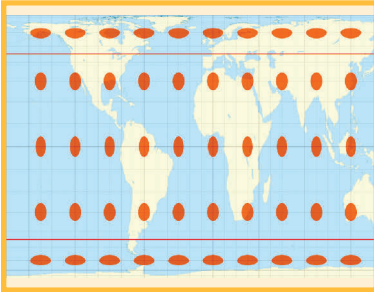
En 2018, le géographe américain Tom Patterson et ses collègues Bojan Šavrič et Bernhard Jenny ont proposé une nouvelle projection, Equal Earth, pour fournir une alternative plus équitable à la projection de Mercator en limitant les distorsions des régions polaires, ainsi que la taille



Projection Equal Earth de la Terre.

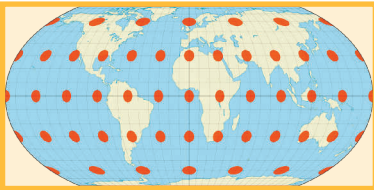
© Strebe, 2018

relative des pays. La projection ne porte pas le nom d'un scientifique et cherche symboliquement à représenter la Terre dans son ensemble, avec toutes ses régions « à part égale ». Comme le dit Boran Šavrič : « *C'est facile d'appliquer une projection cartographique, il en existe plusieurs dizaines ; mais c'est bien difficile de sélectionner la bonne.* »



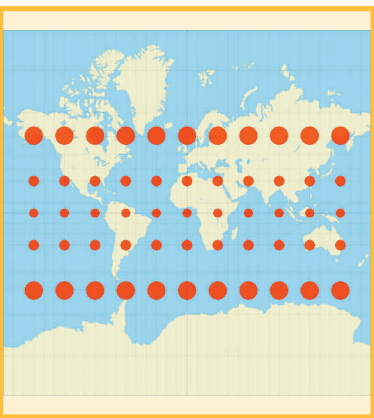
Les indicatrices de déformation de Tissot pour la projection de Gall – Peters.

© Sting, 2010



Les indicatrices de déformation de Tissot pour la projection Equal Earth.

© Justin Kunimune, 2019



Les indicatrices de déformation de Tissot pour la projection de Mercator.

© Eric Gaba (Sting), 2008

Les *indicatrices de déformation de Tissot* sont des cercles sur une carte qui sont utilisés pour visualiser la déformation de la forme et de la taille des objets géographiques lorsqu'ils sont projetés sur une surface plane. Elles ont été développées au XIX<sup>e</sup> siècle par le géographe français Nicolas Auguste Tissot (1824–1907). Elles sont un outil important pour la compréhension et l'analyse des distorsions de la projection cartographique et pour la sélection de la projection la plus appropriée pour une application donnée.

Ce sont des cercles de même taille (en général d'un rayon de 500km, ou de 1 000 km) sur la surface de la Terre, qui sont projetés sur la carte en subissant les déformations induites par la projection utilisée. Ils permettent d'évaluer les distorsions de la forme et de la taille des objets géographiques qui se produisent lorsqu'ils sont représentés sur une carte.

Désormais, lorsque vous serez face à une carte, essayez de savoir si la projection qui a été utilisée est « égalitaire » ; à défaut, demandez-vous quel biais l'auteur de la carte peut chercher à faire apparaître ou quel message il peut essayer de vous faire passer, souvent à votre insu !

**B. G.**

## DES CRISTAUX À LA CARTE

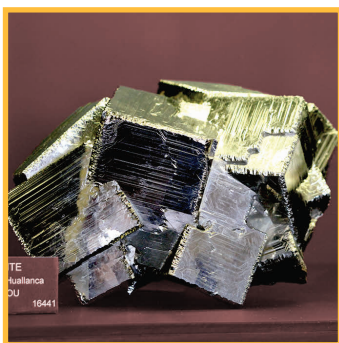


Florentin Waligorski

Journaliste scientifique

Des motifs alvéolaires des nids d'abeilles à ceux dont les girafes se parent, ou ceux structurant les ailes de certains insectes, dans la nature, les pavages sont des figures que l'on rencontre fréquemment. De surcroît, à différentes échelles. En effet, en dehors du monde animal ou même végétal, ils constituent aussi la base structurale des minéraux. Trop beaux pour être vrais ?

Au-delà des pierres précieuses que l'on trouve en joaillerie, vous en avez peut-être déjà croisé, des minéraux aux formes géométriques diverses et variées mais étonnamment régulières et précises, comme le quartz, la pyrite, la calcite et bien d'autres encore (il existe près de six mille espèces minérales identifiées à ce jour). Pourtant, bien qu'ils paraissent avoir été façonnés par une main experte, ces minéraux se forment en réalité selon un schéma bien défini et n'est pas sans rappeler celui des cartes, ou encore des pavages. Le domaine d'étude est celui de la *crystallographie* et c'est la science qui a pour objet l'étude de la structure cristalline de la matière minérale à l'échelle atomique.



Pyrite du Pérou  
(mine de Huanzala, Huallanca).

©É. Thomas, 2022  
(École des mines, Paris)

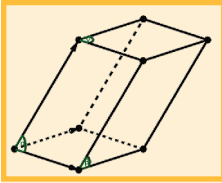


René Just Haüy (1743–1822).

©É. Thomas, 2022  
(École des mines, Paris)

# Y a pas qu'une maille qui m'aille

Un *minéral* est une substance solide, naturelle, inorganique et homogène, caractérisée par une composition chimique précise et une structure cristalline, elle-même définie par l'agencement des atomes la composant et obéissant à des règles de périodicité et de symétrie. Le minéral est l'élément de base qui constitue une roche. Un granite, par exemple, est constitué de plusieurs minéraux (quartz, feldspath, mica). Une roche constituée d'un seul minéral est possible aussi, comme c'est le cas pour la calcite ou le gypse. Ce qui nous intéresse ici, c'est précisément cette structure cristalline. En effet, les atomes (mais aussi les molécules) s'assemblent et s'agencent par le biais de liaisons chimiques et forment un motif géométrique élémentaire, la *maille cristalline*. L'un des pères fondateurs de la cristallographie moderne est l'abbé René Just Haüy. Il est le premier à définir la



Représentation d'une maille.

© F.W.

maille comme structure élémentaire d'un minéral. Dans un espace à trois dimensions, cette dernière est caractérisée par trois paramètres essentiels : les sommets (formés par les atomes), les vecteurs (formés par les arêtes) et les angles formés par chaque couple de vecteurs.

Bien que ces paramètres puissent varier d'une maille à l'autre, il en existe cependant un nombre fini... et restreint. Avec les travaux du minéralogiste français Auguste Bravais (1811–1863) et, plus tard, l'apparition de la radio-cristallographie, sept *systèmes cristallins* (ou *systèmes réticulaires*) ont pu être identifiés. La classification repose alors sur l'angle du trièdre de base formé par les quatre atomes qui le définissent. Il en découle des *ordres de symétrie* (transformations par lesquelles la maille reste invariante) que possèdent les mailles.

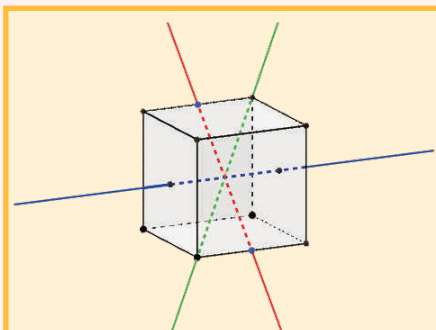
<p>Système cubique</p> <p><math>a = b = c,</math> <math>\alpha = \beta = \lambda = 90^\circ</math></p> <p>Pyrite, halite, plomb</p>	<p>Système quadratique</p> <p><math>a = b \neq c,</math> <math>\alpha = \beta = \lambda = 90^\circ</math></p> <p>Zircon, vésuvianite, vhalcopyrite</p>	<p>Système orthorhombique</p> <p><math>a \neq b \neq c,</math> <math>\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ</math></p> <p>Quartz, barytine, soufre</p>	<p>Système hexagonal</p> <p><math>a = b \neq c,</math> <math>\alpha = \beta = 90^\circ,</math> <math>\gamma = 120^\circ</math></p> <p>Émeraude, graphite</p>
<p>Système rhomboédrique</p> <p><math>a = b = c,</math> <math>\alpha = \beta = \lambda = 90^\circ</math></p> <p>Calcite, tourmaline, bismuth</p>	<p>Système monoclinique</p> <p><math>a \neq b \neq c,</math> <math>\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta</math></p> <p>Augite, gypse</p>	<p>Système triclinique</p> <p><math>a \neq b \neq c,</math> <math>\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ</math></p> <p>Labradorite, rhodnite, disthène</p>	<p>Les sept systèmes cristallins.</p> <p>© F.W.</p>

Il est aussi possible de trouver une alternance de ces différents systèmes au sein d'un même minéral. C'est le cas du talc, par exemple, constitué d'une alternance de feuillets de structures monoclinique et triclinique.

## Les ordres de symétrie

Un *ordre de symétrie* (pour une transformation de type rotation, réflexion ou translation) est le nombre d'arrangements distincts par lequel les propriétés essentielles d'un objet (les paramètres de la maille) restent invariants.

Considérons le cas simple de la maille cubique. Le cube possède trois axes de symétrie d'ordre 4 (en bleu), passant par le centre de deux faces opposées (invariance par rotation d'angle de  $2\pi/4$ ); six axes de symétrie d'ordre 2 (en rouge), passant par le milieu de deux arêtes opposées (invariance par rotation d'angle de  $2\pi/2$ ); quatre axes de symétrie d'ordre 3 (en vert), passant par deux sommets opposés (invariance par rotation d'angle  $2\pi/3$ ).

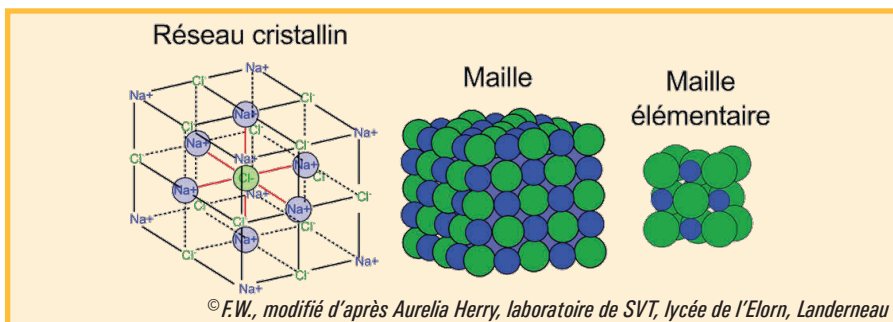


Trois des treize axes de symétrie du cube.

© F.W.

## Des réseaux aux cristaux...

Et les pavages, dans tout ça ? Prenez l'exemple du schéma ci-dessous. Un *plan réticulaire* (ou *plan nodal*) est un plan passant par des nœuds (points) d'un réseau. Ici, les atomes sont représentés comme étant des nœuds formant un réseau cristallin. Il est alors possible d'identifier un motif qui se répète et se conserve par des opérations de symétrie d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6 (rotation,



réflexion ou encore translation), formant alors un pavage. Toutefois, il est possible de définir un pavage de plusieurs façons différentes, comme on peut le voir sur le schéma précédent. Cette maille occupe aussi un espace en trois dimensions dans lequel elle va se répéter de manière périodique. En prenant donc trois vecteurs non coplanaires, il est possible de construire un réseau périodique en prenant des combinaisons linéaires (à coefficients entiers relatifs) de ces trois vecteurs.



Halite d'Allemagne (Sondershausen).

©É. Thomas, 2022 (École des mines, Paris)

Prenons un exemple simple et familier : le sel. Aussi connu sous le nom de halite (son nom scientifique sous sa forme cristalline) ou de chlorure de sodium, de formule chimique  $\text{NaCl}$ , il appartient au système cubique. Pour être plus précis, il s'agit ici d'un système cubique à *faces centrées*. Donc, dans notre exemple, les atomes de sodium Na (ions  $\text{Na}^+$ ) occupent les sommets et le centre des faces du cube, alors que les atomes de chlore Cl (ions  $\text{Cl}^-$ ) se trouvent au milieu des « arêtes » de cette maille (en bleu sur l'exemple de maille élémentaire).

Comme la halite, de nombreux cristaux semblent imbriqués les uns dans les autres. On parle alors de *macles* et de *réseau de macles*. En effet, lorsque le réseau des nœuds de cristaux identiques se superposent, ils forment un réseau de macle. Et leur croissance respective est toujours régie selon les lois de symétrie et de périodicité. Ces réseaux pouvant exister dans les trois dimensions, ils peuvent être décrits comme monopériodiques, dipériodiques ou encore tripériodiques.



## Des plans de clivage

Sous une certaine contrainte mécanique (un choc, une pression...), le cristal d'une espèce minérale peut se fracturer selon un plan bien défini. On parle alors d'un *plan de clivage*. Cette surface (plane) de rupture est aussi une zone de faiblesse ; elle est définie selon la symétrie et le réseau nodal (car les plans de clivage appartiennent à des plans nodaux). L'exemple idéal qui illustre cette propriété est celui du mica. Ce minéral possède en effet des plans de clivage *parfaits*, car il se délite presque comme un jeu de cartes...



Mica.

©Magnus Manske, 2012

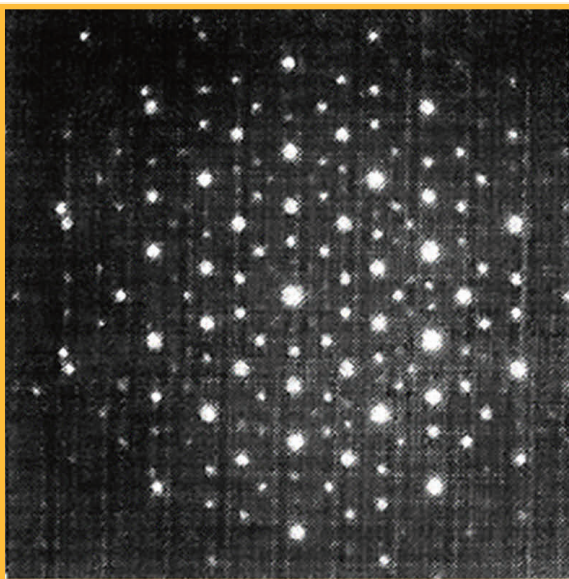
## ...et même aux quasi-cristaux !

Il existe également des structures aperiodiques. Elles sont même assimilées aux pavages aperiodiques de Penrose. Cette nouvelle catégorie de cristaux a été découverte en 1984, ce qui a notamment valu, en 2011, un prix Nobel au chimiste israélien Daniel Shechtman (né en 1941).

En analysant la structure cristalline d'un alliage d'aluminium et de manganèse, grâce à son diagramme de diffraction, les chercheurs se sont aperçus que le cristal présentait une symétrie d'ordre 5, ce qui jusque-là n'avait jamais été considéré comme possible. Cette surprenante symétrie a été observée dans une direction, en anneaux concentriques ayant chacun dix nœuds, alors que dans les autres directions, il y en avait six (symétrie d'ordre 6 conventionnelle). La forme de cette structure est celle d'un icosaèdre, et cette symétrie n'est possible que si la structure du cristal est quasi périodique. Si, dans un réseau, le rapport de la périodicité respective de deux motifs différents est irrationnel, alors il n'y aura pas de synchronisation (ni même à grande échelle).

Structure cristalline  
d'un alliage d'aluminium et  
de manganèse.

© D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias,  
J.W. Cahn, *Physical Review Letters*  
53, 1984



Les propriétés de ces quasi-cristaux ne sont néanmoins pas si différentes de celles des cristaux périodiques, même si la diffraction des électrons dans ces milieux peut avoir un effet sur leurs propriétés thermique et électrique. Pour en apprendre davantage et en prendre également plein les yeux, n'hésitez pas à aller faire un tour au musée de minéralogie à l'École des mines de Paris ou à la collection de minéraux de Sorbonne Université ou encore à la galerie de géologie et de minéralogie du Jardin des plantes !

*F. W.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Nature et polyèdres, structure des minéraux.* Serge Mehl, « Chronomath, une chronologie des mathématiques », 2008, disponible en ligne.

*Un siècle de cristallographie : de la maille au cristal.* Natan Capobianco et Gauthier Roisine, « CultureSciences-Chimie », 2017, disponible en ligne.

*Nobel prize—discovery of quasicrystals.* Don Monroe, *Physics*, 2011, disponible en ligne.

## DES CARTES MENTALES POUR L'APPRENTISSAGE

Audrey Candeloro et Emmanuelle Rabin

Professeure de mathématiques  
Professeure de lettres modernes

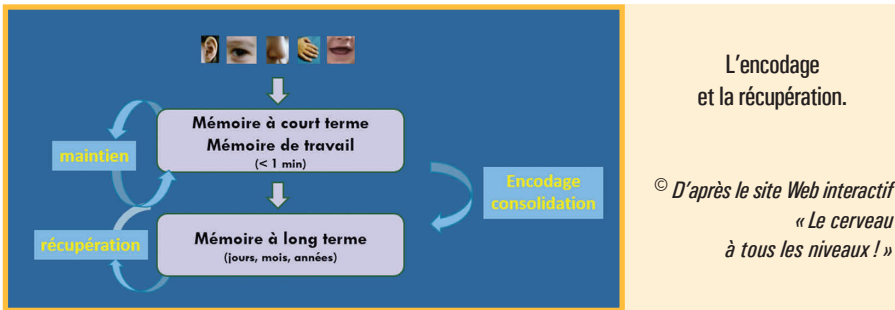
Dans l'apprentissage, la question de la mémorisation est primordiale. Apprendre, c'est garder des traces d'expériences, c'est stocker des connaissances. Ce processus s'appuie en continu sur ce qui est déjà en mémoire pour faire des liens et récupérer des informations. À partir des connaissances actuelles sur le fonctionnement de la mémoire, les enseignants, les élèves, les parents s'efforcent de mettre en œuvre les conditions qui contribuent à la mémorisation. L'usage de cartes, cartes mentales et cartes *flash*, peut favoriser la mémorisation à l'école et dans la vie quotidienne.

### De la mémoire à court terme à la mémoire à long terme

Depuis plusieurs années, les résultats de la recherche en sciences cognitives ou en neurosciences sont diffusés auprès des enseignants, mais également du grand public, pour permettre de comprendre le fonctionnement de la mémoire et avoir des stratégies pour mettre en stock et retenir plus durablement les connaissances. Lorsqu'une notion se présente pour la première fois, le cerveau va en garder une première trace ; c'est l'*encodage*. De la manière dont la notion est présentée dépend la qualité de cet encodage : la recherche parle également de la *profondeur* d'encodage. Un certain nombre de facteurs favorise la mise en mémoire et l'attention y joue un rôle important. Lorsqu'une notion est comprise, et si elle présente de surcroît un intérêt, elle sera stockée plus durablement. Ce qui entoure ce moment de première présentation (avec qui j'étais, les supports utilisés, le moment...) constitue un épisode de vie. Plus il est riche, meilleur sera l'encodage. Pendant cette phase d'encodage, la notion est mise en lien avec les connaissances déjà mémorisées ; et là encore, plus le maillage est riche, meilleur sera l'encodage. Un bon encodage n'est pas la seule condition, car même bien encodée, une notion est soumise à l'oubli ! Pour l'éviter, il faudra remobiliser cette notion et de préférence dans un nouveau contexte.

Se souvenir, réemployer, c'est la *récupération* : pendant cette phase, la notion est remise dans la mémoire à court terme. Plus le cerveau récupère vite une notion, mieux elle se voit consolidée, en mémoire à long terme.

Notre mémoire immédiate nous sert en continu. La durée de rétention est très courte, de l'ordre d'une minute. Pour éviter de l'encombrer et d'être en surcharge, certaines connaissances (les *faits numériques automatisés*) doivent être disponibles très rapidement. Par exemple, le calcul de  $3+7$  ne nous demande pratiquement aucun effort et le résultat, 10, nous « saute à la tête », pour reprendre l'expression employée par une élève de sixième. Les faits numériques, en plus d'éviter la surcharge, permettent de construire les nombres, d'installer des procédures, de contrôler des résultats...



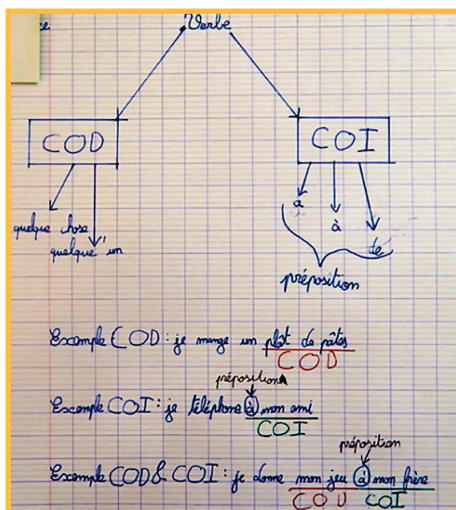
## Carte blanche à la carte mentale

Pour présenter une nouvelle notion, les enseignants proposent des activités d'introduction. Choisir pour cela des situations problèmes va permettre un meilleur encodage, dans la mesure où elles conduisent à une déstabilisation cognitive. En effet, quand l'élève est confronté à un problème ou une tâche complexe, il aura tendance à ne pas tenir compte des nouvelles informations données qui « déstabilisent » les connaissances qu'il avait acquises. Les automatismes habituels ne lui permettront pas de répondre. Il lui faudra opérer d'autres stratégies, se montrer flexible, trouver d'autres chemins. Cette phase peut être désagréable pour l'élève tout en étant intense du point de vue cognitif. En complément du cours qui constitue l'institutionnalisation de la notion, les enseignants peuvent proposer aux élèves des *cartes mentales*.

La carte mentale organise des informations à la manière d'un réseau, permettant la mise en lien, de manière explicite, des différents éléments qui constituent la notion. Il est important que la carte soit réalisée par l'élève lui-même ; en

effet, ce n'est pas tant la carte finie qui favorise l'encodage que l'activité cognitive qui permet de la réaliser: l'élève cherche des données, doit les comprendre (ou se les réapproprier) pour les articuler entre elles; il se pose des questions, fait des choix... La carte est la trace de toute cette réflexion et deviendra une fiche mémo à relire. La recherche a clairement établi que lire et relire ne constitue pas une récupération efficace: il est bien plus efficace de se tester.

Dans le temps de la classe, il n'est pas toujours facile de laisser la fabrication d'une carte mentale à la charge des élèves seuls. Les enseignants varient alors les stratégies: réalisation d'une carte en groupe, comparaison de cartes existantes pour réaliser une nouvelle carte... Certains enseignants donnent d'ailleurs «leur» carte, l'enjeu étant alors de permettre aux élèves une réelle appropriation en explicitant les liens, proposant des ajouts... Ces cartes «modèles» pourront servir ensuite à la fabrication de cartes par les élèves eux-mêmes. Quant aux cartes déjà faites proposées par les manuels, elles imposent une organisation, une logique interne qu'élèves et enseignants devront mettre en lumière.



Source : travail réalisé avec Caroline Franck dans une classe de 6<sup>e</sup>.

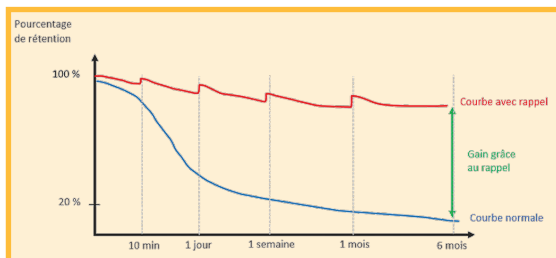
© E.R.

Pour récupérer et consolider les informations, qu'elles soient organisées dans un cours ou par une carte mentale, la «technique de la feuille blanche» est une stratégie très efficace. Cela consiste, dans le cas de la carte mentale, à prendre une feuille blanche et à essayer de reconstituer toute la carte sans l'avoir relue préalablement. C'est seulement après cette phase que l'élève reprend la carte d'origine pour la comparer à sa production: il verra les éléments dont il se souvient et ceux qui étaient déjà en chemin vers l'oubli!

Ce temps de comparaison permet une réelle activité cognitive qui profite pleinement à la consolidation de la notion.

## Jouer carte sur table contre l'oubli

Pour consolider une notion, voire l'automatiser, il est nécessaire de la récupérer. Fort heureusement, il n'est pas obligatoire de la réactiver chaque semaine ! La recherche a établi que les récupérations pouvaient être de plus en plus espacées.



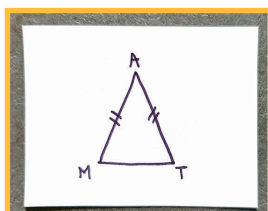
La courbe d'Ebbinghaus.

© [penserchanger.com](http://penserchanger.com)

La courbe « standard », appelée *courbe d'Ebbinghaus*, montre à quel point les informations tombent dans l'oubli très rapidement si elles ne sont pas réactivées. La courbe rouge met en évidence la rétention des informations pour peu qu'elles soient rappelées de manière espacée. En outre, des chercheurs ont montré que tester régulièrement sa mémoire est autrement plus efficace que lire et relire son cours !

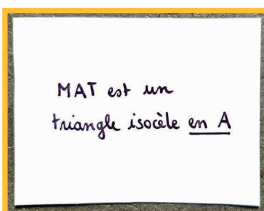
Parmi les stratégies qui servent à récupérer les informations et à entretenir leur mémorisation, les cartes *flash* permettent tout cela à la fois, dans les différents lieux de mémorisation que sont la classe, la maison, le dispositif « Devoirs Faits » proposé par le ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse...

Au recto, une question, une définition ; au verso, une réponse, un mot associé. Là encore, réaliser soi-même ses cartes offre une activité qui profitera au renforcement de la notion. L'objectif recherché est d'atteindre une automatisation des contenus.



Ici, le triangle isocèle.

© A.C.



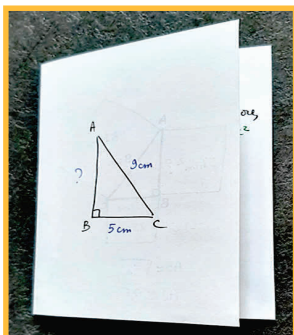
Là, la définition.

© A.C.

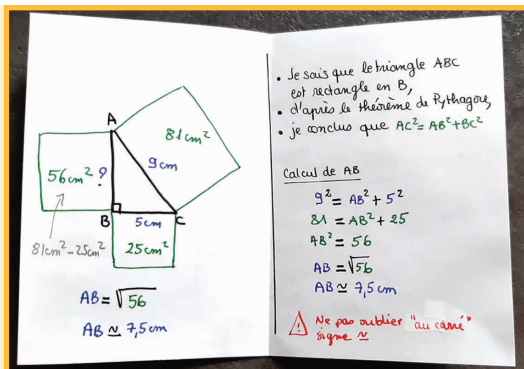
Voici une carte qui propose un point du cours.

En voyant la définition, l'élève doit faire un schéma qui finira par constituer une image mentale. En voyant le schéma, l'élève doit exprimer la nature du triangle.

Voyons maintenant une carte qui propose un exercice élémentaire ou une méthode.



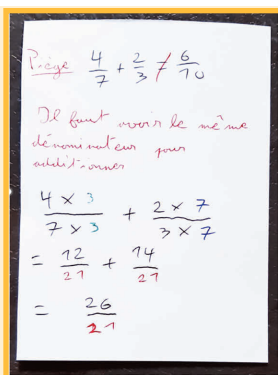
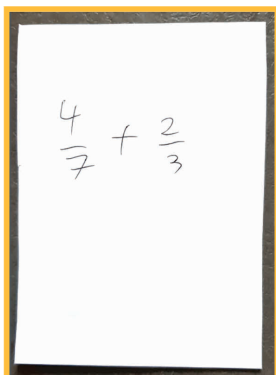
Trouver la troisième longueur dans un triangle rectangle, en utilisant le théorème de Pythagore.



La copie de l'élève.

Là, l'élève se voit proposer la figure clé et doit maîtriser les étapes (calcul et rédaction) pour obtenir la troisième longueur. Automatiser la figure clé lui permettra de la reconnaître dans une figure plus élaborée.

Voici enfin une carte qui propose un résultat à retenir, accompagné d'un piège.



À gauche, l'addition de deux fractions.

À droite, le rappel du piège à éviter précède une solution correcte.

©A.C.

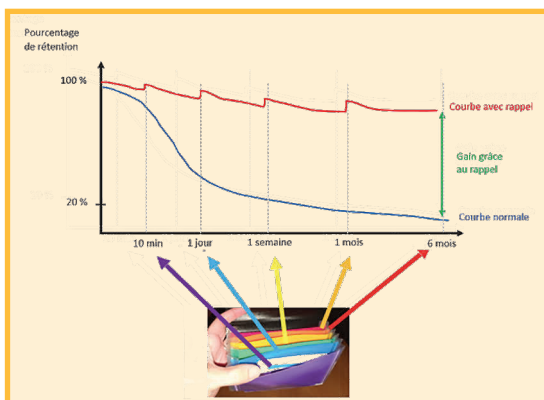
À partir d'un calcul choisi avec soin, le professeur met en évidence les étapes du calcul (en code couleur, disposition en colonne...). Il pourra faire apparaître le piège dans lequel l'élève est tombé. L'enseignant explique la nécessité de «résister» à l'utilisation d'un automatisme, ici l'addition de 2 entiers (4+2 et 7+3). Résister à un automatisme innopérant est l'*inhibition*.

## Avoir toutes les cartes en mains... et les jouer !

Réactiver ses connaissances dans le temps peut se faire grâce à des applications numériques, mais aussi grâce au mini trieur : les cartes sont rangées dans le premier compartiment. Si l'élève réussit à retrouver l'information, la carte recule dans les compartiments. Si l'élève ne se souvient plus de la réponse à une carte, elle est replacée tout à l'avant du trieur.

Les cartes mentales, les cartes *flash* et les autres stratégies qui sont autant d'occasion de rappels pour permettre une consolidation ne sont pas réservées à la classe. Les actions en direction des élèves et de leurs parents se multiplient pour expliciter le fonctionnement de la mémoire et donner les stratégies en lien avec ce

qui s'apprend dans la classe. Citons ainsi un projet mené en partenariat avec la Fondation du Collège de France : des enseignants de mathématiques ou professeurs principaux et des parents de trois classes de sixième du collège Jacques-Twinger de Strasbourg (Bas-Rhin) se questionnent sur la manière de faire les devoirs de maths avec leur enfant. Le choix s'est porté sur comprendre le fonctionnement de la mémorisation pour (re)donner du sens au travail personnel de l'élève. Les échanges ont porté sur des outils de mémorisation utilisés en classe puis repris à la maison avec les parents. Ce sont autant de pistes d'accompagnement pour ne pas faire à la place de l'enfant mais le laisser faire avec des outils partagés.



Principe du trieur.

© Virginie Munier

*A. C. & E. R.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Coffret « Entraîner le cerveau à résister ».* Julien Garbarg-Chenon et MarieLétang, Nathan, 2023.

« *Les grands principes de l'apprentissage.* » Conférence de Stanislas Dehaene, Collège de France, 37 min, 20 novembre 2012.

Le site «math&mémo» de l'Irem de Strasbourg, <https://mathmemo.wordpress.com>.



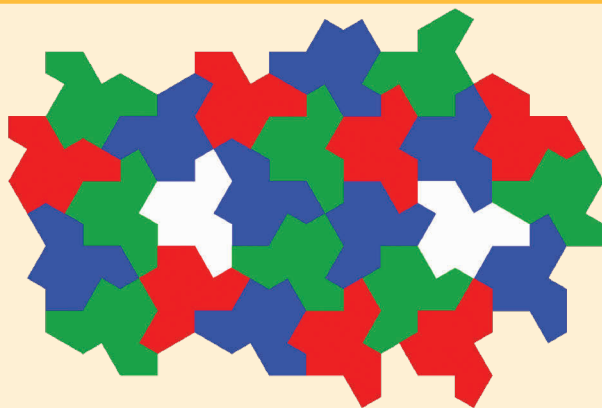
## LE THÉORÈME DES QUATRE COULEURS

François Lavallou

Mathématicien et historien des sciences

Le théorème des quatre couleurs, malgré un énoncé simple et les travaux de nombreux mathématiciens, est resté une conjecture pendant plus d'un siècle. Il est devenu célèbre pour avoir été le premier résultat « important » à avoir été démontré à l'aide d'un ordinateur, mais son histoire n'est cependant pas tout à fait terminée.

Quatre couleurs suffisent à colorier toute carte géographique de telle sorte que tous les pays *connexes* (d'un seul tenant) ayant une frontière commune aient des couleurs différentes. C'est l'intitulé du théorème des quatre couleurs, constaté par de nombreuses générations de géographes, mais formulé pour la première fois en 1852 par le mathématicien et botaniste sud-africain Francis Guthrie (1831–1899) et prouvé seulement en 1976 par les mathématiciens américains Kenneth Ira Appel (1932–2013) et Wolfgang Haken (1928–2022), à l'aide de l'outil informatique. L'histoire de ce théorème est constituée de nombreuses phases.



Exemple de carte nécessitant quatre couleurs. Pour plus d'informations sur ce pavage du plan, voir l'article *La Tortue qui prenait son chapeau pour Einstein* dans cette brochure.

© F.L.

## Le problème des cinq princes

C'est en essayant de colorier la carte, particulièrement retorse, des cantons d'Angleterre que Francis Guthrie constate que quatre couleurs peuvent suffire pour les distinguer. Ayant reçu une formation en mathématiques, il se demande naturellement s'il n'en est pas de même pour toute carte plane. Son frère Frederick (1833–1886), mathématicien lui aussi, transmet cette question à leur professeur commun, Auguste De Morgan (1806–1871), l'un des pères de la logique moderne. Ce dernier, professeur à l'University College de Londres, usait de méthodes pédagogiques innovantes pour l'époque. Après chaque heure de cours, il donnait des exercices à ses étudiants, qu'il corrigeait au cours suivant. Il a ainsi proposé ce problème à Arthur Cayley (1821–1895), futur très grand mathématicien, qui allait publier plusieurs articles sur cette question. Les tentatives de De Morgan, quant à elles, se résumeront à un théorème (voir encadré) qui laissera accroire que quatre couleurs pouvaient suffire. C'est une avancée car on en déduit le théorème des six couleurs (voir encadré).

### Le théorème de De Morgan

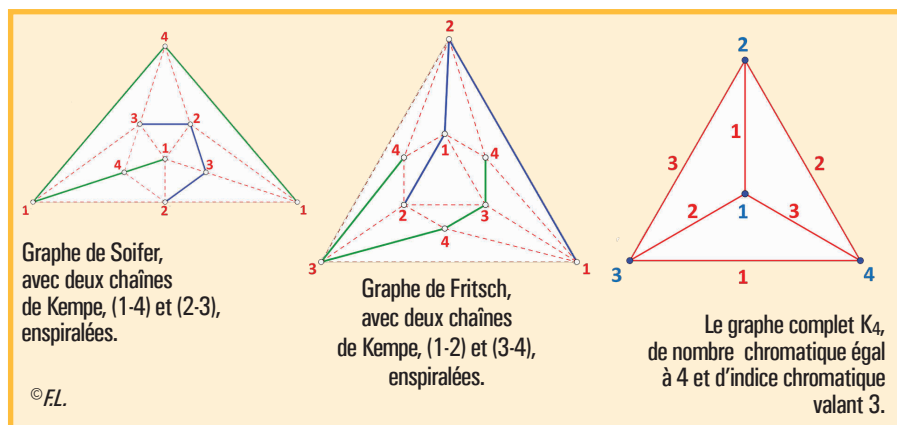
Il est impossible de définir cinq régions de sorte que chacune ait une frontière commune avec les quatre autres. La version « graphe » de ce théorème est qu'il n'existe pas de graphe *complet* (dans lequel tous les sommets sont reliés) et *planaire* (dont les arêtes ne se croisent pas) de degré 5 (avec cinq sommets). Essayez de relier cinq points distincts du plan les uns aux autres sans que jamais les arêtes ne se croisent ! Ce résultat avait déjà été évoqué par le mathématicien allemand Auguste Ferdinand Möbius (1790–1868), en 1840, dans son *problème des cinq princes*, lequel montre l'impossibilité de partager un royaume en cinq régions mitoyennes entre elles.

En 1860, De Morgan met par écrit cette conjecture mais il revient à Cayley, en 1878, d'être le premier à définir mathématiquement ce problème et à en demander une démonstration. Dès lors, les tentatives de résolution accrurent.

### Le théorème des six couleurs

Ce théorème stipule que tout graphe planaire est 6-coloriable. Pour le prouver, on raisonne par récurrence sur le nombre  $n > 6$  de sommets. Supposons le théorème vrai et considérons un graphe planaire de  $n + 1$  sommets. D'après le théorème de De Morgan, il existe au moins un sommet,  $S$ , dont le *degré* (le nombre d'arêtes incidentes) est inférieur ou égal à 5. En retirant  $S$ , on a un graphe de  $n$  sommets, que l'on peut donc colorier en six couleurs (par hypothèse). On replace alors  $S$ , qu'on n'a aucune peine à colorier puisqu'il n'a pas plus de cinq voisins.

Le problème initial semble résolu avec le mathématicien britannique Alfred Brey Kempe (1849–1922), qui publie une solution en 1879. Mais onze ans plus tard, son homologue Percy Heawood (1861–1955) exhibe un graphe particulier, de vingt-cinq sommets et soixante-neuf arêtes, comme contre-exemple de sa technique de démonstration à l'aide d'enchaînement de régions, les *chaînes de Kempe* (voir encadré). D'autres contre-exemples ont été produits depuis, dont les minimalistes sont le *graphe de Soifer* (en 1997) et le *graphe de Fritsch* (en 1998). Leur *nombre chromatique* est de 4, c'est-à-dire qu'on peut en colorier les sommets avec quatre couleurs, mais la coloration des arêtes, l'*indice chromatique*, nécessite cinq couleurs pour le graphe de Soifer et six pour celui de Fritsch.



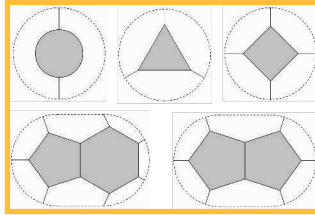
Kempe a toutefois montré que dans toute carte existe au moins une région avec au maximum cinq voisines, et ses chaînes éponymes se montreront des outils fondamentaux pour la preuve finale.

En 1885, le géomètre allemand Richard Heinrich Baltzer (1818–1887) ressuscite le *problème des cinq princes* de Möbius et conclut à tort, comme tant d'autres, que quatre couleurs suffisent.

En 1890, Heawood modifie la démonstration de Kempe, qu'il a prouvée fautive, et établit le *théorème des cinq couleurs* (cinq couleurs suffisent). Il s'intéresse alors au cas des surfaces en général et détermine ainsi que sept couleurs sont nécessaires pour garantir la coloration d'une carte sur un tore (la surface d'une bouée, ou d'un Paris-Brest).

En 1904, le mathématicien allemand Paul August Ludwig Wernicke (1866–après 1932) complète le théorème de Kempe en établissant que toute carte contient au moins une des *cinq configurations inévitables*. C'est le début d'un immense inventaire, de l'Américain George David Birkhoff (1884–1944), en

1913, au Français Henri-Léon Lebesgue (1875–1941), en 1940, avec l'établissement d'un très grand nombre de configurations inévitables à partir de la relation d'Euler.

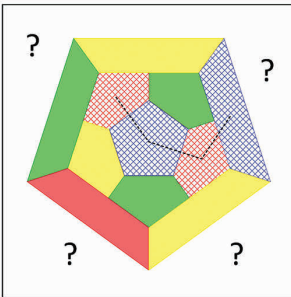


Les cinq configurations inévitables de Wernicke.

©FL.

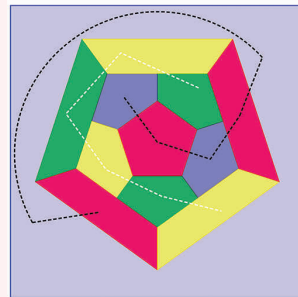
### Les chaînes de Kempe

Une *chaîne de Kempe* est un enchaînement de régions adjacentes de la carte colorées par deux couleurs. Elle est utile pour « recolorer » une carte car on peut toujours échanger les couleurs dans chaque chaîne. La coloration de la carte de gauche semble nécessiter une cinquième couleur pour la région extérieure. Mais si l'on considère la chaîne de Kempe constituée par les régions hachurées de couleur bleue et rouge, une inversion de ses couleurs permet une coloration de la totalité de la carte avec quatre couleurs seulement, en colorant la région extérieure en bleu (carte de droite). Un résultat similaire serait obtenu en considérant la chaîne bleue-verte. Au final, la coloration est constituée de deux chaînes de Kempe enroulées en spirale.



Une cinquième couleur semble nécessaire.

©FL.



En fait, quatre couleurs suffisent !

©FL.

### Des cartes allégées aux graphes

À partir des années 1950, le problème de cartographie est définitivement transposé dans la théorie des graphes (voir encadré), ce qui en facilite un traitement informatique. On estime alors à près de neuf mille le nombre de configurations irréductibles à étudier, tâche surhumaine. Un travail de débroussaillage est

alors effectué par Haken et Appel en limitant les configurations maximales à quatorze régions pour une frontière, ce qui rend possible un traitement informatique. Ils peuvent ainsi établir une démonstration générale qui laisse cependant de côté 1 478 cas particuliers. Mais la vérification de la preuve de la démonstration se transpose en une vérification de la correction et de la fiabilité d'un programme informatique, ce qui est une autre culture.

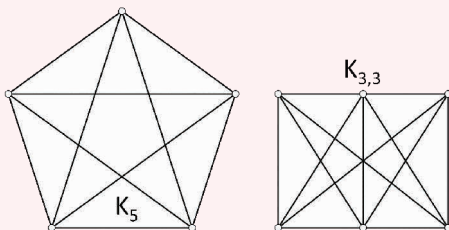
Près de vingt ans plus tard, le nombre de cas à vérifier est réduit à 633. Enfin, en 2004, la preuve formelle donnée par le programme français Coq (Thierry Coquand et Gérard Huet, 1984) est définitivement acceptée par la communauté mathématique. Aujourd'hui, le théorème des quatre couleurs est considéré comme l'un des résultats les plus importants de la théorie des graphes, et a de nombreuses applications pratiques, en particulier pour les gestions de planification collective. Comment établir l'emploi du temps d'épreuves d'examen sans léser un candidat, comment affecter des fréquences différentes aux relais de télécommunication « proches » et, plus fondamentalement, comment gérer les problèmes d'incompatibilité de personnes en établissant un chemin de table ? On trouve donc son implication dans des domaines tels que la planification de la sécurité publique, la théorie des jeux, l'optimisation combinatoire, la théorie des graphes, la cryptographie, et le Sudoku.

## Des cartes aux graphes planaires

Toute carte peut être associée à un *graphe planaire*, ensemble de points (sommets) reliés par des segments (arêtes) qui ne se coupent pas. Il suffit, par exemple, de prendre les capitales pour sommets et relier celles des pays frontaliers. Le graphe complet à cinq sommets ( $K_5$ ) et le graphe biparti complet ( $K_{3,3}$ ) ne sont pas planaires. Un graphe est planaire si, et seulement si,  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  ne font pas partie de ses mineurs, un *mineur* étant le graphe obtenu par contraction ou soustraction d'arêtes et suppression de sommets (et de leurs arêtes adjacentes).

Le graphe complet à cinq sommets  $K_5$   
et le graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

©FL.



Mais on reste sur notre faim quand on constate le temps consacré par tant de chercheurs de renom à ce problème que le mathématicien hongrois Pál Erdős (1913–1996) considérait comme un problème subtil, mais pas un problème structurellement complexe. De nombreux grands théorèmes (de Fermat, de

Poincaré...) ont nécessité, pour leur démonstration, la création d'outils ou techniques qui ont fait avancer la science mathématique. Par contre, la démonstration par la force brute du théorème des quatre couleurs n'apporte rien d'autre à la théorie des graphes que sa vérité. À problème simple, on rêve de solution « simple » qui allie élégance et profondeur.

Pour cette raison, la recherche fondamentale sur le sujet n'a pas perdu ses couleurs. On ne sait toujours pas, par exemple, déterminer les critères d'un graphe qui permettraient d'affirmer que trois couleurs suffisent. Pour des graphes avec des cycles de trois nœuds (un *cycle* étant une suite d'arêtes consécutives distinctes constituant une boucle), la projection d'un tétraèdre, qui est le graphe  $K_4$ , montre que quatre couleurs sont nécessaires. Intuitivement, les graphes ne possédant que des cycles d'un « grand » nombre de nœuds ont moins d'arêtes, et donc moins de contraintes de coloriage.

En 1991, Erdős, grand stratège de résolution de problème en théorie des graphes et combinatoire, a suggéré de chercher pour quelle valeur minimale  $k$  les graphes sans cycles de 4, 5...  $k$  nœuds pouvaient être coloriés avec trois couleurs seulement. En 2006, le mathématicien russe Oleg Veniaminovitch Borodin (né en 1951) a montré qu'on a  $k \leq 7$ . Dès 1976, Richard Steinberg avait conjecturé  $k \leq 5$ . Mais en 2016, une équipe de mathématiciens français a construit un contre-exemple. Il vous reste donc à étudier les cas où les cycles de longueur 4, 5 et 6 sont exclus !

*F. L.*

### Une démonstration du résultat de De Morgan

Pour les lecteurs curieux, voici une preuve du théorème de De Morgan évoqué dans l'article. Un simple dénombrement va permettre de démontrer le résultat attendu. Un graphe planaire peut être vu comme la projection d'un polyèdre, les régions entourées d'arêtes correspondant aux faces, en n'oubliant pas celle entourant le graphe (la « face extérieure »). Appliquons la relation d'Euler :  $F - A + S = 2$ , où  $F$  représente le nombre de faces,  $A$  le nombre d'arêtes et  $S$  le nombre de sommets.

Si un graphe complet de degré 5 existait, nous aurions alors cinq sommets ( $S = 5$ ) tous reliés les uns aux autres, sans intersection des arêtes. De chaque sommet partent quatre arêtes, d'où  $A = 10$ . Par suite, on en déduit  $F = 7$ .

Mais puisque chaque face est délimitée par au moins trois arêtes, nous devrions avoir au moins, en tenant compte qu'une arête appartient à deux faces,  $3F/2 = 10,5$  arêtes, c'est-à-dire  $A \geq 11$ .

Cette inégalité est en contradiction avec le calcul précédent ( $A = 10$ ) : il n'est donc pas possible de relier cinq points sans intersection des segments !

## DES CARTES À DÉCOUPER

### EN DEUX RÉGIONS SUPERPOSABLES

Michel Criton

Président de la Fédération française des jeux mathématiques

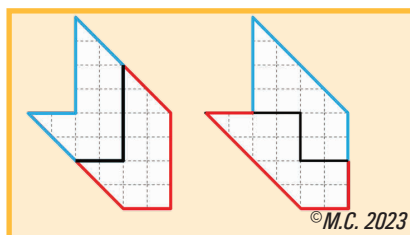
Hispaniola est la première île des grandes Antilles, sur laquelle accosta Christophe Colomb en 1492. Cette île est aujourd'hui partagée entre deux États : Haïti et la République dominicaine.



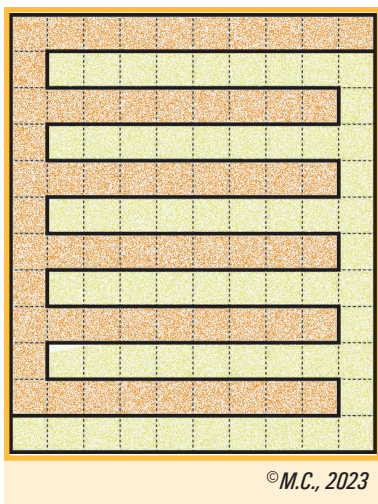
Intéressons-nous à la frontière, maritime et terrestre, de ces deux États. La partie terrestre de la frontière a exactement la même longueur, qu'elle soit parcourue d'un côté ou de l'autre de la frontière. Ce ne serait pas forcément le cas si un lac ou une mer intérieure était située entre les deux pays. Mais dans ce cas précis, les frontières maritimes des deux États n'ont évidemment ni la même forme, ni la même longueur.

Amusons-nous à étudier le découpage de la carte d'une île en deux parties parfaitement superposables, chaque partie étant d'un seul tenant, avec ou sans retournement d'une des deux parties. Pour simplifier, on commencera par se placer sur un quadrillage.

Voici un premier découpage d'une île fictive. L'énigme possède deux solutions : l'une où la superposition des cartes des deux États se fait avec retournement d'une des deux parties, et l'autre sans.



Dans un tel découpage, si les deux parties ont une frontière commune, les bords extérieurs des deux parties ont obligatoirement la même longueur. Mais cela ne veut pas dire que ces bords extérieurs vont se correspondre lorsque l'on voudra superposer les cartes des deux parties. Dans ce premier exemple, lorsque l'on superpose les cartes des deux États, le bord maritime de l'un d'eux va se superposer en partie avec le bord maritime de l'autre, et en partie avec sa frontière terrestre. Il suffit de découper les deux parties pour le constater. Mais serait-il possible que dans la superposition le bord maritime de l'un des deux États corresponde entièrement à une partie de la frontière commune terrestre de l'autre ? Lorsque l'on pose cette question à des collégiens, et parfois même à des adultes, les exemples fournis incitent à croire que, pour chaque État, la frontière terrestre commune est plus courte que sa frontière maritime. Mais il n'en est rien ! En effet, la longueur de la frontière terrestre n'a pas de limite, comme le montre l'exemple suivant du découpage d'un simple rectangle en deux parties superposables.

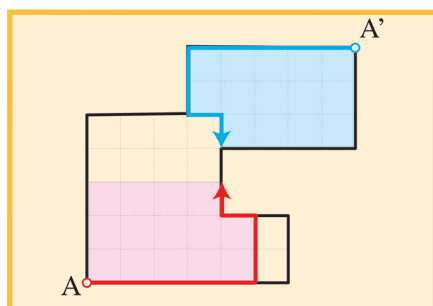


Cet exemple médité, reposons donc la question : se pourrait-il que le bord extérieur de l'une des deux parties corresponde entièrement à une partie de la frontière intérieure commune ?

Le mathématicien suédois Kimmo Eriksson (né en 1967) a démontré que ce n'était pas possible à partir du moment où l'aire de chacune des deux parties est non nulle. En partant de cette constatation, Eriksson a développé une méthode de résolution de ce type de problème. Sa technique consiste à partir de deux points du bord extérieur dont on pense qu'ils vont se correspondre dans la superposition des deux parties, puis à suivre le bord à partir de ces deux points en effectuant des parcours «de même forme» (superposables). Lorsque l'un des parcours ne peut rester à l'extérieur pour respecter l'identité des formes, on doit rentrer à l'intérieur de la figure en suivant ce qui devrait être un début de frontière intérieure commune. On précise que si les deux parties du découpage doivent se superposer sans retournement, les parcours doivent être effectués dans le même sens, alors que si la superposition se fait avec retournement, ils doivent être effectués en sens contraire. Lorsque l'on opère sur un quadrillage, le nombre de paires de points dont on doit tester la correspondance est fini, même s'il peut être très grand.

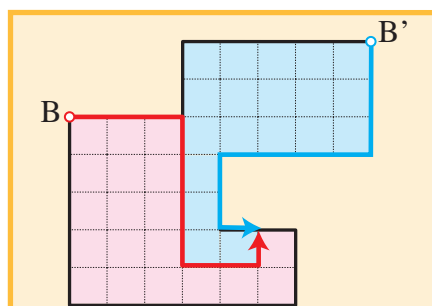


Lorsqu'une telle procédure échoue, on obtient néanmoins toujours deux parties superposables, mais le domaine entier n'est alors pas complètement partagé.



En partant des points A et A', on obtient deux parties de même forme (en bleu et en violet), mais la figure n'est pas entièrement partagée (il « reste du blanc »).

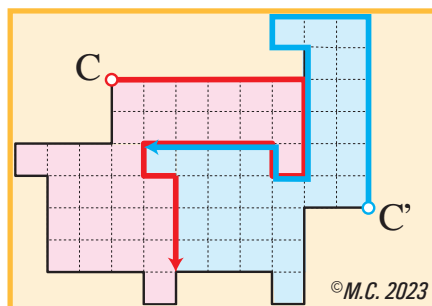
©M.C. 2023



Pour la même forme de départ, le choix des points B et B' a permis de partager entièrement la figure.

©M.C. 2023

Voici maintenant un découpage d'une île où la superposition des cartes des deux États se fait avec retournement de la carte de l'un d'eux. Les parcours à partir des points C et C' se font en sens opposés.



©M.C. 2023

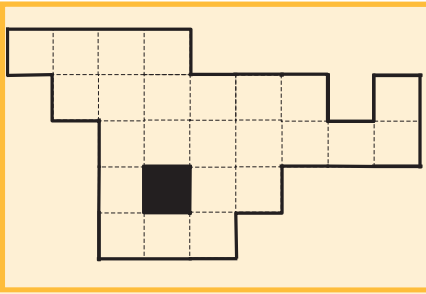
Voyons maintenant ce qui se passe lorsque la frontière comporte une mer ou un lac intérieur. Prenons déjà un exemple en Europe. Imaginons que deux randonneurs parcourent à pied la frontière franco-suisse entre A et B, en marchant l'un du côté français et l'autre du côté suisse de la frontière.



©M.C. 2023

Vont-ils parcourir la même distance ?

La réponse est négative si les randonneurs restent sur la terre ferme, car la rive française du lac Léman est plus courte que sa rive suisse.

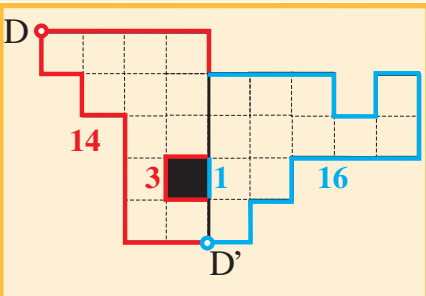


Dans cet exemple fictif, la case noire matérialise une étendue d'eau (le lac Rimogène) commune aux deux États.

©M.C. 2023

Mais imaginons le cas d'une île présentant un lac intérieur dont les eaux appartiennent aux deux États.

On observe dans ce cas que la rive du lac intérieur est inégalement partagée entre les deux États. Il en résulte que les frontières maritimes des deux pays n'auront pas la même longueur. Mais ceci n'empêche pas la méthode de Kimmo Eriksson d'être applicable, par exemple en partant les points D et D' !

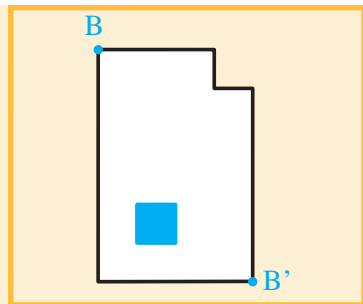
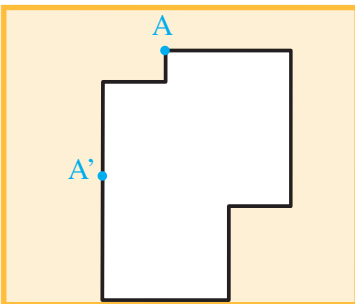


La solution.

©M.C. 2023

À titre de divertissement, voici plusieurs découpages de figures en deux parties superposables, éventuellement avec retournement d'une des parties. Ces figures ne comportent pas de quadrillage, mais pour vous aider et tester la méthode

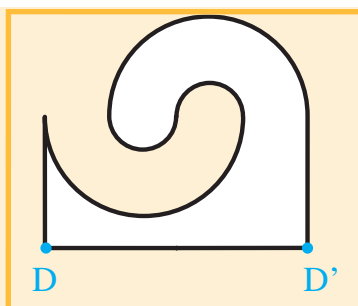
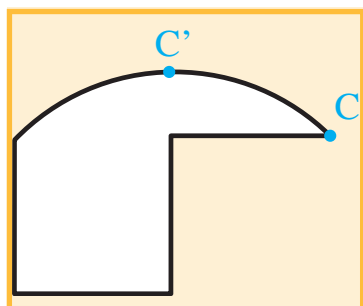
d'Eriksson, nous avons indiqué deux points de départ possibles sur le contour. À vous de trouver s'il faut vous déplacer dans le même sens (cas sans retournement) ou en sens contraire (cas avec retournement). Les solutions se trouvent en dernière page de cet article : résistez à la tentation de tourner les pages, cherchez par vous-même !



Le lac intérieur n'appartient à aucune des deux parties.

©M.C. 2023

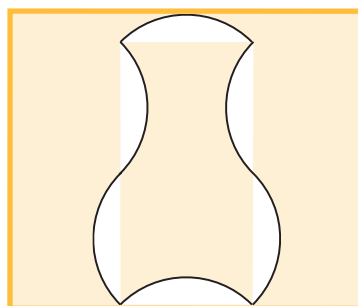
La méthode d'Eriksson s'applique même si certaines portions du contour de la figure à partager sont courbes, comme en témoignent les deux exemples suivants.



©M.C. 2023

Voici enfin le dessin d'une carafe. Celle-ci présente un axe de symétrie vertical qui permet de la découper en deux parties superposables avec retournement.

Mais il existe un autre découpage (courbe) permettant d'obtenir deux parties superposables (avec ou sans retournement), chacune des deux parties présentant deux axes de symétrie, donc étant elle-même découppable de deux façons en deux parties superposables.



©M.C. 2023

À vous de les trouver!

M. C.

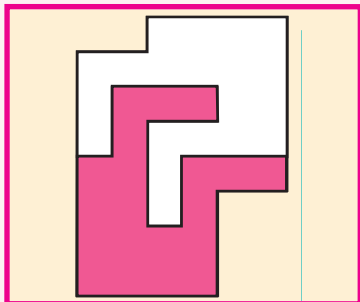
### Pour en savoir (un peu) plus

*The unexpected hanging and other mathematical diversions.* Martin Gardner, Simon and Schuster, 1969.

*Figures coupables.* Pierre Berloquin, rubrique «Jeux et paradoxes», *Science et Vie* 644, mai 1971.

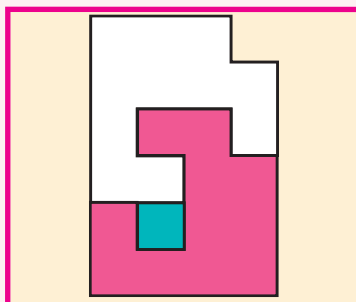
*Penrose tiles to trapdoor ciphers.* Martin Gardner, W.H. Freeman and Co., 1988.

*Splitting a polygon into two congruent pieces.* Kimmo Eriksson, *The American Mathematical Monthly* 103 (5), 1996.



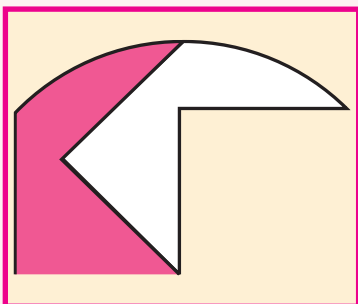
*La solution de la première énigme  
(sans trou).*

© M.C. 2023



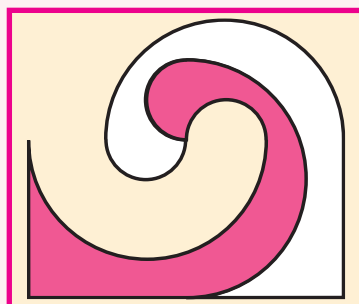
*La solution de la deuxième énigme  
(avec trou).*

© M.C. 2023



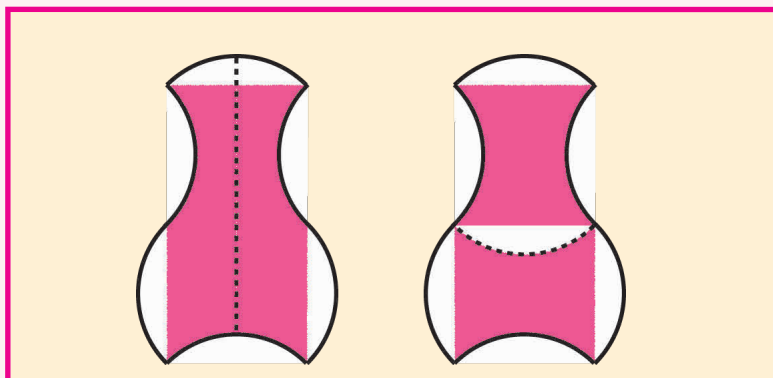
*La solution de la troisième énigme  
(avec des contours droits et courbes).*

© M.C. 2023



*La solution de la quatrième énigme  
(avec des contours courbes).*

© M.C. 2023



*La solution de la dernière énigme (la carafe).*

© M.C. 2023

## LA TORTUE QUI PRENAIT SON CHAPEAU POUR EINSTEIN

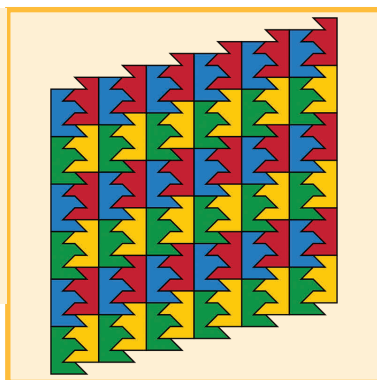
Enka Blanchard et Florentin Waligorski

Chercheuse transdisciplinaire (CNRS, LAMIH et Centre Internet et Société)  
Journaliste scientifique

Nous sommes le 8 août 1900 à la Sorbonne, où a lieu le deuxième Congrès international des mathématiciens. David Hilbert (1862–1943) vient d’y présenter une liste de vingt-trois problèmes qu’il considère importants pour faire avancer les mathématiques. Celui qui nous intéresse, le numéro 18, concerne la géométrie dans l’espace. Il demande s’il est possible de trouver une forme tridimensionnelle (un polyèdre) qui peut remplir un espace avec une contrainte majeure. Peu importe l’agencement infini, il existera deux éléments tel que le second n’est pas simplement une symétrie du premier. Si Hilbert propose ce problème directement en trois dimensions, c’est probablement parce que la question semblait trop simple en 2D. Le mathématicien allemand avait tort. Car si son confrère Karl August Reinhardt (1895–1941) montre en 1928 qu’un tel polyèdre existe effectivement, il faudra attendre 1935 pour que leur compatriote Heinrich Heesch (1906–1995) résolve le cas bidimensionnel. Ce dernier trouve une forme H telle que tout pavage du plan à l’aide de H a besoin d’au moins deux classes de symétrie (voir aussi la brochure *Croquons les maths Express* éditée par le CIJM en 2021).

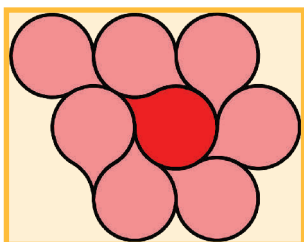
Pavage du plan avec la tuile de Heesch H :  
les tuiles bleues et vertes présentent une classe de symétrie (de translation), les tuiles jaunes et rouges présentent une autre classe de symétrie (de translation également), et H ne peut pas paver le plan en utilisant uniquement qu’une seule de ces deux classes de symétrie.

© David Eppstein, 2013



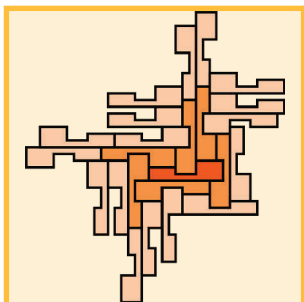
Heesch en profite pour proposer une conjecture, qui reste ouverte à ce jour. Supposons que l’on ait une forme 2-dimensionnelle T (qu’on va appeler *tuile*

et qui peut être un polygone) et qu'on essaie de couvrir le plan avec des exemplaires de T en faisant des cercles concentriques à partir d'une tuile centrale. Ou bien on arrivera à couvrir tout le plan (ce qui donne un *pavage* par la tuile), ou bien on arrivera à un moment à un problème, à savoir une zone du plan qui ne peut être couverte sans collision de deux tuiles T. On compte alors le nombre de tuiles qui séparent, «en ligne droite», la tuile centrale de l'espace vide le plus proche. On l'appelle le *nombre de Heesch*. Alors qu'on ne connaissait que des tuiles avec un nombre de Heesch égal à 1, le mathématicien allemand conjectura que, quel que soit l'entier  $n \geq 1$ , il existe une tuile possédant un nombre de Heesch égal à  $n$ . Il faudra attendre plus de vingt ans pour avoir le premier exemple avec un nombre de Heesch égal à 2, le record actuel étant à 6.

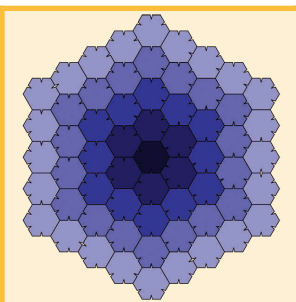


La tuile de Lietzmann (Walther Lietzmann, 1928) possède un nombre de Heesch égal à 1.  
© Shankarsivarajan, 2023

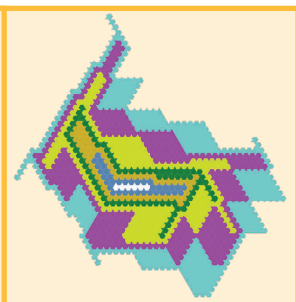
La conjecture de Heesch est liée à un autre problème : celui du pavage apériodique du plan. Le but n'est plus de paver un grand ensemble fini, mais le plan tout entier. Avec un ensemble de tuiles, on vérifie donc si elles permettent de paver le plan (sans laisser de zone vide). C'est immédiat avec des carrés ou des hexagones. Cependant, ces pavages possèdent de nombreuses symétries et le même motif se répète sans arrêt par translation – comme du papier peint ou du carrelage de salle de bains. Avec des rectangles, on peut déjà avoir des pavages plus «étranges», comme une ligne



La tuile de Fontaine (Anne Fontaine, 1991) possède un nombre de Heesch égal à 2.  
© Shankarsivarajan, 2023



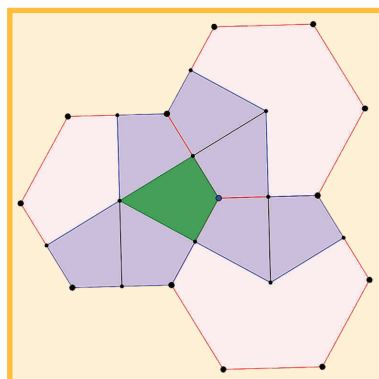
La tuile d'Ammann (Robert Ammann, 1995) possède un nombre de Heesch égal à 3 (en effet, dans la quatrième couche, en bas, à gauche, apparaît un minuscule trou qui empêche cette couche d'être complète).  
© Shankarsivarajan, 2023



La tuile de Bašić (Bojan Bašić, 2020) possède un nombre de Heesch égal à 6.  
© Bojan Bašić / Mario23, 2022

de rectangles à l'horizontale au milieu d'un pavage où les autres sont tous à la verticale. Ce pavage se répète déjà moins, ou plutôt dans une seule direction. Mais ce qui nous intéresse n'est pas tant la possibilité de paver le plan sans répétition que l'*impossibilité de le paver de manière périodique*.

Un ensemble de tuiles conduit à un *pavage apériodique* s'il permet de paver le plan sans qu'aucun des pavages possibles par ces tuiles ne soit invariant par translation. Autrement dit, peu importe comment on organise les tuiles, on ne pourra *jamais* trouver deux tuiles telles qu'une translation du pavage qui amène l'une sur l'autre laisse le pavage inchangé. La possibilité de trouver de tels ensembles de tuiles n'était pas évidente ! Elle fut conjecturée en 1961 par le mathématicien sino-américain Hao Wang (1921 – 1995). Cinq ans plus tard, son élève Robert Berger (né en 1938) trouvait le premier ensemble avec la bonne propriété, composé de 20 426 tuiles, rapidement réduit à 104, puis à 6 en 1971. Enfin, Roger Penrose (né en 1931) propose en 1974 un ensemble de deux tuiles formant un pavage apériodique. La question, au point mort depuis 1974, était alors de savoir si deux tuiles étaient nécessaires (c'est la *conjecture einstein*, à la suite d'un jeu de mot car en allemand *einstein* signifie « une pierre », « une tuile »).



Les trois hexagones qui composent le chapeau sont en rouge. Le chapeau lui-même, constitué de huit cerfs-volants, est en bleu. L'un des cerfs-volants est en vert.

© Enka Blanchard

Une cinquantaine d'années plus tard, David Smith, un passionné de puzzles géométriques britannique, tombe sur une forme qui conduit à des motifs géométriques exotiques. Cette dernière, qu'il appelle le *chapeau*, peut se former à partir de trois hexagones. Ou plutôt, à partir de huit cerfs-volants : une part d'hexagone passant par le centre et le milieu de deux côtés. Le chapeau peut aussi être réalisé en origami.

Son chapeau en poche en novembre 2022, David Smith contacte Craig Kaplan, chercheur en informatique à l'université de Waterloo (Canada), afin de vérifier les propriétés de l'objet. Première étape : utiliser un programme pour calculer le nombre de Heesch du chapeau. Et là, tous les deux se rendent compte (avec un exemple) que ce nombre ne peut pas être inférieur à 16. Il y a alors trois possibilités.

Ou bien ils ont explosé le record pour le nombre de Heesch (alors égal à 6). Ou alors ils ont enfin résolu une conjecture ouverte depuis une cinquantaine

d'années. Ou enfin il est possible de paver le plan avec le chapeau, mais le pavage n'est pas apériodique (mais a des motifs de très grande taille).

### Des mathématiques d'amateurs

Avant l'essor des mathématiques et leur professionnalisation au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, il n'était pas si évident de faire la distinction entre mathématiciens amateurs et professionnels, tant les pratiques étaient similaires. Malheureusement, avec le temps cette distinction s'est empreinte d'une certaine connotation péjorative, peu méritée au vu des contributions significatives de ces recherches en dilettante, surtout au cours de ces dernières années.

Dans le domaine des pavages, le mathématicien amateur américain Robert Ammann (1946 – 1994) a grandement contribué à la théorie des quasi-cristaux (voir l'article *Des cristaux à la carte* dans cette brochure) et aux pavages apériodiques, bien que ses recherches aient pu être considérées au début comme récréatives. Sans formation en mathématiques, l'Américaine Marjorie Rice (1923 – 2017) a découvert de nombreux pavages pentagonaux et contribué à leur classification formelle. David Smith lui-même est un ancien technicien d'impression, actuellement retraité. Après plusieurs années de recherche, il finit par découvrir le motif dont il est question ici. Chapeau l'artiste ! Que l'on soit alors professionnel ou non, il est important que tout le monde puisse contribuer à une science citoyenne (voir à ce sujet la brochure *Maths jeux culture Express*, CIJM, 2019).

Les deux complices sollicitent alors l'aide de Joseph Samuel Myers et Chaim Goodman-Strauss afin de prouver les deux propriétés qu'ils pensent être vraies : le chapeau pave bien le plan, et ce pavage est apériodique. Le 20 mars 2023, un article de quatre-vingt-neuf pages est mis à la disposition du public.

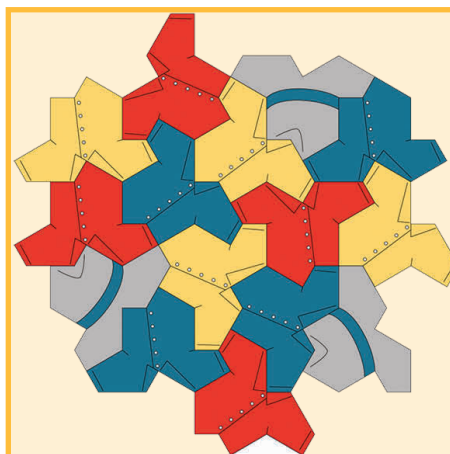
Ce texte est étonnant pour plusieurs raisons, au-delà même du « simple » fait qu'il résolve une vieille conjecture. D'une part, les auteurs proposent deux preuves distinctes de leur résultat. La première affine une méthode déjà utilisée et montre que les chapeaux forment des structures hiérarchiques, qui ne peuvent pas être périodiques. La seconde preuve introduit une nouvelle technique dans le domaine. Elle commence par établir que, si un pavage par le chapeau est périodique, ce même pavage peut être interprété comme un pavage par deux autres tuiles (dont la construction est liée au chapeau), l'une des deux ayant deux fois l'aire de l'autre. Or, si ce pavage était périodique, la distance entre les répétitions des tuiles serait contrainte par les symétries

nécessaires à être de la forme  $\sqrt{(u+v)^2 - uv}$  pour  $u$  et  $v$  deux entiers. Cette distance ne peut donc pas être  $\sqrt{2}$ , alors que cette valeur serait nécessaire



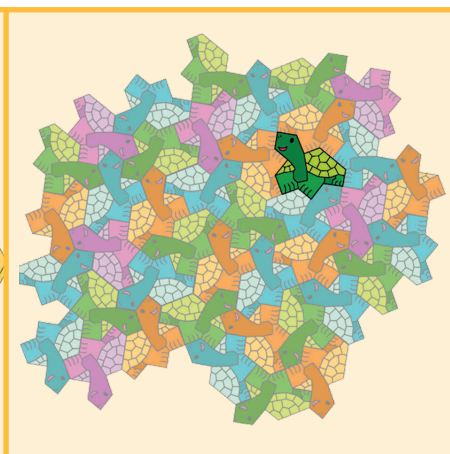
pour assurer le ratio entre les aires des deux tuiles, ce qui donne la contradiction recherchée et prouve l'apériodicité.

D'autre part, alors que ses co-auteurs s'affairaient à établir les preuves mathématiques, Smith avait renouvelé son exploit en trouvant une deuxième tuile semblant avoir les mêmes propriétés, composée de dix cerfs-volants et surnommée la *tortue*. Ce qui ressemblait à une drôle de coïncidence n'en était pas une : les deux tuiles étaient liées. L'équipe réussit même à prouver un résultat spectaculaire : il existe un continuum de formes géométriques qui passe par le chapeau et la tortue en faisant varier un unique paramètre (le rapport entre les longueurs de deux côtés du polygone). Exceptés les extrémités du continuum et le point médian, toutes les autres valeurs du paramètre menaient à une « *tuile einstein* » !



Pavage avec le chapeau et des « chemises » en miroir.

© Robert Fathauer, 2023

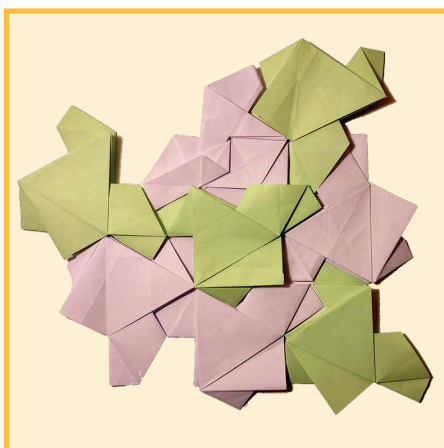


Pavage avec la tortue.

© Yoshiaki Araki, 2023

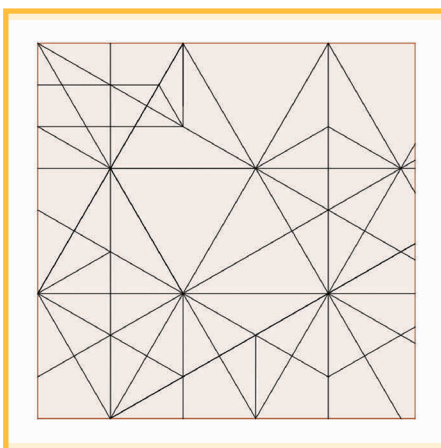
L'article mis en ligne, sur le serveur de prépublications Arxiv (une archive en accès libre où les articles scientifiques sont déposés avant l'évaluation par les pairs afin de faciliter leur distribution), est aujourd'hui en cours d'évaluation afin de vérifier la solidité des preuves. Toute la communauté est en ébullition. De nombreux problèmes ouverts, dont la conjecture de Heesch, pourraient tomber grâce aux nouvelles méthodes et au regain d'intérêt sur le sujet. Les auteurs ont mis en ligne de nombreuses ressources, à la fois pour s'amuser avec le chapeau et l'utiliser dans des designs variés. On le voit décliné à toutes les sauces : origamis, modèles imprimés en 3D, mugs, pâtisserie, ballons de foot, vêtements...

*E.B. & F.W.*



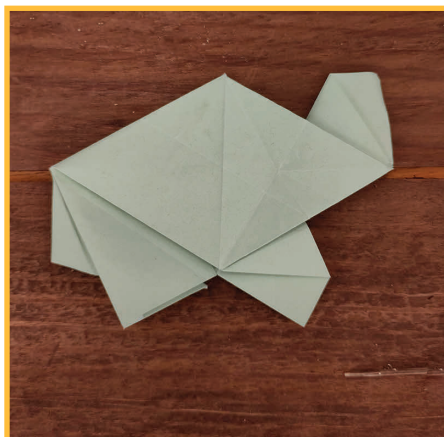
Le chapeau réalisé en origami ...

©FW, 2023



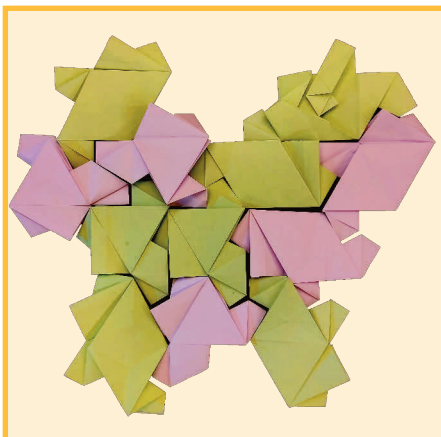
... et la carte de pliage correspondante.

©FW, 2023



La tortue réalisée en origami  
(création originale du second auteur).

FW, 2023



Peut-on paver le plan  
avec une combinaison des deux tuiles ?  
Si oui, quelles en seraient les propriétés ?

©FW, 2023

### Pour en savoir (un peu) plus

Pour réaliser le chapeau en origami, consultez la vidéo explicative «The Hat aperiodic monotile origami» de Florentin Waligorski sur la chaîne YouTube Flow Motion, 3'47", 2023 :

<https://youtu.be/BoAx-rLo5P0>

Pour réaliser la tortue en origami, consultez la vidéo explicative «Turtle aperiodic monotile origami» de Florentin Waligorski sur la chaîne YouTube Flow Motion, 3'06", 2023 :

<https://youtu.be/CbviNbdAOIw>

## LES MATHÉMATIQUES DES CARTES ANIMÉES



Jean-Jacques Dupas

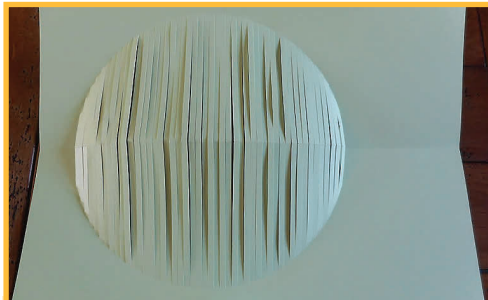
Président de l'association PlayMaths

La géométrie « classique » est celle de la règle et du compas. Pourquoi se limiter à ces deux instruments ? Dans l'Antiquité, au IV<sup>e</sup> siècle avant notre ère, Platon accusait déjà Eudoxe d'utiliser des mécanismes pour résoudre le problème de la duplication du cube.

Les mathématiques s'écrivant sur des feuilles de papier, surfaces à deux dimensions, la représentation de la troisième dimension est un problème. Le pli issu du pliage de la feuille de papier peut-il être une solution ? L'origami nous montre que oui. Mais pourquoi exclure la découpe de la feuille ? Dès le XVII<sup>e</sup> siècle sont apparus des livres avec des cartes animées (*pop-up* en anglais) afin d'exploiter cette troisième dimension. Les auteurs ont alors rivalisé d'astuces et d'ingéniosité pour construire des mécanismes élaborés permettant de faire apparaître des volumes. Focalisons-nous ici sur des cartes animées élémentaires permettant la transformation de courbes géométriques.

### Heaume, *sweet* heaume : une visière en bandelettes de papier

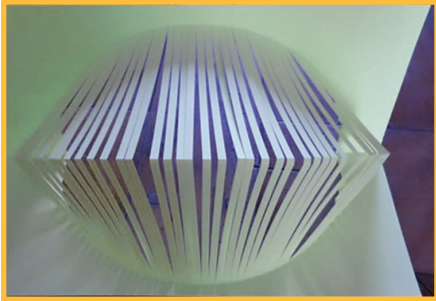
L'ingénieure Stephanie Jakus et le mathématicien Joseph O'Rourke se sont intéressés à la carte suivante : on plie la carte en deux volets (*pli vallée*) et au milieu on dessine un cercle. Dans l'espace délimité par le cercle, on découpe de fines bandes de papiers. Si l'on replie les bandes de papier (*pli vallée*) vers l'extérieur à l'ouverture de la carte sur le cercle et que les bandelettes sont pliées (*pli montagne*) sur le diamètre, on obtient une figure ressemblant à la visière d'un heaume.



Le découpage et les plis de la visière du heaume.

© J.-J. D.

Nos deux auteurs se sont interrogés sur la nature de la courbe obtenue au niveau de l'arête de la visière dans un plan médian des deux faces de la carte.



La visière du heaume.

© J.-J. D.

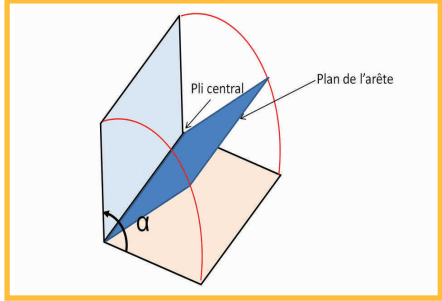
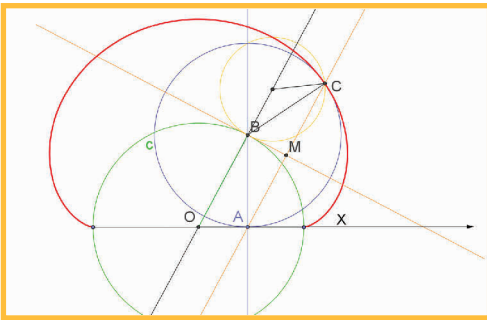


Schéma de la carte animée.

© J.-J. D.

Quand la carte est complètement ouverte ( $\alpha = 180^\circ$ ), c'est-à-dire que les deux volets de la carte reposent sur le même plan, la courbe est le diamètre du cercle de départ. Dans un premier temps, on peut limiter notre étude au cas où la carte est complètement fermée ( $\alpha = 0^\circ$ ), les volets supérieur et inférieur se superposent. À cause du pli, au niveau du cercle de base, la bandelette [AB] de papier se plie, la bandelette [BC] se situant de part et d'autre de la tangente au cercle de base, la droite (AC) étant perpendiculaire à la tangente en B au cercle de base.

Si le cercle C est de rayon 1 et centré sur l'origine, considérons un axe des abscisses sur le pli de la feuille. Les calculs montrent que la courbe obtenue est une néphroïde (du grec *nephros*, «rein», et *eidos*, «forme»).



Cette courbe aurait aussi pu être obtenue par la rotation d'un cercle de rayon 1/2 sur le cercle C (le cercle orange sur la figure, de rayon 1/2, roule sans glisser sur le cercle vert).

La figure obtenue quand  $\alpha = 0^\circ$ .

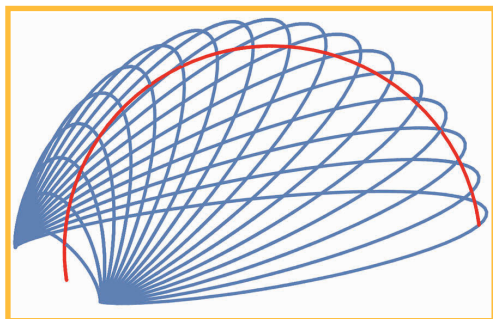
© J.-J. D.

C'est aussi l'enveloppe des cercles dont le centre se trouve sur le cercle C, et tangents au pli de la feuille (le cercle bleu sur la figure de centre B et tangent au pli (Ox)).

## En passant à l'espace : toujours des néphroïdes

Soit le volet du dessous fixe dans le plan  $(xOy)$  et le volet du dessus faisant un angle  $\alpha$  par rapport au plan précédent. Pour des raisons de symétrie, l'arête se trouve dans le plan médian, qui fait un angle  $\alpha/2$  avec le plan  $(xOy)$ . Un point de l'arête est relié au cercle (du volet du dessous) par une lamelle de longueur  $R$  en  $B$ , un point de l'arête est aussi relié au cercle (du volet du dessus) par une lamelle de longueur  $R$  en  $B_1$ . Un point de l'arête appartient donc à un cercle du plan médian, intersection de deux sphères centrées en  $B$  en  $B_1$ .

À cause du pli tangent au cercle, la bandelette de papier va toujours faire le même angle en se déplaçant. Ainsi, un point de l'arête va parcourir, lors de la rotation du volet supérieur, un demi-cercle perpendiculaire au plan du volet inférieur. Ce demi-cercle, en rouge sur la figure suivante, se trouve dans un plan perpendiculaire à  $(Oxy)$  et passe par  $A$  et  $C$ . Un point de notre courbe est donc l'intersection de deux sphères, du plan médian et de ce dernier plan vertical. Tous calculs faits, cela conduit également à des néphroïdes.



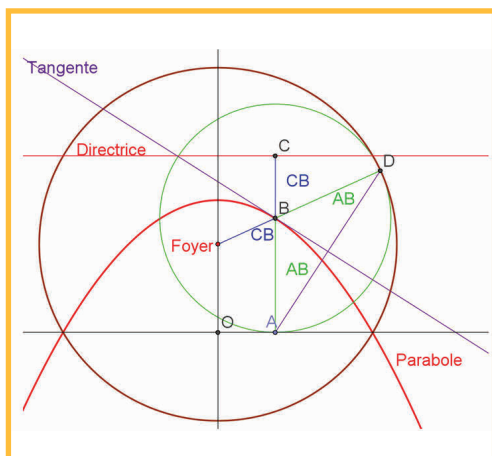
Les différentes courbes obtenues  
pour  $\alpha$  compris entre  $0^\circ$  et  $170^\circ$ .

© J.-J. D.

Voyons maintenant le problème inverse. Si, en partant d'un cercle, on obtient une néphroïde, la question suivante est légitime : de quelle courbe doit-on partir pour obtenir un cercle à l'ouverture du volet de la carte ?

Il faut partir d'une parabole ! Ce résultat a été démontré analytiquement. Mais voici une très jolie démonstration purement géométrique due à François Lavallou et validée par Joseph O'Rourke.

La courbe de départ est une parabole (en rouge sur la figure) définie par son foyer et sa directrice (également en rouge). Pour une bandelette de papier [AB] perpendiculaire à la directrice, la longueur AC est constante, (AC) coupe la parabole en B. (AB) se reflète à travers une droite passant par le foyer. Le point D obtenu sur cette droite tel que  $AB = BD$  définit un cercle (en noir) dont le centre est le foyer de la parabole et le rayon AC.



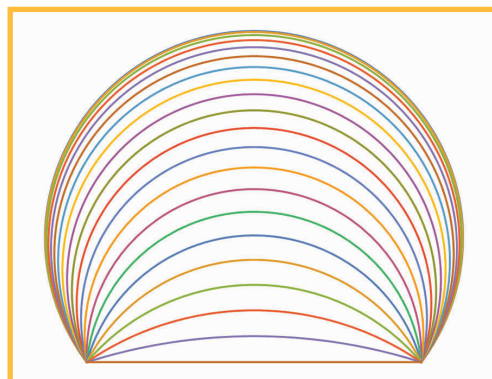
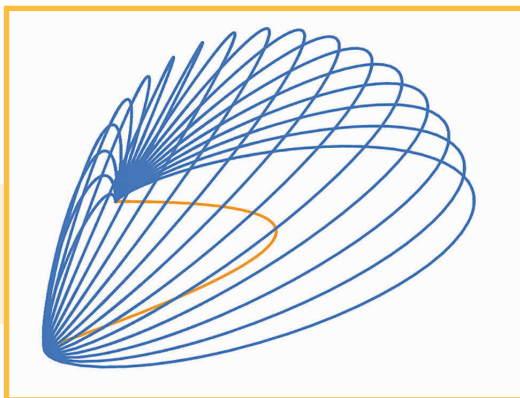
Pour une bandelette de papier [AB] perpendiculaire à la directrice, la longueur AC est constante, (AC) coupe la parabole en B. (AB) se reflète à travers une droite passant par le foyer. Le point D obtenu sur cette droite tel que  $AB = BD$  définit un cercle (en noir) dont le centre est le foyer de la parabole et le rayon AC.

La courbe de départ doit être un arc de parabole.

© J. J. D.

En brun, la parabole du volet inférieur.  
En bleu, les arcs de cercles obtenus pour  $\alpha$  compris entre  $0^\circ$  et  $170^\circ$ .

© J. J. D.

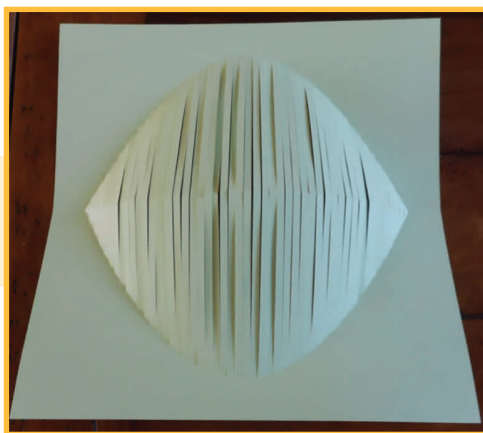


La projection des différents arcs de cercles obtenus.

© J. J. D.

Le découpage et les plis suivant deux arcs de parabole.

©J.-J. D.



Pour un angle donné, l'arête dessine un cercle dans le plan médian.

©J.-J. D.

Un calcul similaire montre que, pour des angles différents de  $0^\circ$ , on obtient des cercles dans le plan médian. C'est un résultat obtenu par l'auteur.

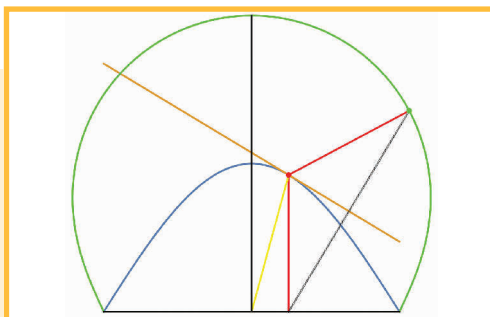
## Au-delà du cercle : le monde des fonctions trigonométriques

Les plus curieux remarqueront qu'en prenant une fonction cosinus on obtient une courbe «proche» du cercle :

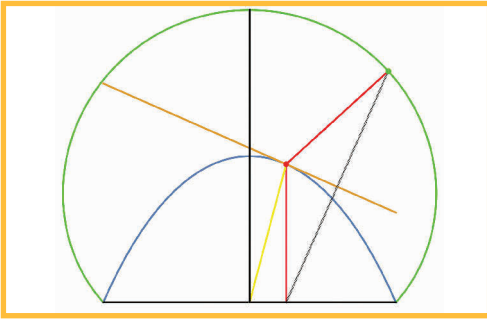
La courbe obtenue (en vert) à partir d'une fonction cosinus dessinée en bleu et qui, au réel  $x$ , associe  $\cos(\pi x / 2)$ .

Le point courant est en rouge, la tangente en ce point est en brun.

©J.-J. D.



Il en va de même pour un cosinus hyperbolique :



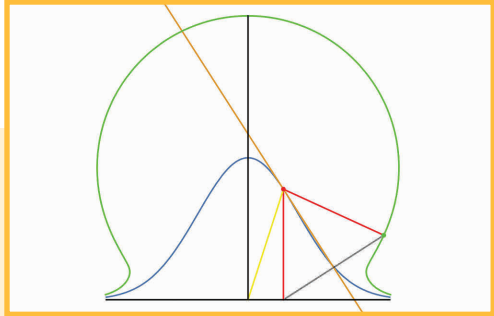
La courbe obtenue (en vert) à partir d'une fonction cosinus hyperbolique dessinée en bleu et qui, au réel  $x$ , associe  $2 - \text{ch}(\text{Argch}(2) - x)$ .  
Le point courant est en rouge, la tangente en ce point est en brun.

© J.-J. D.

En partant d'une courbe en cloche, on atteint des sommets géométriques :

La courbe obtenue (en vert) à partir d'une fonction « en forme de cloche » (en bleu). Le point courant est en rouge, la tangente en ce point est en brun.

© J.-J. D.



À vous d'essayer d'autres courbes originales pour les plis initiaux ! La question inverse, trouver une formule générale permettant de trouver la forme du pli initial en fonction de la forme que l'on veut obtenir, ne paraît pas trivial. Mais qui sait, peut-être que cette exploration féconde n'attend qu'un lecteur patient et féru de géométrie...

J.-J. D.

### Pour en savoir (un peu) plus

*From pop-up cards to coffee-cup caustics: the knight's visor.* Stephanie Jakus et Joseph O'Rourke, 2012, disponible en ligne.

*A history of folding in mathematics, mathematizing the margins.* Michael Friedman, Birkhäuser, 2019.



## DES MATHS CACHÉES DANS LES TOURS DE CARTES



Dominique Souder

Animateur et mathémagicien

L'obscurité s'installe dans la salle, le silence se fait, le rideau se lève après les trois coups. Le magicien arrive sur la scène. Il tient dans les mains un jeu de tarot standard, comportant soixante-dix-huit cartes, dont il montre les faces visibles, en expliquant qu'il y a vingt-deux cartes spéciales : les *atouts*, figures numérotées de 1 à 21, et l'*Excuse*, marquée d'une étoile. Il les sort du jeu et les étale, visibles, dans l'ordre, sur une table. Le 21 est à gauche, le 1 à droite, puis l'*Excuse* à sa droite, en une seule ligne. Il demande à un spectateur, choisi au hasard dans la salle comble venue l'acclamer, de bien mélanger les cinquante-six autres cartes, puis de les étaler, visibles, sur la table. Le magicien les ramasse alors dans l'ordre, de gauche à droite, et pose le paquet des cinquante-six cartes faces cachées sur la table. Il reprend les vingt et un atouts et l'*Excuse*, puis en distribue 16, faces cachées (les atouts numéros 21 à 6), selon la disposition mémorisée suivante (à gauche). Les six cartes non utilisées sont écartées sur la table.

<b>21</b>	<b>20</b>	<b>19</b>	<b>18</b>		<b>21</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>18</b>
<b>17</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>14</b>		<b>10</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>13</b>
<b>13</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>10</b>		<b>14</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>		<b>9</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>6</b>

Le magicien échange alors certaines cartes de position, en disant qu'il faut encore mélanger les valeurs : en fait, il permute les cartes situées sur les bords en positions symétriques par rapport au centre du carré, à l'exception des quatre coins, et obtient la disposition de droite. Il prend un bout de papier et écrit une prédiction (le nom d'une carte) que le spectateur ne verra qu'à la fin du tour.

## L'astuce : l'arrivée inattendue d'un carré multimagique

Le magicien demande au spectateur de choisir, dans le carré de seize cartes, soit une ligne horizontale, soit une colonne verticale, soit une grande diagonale. Les quatre cartes sont retournées. Le spectateur doit ajouter leurs valeurs ; il trouve invariablement 54 (par exemple,  $21 + 7 + 8 + 18$ ). Le magicien aurait pu aussi proposer de choisir l'un des quatre quarts du carré, ou bien le carré de quatre cases centrales, ou encore l'ensemble des quatre coins, ou enfin les quatre cases réunissant deux demi-diagonales opposées (comme  $10 + 7 + 20 + 17$ ) : le total aboutit toujours à 54. Il a conçu un carré magique, et même multimagique ! Avoir trouvé cet objet et amener naturellement, durant le spectacle, à sa construction : voici en réalité les clés du tour.

Le magicien demande au spectateur de regarder la carte du jeu de tarots qui se trouve en cinquante-quatrième place à partir du haut du paquet. On confronte cette carte avec la prédiction écrite par le magicien sur son papier : elles coïncident. Quand les cinquante-six cartes mélangées ont été étalées, faces visibles, le magicien avait regardé la troisième visible à partir du dessous (c'est bien la cinquante-quatrième à partir du haut si l'on tient les cartes faces cachées). C'est son nom qu'il a écrit sur le papier de prédiction.



## De la routine d'un tour de cartes à une formule cachée

Beaucoup de magiciens passent de longs moments à mettre au point des tours. Ils ne se rendent pas toujours compte qu'un peu de maths pourraient leur permettre de gagner du temps ou de soulager leur mémoire. Ainsi, certains auteurs ne sont pas conscients, lorsqu'ils rédigent leurs ouvrages, de la structure mathématico-logique qui permet la réussite du tour qu'ils présentent... et dont les détails et explications sont de fait parfois confus, obscurs, ou inutilement longs et complexes. Voici en exemple la routine du tour «La carte visualisée», puis la formule mathématique cachée qui fait «marcher» le tour de manière automatique.

Faites mélanger un jeu d'au moins trente cartes, puis reprenez-le, faces cachées. Dites au spectateur qu'il devra choisir d'un coup d'œil une carte parmi celles que vous allez lui montrer ensuite (le valet de pique par exemple).

*Première étape*: prenez les cinq premières cartes, «éventaillez»-les faces visibles en les tenant verticales devant les yeux du spectateur (le magicien les voit de dos). Demandez-lui de repérer la position de la carte qu'il choisira dans cet ensemble (à partir de sa gauche, ce sera un nombre entre 1 et 5). Bien lui laisser le temps de regarder les cartes, puis les poser telles quelles, faces cachées, sur la table en refermant l'éventail. Ainsi, la première du paquet initial sera la cinquième à partir du bas de la pile.

Faites de même cinq fois encore, afin d'obtenir six paquets de cinq (trente cartes) posées en piles sur la table. Reconstituez le jeu.

*Seconde étape*: recommencez ces manipulations, mais en prenant cette fois-ci six cartes (et non cinq). Dans l'une des nouvelles propositions de six cartes, le spectateur mémorise (à partir de la gauche) la nouvelle position de sa carte, celle qu'il a choisie à l'étape précédente; ce sera cette fois un numéro de 1 à 6. Cette activité est à faire cinq fois en tout. Remplacez ensuite les cinq piles de six cartes pour reformer le jeu. Demandez au spectateur de dire les positions qui ont été occupées par sa carte (par exemple, le valet de pique choisi secrètement par le spectateur se trouve en 5, puis en 3; ce sont ces deux nombres qu'il fournit au magicien).

Première étape :  
le valet de pique  
se trouve en cinquième place.

©D.S., 2022



Seconde étape :  
le valet de pique  
se trouve en troisième place.

©D.S., 2022



Le magicien additionne alors, parmi les listes suivantes, les deux termes correspondant aux deux positions fournies par le spectateur :

**Étape 1** : 25 pour la position 1, 19 pour la 2, 13 pour la 3, 7 pour la 4 et enfin 1 pour la 5.

**Étape 2** : 0 pour la position 1, 7 pour la 2, 14 pour la 3, 21 pour la 4, 28 pour la 5 et enfin 35 pour la 6.

Le magicien trouve ainsi la position de la carte choisie, à partir du haut du jeu. Dans notre exemple, la position 5 à l'étape 1 correspond à 1, que l'on additionne au 14 correspondant à la position 3 à l'étape 2. On obtient 15 : la carte se trouve en quinzième position dans le jeu, à partir du haut (faces cachées).

## Une véritable enquête dans le monde des cartes à jouer

Menons maintenant les investigations et décortiquons mathématiquement ce qui est en jeu dans ce tour. Dans la seconde étape, relevons quels cartons parmi les trente, numérotés de 1 à 30, occupent les différentes positions.

La position 1 est occupée par les cartons 1, 7, 13, 19, 25.

La position 2 est occupée par les cartons 2, 8, 14, 20, 26.

La position 3 est occupée par les cartons 3, 9, 15, 21, 27.

La position 4 est occupée par les cartons 4, 10, 16, 22, 28.

La position 5 est occupée par les cartons 5, 11, 17, 23, 29.

La position 6 est occupée par les cartons 6, 12, 18, 24, 30.

De même, dans la première étape, relevons quels cartons parmi les trente, numérotés de 1 à 30, occupent les différentes positions.

La position 1 est occupée par les cartons 1, 6, 11, 16, 21, 26.

La position 2 est occupée par les cartons 2, 7, 12, 17, 22, 27.

La position 3 est occupée par les cartons 3, 8, 13, 18, 23, 28.

La position 4 est occupée par les cartons 4, 9, 14, 19, 24, 29.

La position 5 est occupée par les cartons 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Après la première étape, les trente cartons sont rangés de haut en bas, faces cachées, dans l'ordre des numéros : 26, 27, 28, 29, 30, 21, 22, 23, 24, 25, 16, 17, 18, 19, 20, 11, 12, 13, 14, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5.

Si l'on applique à cette liste la seconde étape des manipulations, les cartons vont alors se retrouver dans les positions suivantes.

La position 1 sera occupée par les cartons 5, 9, 13, 17, 21.

La position 2 sera occupée par les cartons 4, 8, 12, 16, 30.

La position 3 sera occupée par les cartons 3, 7, 11, 25, 29.

La position 4 sera occupée par les cartons 2, 6, 20, 24, 28.

La position 5 sera occupée par les cartons 1, 15, 19, 23, 27.

La position 6 sera occupée par les cartons 10, 14, 18, 22, 26.

Après la deuxième étape, les trente cartons sont rangés de haut en bas, faces cachées, dans l'ordre des numéros : 10, 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 6, 7, 8, 9, 18, 19, 20, 11, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 16, 17, 26, 27, 28, 29, 30, 21.

Selon les valeurs ( $v_1$ ,  $v_2$ ) que le spectateur annonce à la fin au magicien, on obtient les correspondances suivantes : pour (1, 1), la carte est en position 25 ; pour (1, 2), elle est en 2 ; pour (1, 3), en 9 ; pour (1, 4), en 16 ; pour (1, 5), en 23 ; pour (1, 6), en 30 ; pour (2, 1), en 19, et on continue ainsi jusqu'au couple (5, 6) en place 6. Les trente positions obtenues sont, en suivant cet ordre : 25, 2, 9, 16, 23, 30, 19, 26, 3, 10, 17, 24, 13, 20, 27, 4, 11, 18, 7, 14, 21, 28, 5, 12, 1, 8, 15, 22, 29, 6.

À partir du premier entier, 25, obtenu pour les valeurs (1, 1), on remarque que la suite :

- augmente de 7 régulièrement. Il faut penser que  $25+7=32$ , qui est comme 2 ; puis  $2+7=9$  ;  $9+7=16$  ;  $16+7=23$  et  $23+7=30$  ;
- on atteint alors les couples avec la valeur 2 pour la première étape ;
- la série avec la valeur 2 pour l'étape 1 se distingue de la précédente par une valeur diminuée de 6 (par exemple,  $25-6=19$ ) ;
- les valeurs augmentent alors pour la seconde étape, valant de 7 en 7 à partir de 19 : 26, 3, 10, 17, 24 ;
- on arrive à la série avec la valeur 3 pour la première étape, qui va commencer avec 6 de moins que la précédente (par exemple,  $19-6=13$ , puis 20, 27, 4, 11, 18) ;
- on poursuit en diminuant de 6 par 7, 14, 21, 28, 5, 12, et ainsi de suite.

Deux mécanismes sont donc à l'œuvre : pour une même première étape, l'augmentation de 7 en 7, éventuellement en retranchant 30 si le résultat devient supérieur à 30 ; la diminution de la première valeur de 6 quand on passe d'une position de la première étape à la suivante.

## À la recherche d'une formule utile au magicien sur scène

On sait que  $1 \leq v_1 \leq 5$  et  $1 \leq v_2 \leq 6$ . La première valeur de position  $v_1$  vaut  $25 - 6(v_2 - 1)$ . Pour une même position  $v_1$ , on passe de la première valeur de  $v_2$  à celle de position  $v_2'$  en enlevant  $v_2' - 1$  fois le nombre 6 (et en ajoutant 30 si le résultat est négatif). Pour une même position  $v_2$ , on passe de la première valeur de  $v_1$  à celle de position  $v_1'$  en ajoutant  $(v_1' - 1)$  fois le nombre 7 (et en enlevant 30 si le résultat est supérieur à 30). La position de la carte de valeurs  $(v_1, v_2)$  est donc donnée par la formule  $25 + 7(v_2 - 1) - 6(v_1 - 1)$ , soit  $25 + 7v_2 - 7 - 6v_1 + 6 = 24 - 6v_1 + 7v_2$  (et en ajoutant 30 si le résultat est négatif).

C'est aussi simple que cela au final ! Cela valait la peine de décortiquer complètement le tour : au final, la formule obtenue,  $24 - 6v_1 + 7v_2$ , est élémentaire.

Ainsi, si le spectateur indique (3, 4), la valeur de sa carte est  $24 - 18 + 28 = 34$ , que le magicien corrige en  $34 - 30 = 4$ .

Vive, donc, les mathématiques, dont la compréhension permet de réussir des choses aussi incroyables et bluffantes que conviviales, et ce, automatiquement, facilement, en toute sécurité !

*D. S.*



L'auteur présentant une expérience de mathémagie.

©É. Thomas, 2018 (Paris)

### Pour en savoir (un peu) plus

*22 jolis tours de cartes mathématiques nécessitant un jeu de tarots.* Dominique Souder, BOD, 2022 (ebook).

*La mathémagie pour rêver et comprendre les maths.* Dominique Souder, Pascal Yves Souder et Cédric Anjot, BOD, 2023.

«Le club Maths et Magie de Dominique Souder.» Site Internet animé par l'auteur, à l'adresse [club-math-and-magie-souder.jimdosite.com](http://club-math-and-magie-souder.jimdosite.com).

## UN JEU DE CARTES

### POUR SIMULER TOUS LES ORDINATEURS

Enka Blanchard et Nath François

CNRS, LAMIH et Centre Internet et Société

Professeure d'informatique en CPGE,  
lycée Janson-de-Sailly

En septembre 2012, les fans du jeu de cartes à collectionner *Magic: The Gathering* (MTG, en français Magic : l'Assemblée, jeu créé en 1993 par Richard Garfield, spécialiste américain de combinatoire) ont vu fleurir des articles annonçant que leur jeu préféré pouvait simuler un ordinateur. Alex Churchill, un informaticien britannique passionné de jeux, avait passé plus de deux ans à concevoir une stratégie permettant cette prouesse en n'utilisant que les (très longues) règles de MTG et les cartes légales en tournoi. Un raffinement de 2014 garantit même qu'une fois la partie lancée, il est impossible de faire autre chose qu'exécuter la simulation.

Des années plus tard, le fait que l'on puisse simuler un ordinateur, dans un jeu qui n'a pas du tout été pensé pour, continue à surprendre. Mais on peut d'abord se demander ce que signifie « simuler un ordinateur » et quelles sont les particularités de Magic qui rendent l'exploit à la fois possible et surprenant.

Quand on dit qu'un ensemble de règles *simule un ordinateur*, il ne s'agit pas de reproduire le comportement des composants électroniques (processeur, bus, RAM...) à l'intérieur de la machine. Si ces éléments sont essentiels en pratique, l'informatique théorique se concentre généralement sur l'ordinateur « idéal », dont l'invention date de 1936, bien avant que le premier ordinateur n'existe. Lorsqu'on dit que quelque chose est *Turing-complet*, peu importe en quoi sont faites les pièces du jeu ou la hauteur de la table, seul compte l'ensemble de règles qui déterminent chaque action en fonction de l'état observé.

Dans le modèle le plus simple, une machine de Turing se compose d'une machine avec des états, que l'on peut représenter par des lettres, et une tête de lecture/écriture qui parcourt un ruban infini. Presque toutes les cases de ce ruban sont initialement vierges (on note une case vierge par  $\square$ ), tant que la machine ne les a pas utilisées. Une fois utilisées (ou si elles font partie de l'entrée), elles ne peuvent contenir qu'un bit d'information chacune : 0 ou 1. La machine suit des règles appelées *transitions*, de la forme : « Si la machine

est dans l'état X, et lit sur cette case le bit  $b$  appartenant à l'ensemble  $\{0; 1; \square\}$ , alors elle passe dans l'état  $X'$  (qui peut être égal à X), écrit  $b'$  (qui peut être égal à  $b$ , ceci revient à ne rien écrire) sur la case où elle se situe, et se déplace d'un cran vers la gauche/d'un cran vers la droite.» Un état a cependant un rôle particulier : l'état final, noté F. Quand la machine l'atteint, on dit qu'elle *termine* et on peut lire le résultat sur le ruban.

Pour faire un calcul, on place la machine dans son *état initial* et on lui fournit son *entrée* : en partant de la position initiale de sa tête de lecture, on écrit une suite finie de bits sur son ruban jusqu'à atteindre l'état final. Par exemple, la table ci-après montre la description d'une machine de Turing à trois états (l'état initial étant A) et six transitions. Son entrée est l'écriture binaire d'un nombre entier positif  $n$ , et la machine ajoute 1 à ce nombre. Si  $n$  est pair, c'est-à-dire si son écriture binaire se termine par 0, il suffit de changer ce dernier 0 en 1. En revanche, si  $n$  est impair, il faut effectuer une retenue et revenir en arrière jusqu'à trouver un 0 (ou une case vide à gauche du nombre) à changer en 1.

(A, 0) → (A, 0, ◀) : «Quand la machine est dans l'état A et lit le bit 0, elle reste dans l'état A, laisse le bit 0 inchangé et se déplace d'un cran vers la droite.»				
(A,1) → (A,1, ◀)	(A,◻) → (B,◻, ▶)	(B,0) → (F,1, ▶)	(B,1) → (B,0, ▶)	(B,◻) → (F,1, ▶)

Évidemment, rien ne garantit que la machine s'arrête un jour. Par exemple, on ne peut transitionner vers l'état final qu'en lisant un « 1 » sans qu'une règle permette d'écrire des « 1 ». Le mathématicien britannique Alan Mathison Turing (1912–1954) démontra qu'il n'est pas possible de déterminer avec certitude, pour toutes les machines, si elles s'arrêteront un jour. Aucune méthode générale ne permet de savoir si une machine va terminer à partir d'un état initial donné, à part l'exécuter et regarder si elle atteint l'état final. Hélas, si on ne l'a pas vue s'arrêter, on est généralement devant un problème indécidable : peut-être qu'on n'a pas assez attendu et qu'elle va «bientôt» s'arrêter, ou peut-être qu'elle va continuer indéfiniment.

C'est ce qui explique pourquoi on ne peut pas simplement se servir d'un ordinateur pour déterminer si une conjecture sur les nombres entiers est vraie. Par exemple, la conjecture de Goldbach affirme que tout nombre pair à partir de 4 est somme de deux nombres premiers (ainsi,  $4=2+2$ ,  $6=3+3$ ,  $8=3+5\dots$ ). Il est assez facile d'écrire une machine de Turing qui teste tous les nombres pairs à partir de 4, et s'arrête quand on en trouve un qui n'est pas somme de deux premiers. Mais on ne sait pas dire si cette machine s'arrête un jour : on a pour l'instant «seulement» testé les entiers jusqu'à  $10^{18}$ .



Certaines machines de Turing peuvent faire plus qu'ajouter 1 à un entier, et sont appelées « machines universelles ». Ce sont celles-ci qui vont correspondre à nos ordinateurs. On dit qu'une machine de Turing  $M$  est *universelle* s'il est possible de lui donner une entrée composée du « code » d'une machine  $M'$  quelconque, et d'une entrée  $e$  pour cette machine  $M'$ , de sorte que  $M$  *simule* alors le calcul que ferait  $M'$  sur  $e$ .

Une telle machine de Turing correspond (presque) à ce que fait un ordinateur : on fournit à l'ordinateur le code d'un programme, et il simule une machine qui exécute ce programme (ainsi, le même ordinateur peut avoir différents systèmes d'exploitation installés). Il en va de même pour un interpréteur comme « Python », à qui on fournit le code Python du programme que l'on veut interpréter : le programme joue le rôle de la machine  $M'$ , et l'interpréteur le rôle de la machine universelle  $M$ . On peut d'ailleurs écrire une machine de Turing qui joue exactement le rôle d'un interpréteur Python (c'est très fastidieux) ; la *thèse de Church–Turing* énonce que tout procédé automatique de calcul peut s'écrire comme une machine de Turing.

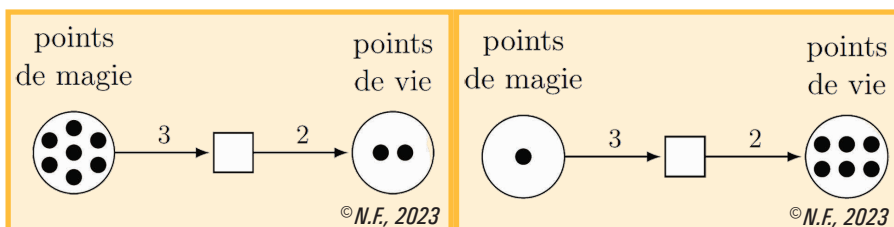
On dit que ces procédés sont *Turing-complets*, c'est-à-dire (presque) aussi puissants qu'une machine de Turing universelle. Pourquoi « presque » ? Parce que la machine de Turing dispose, on s'en souvient, d'un ruban (théorique) infini. Un ordinateur qui existe réellement sera limité par la mémoire disponible. Il n'est donc vraiment équivalent à une machine de Turing universelle que si on lui fournit autant de mémoire supplémentaire que ce qu'il demande.

## Des règles d'un jeu aux transitions d'une machine de Turing

Un jeu, à un ou plusieurs joueurs, implique des décisions. On peut se demander s'il est possible d'utiliser le jeu comme ruban et de demander aux joueurs d'agir comme une machine de Turing universelle.

Un jeu dispose d'un nombre fini de pièces (par exemple, MTG comporte environ vingt-cinq mille cartes différentes, mais dans une partie donnée les joueurs ont au plus, entre eux, quelques centaines de cartes). Pour faire un ruban infini, il faut donc que le jeu puisse avoir une infinité de *configurations*. Ici, cela désigne l'état de la partie : qui a quelles ressources, quel pion se situe où, etc. Cette condition suffit également : on peut assez facilement représenter avec un seul entier toute la configuration (l'état, la partie du ruban à gauche de la tête de lecture, et la partie du ruban à droite de la tête de lecture) d'une machine de Turing. Et si un jeu possède une infinité de configurations, on peut en attribuer une à chaque entier.

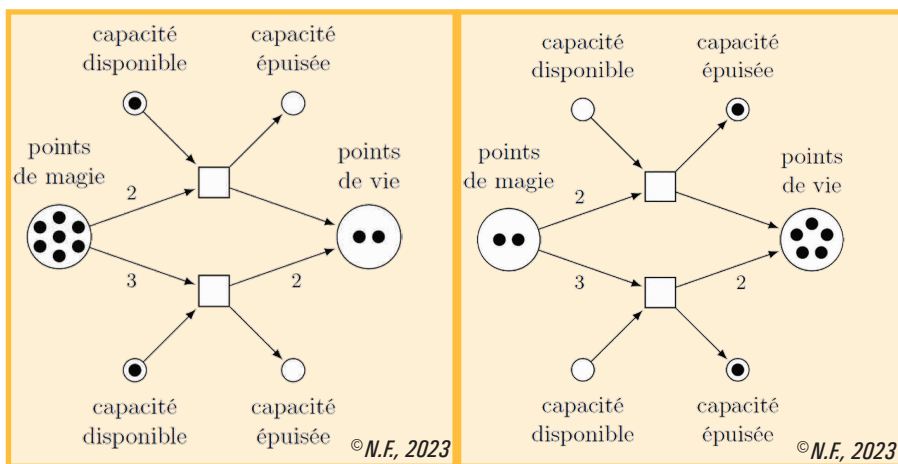
La question « Dans quels jeux les joueurs peuvent-ils décider de simuler une machine de Turing universelle ? » devient alors « Dans quels jeux peut-on représenter un nombre arbitrairement grand avec les configurations du jeu ? ». Dans de nombreux de jeux, dont MTG, les joueurs peuvent effectuer des actions qui coûtent un certain nombre de ressources et en rapportent d'autres. Les ressources sont en général d'un nombre fini de types (points de vie, points de magie, temps de jeu supplémentaire...) et peuvent donc se représenter par un entier par type de ressource. Un exemple serait « Payez trois points de magie pour gagner deux points de vie », ce que l'on peut reproduire tant qu'il nous reste au moins trois points de magie.



Dans ces jeux, certaines actions peuvent « s'épuiser » à chaque tour quand on les effectue. Ainsi, dans l'exemple précédent, même avec cent points de magie, on ne pourrait en payer que trois à chaque tour pour gagner deux points de vie. Le fait qu'une action se trouve, ou non, épuisée est une sorte particulière de ressource, qui ne peut prendre que deux valeurs.

Tout ceci se modélise par un objet mathématique appelé *réseau de Petri* ou *réseau place-transition*. Les *places* accueillent des jetons et sont reliées entre elles par des *transitions* (attention, ce ne sont pas les transitions des machines de Turing !), lesquelles nécessitent un nombre précis de jetons dans différentes places pour fonctionner. Quand on utilise une transition d'un réseau de Petri, on consomme les jetons nécessaires, et on pose des jetons comme indiqué par la transition dans d'autres places (comme en passant, dans la figure précédente, du schéma de gauche au schéma de droite).

Un réseau de Petri est *non borné* si, en partant d'un état initial, il est possible d'augmenter arbitrairement le nombre total de jetons dans le réseau. De nombreux jeux sont dans ce cas, même si les joueurs parlent plutôt de *boucle infinie* ou de *combo infinie* que de réseau de Petri. Dans la plupart des jeux compétitifs complexes, comme MTG, les joueurs cherchent ces combos car elles garantissent souvent la victoire.



Le but d’Alex Churchill était de trouver une situation de jeu où les joueurs n’avaient plus la main, le programme s’exécutait tout seul avec les règles du jeu. En effet, MTG n’a pas que des capacités *activées* (que les joueurs choisissent de faire) mais aussi des capacités *déclenchées* (qui doivent être effectuées lorsque certaines conditions sont réunies). Des règles élaborées déterminent l’ordre quand plusieurs capacités doivent se déclencher au même moment. En termes de réseau de Petri, avec ces règles qui déterminent quelle capacité activée doit s’effectuer en premier, ceci revient à garantir que, quel que soit l’état du réseau, il existe une seule transition qui peut légalement s’effectuer. On dit que le réseau est alors déterministe. Le problème auquel on se heurte est qu’on a arbitrairement encodé le contenu du ruban dans un entier : même parmi le très grand nombre de cartes Magic qui existent, on ne trouvera pas les capacités que l’on souhaite pour manipuler cet entier d’une façon qui correspond aux transitions de notre machine de Turing. On change alors d’approche.

La solution adoptée est de revenir au modèle initial de la machine de Turing. En pratique, la mise en place de toutes les pièces de la machine de Turing (très gourmande en ressources du jeu) se fera avec l’une de ces combos infinies que l’on vient de mentionner, mais après la mise en place on quitte le modèle du réseau de Petri.

Simuler des états différents, avec donc des règles différentes, n’est pas *a priori* facile. Une capacité de MTG (le *déphasage*) nous permet précisément de « basculer » entre deux groupes de cartes dont un seul est actif : on a nos deux états. Deux états, ce n’est pas assez pour faire une machine universelle dont le ruban n’est composé que de 0 et de 1, mais on peut changer un peu la

définition et autoriser jusqu'à dix-huit symboles différents (au lieu de deux) sur le ruban : dans ce cas, il existe une machine universelle avec deux états. Une fois la question des états écartée, comment avoir un ruban potentiellement infini ? On ne veut plus d'un simple entier arbitrairement grand, car on sait que les cartes qui existent ne nous fourniront pas les transitions dont on a besoin. C'est ici qu'intervient une autre mécanique de *Magic* : les jetons de créature. De nombreux effets créent un jeton qui fonctionne comme une carte « basique » sans en être une. L'effet qui la crée lui donne une couleur, un type (ça sera le symbole de notre ruban ; heureusement, MTG dispose de bien plus de dix-huit types de créature), et une force et endurance (deux nombres entiers, qui sont, dans presque tous les cas, égaux). Comme on peut générer un nombre arbitrairement grand de jetons, chacun correspond à une case de notre ruban : sa force indique sa distance par rapport à la tête de lecture, et sa couleur indique s'il se situe « à gauche » ou « à droite ».

Ainsi, non seulement *Magic: The Gathering* est Turing-complet, et la machine de Turing s'exécute sans intervention des joueurs, mais cette réduction à une machine de Turing modélise littéralement le ruban : parmi les nombreux modèles universels qui existent, c'est ce modèle de calcul auquel on se ramène depuis MTG.

On peut se demander si d'autres jeux pourraient nous fournir une simulation aussi satisfaisante d'un ordinateur. En réalité, MTG est unique en son genre.

Parmi les jeux de cartes à collectionner, MTG est de loin le plus ancien à exister sans interruption. La technique d'Alex Churchill requiert à la fois des cartes datant des premières années de MTG et une carte de 2013, impliquant des philosophies dans le design du jeu complètement différentes. Un jeu plus récent n'aura pas forcément toutes les pièces nécessaires à une telle construction, ou les règles robustes censées gérer les interactions entre toutes les cartes. Contrairement à une simulation informatique, la partie ne terminerait que si la machine de Turing s'arrêtait effectivement, ou si les joueurs perdaient patience. La question de savoir « qui gagne la partie » pourrait donc dépendre de la validité de la conjecture de Goldbach, auquel cas on ne pourrait que souhaiter bon courage à l'arbitre...

*E. B. & N. F.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Magic: The Gathering is Turing-complete.* Alex Churchill, Stella Biderman et Austin Herrick, 2019, disponible en ligne.



Cette brochure a été réalisée par le  
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de

Marie José Pestel

Édouard Thomas a assuré la relecture.

Imprimée grâce à

Animath

### Elle réunit les signatures de

Marie José Pestel

Jean-Marc Bonnet-Bidaud

André Cauty et Jean-Michel Hoppan

Laurène Hume

Enka Blanchard

Antonin Pavard

Boris Giacometti

Florentin Waligorski

Audrey Candeloro et Emmanuelle Rabin

François Lavallou

Michel Criton

Florentin Waligorski et Enka Blanchard

Jean-Jacques Dupas

Dominique Souder

Nath François

Est-ce le thème de cette vingtième brochure qui a contribué à la richesse des contenus de ses seize articles et à la diversité de ses auteurs? Peu importe, qu'ils soient toutes et tous vivement remerciés car une fois encore leur tâche était difficile tant est profond le fossé entre les énoncés des problèmes que l'on se pose et les méthodes mathématiques mises en œuvre pour les résoudre!

Espérons, chers lectrices et chers lecteurs, vous aussi de formations très diverses, que vous ferez quelques belles découvertes et aurez l'envie d'en savoir toujours plus!

---

**Couverture et Illustration chapitres:** Elsa Godet – [www.sciencegraphique.com](http://www.sciencegraphique.com)

**Illustration fin de chapitres:** Le pas des sables, *La Réunion* –Édouard Thomas

**Mise en page:** Patrick Arrivetz

**Impression:** Presses de CIA GRAPHIC – 03 86 90 96 10

## DES ACTIONS POUR TOUS

## EN FRANCE ET PARTOUT AILLEURS

---

Depuis plus de 20 ans, Animath a pour but d'encourager le goût et la pratique des mathématiques chez les jeunes.

# PERSONNEL

## du monde de l'éducation



**Solutions  
de financement<sup>(1)</sup>**

**POUR BÂTIR VOS PROJETS,  
vous pouvez compter sur nous.**

Contactez dès à présent nos experts du Crédit Mutuel  
Enseignant, la banque du Monde de l'Éducation

Un crédit vous engage et doit être remboursé.  
Vérifiez vos capacités de remboursement avant de vous engager.

**Crédit  Mutuel**  
**Enseignant**

(1) Après étude et sous réserve d'acceptation du dossier par la Caisse de Crédit Mutuel. Après expiration du délai de mise à disposition des fonds et d'un délai de rétractation de 14 jours.

Caisse Fédérale de Crédit Mutuel et Caisses affiliées, société coopérative à forme de société anonyme au capital de 5 458 531 008 euros, 4 rue Frédéric-Guillaume Raiffeisen, 67113 Strasbourg Cedex 9, RCS Strasbourg B 888 505 354 - N° ORIAS : 07 003 758. Banques régies par les articles L.311-1 et suivants du code monétaire et financier.

# Inria

## Centre Inria de Paris



**700 personnes**  
**31 équipes**  
**de recherche**  
**55 nationalités**

➔ **24** lauréats ERC  
depuis 2007

➔ **19** startups créées

### En partenariat avec :

Université Paris Cité, Université PSL (Collège de France, Dauphine — PSL, ENS — PSL, MINES Paris — PSL), Sorbonne Université, ENPC, Institut Pasteur, CNRS, Inserm.



 [www.inria.fr/fr/centre-inria-de-paris](http://www.inria.fr/fr/centre-inria-de-paris)

 [@inria\\_paris](https://twitter.com/inria_paris)



# tangente

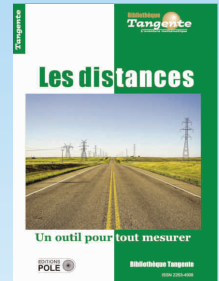
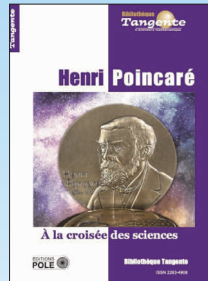
l'aventure mathématique

Le seul magazine de culture mathématique  
à fêté ses 35 ans. Abonnez-vous !



## Bibliothèque Tangente

La plus belle collection mathématique au monde

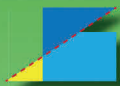


Consultez les numéros de *Tangente* sur  
[tangente-mag.com](http://tangente-mag.com)

Achetez les livres et abonnez-vous sur  
[www.infinimath.com/librairie](http://www.infinimath.com/librairie)

# MORCEAUX CHOISIS DE GÉOMÉTRIE

## GEOMETRIC DISSECTIONS



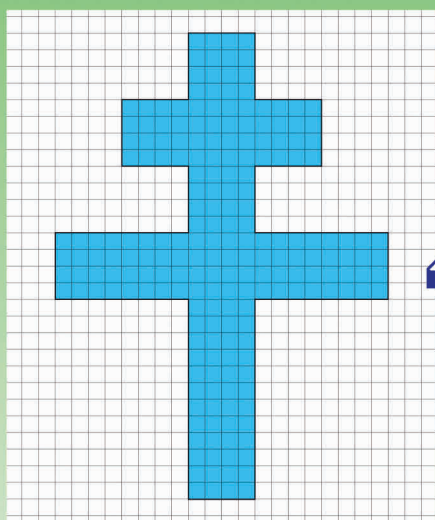
### Du plaisir géométrique à partager

Si deux polygones ont même aire, on peut découper l'un en un nombre fini de plus petits polygones... qui s'emboîtent exactement pour former l'autre, tel un puzzle.

C'est le domaine des *découpes géométriques* (voir article dans cette brochure).

Des défis logiques vous seront proposés sur <http://CultureMath.ENS.fr/découpes>

Suivez notre actualité sur Twitter : @MCDGmaths



En 1974, Michel Szepe et Bernard Lemaire ont découvert deux découpes différentes (et très difficiles) de la croix de Lorraine au carré en sept pièces seulement.

En combien de pièces y arriverez-vous ?  
<http://www.math.ens.fr/~berger/defilLorraine.html>

### Une entrée privilégiée dans les mathématiques, de 10 à 110 ans

**Créatif** : réalisez d'ingénieuses découpes en un nombre minimal de pièces !

**Ludique** : un papier, un crayon ou un écran, c'est parti...

**Pédagogique** : chaque défi est un puzzle à résoudre !

**Collaboratif** : contribuez à réaliser un catalogue inédit de découpes.

**Scientifique** : un domaine de la géométrie peu exploré ; devenez rapidement expert.e !

**Méthodologique** : tâtonner, raisonner et... maîtriser les techniques.

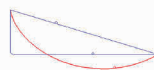
**Interactif** : commentez les solutions dans un forum, proposez vos découpes !

**Accessible** : totalement gratuit et ouvert à toutes et à tous.

**Convivial** : un logiciel développé par Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas.

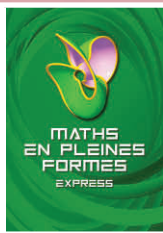
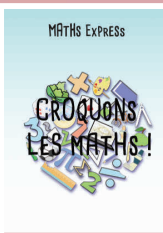
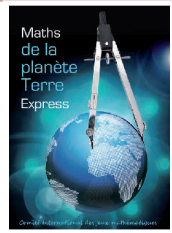
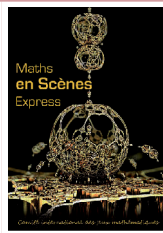
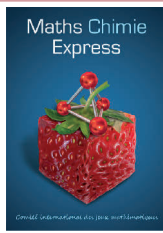
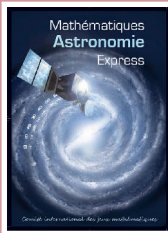
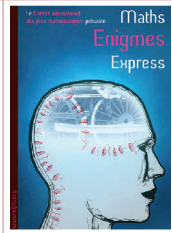
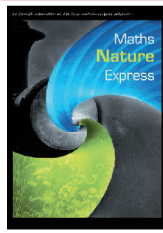
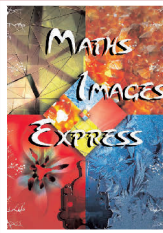
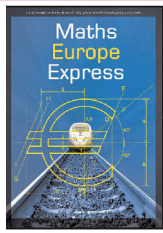
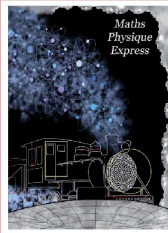
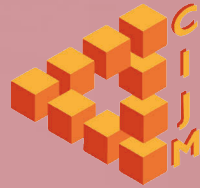
**Périodique** : des défis proposés régulièrement par Bernard Lemaire, inventeur de nombreuses découpes.

En lien avec *Fatrazie* ([www.fatrazie.com](http://www.fatrazie.com)), *Kafemath* ([www.kafemath.fr](http://www.kafemath.fr)), *Playmaths* (<https://playmaths.blog4ever.com>) et *Mathcurve* ([www.mathcurve.com](http://www.mathcurve.com)).



# Maths Express

Une collection CIJM



<https://www.cijm.org/maths-express/>

CIJM  
Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05  
[www.cijm.org](http://www.cijm.org)

