



**MATHS  
EN PLEINES  
FORMES  
EXPRESS**





# SOMMAIRE

Préface 3  
Marie José Pestel

## I — Manipuler les formes

- La forme et les maths 5  
Bertrand Hauchecorne
- Chez Euclide et au-delà 11  
Enka Blanchard, Andreï Rodin, Florentin Waligorski
- D'une forme à l'autre : jouer avec les polygones 17  
Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas
- Dissections de polygones avec Morceaux choisis de géométrie 23  
Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas

## II — Des objets géométriques à l'infini

- Polyèdres ! 29  
Jean-Jacques Dupas
- De singulières formes... 35  
François Lavallou
- Varifolds : des films de savon aux surfaces discrètes 41  
Blanche Buet
- Quand la forme devient fractale 47  
Enka Blanchard, Andreï Rodin, Florentin Waligorski

## III — Une source d'inspiration inépuisable pour les artistes

- Les mathématiques des broderies japonaises 53  
Michel Criton
- Les sculpteurs et les formes mathématiques 59  
Denise Demaret-Pranville
- Une année de formes mathématiques dans les musées parisiens 65  
Édouard Thomas

## IV — Compléments d'enquête

- Vidéo et environnement numérique : de nouveaux processus d'apprentissage 71  
Salomé Cojean
- Anna Kiesenhofer : une mathématicienne médaille d'or aux JO de Tokyo 77  
Édouard Thomas

Ours 96



# Préface

Marie José Pestel  
Vice-présidente du CIJM

En mars 2020, la pandémie frappe le monde entier et bouleverse les vies ; nous décidons, envers et contre tout, d'organiser quand même un 21<sup>e</sup> salon de manière entièrement « démathérialisée ».

En mars 2022, deux ans plus tard, nous savons que nous avons fait le bon choix. Non seulement la crise sanitaire a démontré le rôle plus que jamais nécessaire des mathématiques pour comprendre le monde, mais l'expérience acquise pour communiquer en distanciel nous permet de proposer un salon hybride qui se veut une *Scène Ouverte de Médiation Mathématiques*. Pour sa 23<sup>e</sup> édition, le salon combine pendant quatre jours un salon en présentiel à Paris et des animations et des retransmissions en distanciel sur son site Web. À l'heure où les mathématiques et leurs enseignements sont au cœur de débats et d'actions concrètes, le salon a choisi pour thème « Maths en pleines formes ». Thème résolument optimiste, direz-vous ! Après deux ans de salon virtuel, la joie de retrouver la place Saint-Sulpice aurait pu faire perdre la tête au comité d'organisation du salon !

Cette 19<sup>e</sup> édition de la brochure *Maths Express* se devait de relever le défi et de prouver que : oui, décidemment, les Maths sont en pleines formes !

Pour ouvrir la brochure, un article, qui aurait pu trouver sa place dans *Maths Langage Express* (2017), élargit le débat. La forme en mathématiques se présente sous toutes ses... formes : forme et calcul formel, forme et formule, forme et figure, forme et équivalence... Évidemment, la géométrie y occupe une place de choix. Mais qui dit « géométrie » dit « Euclide » : le deuxième article revisite les *Éléments*, cet ouvrage fondateur qui n'a pas pris une ride, et livre les clés d'une compréhension de ce classique qui nous vient de l'Antiquité.

En restant dans la géométrie euclidienne, les articles suivants décrivent et classent une multitude d'objets mathématiques. Les polygones et leurs dissections se taillent la part du lion, à la frontière entre énigmes récréatives et mathématiques « sérieuses » ; ils invitent à expérimenter soi-même et à s'approprier la géométrie, pourquoi pas à l'aide de l'outil informatique... Les polyèdres ne sont pas en reste : saviez-vous qu'il est difficile de les « classer » ? Et que dire alors des surfaces, surtout si elles présentent des « aspérités » ! Leur classification est toujours très lacunaire à ce jour. Pensez aux bulles de savon... Encore moins « lisses », et moins connus du public, les varifolds sont des objets à la frontière entre le continu et le discret. Idéal pour représenter et étudier les données massives dont nous sommes submergés ! Tout aussi utile est la géométrie fractale, qui permet à merveille de décrire toutes sortes de formes brisées. Le fameux ensemble de Mandelbrot nous réserve d'ailleurs encore bien des surprises, comme on le verra...

Dans chacun de ces articles, l'art mathématique pointe son nez, quand il n'est pas omniprésent ! Une iconographie abondante donne une idée de la richesse de cette source d'inspiration et agrément des textes parfois un peu difficiles... mais il en faut pour tous les goûts et tous les publics. Une promenade dans un art traditionnel japonais méconnu, un panorama du monde de la sculpture puis une balade dans les musées parisiens vous récompenseront des efforts fournis pour appréhender certaines notions mathématiques.

Un premier complément d'enquête vous livrera quelques clés sur les réussites et les points qui restent à améliorer suite aux diverses expérimentations de médiation mathématique qui ont été tentées au cours de ces deux dernières années. Plus inattendu, en guise de conclusion : « Les mathématiques, médaille d'or aux Jeux olympiques de Tokyo » !

Les mathématiques pour garder la forme, c'est ce que le Comité d'organisation vous souhaite, en espérant avoir ouvert des voies...

Bonne lecture et bon salon virtuel ou présentiel !

Marie José Pestel  
Vice-présidente du CIJM



# La forme et les maths

Bertrand Hauchecorne

Mathématicien et auteur

Les maths en pleines formes ! Qu'elles soient linéaires, bilinéaires, multilinéaires ou quadratiques, qu'elles soient symétriques, antisymétriques ou alternées, ou « de n'importe quelle forme », les formes tiennent une large place dans les manuels d'algèbre linéaire. Tous ces termes concernent des fonctions, des « applications » diront d'autres. Pourquoi ces termes ? Plus généralement comment nomme-t-on les notions mathématiques ? Découvrons la forme sous toutes ses formes !

## Du bon nommage des notions mathématiques

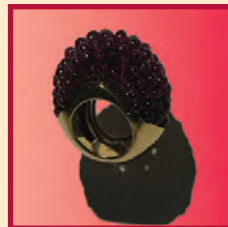
On pourrait ne voir dans les mathématiques qu'une suite de raisonnements déduits d'axiomes et conduisant à des énoncés appelés *théorèmes*. Les notions introduites seraient sans lien avec le monde qui nous entoure. Les mots pour les nommer n'auraient alors aucune importance puisqu'ils n'exerceraient aucune influence sur son utilisateur. En fait, il n'en est rien. La transmission du savoir mathématique passe par le langage. Les mathématiciens ont besoin de nommer les notions qu'ils manient et le choix des mots, variable suivant les époques et les écoles mathématiques, n'est pas anodin. En topologie, pour parler d'un certain type de voisinage dans un espace métrique, vous préférez parler d'une *boule* (terme en vigueur depuis que Bourbaki l'a popularisé dans les années 1950) ou d'un *hypersphéroïde généralisé*, voire d'un *parallélotope* (termes utilisés au début du XX<sup>e</sup> siècle) ?



© É. Thomas, 2021  
(Centre Pompidou, Paris)



© É. Thomas, 2022  
(musée Bossuet, Meaux)



© É. Thomas, 2021  
(musée des arts décoratifs, Paris)

Il y aurait de quoi en perdre la boule ! De gauche à droite, *La Boule* de Jean Pougny (1915), boulets d'artillerie en pierre et en métal (XV<sup>e</sup> et XVI<sup>e</sup> siècles), bague « Boule » de Cartier Paris (1948).

Nommer, c'est entrer en relation avec la notion mathématique étudiée, c'est la rendre plus familière au risque parfois de n'en avoir qu'une idée approximative. Le choix des mots influe en effet sur la représentation que nous nous en faisons. Nous sommes tous frappés d'un profond étonnement lorsqu'on nous présente une fonction continue et dérivable nulle part et on la qualifie souvent de *contre-exemple*; de contre-exemple à quoi? À notre intuition, qui découle du mot «continue», et qui nous suggère une régularité plus forte que ne l'implique la définition!

Le latin *forma*, qui signifie «moule» (masculin) et donc «forme», est bien sûr l'ancêtre de notre héros. Il a essaimé en mathématiques. Outre l'utilisation de ce terme en algèbre linéaire, ce mot latin nous a donné le nom «formule» et l'adjectif «formel».

Étymologiquement, «formule» désigne une petite forme, grâce à un suffixe que l'on retrouve dans «lunule» ou «minuscule». Qu'elle soit *de Moivre*, *de Taylor* ou *de Green-Riemann* pour les plus audacieux, la formule est riche d'utilisation. La première occurrence connue de ce terme en mathématiques nous est donnée, au XVIII<sup>e</sup> siècle, par Voltaire, qui parlait de «*formule d'algèbre*». Jusque-là, on utilisait le vocable en droit pour désigner une expression particulière à employer dans une circonstance précise. Depuis qu'elles sont entrées dans le domaine scientifique, on en rencontre partout, que ce soit en physique, en chimie comme en mathématiques: celles de trigonométrie sont parfois la hantise des étudiants en sciences, faisant le succès des *formulaires* (recueils qui les recensent) et celles contenues par centaines dans les carnets de Ramanujan font le bonheur des esthètes.

L'adjectif «formel» s'utilisait lui aussi en droit, mais on le rencontrait en philosophie médiévale, en particulier dans le domaine de la logique. Au tournant du XX<sup>e</sup> siècle, avec l'introduction des structures algébriques ou plus généralement de notions que l'on cherche à détacher de l'intuition, du concret, ce terme est entré dans le vocabulaire mathématique. On qualifie de *formel* ce qui s'attache plus à la forme qu'au contenu. L'étude de schémas logiques indépendants du contenu pour axiomatiser le raisonnement mathématique conduit à appeler *logique formelle* cette discipline. De même, les *séries formelles* sont inspirées des séries entières dans lesquelles on veut faire abstraction des problèmes de convergence.



*Complexe (Formes irrégulières).*  
Frantisek Kupka, 1912.

©É. Thomas, 2018 (Grand Palais, Paris)

Autre exemple, la *construction formelle* des polynômes fait abstraction de la fonction polynôme ; on définit des opérations algébriques sur des suites nulles à partir d'un certain rang, une *dérivation formelle*, par un procédé purement mécanique, en enlevant toute référence à la notion de limite ou de taux d'accroissement.

## Morphe, le cousin grec

Le grec μορφή (*morphê*), signifiant « forme », semble en être une anagramme. Pourtant, les linguistes ne sont pas certains que ces deux mots aient un lien de parenté ! La première apparition de ce terme dans le vocabulaire mathématique semble dater du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, avec les mots *holomorphe* et *méromorphe*. Lorsque Augustin Louis Cauchy étudie les fonctions holomorphes, il les nomme *synectiques* (la référence au grec était courante à l'époque). Peu après, deux mathématiciens français, Charles Briot et Jean-Claude Bouquet, les baptisent « *holomorphes* ». On y trouve la même idée que pour les séries entières : ces fonctions sont définies sur tout un disque, d'où l'utilisation du préfixe provenant du grec *holos* signifiant « tout entier », que l'on retrouve dans le tristement célèbre *holocauste*, « tout brûlé ». Elles se distinguent de leurs cousines méromorphes, qui ne sont pas définies en certains points appelés *pôles*, d'où l'utilisation du suffixe *meros* signifiant « partie », sur lequel est construit également le mot « polymère », si cher aux chimistes.

Si le mot *morphisme* apparaît seul avec la théorie des catégories dans le courant du XX<sup>e</sup> siècle, on le rencontre, précédé du suffixe grec *iso*, dès 1870 dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* dans lequel le mathématicien français Camille Jordan présente et développe la théorie des groupes. Il parle d'*isomorphismes* qui peuvent être *holoédriques* (ce sont nos isomorphismes) ou *mériédriques*, que nous nommons désormais *homorphismes* ; on retrouve les racines *holos* et *meros* et le grec *edra* qui signifie « siège », « place » ou plus généralement « base ».

L'homomorphisme respecte la structure algébrique et son frère jumeau, l'*homéomorphisme*, la structure topologique. Leurs suffixes viennent respectivement de *ὁμός* (*homos*) qui signifie « le même », « pareil », et de *ὅμοιος* (*homeos*) qui veut dire « semblable » ; les premiers



*Forme dans l'espace.*  
Alfred Reth, 1934.

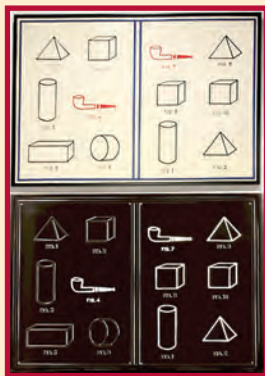
©É. Thomas, 2018



chrétiens se sont battus pour savoir si Dieu et Jésus sont de même substance, ou de substance semblable. L'expression «ne pas changer d'un iota» vient du fait que les deux mots ne diffèrent que de cette lettre là (et aussi d'un omicron); son emploi était d'autant plus expressif que c'est la plus petite des lettres de l'alphabet grec. En 325, le concile de Nicée a tranché pour *homos* et les partisans d'*homeos*, connus sous le nom d'Ariens, sont devenu *de facto* hérétiques et furent combattus sans pitié.

## De la métathèse au fromage

Le fromage est malléable, surtout lorsqu'il est coulant; c'est pourquoi on a souhaité lui donner une forme. Son nom vient du bas latin *caseus formaticus*, c'est-à-dire «fromage moulu». Si nos voisins allemands et britanniques ont conservé le premier mot, qui a donné respectivement *Käse* et *cheese*, nos voisins italiens et nous-mêmes l'avons abandonné au profit du second, ce qui donne *formaggio* de l'autre côté des Alpes et *fromage* chez nous. Mais pourquoi pas «formage»? On a bien la *fourme d'Ambert*, patrie de Michel Rolle, cet impudent Auvergnat qui, au XVII<sup>e</sup> siècle, a lutté contre le calcul différentiel et qui, comme punition, a vu son nom attribué à un théorème le concernant. C'est un phénomène que les linguistes nomment une *métathèse*. Dans de nombreuses langues, on observe une inversion d'une consonne liquide, comme le «l» ou le «r», avec une voyelle. Pensez à l'anglais *centre*, dont la prononciation intervertit le «r» et le «e» final. De même, près de sa source, le Lot s'appelle l'Olt. Les langues slaves raffolent des métathèses (et sans doute aussi du fromage); ainsi l'Elbe s'appelle *Labe* en tchèque; l'allemand *Arbeit* et le russe *rab'ota* signifient tous deux «travail» (ne se ressemblent-ils pas si l'on intervertit les deux premières lettres?). Le mot «robot», d'origine tchèque, provient de la même racine. Quant à ceux qui parlent d'«aréoport» ou d'«infractus» du myocarde, ils font des métathèses, sans toujours le savoir.



*Pipes et formes académiques.*  
Marcel Broodthaers, 1970.

©É. Thomas, 2017  
(musée royal, Bruxelles)



*Peinture aux formes indéfinies.* Daniel Buren, 1966.

©É. Thomas, 2021 (Centre Pompidou, Paris)

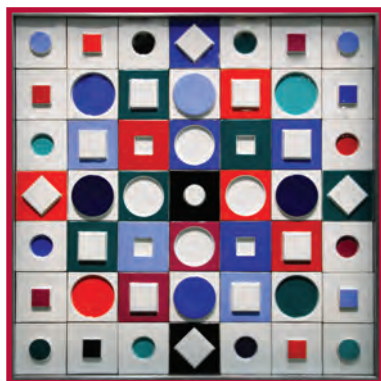
## Enfin vint l'informatique

Le mot latin *informatio* désignait chez Vitruve, célèbre architecte romain du I<sup>er</sup> siècle avant notre ère, un dessin, une esquisse, et plus généralement ce qui concourt à mettre en forme un projet. Plus intellectuel, son contemporain Cicéron lui donnait le sens d'explication étymologique d'un mot. On y reconnaît le préfixe *in*, préposition qui signifie « dans » ou « en ». Aussi, on ne s'étonne pas de trouver, en ancien et moyen français, le verbe *enformer* signifiant « donner une forme », puis « mettre au courant » en privilégiant le sens figuré. Reformé (eh oui !) sur le latin, il devient « informer », duquel découle le mot « information ».

Avec le développement des calculateurs électroniques puis des ordinateurs, un vocabulaire nouveau apparaît au milieu du siècle dernier. Le mot *Informatik* fut créé par l'ingénieur allemand Karl Steinbuch en 1957. C'est ce que l'on appelle un *mot-valise*, c'est-à-dire obtenu comme contraction de deux mots ; dans ce cas, il s'agissait des mots « information » et « automatique ». À cette époque-là, en effet, l'utilisation de l'informatique se diversifie et l'on commence à voir son rôle dans le traitement de l'information. L'introduction dans notre langue du terme francisé « informatique » date de 1962. Elle est l'œuvre de Philippe Dreyfus, alors directeur du centre national de calcul électronique de la société Bull. La terminaison en « -ique » est heureuse car sa similarité avec celle de noms de sciences proches comme les mathématiques ou la physique donne à cette discipline naissante ses lettres de noblesse.

N'est-ce pas « formidable » de découvrir la richesse du vocabulaire provenant du mot « forme » ? Formidable, oui, mais ce mot nous vient d'un mot latin

signifiant « épouvantail » ! Soyez cependant sans crainte et venez nombreux au Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques pour découvrir toutes les formes que peut prendre la mathématique, la reine des sciences.



*Forme 1010 décor 5112.*  
Victor Vasarely, vers 1973.

© É.T., 2019 (Centre Pompidou, Paris)



*Formes.* Alexander Calder, 1966.

© É.T., 2021 (Centre Pompidou, Paris)

**B. H.**

## Entre isométries et homéomorphismes, la géométrie de la forme

Le célèbre mathématicien allemand Felix Christian Klein (1849–1925) définissait une géométrie du plan (ou de l'espace) comme l'ensemble des invariants par un groupe de bijections de ce plan (ou de cet espace). Ainsi, la géométrie euclidienne est celle associée aux isométries (pour certains, aux similitudes) et la topologie aux homéomorphismes, c'est-à-dire aux bijections *bicontinues* (continues et de fonction réciproque continue). On définit la relation d'équivalence « être isométriques » pour la première, « être homéomorphes » pour la seconde.

« Avoir la même forme » est clairement une relation d'équivalence ! Considérons les bijections qui conservent la forme des figures du plan ; elles forment un groupe et donc voici définie une nouvelle géométrie. Deux figures isométriques ont la même forme. En revanche, un cercle et un carré sont homéomorphes mais n'ont pas la même forme : demandez à un gamin pour vous en convaincre ! Cette géométrie se situe donc entre les deux. Un invariant est l'ovale, qui englobe l'ellipse mais prend d'autres aspects. Vous pensez que la théorie prend forme ? Hélas, « avoir la même forme » est trop vague pour une définition précise ; ne parlons pas de la relation « avoir à peu près la même forme », qui n'est pas même transitive.



*Forme proto A. Josef Albers, 1937.*

©É. Thomas, 2021 (musée d'art moderne, Paris)

## Pour en savoir (un peu) plus

*Les mots et les maths.* Bertrand Hauchecorne, Ellipses, 2014.

*Dictionnaire décalé des mathématiques.* Élisabeth Busser et Bertrand Hauchecorne, Ellipses, 2021.

*Des mots et des maths.* Gérald Tenenbaum, Odile Jacob, 2019.

À *contre-idées.* Didier Nordon, Pour la science, 2011.



# Chez Euclide et au-delà

Enka Blanchard, Andreï Rodin et Florentin Waligorski  
Chercheuse transdisciplinaire au CNRS  
Philosophe-mathématicien  
Traducteur scientifique

Le terme de « géométrie » évoque immédiatement un ensemble standard de formes géométriques telles que le cercle, le triangle, le carré, le rectangle... que l'on retrouve dans tous les manuels de mathématiques élémentaires. Ces derniers suivent d'ailleurs une très longue tradition historique, leur origine remontant à un recueil de textes mathématiques, *Les Éléments*, rédigé par Euclide, mathématicien grec d'Alexandrie. Donnons un aperçu de l'évolution de ces concepts depuis leur introduction il y a près de deux mille trois cents ans.

## Un premier classement des formes géométriques avec Euclide

Le premier livre des *Éléments* commence par une liste de définitions (23 au total) qui introduisent un ensemble d'objets et de formes géométriques. La première présente un *point* (comme ce qui n'a « aucune partie ») et la deuxième une *ligne* (générique) et, plus spécifiquement, une *ligne droite*, qu'Euclide entend comme un segment délimité par des points. Il introduit de manière similaire les *surfaces*, les *plans*, puis des angles de différentes sortes ; l'*angle plan*, défini comme une « *inclinaison de lignes* » (pas nécessairement droites), soulevait déjà de nombreuses questions dans l'Antiquité. Ce développement atteint son apogée avec la définition 14, qui établit le concept de figure (*schéma*, en grec) comme étant « *ce qui est compris entre une ou plusieurs limites* ». Le reste des définitions apparaît comme une classification des figures (à part la dernière, qui concerne les lignes parallèles). Cette classification ne ressemble à aucune autre moderne, en mathématiques ou ailleurs,



Euclide. Girolamo Mocetto, XVI<sup>e</sup> siècle.

© É.T., 2021 (musée Jacquemart André, Paris)

et il est important de comprendre ses spécificités pour appréhender la géométrie d'Euclide en général (qu'il ne faut pas confondre avec la géométrie euclidienne au sens moderne du terme). On pourrait s'attendre à ce qu'après avoir introduit le concept très général de figure, Euclide considère ensuite quelques grandes classes de figures, suivies par de plus spécifiques, et enfin seulement des exemples concrets. Au lieu de cela, il définit un *cercle* et ses éléments (son *centre* et son *diamètre*) et des *figures rectilignes*, c'est-à-dire des polygones : d'abord les *trilatères* (triangles) et puis les *quadrilatères* (quadrangles).

Un tel classement peut s'expliquer par le fait qu'Euclide ne considère pas toutes les figures géométriques possibles sur un pied d'égalité. Au contraire, il désigne une figure « *générique* » qui, à son avis, représente mieux le concept général, à savoir le cercle. Le même principe s'applique à ses classifications des triangles et des quadrangles. Dans le cas des triangles, il distingue d'abord le triangle *équilatéral* (régulier), puis introduit les triangles *isocèles* et enfin les triangles *scalènes* (« quelconques »). Le triangle équilatéral n'est pas qualifié d'isocèle et le triangle isocèle n'est pas qualifié de scalène ; c'est donc un classement en catégories mutuellement exclusives. Dans le cas des quadrangles, Euclide présente d'abord le *carré*, puis les *rectangles*, et d'autres formes. L'idée est en fait de distinguer en premier lieu les espèces « *parfaites* » d'un genre donné, puis de trier les autres en fonction de leur « *qualité* ».

La plupart des définitions géométriques et arithmétiques d'Euclide, du point de vue actuel des mathématiques et surtout de la logique, sont redondantes et jouent, au mieux, un rôle heuristique. Toutefois, il faut rester prudent en appliquant des normes modernes à des textes mathématiques anciens, et garder à l'esprit que les normes logiques et épistémologiques changent au cours de l'histoire.

## Deux objets au statut particulier : la droite et le cercle

Le rôle particulier du cercle dans le raisonnement géométrique d'Euclide est également évident dans la théorie suivante. Dans les *Éléments*, les vingt-trois définitions du Livre 1 fournissent une description préliminaire autonome et une classification de la variété des formes géométriques étudiées dans ce qui suit, sans donner de conventions terminologiques utiles. En effet, on retrouve cinq postulats faisant suite à ces définitions. Les trois premiers spécifient les constructions géométriques faites « *à la règle et au compas* » : ils autorisent la production d'une ligne droite « *entre n'importe quels points* », le prolongement illimité d'une ligne droite donnée (bornée) au-delà de n'importe lequel de ses deux points d'extrémité, et enfin, la production d'un cercle dont le rayon coïncide (et n'est pas seulement égal) à une ligne droite donnée. Ces trois postulats soulignent le rôle particulier du cercle et de la droite dans la géométrie d'Euclide.

Toutes les constructions géométriques traitées dans les *Éléments* peuvent être obtenues à la règle et au compas (avec des utilisations occasionnelles du postulat 5, qui nécessite une discussion séparée). Une telle construction d'un objet donné est la « *synthèse* ». La procédure inverse est appelée l'« *analyse* » d'un objet géométrique donné en ses éléments constitutifs. Ici, les concepts de ligne droite et de cercle jouent le rôle d'éléments ultimes qui génèrent tout objet géométrique à partir des variétés géométriques d'Euclide – ou, réciproquement, qui sont trouvés comme éléments constitutifs de base de n'importe quel objet géométrique lors de son analyse.

Tous les objets et constructions géométriques d'intérêt ne s'inscrivent pourtant pas facilement dans ce schéma. Par exemple, les constructions d'un carré dont la surface est égale à celle d'un cercle donné, la trisection d'un angle (division d'un angle donné en trois angles égaux) et le doublement du volume d'un cube résistaient à l'analyse euclidienne en termes de lignes droites, d'angles et de cercles. Il était suspecté depuis Euclide que ces trois constructions ne peuvent pas être réalisées à l'aide d'une règle et d'un compas en un nombre fini d'étapes, mais cela n'a été rigoureusement prouvé par des méthodes algébriques qu'au XIX<sup>e</sup> siècle. Que se cache-t-il derrière l'idée de construire des objets géométriques avec ces instruments plutôt que d'autres ? Historiquement, cela pourrait être lié à leur simplicité et à leur utilité pratique. Cependant, l'idée émanant des postulats 1 à 3 d'Euclide consiste en ce que les formes géométriques sophistiquées peuvent être expliquées en termes de certaines formes primitives, à savoir la ligne droite et le cercle.

## Des figures égales, congruentes ou équidécomposables

Après avoir énoncé les postulats, Euclide énonce plusieurs axiomes. Il s'agit de principes généraux applicables à la fois aux objets géométriques et aux nombres (entiers naturels), qui établissent notamment la relation d'égalité pour ces concepts. Les axiomes 2 et 3 déterminent que des choses égales ajoutées (ou soustraites) à d'autres sont égales. Dans le cas des objets géométriques, l'addition est comprise comme une *concaténation*, c'est-à-dire une adjonction d'un objet donné à un autre. Par exemple, le résultat de la concaténation des segments de droite [AB] et [BC] est le segment [AC] (avec nos notations modernes) ; les polygones peuvent être concaténés le long de leurs côtés (même si le résultat de cette opération n'est pas défini de manière unique jusqu'à la congruence). La *soustraction* d'objets géométriques est comprise par Euclide dans un sens intuitif similaire : le résultat de la soustraction du segment [AB] du segment [AC] est [BC]. Ainsi, l'égalité des objets géométriques  $A=B$  au

sens d'Euclide, en termes modernes, revient à leur équidécomposabilité : A et B sont *équidécomposables* si ces objets peuvent être composés (par concaténation) à partir du même ensemble d'objets.

Dans le cas des segments et des polygones, l'équidécomposabilité est équivalente à l'égalité de leurs mesures : les longueurs pour les premiers et les aires pour les seconds. Pour cette raison, on pourrait croire que, dans les deux premiers livres de ses *Éléments*, Euclide fournit une théorie des aires pour les polygones. Cette affirmation ne peut être acceptée que dans le cas du théorème selon lequel deux polygones donnés sont égaux (au sens d'Euclide) si, et seulement si, leurs aires sont identiques. Une proposition similaire pour les segments est évidente. Cependant, on ne trouve rien chez Euclide qui ressemble aux concepts modernes d'aire et de longueur, qui sont définis comme des nombres réels associés aux objets géométriques correspondants. Conceptuellement, la théorie d'Euclide est très différente.

Par extension, l'équivalence entre l'équidécomposabilité géométrique et l'égalité de mesure devient caduque dans le cas des polyèdres : si les polyèdres équidécomposables ont le même volume, l'affirmation universelle inverse est fausse. Cela ne sera connu qu'en 1900, peu après que David Hilbert eut présenté sa célèbre liste de vingt-trois problèmes ouverts (voir l'article qui suit) : la question concernant l'équidécomposabilité des polyèdres, troisième problème de cette liste, sera résolue la même année par Max Dehn.

## Remplacer un objet géométrique par son image perfectionnée

Cette théorie de l'«égalité» des polygones est essentielle pour comprendre le rôle des formes primitives, telles que la ligne droite et le cercle, dans la théorie géométrique d'Euclide.

Vers la fin du livre 1, Euclide construit un rectangle égal (équidécomposable) à un polygone donné (proposition 45). Dans la proposition 46 suivante, il construit un carré avec un côté donné. Le livre 2 aboutit à la construction d'un carré égal à un rectangle donné, et donc, par les résultats du livre 1, égal à tout polygone donné. Les deux premiers livres résolvent donc le problème de la quadrature d'un polygone arbitraire, qui peut être décrit comme celui du remplacement d'un polygone donné par son image égale (au sens d'Euclide) mais quelque peu «perfectionnée», à savoir le carré.

Les livres 3 et 4 traitent des cercles et de diverses relations entre cercles et polygones, y compris les polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un cercle donné. L'idée de remplacer des objets géométriques donnés par leurs images

« perfectionnées » conduit ce développement théorique au problème de la quadrature du cercle. Cette question sera un problème géométrique phare jusqu'à ce que, au XIX<sup>e</sup> siècle, il soit rigoureusement prouvé qu'une telle construction ne peut pas être réalisée à la règle et au compas en un nombre fini d'étapes. Le rôle particulier du concept de cercle dans la géométrie d'Euclide nous aide aujourd'hui à mieux comprendre pourquoi ce problème était considéré comme important au départ.

Une autre classe importante de formes géométriques est constituée de solides tridimensionnels (ou 3D). Traités dans les livres 11 à 13, ces formes comprennent la *sphère*, le *cylindre*, le *cône* et les cinq polyèdres réguliers. Même si ces objets ne peuvent pas être produits à la règle et le compas, leurs définitions sont données en termes de déplacement de lignes droites et de cercles (ou de leurs dérivés simples, comme les triangles et les demi-cercles). Ainsi, l'idée maîtresse de réduire les formes géométriques sophistiquées à deux formes primitives (la ligne et le cercle) reste à l'œuvre dans les livres stéréométriques des *Éléments*.

L'apogée de l'ouvrage est la construction de cinq polyèdres réguliers (dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux) et le calcul des rapports entre les côtés de ces polyèdres inscrits dans la même sphère (dernière proposition 18 du dernier livre 13). Pour résoudre ce défi (ardu, même encore aujourd'hui avec nos outils modernes), Euclide utilise les ressources de tous ses livres géométriques précédents. En analysant l'angle solide d'un polyèdre convexe, on peut constater (et démontrer, comme le fait Euclide) qu'il ne peut pas y avoir d'autres polyèdres réguliers : par des considérations combinatoires, l'angle solide peut être formé soit par trois triangles réguliers (cas du *tétraèdre*), par quatre triangles réguliers (*octaèdre*), par cinq triangles réguliers (*icosaèdre*), par trois carrés (*hexaèdre* ou *cube*), ou enfin par trois pentagones réguliers (*dodécaèdre*). Ces cinq polyèdres réguliers auront une influence durable, ravivée au XIX<sup>e</sup> siècle quand ils seront reliés à la théorie émergente des groupes, qui décrit les symétries associées à ces objets géométriques en termes algébriques rigoureux.

## Une révision profonde de la notion de forme géométrique

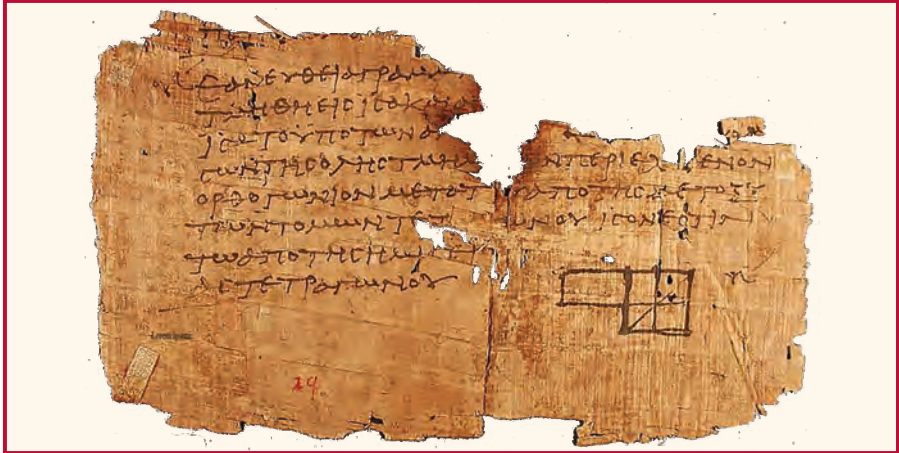
La profonde révision de la notion de forme géométrique qui s'est produite au début de l'ère moderne a dépassé de loin le cadre des mathématiques pures. Pendant de nombreux siècles, *L'Almageste*, composé par l'astronome grec Claude Ptolémée au II<sup>e</sup> siècle, a constitué une source astronomique de



référence. Dans ce traité, l’auteur applique une technique géométrique qui permet de décrire les mouvements visibles des corps célestes comme une superposition de mouvements circulaires. Il utilise ainsi la même idée régulatrice qu’Euclide : analyser une forme géométrique sophistiquée (trajectoires visibles des corps célestes, planètes comprises) à partir de la forme élémentaire du cercle. Lorsque Johannes Kepler suggère en 1609 que les trajectoires des planètes pouvaient être mieux modélisées par des ellipses, cela a d’abord semblé scandaleux : cette hypothèse violait le principe de base de l’astronomie ptoléméenne (et euclidienne) selon lequel les formes géométriques élaborées doivent être expliquées en termes de lignes droites et de cercles. Ce n’est qu’après une révision importante des fondements de la géométrie effectuée par René Descartes, Isaac Barrow et bien d’autres qu’Isaac Newton a pu présenter en 1687 une théorie de la mécanique céleste entièrement libérée de l’idée de la primauté du cercle.

La variété des formes géométriques étudiées dans les mathématiques d’aujourd’hui est de loin plus vaste que celle en vigueur au XVII<sup>e</sup> siècle. L’essor des géométries non euclidiennes et d’autres développements visant à élargir les modes antérieurs de pensée géométrique ont donné naissance à de nouvelles formes telles que les polygones hyperboliques, les espaces courbes, les objets fractals, les varifolds... que vous découvrirez dans cette brochure.

**E.B., A.R. & F.W.**



Papyrus d’Oxyrhynque I 29 représentant un fragment des *Éléments* d’Euclide.

© Jitse Niesen, 2006



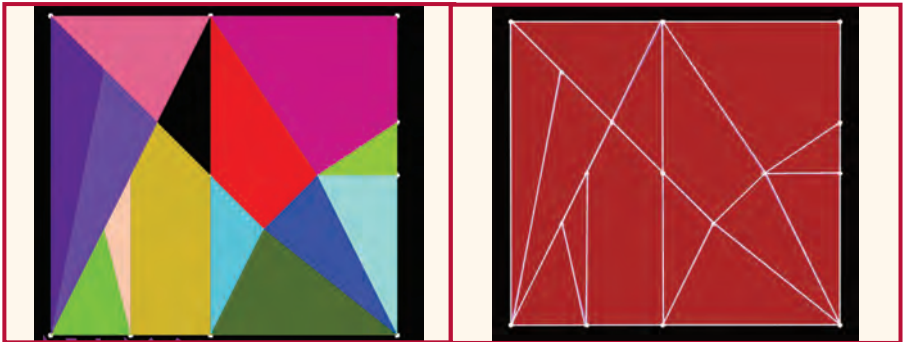


# D'une forme à l'autre : jouer avec les polygones

Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck,  
Bernard Lemaire, Édouard Thomas

Mathématiciens

Que peut-on faire avec une forme plane  $F$ ? On peut la tourner, la déplacer... Bref, lui faire subir une isométrie du plan. On peut aussi l'agrandir, la rétrécir, et combiner toutes ces opérations. En des termes plus mathématiques, faire agir sur  $F$  le groupe des similitudes. Une autre piste consiste à se demander s'il est possible de « trans-former »  $F$  en une autre forme  $F'$ , en un nombre fini d'opérations élémentaires. Les amateurs de casse-tête s'emploient à cet exercice depuis... l'Antiquité ! On attribue en effet à Archimède un célèbre découpage du carré en quatorze pièces, le Stomachion. L'objectif est alors de mélanger les pièces et de reconstituer le carré de départ, à la manière d'un puzzle. Ce n'est pas facile !



Les quatorze pièces du Stomachion.

Construction du Stomachion.

©MCDG, 2022

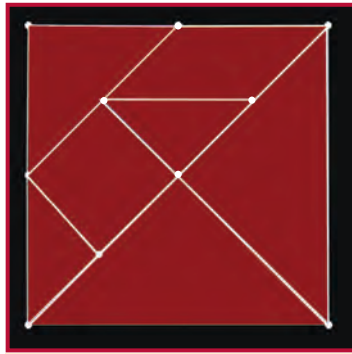
©MCDG, 2022

Le Stomachion préfigure le Tangram, introduit en Europe dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Il s'agit de constituer, avec les sept pièces d'un carré astucieusement découpé, des figures imposées. Le succès du Tangram ne s'est jamais démenti et, depuis, d'innombrables jeux, casse-tête et puzzles géométriques ont été inventés par des créateurs à l'imagination débridée (voir l'article *Casse-tête et Puzzles à découpage* dans la brochure *Maths Jeux Culture Express* de 2019).



Un chat réalisé à l'aide des sept pièces du Tangram.

© Nevit Dilmen, 2010



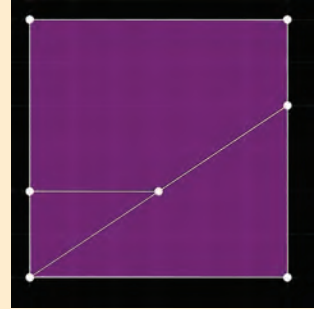
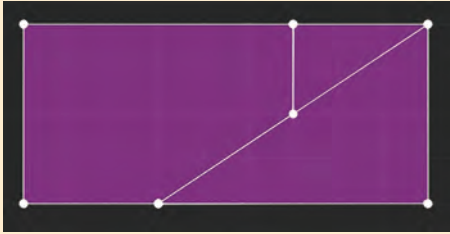
Construction du Tangram.

© MCDG, 2022

## Des polygones qui ne manquent pas d'aires

Revenons à notre forme  $F$  du plan, supposée polygonale (ses côtés sont constitués de segments de droites). Si l'on veut pouvoir la transformer en un autre polygone  $F'$  par un nombre fini de découpes (ou dissections), il est nécessaire que  $F$  et  $F'$  possèdent la même aire. En effet, toutes les opérations mises en jeu sont des isométries (translations et rotations) ; en particulier, elles préservent les aires. On parle alors d'*équidécomposabilité* de  $F$  et  $F'$ . Vous pouvez d'ailleurs utiliser cette propriété si vous débutez au Tangram : en raisonnant uniquement sur la conservation des aires, vous pourrez déterminer les longueurs des côtés de la forme à reconstituer, et donc trouver comment assembler vos sept pièces.

Un résultat établi au XIX<sup>e</sup> siècle, quasiment au même moment que l'introduction du Tangram en Europe, énonce la réciproque : si  $F$  et  $F'$  ont la même aire, alors il existe une découpe permettant de passer de l'une des formes à l'autre. La démonstration est constructive et réalise effectivement une découpe qui convient (voir l'article suivant). L'idée est de montrer déjà que tout polygone est équidécomposable en un carré de même aire. Ainsi,  $F$  est équidécomposable en un carré  $C$  de même aire. De même, le polygone  $F'$ , supposé de même aire que  $F$ , est lui aussi équidécomposable en  $C$ . En superposant les deux découpes, on obtient une décomposition de  $F$  en  $F'$ . Le tour est joué !



Découpe d'un rectangle en un carré de même aire. L'opération étant réversible, on peut aussi voir une découpe d'un carré en un rectangle de même aire. Quelques méthodes et techniques géométriques permettant de réaliser de telles découpes sont présentées dans l'article qui suit.

© MCDG, 2022

## Un univers géométrique magique et infini qui s'ouvre

Comme à chaque fois que vous mettez la main sur un nouvel outil, vous vous demandez : que puis-je en faire ? C'est une question que beaucoup de mathématiciens et d'amateurs de casse-tête se posent depuis cent cinquante ans que le théorème d'équidécomposabilité est disponible. Le moins que l'on puisse dire, c'est que les réponses sont aussi riches et variées qu'inattendues.

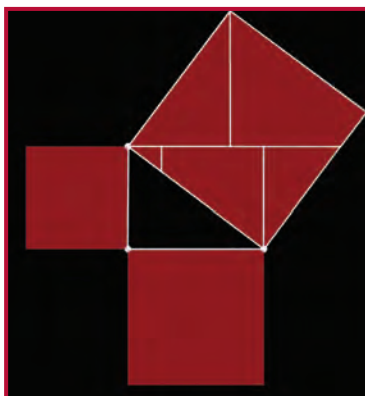
**Découpes géométriques.** Le domaine concerné par les découpes géométriques se rattache essentiellement aux mathématiques récréatives (voir *Maths Jeux Culture Express*, 2019). D'astucieuses dissections émaillent les magazines sous forme de défis et émerveillent les amateurs. Une bonne découpe permet parfois d'illustrer la démonstration d'un théorème (on parle de *preuves sans mots*). Cette niche géométrique constitue en fait une voie d'entrée ludique et didactique dans la géométrie euclidienne : elle permet d'appréhender les notions de longueur, d'aire, de polygone, de triangulation, de transformation géométrique, de réfléchir à ce qu'est une « forme », d'introduire quelques résultats emblématiques (théorèmes de Pythagore et de Pick, trigonométrie élémentaire). Le tout en manipulant soi-même les objets en jeu, en mobilisant son esprit de créativité, en développant son intuition géométrique.

Aujourd'hui, avec le *programme de Goncharov*, actuellement en plein essor, les dissections de polytopes et leur combinatoire se trouvent liées à des questions profondes de K-théorie algébrique, de théorie des nombres, d'homologie cyclique, de topologie et de géométrie algébrique. Ça, c'est pour le côté « sérieux ».



Le mathématicien américain d'origine russe Alexander Goncharov (né en 1960) a développé durant trente ans un vaste et ambitieux programme de recherche dans lequel les découpes de polytopes jouent un rôle central.

© É.T., 2014



Une preuve sans mots du théorème de Pythagore.

© MCDG, 2022

**Pavages.** Le domaine d'interaction le plus immédiat avec les découpes géométriques est celui des pavages, cher aux artistes, aux artisans et aux scientifiques (chimistes, cristallographes et physiciens en tête). En 1900, le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943) présenta une liste de vingt-trois problèmes pour le XX<sup>e</sup> siècle ; deux d'entre eux (le troisième et le dix-huitième) sont liés aux découpes et aux pavages. Le sujet est aujourd'hui foisonnant et enrichi par des pavages apériodiques à couper le souffle, notamment ceux de Penrose (voir *Croquons les maths Express*, 2021). Le domaine des pavages regorge de conjectures, de défis, d'énigmes et de questions mathématiques fascinantes. La plus fameuse est sans doute la suivante (*problème ein Stein*) : existe-t-il un polygone qui permette de paver le plan uniquement de manière apériodique ?

**Art, design, industrie.** Artistes, designers et architectes d'intérieur s'ingénient à réaliser des objets mobiliers reconfigurables (à l'aide d'une découpe articulée, une table triangulaire peut devenir rectangulaire, typiquement). Les questions de dissection s'invitent aussi dans la fabrication industrielle, où des algorithmes de découpe sont développés pour diviser un bien en un nombre minimal de pièces qui doivent rentrer dans un emballage de volume donné (pensez à un meuble livré en kit). C'est le domaine de la conception assistée par ordinateur (CAO), dans lequel se posent des questions d'assemblage, de reconfiguration, d'optimisation. En ingénierie, en graphisme, en traitement numérique des images, en géométrie informatique, en animation vidéo, en reconnaissance de formes, les algorithmes de triangulation font l'objet d'intenses développements.

**Construire des casse-tête.** Les amateurs de beaux objets ne se sont pas arrêtés au Stomachion et au Tangram, loin s'en faut. La société artisanale Jeux Efcé (présente sur le Salon Culture et Jeux Mathématiques) s'est depuis 2012 spécialisée dans les puzzles de découpe et de pavage, qui sont autant de supports visuels de jolies propriétés géométriques. Du côté des « poids lourds », pour fêter la sortie des casses-tête combinatoires Eternity (Ertl Company, 1999) et Eternity II (Tomy UK Ltd, 2007), des prix (un million de livres sterling pour le premier prix, qui fut attribué, et deux millions pour le second, qui reste non résolu aujourd'hui) furent proposés à qui réussirait à assembler les deux cent cinquante-six carrés pour réaliser le pavage qui répondrait aux contraintes du jeu. Les inventeurs « à l'ancienne » ne sont pas en reste : en 2012, le concepteur Vesa Timonen a surpris le monde avec un casse-tête mécanique de deux pièces, Symmetrick, réalisé à partir d'une découpe originale (voir *Maths Jeux Culture Express*, 2019). Depuis, Tomas Linden, Emrehan Halici, Nick Baxter, Jerry Loo, Stan Knot, Tsugumitsu Noji et bien d'autres lui ont emboîté le pas.

**Des conjectures pour les décennies à venir.** D'innombrables questions viennent à l'esprit de ceux qui s'amuse avec les découpes. En voici quelques-unes, que personne ne sait résoudre aujourd'hui. Prenez un carré ABCD de côté 1. Existe-t-il un point S à l'intérieur (strictement) de ce carré tel que SA, SB, SC et SD soient tous quatre des nombres rationnels ? Peut-on recouvrir ABCD avec les rectangles de côtés 1 et  $1/2$ ,  $1/2$  et  $1/3$ ,  $1/3$  et  $1/4$ ,  $1/4$  et  $1/5$ ... utilisés chacun une fois et une seule dans le pavage (la somme des aires de tous ces rectangles est bien égale à 1, l'aire de ABCD) ? Est-il possible d'assembler les carrés de côté 1,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ... de manière à constituer un rectangle d'aire  $\pi^2/6$  (la somme des aires de tous les carrés) ? Un disque D peut-il être découpé en deux parties isométriques connexes G et H telles que le centre de D ne soit situé ni sur le bord de G, ni sur le bord de H ? Un rectangle peut-il être partagé en trois polygones isométriques (hors rectangles) ?

**Changer les règles du jeu.** La transgression est reine, en mathématiques, alors essayons de changer les règles du jeu ! Pourquoi se restreindre aux polygones ? On peut en effet introduire des formes plus générales, dont les « côtés » seraient constitués d'arcs de cercle (ou d'ellipse, de parabole...), de courbes données, voire de fractales ! On sait ainsi équidécomposer un carré en un disque de même aire ; le sujet connaît d'ailleurs en ce moment de nombreux rebondissements (la vidéo « Équidécomposition et mesure » de Thomas Cabaret devrait vous émerveiller). Une autre piste consiste à explorer ce qui se passe dans l'espace avec les polyèdres : existe-t-il un théorème d'équidécomposabilité en 3D ? Dès 1900, Max Dehn a démontré que non (voir article suivant) : il ne suffit pas que deux solides (un cube et un tétraèdre régulier, par exemple) aient le même

volume pour qu'ils soient équidécomposables ; il faut en outre qu'ils aient le même *invariant de Dehn* (ce qui n'est pas le cas du cube et du tétraèdre). Par contre, avec ce nouveau critère introduit par Dehn, le résultat est sauvé : deux polyèdres sont équidécomposables si, et seulement si, ils possèdent le même volume et le même invariant de Dehn, comme l'a prouvé en 1965 le mathématicien suisse Jean-Pierre Sydler (1921–1988). Le Danois Borge Christian Jessen (1907–1993) a montré, trois ans plus tard, que le résultat subsiste tel quel en dimension 4 (ou « polyèdre » est remplacé par « polytope »). Le résultat subsiste-t-il dans les dimensions supérieures, sans avoir à introduire de nouveaux invariants ? Subsiste-t-il dans les géométries non euclidiennes (géométrie sphérique, géométrie hyperbolique) ? Ou pour d'autres « formes » que des polygones, polyèdres et polytopes (par exemple des espaces définis par les solutions d'équations polynomiales, ou d'autres objets plus généraux encore) ? Voilà des questions ouvertes qui font partie du programme de Goncharov et dont les mathématiciens pensent que les réponses sont positives.

**Manipuler les découpes.** Mais le défi roi qui s'offre aux amateurs de découpes géométriques consiste à chercher le nombre minimal de pièces nécessaires pour réaliser une dissection entre deux polygones de même aire. Plus le nombre de pièces est réduit, plus la découpe est astucieuse, sophistiquée, ou élégante. Le mathématicien américain Greg Frederickson est le grand expert de ces questions.



Greg Norman Frederickson (né en 1947) et Bernard Lemaire (né en 1945) réfléchissant à une découpe géométrique.

© Patricia Lemaire, 1999

En France, l'un des spécialistes est Bernard Lemaire, qui dispose de plusieurs centaines de découpes originales. Pour les rendre disponibles à tous, sous la forme de défis ludiques, il a convaincu une petite équipe (dont les auteurs de cet article) de créer un *blog* sur le site CultureMath, « Morceaux choisis de géométrie ». L'idée est de proposer une interface en ligne, gratuite et ouverte à tous (sans aucune condition ni inscription, code source ouvert), pour que chacun puisse s'amuser à réaliser en ligne des découpes géométriques et puisse partager ses découvertes.

**M.B., C.C., F.J., B.L. & É.T.**





# Dissections de polygones avec «Morceaux choisis de géométrie»

Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck,  
Bernard Lemaire, Édouard Thomas

Mathématiciens

Prenez votre polygone  $F$  préféré (un rectangle, un pentagone régulier ou un 2022-gone non convexe). Une *partition* de  $F$  est un ensemble fini de polygones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tels que chaque  $P_i$  est inclus dans  $F$  ( $1 \leq i \leq n$ ), la réunion de  $P_1, P_2, \dots, P_n$  est égale à  $F$ , et deux polygones distincts  $P_i$  et  $P_j$  de l'ensemble  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  ne se chevauchent pas :  $\text{Aire}(P_i \cap P_j) = 0$ . Pour deux polygones  $F$  et  $F'$  supposés de même aire, être *équidécomposables* signifie qu'il existe une partition commune à  $F$  et à  $F'$  (voir les deux précédents articles). Dit autrement, on peut trouver une partition  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $F$  telle que  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  soit également une partition de  $F'$ , quitte à appliquer à chaque polygone  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une translation ou une rotation.

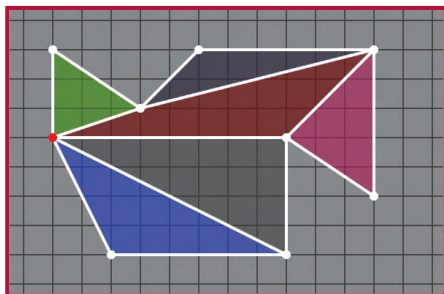
«Être équidécomposables» est manifestement une relation d'équivalence sur l'ensemble des polygones. Assurez-vous-en ! Il s'agit d'établir que toute forme est équidécomposable en elle-même (*réflexivité*), que si une forme est équidécomposable en une autre, alors cette dernière est équidécomposable en la première (*symétrie*), et enfin que si une première forme est équidécomposable en une deuxième, et que cette deuxième est elle-même équidécomposable en une troisième, alors la première est équidécomposable en la troisième. Une propriété fondamentale est de remarquer que si  $F$  et  $F'$  sont équidécomposables, alors  $F$  et  $F'$  ont même aire. En effet, l'aire de  $F$  (tout comme l'aire de  $F'$ ) est égale à la somme finie des aires des différents polygones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  qui constituent une partition commune à  $F$  et  $F'$ .

Le théorème d'équidécomposabilité, prouvé au XIX<sup>e</sup> siècle, énonce la réciproque : deux polygones sont équidécomposables si, et seulement si, ils ont même aire.

## Des constructions géométriques à la règle et au compas

La théorie, c'est bien joli, mais «en vrai», armés d'une règle et d'un compas, comment fait-on ? Pour passer du polygone  $F$  en un carré  $C$  de même aire que  $F$  à l'aide d'un nombre fini de découps, il faut déjà commencer par trianguler  $F$ . C'est toujours possible (voir encadré), et même d'une infinité de façons différentes.





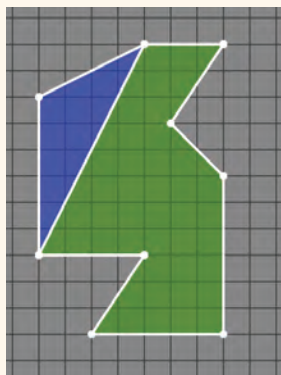
Une triangulation d'un polygone F.

© MCDG, 2022

## Triangler un polygone

La décomposition d'un polygone F quelconque à un carré C de même aire que F se fait, de manière constructive, en plusieurs étapes. Il faut déjà se convaincre qu'il est toujours possible de *triangler* F, c'est-à-dire de recouvrir F par un nombre fini de triangles qui ne se chevauchent pas et sans laisser de « trous » dans F. Cela semble intuitivement évident : quel que soit le polygone F que vous dessinerez, aussi tarabiscoté soit-il, vous y arriverez très facilement.

Mais si vous êtes à la recherche d'une « procédure » systématique, vous pouvez utiliser la *méthode des oreilles* : parcourez le contour de F et isolez un triangle dont deux côtés sont deux arêtes consécutives de F et dont le troisième côté est intégralement contenu dans F (un tel triangle est une *oreille* de F) ; mettez de côté ce triangle pour votre triangulation, et recommencez avec le polygone résiduel (à savoir, F privé de cette oreille). Ce n'est pas toujours une méthode très rapide, mais elle marche à tous les coups ! La recherche d'algorithmes de triangulation « efficaces » de polygones (ou de polyèdres, en 3D) reste d'ailleurs un domaine d'activité bouillonnant, car ils sont très utilisés en infographie, typiquement pour modéliser des surfaces (pour les besoins d'un jeu vidéo ou pour la simulation de la déformation de la structure d'un avion en vol par exemple).

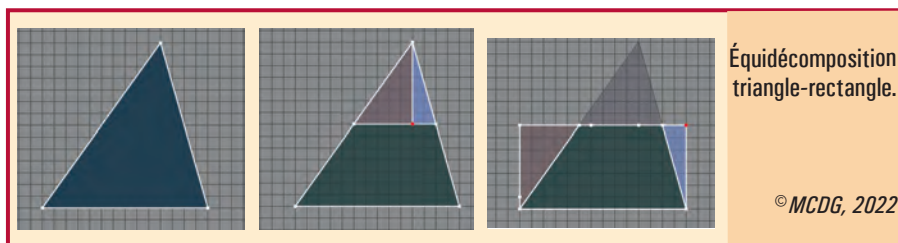


En haut à gauche (en bleu), une oreille de notre polygone.

© MCDG, 2022

Il semble que ce soit le mathématicien allemand Max Wilhelm Dehn (1878-1952) qui, le premier, ait prouvé le *théorème des deux oreilles*, à savoir que tout polygone (« sans trous », qui « ne s'auto-intersecte pas » et ayant au moins quatre sommets) possède au minimum deux oreilles.

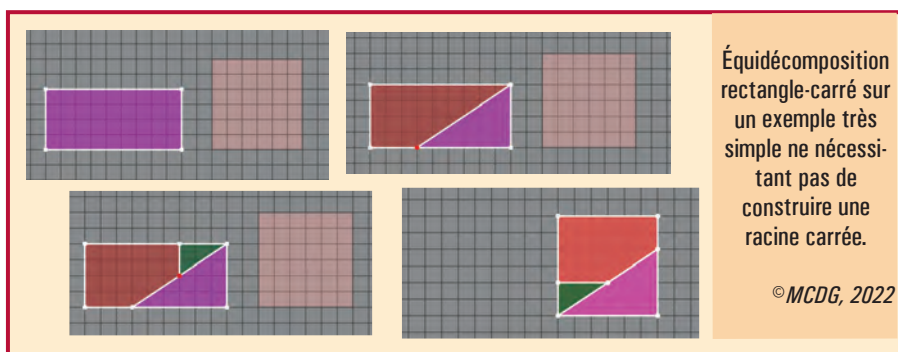
Chaque triangle T de votre triangulation peut ensuite être transformé en un rectangle R de même aire que T. Nécessairement, pour des raisons de conservation des aires, les dimensions de R sont la base et la demi-hauteur de T.



Équidécomposition  
triangle-rectangle.

© MCDG, 2022

Il s'agit ensuite de transformer votre rectangle R en un carré C de même aire. Il faut parfois s'armer d'un peu de patience car l'opération peut nécessiter la construction d'une racine carrée.



Équidécomposition  
rectangle-carré sur  
un exemple très  
simple ne nécessi-  
tant pas de  
construire une  
racine carrée.

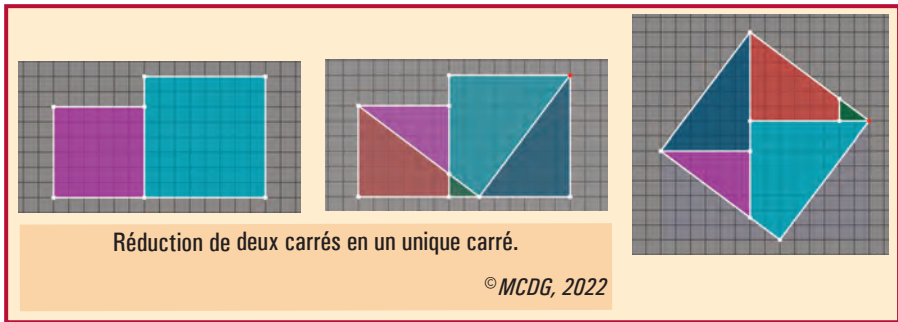
© MCDG, 2022

Vous avez ainsi été capable de trianguler votre polygone F et de transformer tous les triangles de votre triangulation en autant de carrés de même aire. Félicitations ! Vous n'êtes cependant pas encore au bout de vos peines. Car à partir de votre collection de petits carrés, il va falloir construire un gros carré d'aire l'aire de F, notre forme polygonale de départ. Pour ce faire, il suffit de savoir comment transformer deux carrés en un carré plus grand. C'est là que nous avons besoin d'une vieille connaissance.

## L'inoxydable théorème de Pythagore

Prenez donc deux carrés  $C_1$  (d'aire  $a_1$ ) et  $C_2$  (d'aire  $a_2$ ) issus de votre collection de carrés. Il s'agit de construire un carré  $C_3$  dont l'aire  $a_3$  est égale à  $a_1 + a_2$ . Pour cela, il suffit de penser au théorème de Pythagore !

Il vous suffit ensuite de répéter cette opération pour tous les carrés que vous avez obtenus. Courage ! En « assemblant » ainsi deux à deux, patiemment, vos carrés, qui sont en nombre fini, vous obtenez finalement un carré unique, dont l'aire est précisément l'aire de votre forme polygonale F de départ.



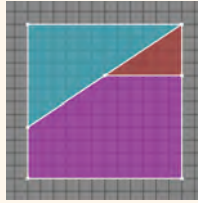
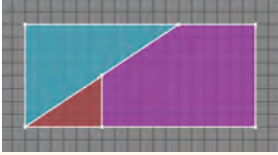
Maintenant, il faut tout recommencer avec  $F'$ , l'autre polygone, de même aire que  $F$ . Vous y êtes ? Récapitulons. Vous avez décomposé  $F$  en un nombre fini de pièces qui permettent de constituer un carré de même aire. Vous avez fait de même pour  $F'$ . Superposant les deux « puzzles » obtenus dans le carré, vous pouvez en déduire une décomposition (plus fine) qui permet de passer de  $F$  à  $F'$ , ou de  $F'$  à  $F$ , en un nombre fini, éventuellement gigantesque, de minuscules pièces polygonales intermédiaires. Ces petits polygones constituent la partition cherchée. On a donc prouvé que  $F$  et  $F'$  sont équidécomposables. Ouf ! On voit tout l'intérêt qu'il peut y avoir à trouver des découpes astucieuses, en un minimum de pièces, de formes polygonales  $F$  et  $F'$  données : contrairement à l'approche systématique qui part d'une triangulation, on va éviter d'avoir à manipuler un nombre gigantesque de pièces intermédiaires (voir encadré en page suivante).

Par contre, si l'on remplace la notion d'aire par celle de volume et les polygones par des polyèdres, le théorème d'équidécomposabilité devient faux en dimension 3. Pour pouvoir retrouver un résultat similaire, il faut (et il suffit) d'ajouter un autre ingrédient, l'invariant de Dehn (voir précédent article), qui s'obtient à partir des longueurs des arêtes et des valeurs des angles solides du polyèdre considéré.

Dès lors, de nouvelles questions émergent. Ainsi, on sait que pour pouvoir paver l'espace, un tétraèdre doit nécessairement posséder un invariant de Dehn égal à 0 (cette condition est nécessaire mais pas suffisante). Quels sont les tétraèdres qui permettent de paver l'espace ? On en connaît trois familles infinies et deux spécimens isolés, mais sinon, aussi surprenant que cela puisse paraître, on ne sait toujours pas si on les a tous trouvés ou s'il en reste d'autres à débusquer ! En fait, on ne sait même pas encore dénombrer ou classer tous les tétraèdres dont l'invariant de Dehn est nul. Les géomètres ont encore du pain sur la planche (à découper)...

## La superposition sur un exemple élémentaire

Le rectangle de côtés 8 et 18 (l'unité de mesure étant la longueur d'un petit carré du quadrillage) possède une aire égale à 144, soit celle d'un carré de côté 12. Réalisons une première découpe, en trois pièces, permettant de passer du rectangle au carré à l'aide de translations.

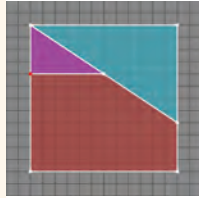


Première découpe (élémentaire) d'un rectangle en un carré de même aire.

© MCDG, 2022



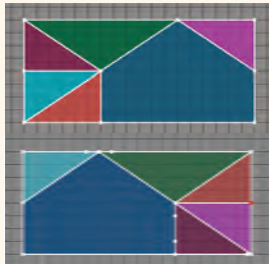
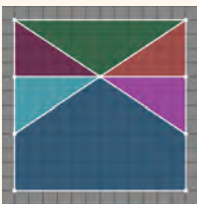
Réalisons maintenant une seconde découpe de ce même rectangle, tourné de  $90^\circ$ . Des rotations s'ajoutent aux translations pour mener la décomposition à son terme.



Deuxième découpe (tout aussi élémentaire).

© MCDG, 2022

La superposition des deux découpes permet d'obtenir une dissection d'un rectangle horizontal en un rectangle vertical de même aire. On comprend que dès que le nombre de pièces de l'une des découpes devient « grand », cette méthode risque de produire une « charpie » géométrique. En fait, il suffit simplement d'effectuer une rotation puis une translation de l'un des rectangles pour réaliser la « dissection » : la méthode de superposition, si elle fonctionne « à tous les coups », est loin d'être économe !



À gauche :  
la superposition des deux découpes.

À droite :  
visualisation des pièces de la découpe commune dans les deux rectangles de départ.

© MCDG, 2022

## Un univers géométrique magique et infini qui s'ouvre

Revenons à nos polygones du plan, car il faut le souligner : vous venez de démontrer le théorème d'équidécomposabilité ! Pour visualiser cet important

résultat en action, vous pouvez aller à l'adresse [dmsm.github.io/scissors-congruence](https://dmsm.github.io/scissors-congruence); ce site « Visualizing Scissors Congruences », à l'interface dépouillée, vous permet de tracer (avec votre souris, ou avec votre doigt sur un pavé tactile) deux polygones quelconques. Ensuite, l'outil logiciel ajuste la taille des deux polygones pour qu'ils aient la même aire et réalise méthodiquement, sous vos yeux émerveillés, toutes les étapes d'une découpe de l'un en l'autre. Hypnotique !

Avec le projet « Morceaux choisis de géométrie » (libre et code source ouvert), il s'agit de passer de l'autre côté de l'écran, de s'appropriier les découpes et les manipulations des polygones, et de laisser s'exprimer votre créativité. Les auteurs de ce texte ont développé la « Dessinatrice », un outil logiciel simple, visuel et intuitif pour manipuler ces objets géométriques. Les illustrations de cet article ont d'ailleurs été réalisées avec une première version rudimentaire de la Dessinatrice (qui sera à terme bien plus évoluée).

Hormis la possibilité de faire soi-même les découpes, une originalité du projet consiste à proposer un accès élémentaire à une géométrie basée essentiellement sur les polygones. Créer des figures, les découper, les manipuler et comprendre les rapports qu'elles entretiennent entre elles ouvrent une fenêtre sur une géométrie riche de possibilités et de découvertes. Centré sur des objets géométriques familiers introduits dès les petites classes, « Morceaux choisis de géométrie » permettra, dans un registre plus avancé, de faire émerger par la pratique de nombreuses questions mathématiques et épistémologiques sur la nature d'un polygone, d'une arête, d'un sommet, mais aussi sur leurs intersections, sur le « nombre de trous » d'une figure ou sur des notions d'invariants. Ce sont autant de questions sur les formes qui ont motivé d'innombrables géomètres, à commencer par Euclide (voir un précédent article) et même Platon avant lui. La manipulation des polygones mise à la portée de toutes et de tous s'inscrit ainsi dans une longue tradition historique et scientifique et débouche sur un monde mathématique aussi vaste que passionnant !

*M.B., C.C., F.J., B.L. & É.T.*

### **Pour en savoir (un peu) plus**

Blog « Morceaux choisis de géométrie ». Le site des découpes géométriques, <http://CultureMath.ENS.fr>, bientôt disponible.

Vidéo « Équidécomposition et mesure ». Passe-science 46, Thomas Cabaret, 31 min, 2022, disponible à l'adresse [youtube.com/watch?v=EXkwcByZ87I](https://www.youtube.com/watch?v=EXkwcByZ87I).

*Dissections, plane and fancy.* Greg Frederickson, Cambridge University Press, 2003.



# Polyèdres!

Jean-Jacques Dupas

Président de l'association PlayMaths

Les polyèdres sont les « formes » emblématiques des mathématiques ! Le poids culturel de ces objets est considérable. Mais qu'est-ce qu'un polyèdre ? Étymologiquement, « polyèdre » vient du grec *polus* (« plusieurs ») et *hedra* (« siège », terme par lequel il faut comprendre « face » : un polyèdre est « assis » ou posé sur l'une de ses faces !). Un *polyèdre*, ou *solide*, est une partie de l'espace 3D limitée par des polygones (les *faces*), de sorte que les côtés des polygones (les *arêtes*) soient toujours partagés par deux faces. Les extrémités des arêtes sont les *sommets* (voir plus loin). Certains polyèdres sont bien connus, comme les pyramides.

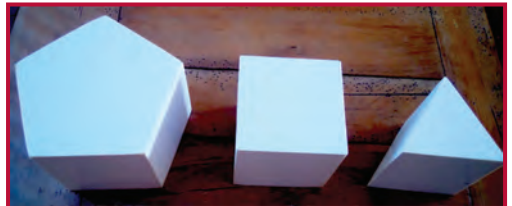
## Le mystère des pyramides et le vertige des dimensions

Une *pyramide*, c'est un polygone (la *base*) et un sommet n'appartenant pas au plan de la base. Le polyèdre est refermé par des faces latérales triangulaires entre le sommet et la base.



De gauche à droite, une pyramide à base triangulaire, carrée, pentagonale.

Une famille infinie est aussi connue, les *prismes*. Un prisme est un polygone (la *base*) et une direction issue d'un des sommets de la base n'appartenant pas au plan de la base. Une deuxième base, identique à la première, est ajoutée à l'autre extrémité de la direction. Le polyèdre est refermé par une ceinture de quadrilatères entre les deux bases.



De gauche à droite, les prismes droits réguliers à base pentagonale, carrée, triangulaire.



De gauche à droite, les anti-prismes droits réguliers à base pentagonale, carrée, triangulaire.

Moins courante est la famille infinie des *anti-prismes* : cette fois-ci, les deux bases sont « tournées » afin de permettre de refermer le polyèdre par une ceinture de triangles.

Une définition alternative serait : « Un polyèdre est à l'espace ce qu'est un polygone au plan. » Cette dernière définition possède l'avantage de placer le polyèdre dans une suite dépendant de la dimension. Avec la dimension 0, on a un point, avec la dimension 1, le segment de droite, qui possède deux « sommets ». En dimension 2, un polygone est un ensemble de segments, tel que chaque sommet ne soit partagé que par deux segments. La définition pour la dimension 3 correspond au polyèdre. En dimension 4, un *polytope* quadridimensionnel est un ensemble de polyèdres tels que chaque face soit partagée par deux polyèdres... Difficile à visualiser, et pour cause : il faudrait pouvoir circuler librement dans la quatrième dimension ! Inscrire le polyèdre dans cette suite permet aussi de calquer directement certaines propriétés des polygones, par exemple la convexité, et d'aiguiser son intuition.

## Convexité, solides de Platon et étoiles de Kepler–Poincaré

La convexité est une notion assez difficile... et fondamentale en mathématiques. Un objet est *convexe* si tout segment construit dans cet objet reste à l'intérieur. Par *convexité*, il faut comprendre qu'un objet est convexe s'il ne contient « ni trou, ni creux ». Tester tous les segments, c'est fastidieux, d'autant qu'ils sont en nombre infini. Heureusement, des théorèmes nous simplifient le travail. Un polygone est convexe si, pour tous ses côtés, le polygone reste « du même côté » de la droite support de ce côté. Pour les polyèdres, on a le même théorème : un polyèdre est convexe si, pour tous ses faces, le polyèdre reste « du même côté » du plan support de cette face. En d'autres termes, si un polyèdre ne peut pas être posé sur l'une de ses faces, alors il n'est pas convexe. Dès qu'un polyèdre possède une face non convexe, il n'est plus convexe, mais il est possible de construire un polyèdre non convexe bien que toutes ses faces le soient ! La convexité est un critère de classification des polyèdres. La présence de polygones réguliers parmi les faces est aussi un élément de classification. Un polygone est *régulier* si tous ses côtés sont « de la même longueur » (même segment) et que tous ses angles sont « de la même valeur » (cette dernière

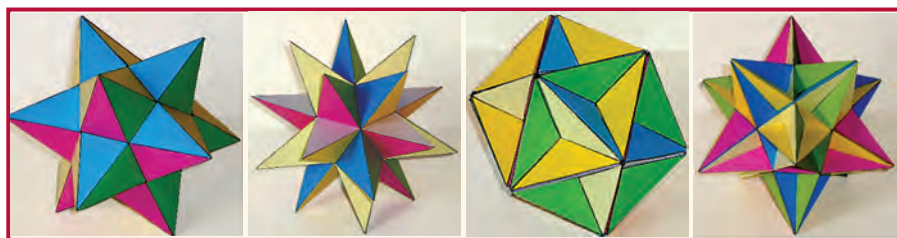
condition peut être remplacée par l'existence d'une *isométrie*, à savoir une transformation du plan qui conserve les distances, qui transforme un sommet en tous les autres). De même, un polyèdre sera régulier si toutes ses faces sont un seul polygone régulier et s'il existe une isométrie transformant un sommet en tous les autres. Cette définition moderne évite l'utilisation des angles solides.

Forts de ces définitions, il devient possible de définir les grandes familles historiques de polyèdres. Les *solides de Platon* sont les cinq polyèdres réguliers convexes. Ils ont été baptisés ainsi par Héron d'Alexandrie (I<sup>er</sup> siècle de notre ère) car leur liste apparaît pour la première fois dans le *Timée*, un célèbre ouvrage de Platon (vers -427, vers -348).



Les cinq solides de Platon. De gauche à droite : le dodécaèdre (douze faces), l'icosaèdre (vingt faces), le cube (ou hexaèdre, six faces), l'octaèdre (huit faces) et le tétraèdre (quatre faces).

Les solides de Kepler–Poincaré sont les quatre polyèdres réguliers non convexes. Les deux premiers, le *petit dodécaèdre étoilé* et le *grand dodécaèdre étoilé*, furent décrits par Johannes Kepler (1571–1630). Les deux suivants, le *grand dodécaèdre* et le *grand icosaèdre*, furent étudiés par Louis Poincaré (1777–1859). On les appelle aussi *étoiles de Kepler–Poincaré*.

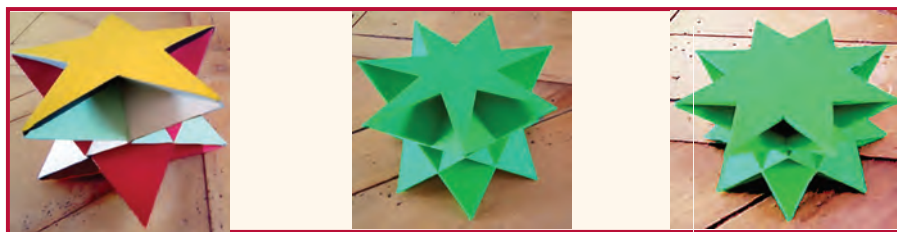


Les solides de Kepler - Poincaré. De gauche à droite, le petit dodécaèdre étoilé, le grand dodécaèdre étoilé, le grand dodécaèdre, le grand icosaèdre.



Notre classification semble terminée. Mais on peut adopter un autre point de vue avec les polyèdres uniformes ! Les polyèdres *uniformes* sont les soixante-quinze solides pour lesquels la condition de régularité est relaxée (ou «se détend») en acceptant plusieurs types de polygones pour les faces, au lieu d'un seul. Parmi cet ensemble sont dénombrés : les cinq solides platoniciens ; les quatre étoiles de Kepler–Poinsoot ; treize solides convexes découverts par Archimède et décrits dans un livre aujourd'hui perdu ; et enfin cinquante-trois solides non convexes. Il faut ajouter également deux familles infinies de prismes et d'anti-prismes réguliers convexes, mises en avant par Kepler (les treize solides plus les prismes et anti-prismes formant les *polyèdres semi-réguliers*) et une famille infinie d'anti-prismes croisés découverte par Jean Paul Albert Badoureau (1853–1923).

La famille de cinquante-trois solides non convexes comprend trente-sept solides non convexes découverts par Albert Badoureau (le mathématicien autrichien Johann Pitsch en trouva indépendamment dix-huit au même moment, dont quatre qui ont échappé à Badoureau) et douze solides qui ont patiemment été mis au jour par Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003), Jeffrey Charles Percy Miller (1906–1981), Hugh Christopher Longuet-Higgins (1923–2004) et Michael Selwyn Longuet-Higgins (1925–2016). La première publication de cette liste date des années 1950. Enfin, S.P. Sopov prouve en 1970 que cette liste est complète : aucun polyèdre n'a été oublié.



Trois anti-prismes croisés.



Les cinq polyèdres réguliers au premier plan, et les 13+2 polyèdres archimédiens (deux d'entre eux existent sous deux formes énantiomorphes).

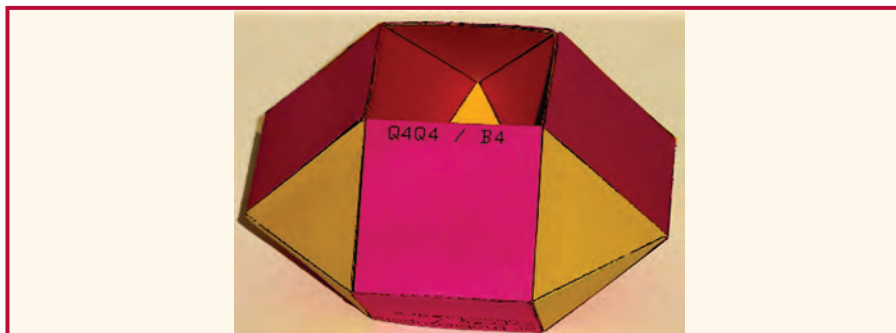


## Géométrie, topologie... D'autres interprétations sont possibles !

Est-il possible d'aller plus loin, de modifier encore les règles du jeu de manière à obtenir plus de formes encore ? Naturellement : notre imagination est notre seule limite ! Élève de H.S.M. Coxeter, Norman Woodason Johnson (1930–2017) publie en 1966 une liste de quatre-vingt-douze solides convexes non uniformes dont les faces sont elles-mêmes des polygones réguliers convexes. Victor Abramovich Zalgaller (1920–2020) prouve en 1969 que la liste des *solides de Johnson* est complète.

Poursuivant la démarche, Bonnie Madison Stewart (1914–1994) identifie des familles infinies de polyèdres non convexes dont les faces sont toutes des polygones réguliers convexes. On les appelle les *toroïdes de Stewart*.

Mais alors que les géomètres ne s'intéressaient qu'à certaines familles de polyèdres, René Descartes (1596–1650) puis Leonhard Euler (1707–1783) vont envisager les polyèdres dans leurs généralités. Euler constate que, dans un polygone, il existe autant de côtés que de sommets. Il se demande s'il n'existe pas une relation aussi simple dans un polyèdre. Le 25 novembre 1750, il présente sa formule à l'Académie de sciences de Saint-Petersbourg : le nombre  $S$  de sommets plus le nombre  $F$  de faces est égal au nombre  $A$  d'arêtes plus 2 (soit  $S + F = A + 2$ ). Cette identité avait été partiellement anticipée par Descartes. Euler en propose une démonstration en 1752.



Un toroïde de Stewart.

En 1794, Adrien-Marie Legendre (1752–1833) publie une démonstration plus rigoureuse dans ses *Éléments de géométrie* pour les polyèdres convexes. Cet ouvrage servira de base aux travaux de Poincaré.

Il faudra cependant attendre Henri Poincaré (1854–1912) pour avoir une démonstration réellement rigoureuse de la formule d'Euler. De fait, il jettera les bases de la topologie algébrique entre 1895 et 1906 dans une série de six mémoires révolutionnaires (dont l'article fondateur *Analysis Situs* de 1895), puis établira une définition rigoureuse des polyèdres. Il aura fallu plus de vingt-cinq siècles pour définir ces objets mathématiques «communs» !

De ce fait, Poincaré définira quand et comment s'applique la formule d'Euler, qui deviendra la *formule d'Euler–Poincaré*. Cette dernière ne s'applique qu'aux polyèdres *simplement connexes* (toute courbe simple fermée dessinée sur le polyèdre doit pouvoir être continuellement déformée en un point sans quitter la surface du polyèdre) et *orientables* (la surface du polyèdre définit un espace «intérieur» et un espace «extérieur»). Ces travaux ouvriront un champ immense de recherches au XX<sup>e</sup> siècle.

En réalité, le monde des polyèdres est plus riche encore ! La recherche de classifications en «familles emblématiques» ne doit pas faire perdre de vue d'autres quêtes, qui donnent naissance aux notions de dualité, d'étoilement, de symétrie, de dimensions supérieures... Ces différents concepts permettent de construire bien d'autres solides... et de continuer à interroger le «monde des formes» !

*J.-J. D.*



## De singulières formes...

François Lavallou  
Mathématicien

Les mathématiciens caractérisent, dénombrent, classent leurs objets d'étude. Les surfaces n'échappent pas à cet inventaire qui peut s'effectuer, en toute généralité, à partir de leurs seules singularités. C'est le domaine de la *géométrie algébrique*.

Nos neurones visuels de prédateur sont adaptés à détecter les discontinuités, qu'elles soient créées par le mouvement, l'orientation ou le contraste. À l'analyse d'une carte routière, notre regard détecte instantanément les carrefours, points clés pour optimiser notre trajet. On caractérise de même une surface par ses «ruptures», son *genre* (son «nombre des trous») et ses croisements, bifurcations ou pointes. On distingue donc naturellement les surfaces *avec singularités* des surfaces *lisses*, comme la sphère, le tore ou la *surface de Seifert* qui figure en couverture de cette brochure (et qui intervient plutôt en théorie des nœuds).

## Un domaine de pointes aux racines très anciennes

On présente traditionnellement la géométrie algébrique comme issue de la *géométrie analytique*, application de l'algèbre à la géométrie créée presque simultanément au XVII<sup>e</sup> siècle par René Descartes et Pierre de Fermat, et de la *géométrie projective* de leur contemporain Girard Desargues. Mais ce serait oublier les prémices dues aux mathématiciens grecs, de l'étude des courbes et surfaces dès la fin du V<sup>e</sup> siècle avant notre ère jusqu'aux équations de Diophante d'Alexandrie.

L'étude théorique des singularités est un domaine des mathématiques très riche mais difficile. Dans les trente dernières années, les écoles russe, française et anglo-saxonne ont établi une classification des singularités possibles sur une surface.

Considérons les surfaces dont l'équation  $P_n(x, y, z) = 0$  est un polynôme de degré  $n$  des coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point courant de la surface. On s'intéresse au nombre maximum  $\mu(n)$  de singularités ponctuelles qu'une surface de degré  $n$  peut présenter en fonction de la valeur de  $n$ . Ce problème n'a pas encore de réponse définitive, son histoire est en cours !



Le cône double.

©FL, 2022

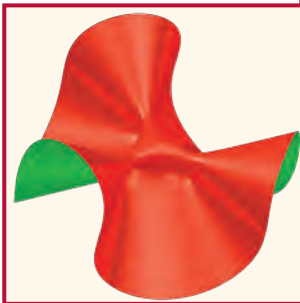
Les *quadriques*, courbes du second degré ( $n=2$ ) dont les coupes planes sont les coniques, sont toutes régulières, à l'exception du *cône double*, surface réglée ne possédant qu'un point de singularité, et donc on a  $\mu(2)=1$ .

Pour  $n=3$ , la surface est une *cubique*. Un théorème remarquable concerne les droites qui peuvent être tracées sur une cubique non singulière (lisse).

Le mathématicien britannique Arthur Cayley (1821–1895) a démontré qu'il y en a un nombre fini, nombre que son homologue irlandais George Salmon (1819–1904) prouva en 1849 être 27 dans le corps des complexes.

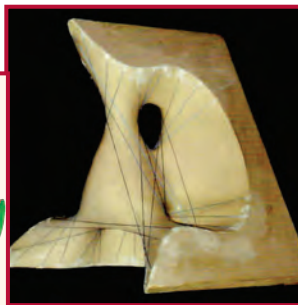
On attribue à Cayley, en hommage à ses nombreuses études sur le sujet, une cubique à quatre singularités en cône double, qui prouve donc que  $\mu(3)\geq 4$ . Ces quatre points constituent un tétraèdre dont les six arêtes appartiennent à cette surface. Son équation paramétrée peut s'obtenir à partir de l'équation d'une sphère et de trois plans orthogonaux et peut s'écrire  $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ .

Mais c'est le mathématicien suisse Ludwig Schläfli (1814–1895) qui, en 1863, est le premier à classifier les surfaces de manière systématique en fonction de leurs singularités. Il détermine qu'une cubique ne peut avoir plus de quatre points singuliers, c'est-à-dire que  $\mu(3)=4$ . Vers 1900, le géomètre allemand Felix Klein (1849–1925) réussit à trouver, en partant de «petites déformations» de cette cubique de Cayley, toutes les formes possibles de surfaces cubiques réelles.



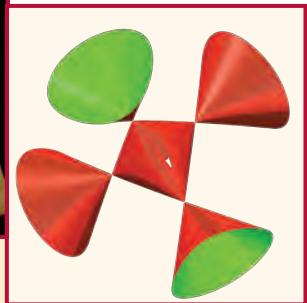
Cubique aux vingt-sept droites réelles.

©FL, 2022



Modèle de cette cubique de l'Institut Henri-Poincaré.

© Collections de l'Institut Henri Poincaré, licence CC BY-NC-SA



La cubique de Cayley.

©FL, 2022

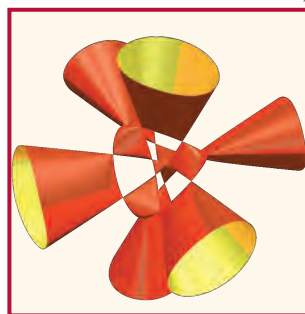
## Formes et formules, de degré en degré

En 1875, le mathématicien allemand Eduard Kummer (1810–1893) fut le premier à poser explicitement la question du nombre maximal  $\mu(n)$  de singularités d'une surface de degré  $n$ . Pour les *quartiques* ( $n=4$ ), il avait prouvé en 1864 que  $\mu(4)=16$  et créé une famille de surfaces à symétrie tétraédrique avec, pour la plupart, seize singularités réelles. Elles ont pour équation  $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 - \frac{3a^2 - 1}{3 - a^2} P_0 P_1 P_2 P_3 = 0$ , où  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les équations des faces d'un tétraèdre régulier (d'expression  $1 + z \pm y\sqrt{2}$  et  $1 - z \pm y\sqrt{2}$ ) et  $a$  est un paramètre réel différent de  $\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{3}$  (pour comprendre cette paramétrisation, voir l'article «Surface romaine» sur le site Mathcurve, l'encyclopédie des formes mathématiques remarquables, à l'adresse [mathcurve.com](http://mathcurve.com)).

Le mathématicien italien Eugenio Giuseppe Togliatti (1890–1977) démontra en 1937 qu'il existe une *quintique*, surface de degré  $n=5$ , possédant trente et une singularités, nouveau record à l'époque; il la construisit en 1940. Puisque aucun solide platonicien ne peut fournir les symétries demandées pour cette quintique, contrairement au tétraèdre pour la quartique de Kummer, cette surface «se contente» des symétries du pentagone régulier. L'équation utilisée pour l'illustration de cette quintique est celle du mathématicien allemand Wolf Barth (1942–2016) en 1990, celle de Togliatti étant bien plus difficile à visualiser.

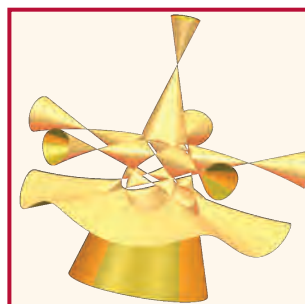
En 1980, le mathématicien français Arnaud Beauville, né en 1947, montra en utilisant théorie des codes correcteurs d'erreurs (!) que ce record ne pouvait être battu. On a donc  $\mu(5)=31$ .

Jusqu'en 1994, on savait grâce au mathématicien britannique Alfred Basset (1854–1930) qu'une *sextique*, surface de degré  $n=6$ , possédait au plus soixante-six singularités ponctuelles. De leur côté, les mathématiciens italiens Fabrizio Catanese (né en 1950), Giuseppe Ceresa (né en 1950) et Ezio Stagnaro (né en 1943) ont construit une sextique présentant soixante-quatre singularités ponctuelles. En 1996, Barth a produit une sextique avec soixante-cinq singularités.



La quartique de Kummer.

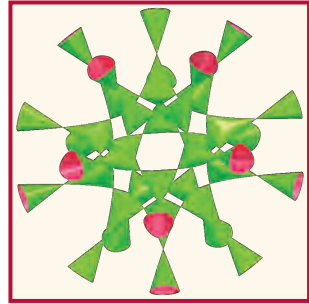
©FL., 2022



La quintique de Togliatti-Barth.

©FL., 2022

C'est en fait le plus grand nombre possible de telles singularités sur une sextique, comme démontré par Benjamin Jaffe et Daniel Ruberman peu après. On a donc  $\mu(6) = 65$ .



La sextique de Barth.

©FL., 2022

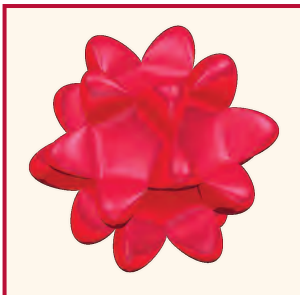
La symétrie de la sextique de Barth est *icosaédrale*, c'est-à-dire que ses plans de symétrie le sont aussi pour l'icosaèdre, polyèdre régulier qui possède trente arêtes opposées deux à deux (donc quinze plans de symétrie). De plus, l'icosaèdre est le polyèdre dual du dodécaèdre, constitué de douze pentagones réguliers.

Cela explique que le fameux nombre d'or  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , qui apparaît naturellement dans la construction du pentagone régulier, surgisse dans l'équation de la sextique de Barth :  $P_6 - (\alpha K)^2 = 0$ , où  $P_6$  est le produit des équations de six des quinze plans de symétrie de l'icosaèdre,  $\alpha = \phi^2/2$  et  $K = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  représente la sphère unité.

Barth s'intéressa par la suite au problème du plus grand nombre de «pointes» sur des surfaces de degré  $n$ , pour lequel il a pu adapter le principe de construction de sa sextique. En prenant les mêmes plans de symétrie de l'icosaèdre, l'équation  $P_6 - (\phi K)^3 = 0$  produit une surface constituée de vingt tétraèdres ayant pour bases les faces triangulaires d'un icosidodécaèdre, intersection d'un icosaèdre et d'un dodécaèdre, et présentant trente pointes. Il s'agit du record actuel de pointes réelles pour les sextiques, sachant qu'il est de 36 pour les pointes complexes.

## Les pointes des septiques

Pour  $n > 6$ , on ne connaît que des encadrements des nombres  $\mu(n)$ , de la forme  $\mu_-(n) \leq \mu(n) \leq \mu_+(n)$  avec, à l'heure actuelle, une minoration

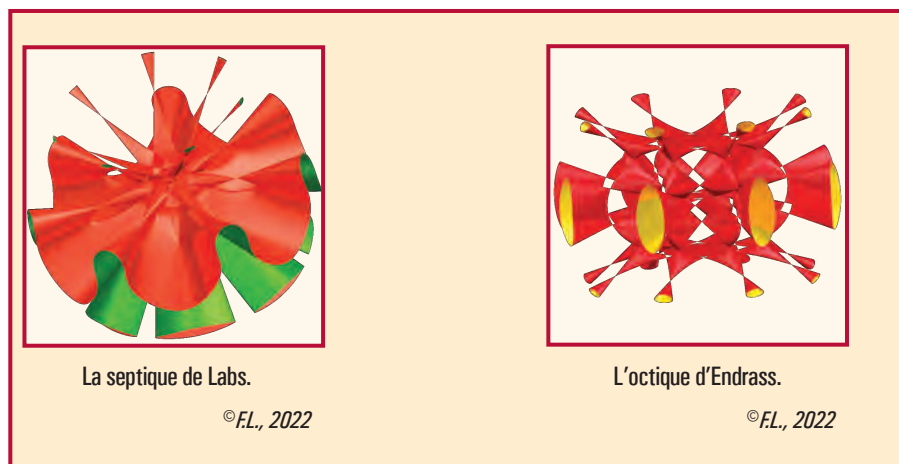


$\mu_-(n) = n(n-1)(5n-9)/12$  obtenue par Sergei Chmutov en 1992, et une majoration  $\mu_+(n) = 4n(n-1)2/9$  due à Yoichi Miyaoka en 1984. La recherche continue activement, par la construction de surface pour améliorer la borne inférieure, par la théorie pour diminuer la borne supérieure.

La sextique de Barth et ses trente pointes réelles.

©FL., 2022

En 2004, Oliver Labs construisit une «vraie» *septique* (surface de degré  $n=7$ ) à quatre-vingt-dix singularités. C'est le record actuel du plus grand nombre de singularités ponctuelles, sachant que la borne supérieure a été établie théoriquement à 104. On a donc  $99 \leq \mu(7) \leq 104$ . Les symétries sont simplement celles d'un heptagone régulier, obtenu avec le logiciel de calcul formel Singular (université de Kaiserslautern, 2010) adapté pour le calcul en géométrie algébrique.

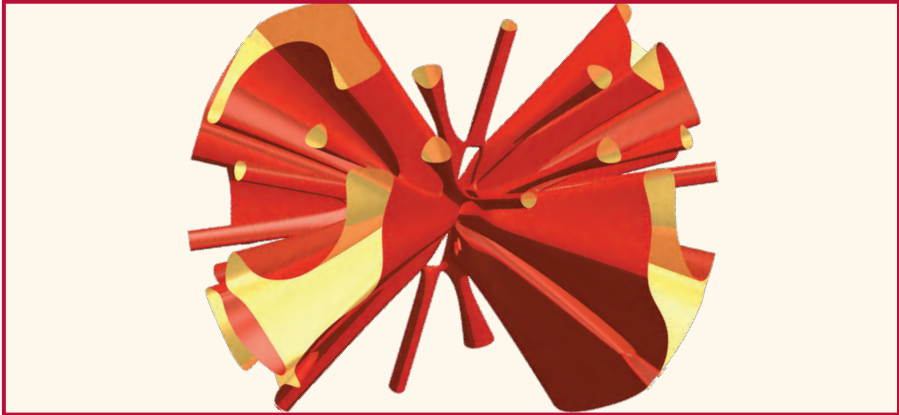


En 1995, Stephan Endrass construisit, pour sa thèse de doctorat, une *octique* (surface de degré  $n=8$ ) à la symétrie octogonale, qui possède le record actuel avec cent soixante-huit singularités. Le mathématicien Alexander Varchenko ayant établi une borne supérieure de 174, on a  $168 \leq \mu(8) \leq 174$ . Endrass dut chercher cette solution dans une famille d'octiques à cinq dimensions, qui n'ont généralement «que» cent douze singularités, avant de les projeter dans notre espace.

Pour le degré  $n=9$ , Labs, de nouveau, a déterminé une surface à deux cent vingt-six singularités, pour un maximum théorique de 246. Barth, quant à lui, a établi un autre record avec une *décique* (surface de degré  $n=10$ ) de trois cent quarante-cinq singularités, et on a donc  $345 \leq \mu(10) \leq 360$ . On suppose que  $425 \leq \mu(11) \leq 480$ , mais aucune surface de degré  $n=11$  n'a été trouvée pour cet encadrement.

En 2008, la mathématicienne italienne Alessandra Sarti a trouvé une surface *dodécique* (surface de degré  $n=12$ ) de six cents singularités, la borne supérieure donnée par Miyaoka étant de 645.





La dodécique de Sarti.

©FL., 2022

La théorie des singularités est donc un domaine de recherche active, à l'intersection de la géométrie et de l'algèbre. Il faut comprendre les changements topologiques dans le voisinage des singularités pour rendre les calculs numériques (donc approchés) plus fiables. Reliant la continuité des surfaces à la discrétisation des singularités, cette théorie s'attache ainsi à expliquer les transitions possibles des singularités par déformations des surfaces. C'est un des enjeux importants de la modélisation géométrique.

*F. L.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*Les surfaces. Bibliothèque Tangente 70, 2020.*

Les figures ont été réalisées à l'aide du logiciel *Surfer* (Imaginary, 2008) auquel a collaboré Oliver Labs, d'après le logiciel Surf (Stephan Endrass, 2000).

Vous pouvez admirer de nombreux modèles physiques de surfaces singulières à Paris, à la bibliothèque de l'Institut Henri-Poincaré (entrée libre) !



# Varifolds : des films de savon aux surfaces discrètes

Blanche Buet

*Maîtresse de conférence  
au Laboratoire de mathématiques d'Orsay*

«Formes et mathématiques.» On se demande bien par où commencer tellement l'étude des formes est centrale dans le développement des mathématiques ! Déjà à notre échelle personnelle, l'étude des formes géométriques est l'un des premiers contacts mathématiques : les écoliers apprennent à reconnaître un losange ou calculent le périmètre d'un cercle à l'aide du mystérieux nombre  $\pi$ . Les mathématiques nous apprennent petit à petit, et au fil des classes, à décrire et classifier les objets qui nous entourent, en commençant par des formes géométriques simples, puis des courbes paramétrées, des sphères, des cylindres, et peut-être même un hyperboloïde. Comment ne pas être fascinée quand la géométrie différentielle nous propose finalement de modéliser toutes ces jolies formes sans angles ni pliures et de les baptiser courbes et surfaces *lisses* ? Même si l'on se demande en parcourant la côte bretonne si notre chemin est bien l'une de ces courbes lisses... Et que dire de ces ensembles de bulles de savon accolées ? On aimerait parler de ces courbes et surfaces «pas très lisses» et qui pourtant nous entourent aussi.



Les bulles de savon : lisses, vraiment ?

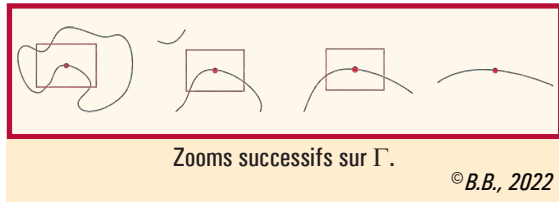
© Dietmar Rabich, 2020

En lisant plus attentivement le thème proposé, les maths en pleines formes nous renvoient à l'essor resplendissant et enthousiasmant que connaît la discipline ces dernières années, et bien sûr on aimerait en parler ! Or, durant la seconde moitié du siècle précédent, plusieurs mathématiciens ont proposé de généraliser la notion de surface au-delà du monde lisse afin de progresser dans la compréhension mathématique des *lois de Plateau*, qui décrivent les propriétés des films et bulles de savon. La théorie géométrique de la mesure a ainsi proposé diverses notions de surfaces généralisées, au nombre desquelles figurent les *varifolds*. Il se trouve que grâce à leur aptitude à modéliser des objets «peu lisses», ces notions produites s'adaptent naturellement aux surfaces discrètes et aux structures de données actuelles.

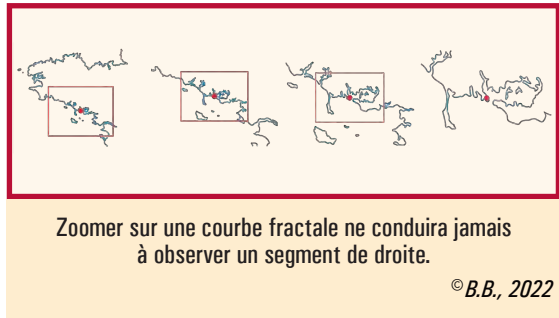
## Généraliser la notion de surface au-delà du monde lisse

On évitera soigneusement de définir rigoureusement la notion de courbe ou surface « lisse » ici, mais on va illustrer une de leur propriété fondamentale : lorsque l'on zoome dessus, elles sont « de plus en plus plates ». Alors, lisse ou pas ? À vos loupes !

Notre première courbe sera baptisée  $\Gamma$ . Lorsque l'on zoome autour du point rouge sur  $\Gamma$ , on observe que l'arc obtenu ressemble de plus en plus à une droite : c'est une propriété des courbes lisses. Cette propriété évoquera sans doute la notion de tangente à certains, et pour cause : si l'on imagine que l'on peut trouver une fonction  $f$  dérivable dont la courbe représentative  $C_f$  coïncide avec  $\Gamma$  au moins « près » du point rouge, alors la droite sur laquelle s'aplatit  $\Gamma$  n'est autre que la tangente à  $C_f$  en ce point.



Il existe des courbes ne possédant pas cette propriété. Pensez à un carré et zoomez en chacun de ses quatre sommets : vous ne verrez jamais une droite au lieu d'un coin. On peut même faire pire : on a beau zoomer autour du point rouge (ou d'un autre point !), la côte bretonne ne ressemble pas plus à une droite.

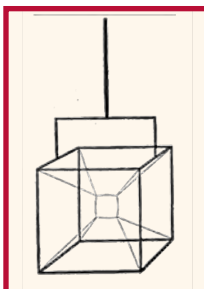


Si maintenant on considérait une surface lisse et non une courbe, on observerait en zoomant que la surface s'aplatit autour d'un plan. Revenons à notre amas de bulles de savons. Si l'on zoome autour d'un point, que se passe-t-il ? On dirait bien que ça dépend du point choisi ! Le mathématicien et physicien belge Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801 – 1883) a étudié cette question (voir par exemple *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, 1873).

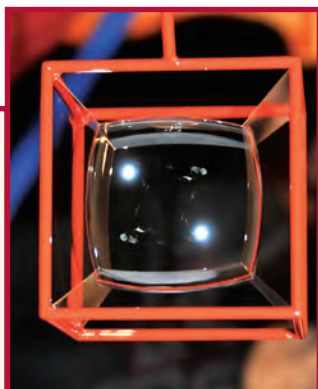
## Les expériences de Plateau sur les bulles de savon

Dans les années 1850, Plateau réalise de multiples expériences afin de comprendre la structure des bulles et films de savon, qu'il appelle *systèmes laminaires*. Il réalise ainsi un grand nombre d'assemblages de bulles de savon et étudie leurs propriétés, et plus précisément la façon dont elles s'agencent dans l'espace. Il enrichit ses travaux d'un second type d'expériences en plongeant dans de l'eau savonneuse des structures qu'il appelle *charpentes*, constituées de fils métalliques formant les arêtes d'un polyèdre. Il consigne minutieusement les différentes expériences réalisées et, en se fondant sur ces constatations, il énonce les lois suivantes : « À une même arête liquide aboutissent trois lames, et les arêtes liquides aboutissant à un même point sont toujours au nombre de quatre. [...] Il résulte de l'égalité des tensions que les trois lames unies par une arête liquide font nécessairement entre elles, à cette arête, des angles égaux, et, par suite, les quatre arêtes concourant en un même point liquide font aussi entre elles, à ce point, des angles égaux. »

On pourrait reformuler l'observation de Plateau comme suit. Si l'on zoome autour d'un point sur un film de savon, on observera que la surface ressemble de plus en plus à l'une des trois configurations suivantes : un plan ; trois plans se rencontrant à  $120^\circ$  ; quatre arêtes (et donc six plans) se rencontrant avec un angle de  $109,47^\circ$  entre deux arêtes.



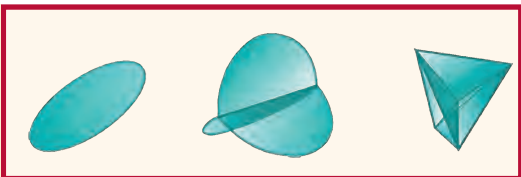
© Joseph Plateau / Gauthier-Villars, 1873



© seolgon, 2011

Les trois configurations trouvées  
par Joseph Plateau.

© B.B., 2022



Joseph Plateau tente d'expliquer ces résultats expérimentaux en modélisant les films de savons comme des surfaces minimisant leur aire, ce à quoi il faudrait ajouter une contrainte de volume enclos concernant les bulles de savon (ou encore traduire que le film de savon s'appuie sur la charpente dans le deuxième type d'expériences). Le savant est cependant perplexe : « La tension constituant un

*effort incessant pour diminuer l'étendue des surfaces liquides, il s'ensuit que, dans tout système laminaire, la somme des aires des lames doit être un minimum. [...] Lorsque j'ai posé ce principe, en 1861, au début de ma sixième série, je comprenais qu'il existe une dépendance nécessaire entre ce même principe et les lois que j'avais trouvées [...] mais je ne pouvais saisir cette dépendance et il me paraissait impossible de la découvrir.»*

Comme expliqué dans la suite de son mémoire, une solution partielle est proposée en 1865 par le mathématicien français Anatole Henri Ernest Lamarle (1806–1875) dans son texte *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*. Il faudra cependant attendre encore un siècle avant que la mathématicienne américaine Jean Ellen Taylor (née en 1944) ne publie en 1976 la démonstration



que les lois de Plateau se déduisent à partir du principe d'aire minimale, et ce à l'aide d'outils sophistiqués issus de la théorie géométrique de la mesure (*The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces, Annals of Mathematics*).

Jean Taylor, 2019.

© *Camelia.boban*, 2019

## Et les varifolds dans tout ça ?

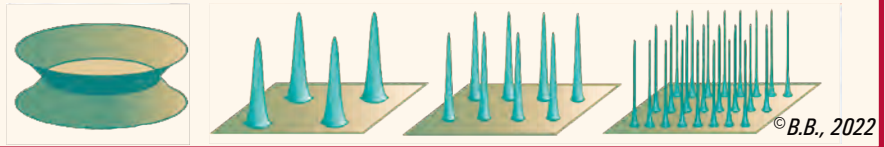
Comme l'a observé Joseph Plateau, les films de savon ne sont pas des surfaces lisses en général. Et ce n'est pas la seule raison qui motive la généralisation de la notion de surface : un autre problème est que les surfaces lisses ne résistent pas très bien au processus mathématique naturel de passage à la limite. Le concept de *varifold entier* introduit dans les années 1960 par le mathématicien américain Frederick Justin Almgren Jr. (1933–1997) et approfondi notamment par William Kenneth Allard (né en 1941) généralise la notion de surface en autorisant, entre autres, les fusions et jonctions de portions lisses : les films de savons pourront être modélisés par des varifolds. De plus, un théorème fondamental de «compacité» des varifolds entiers permet de s'assurer que ces derniers ne dégènèrent pas quand on essaie d'en prendre une limite.

Les varifolds ont notamment permis de montrer des résultats d'existence de surfaces minimales (surfaces d'aire minimale) dans un cadre plus général que celui de notre espace tridimensionnel. Définir rigoureusement la notion de varifold dépasse largement notre cadre informel, mais on peut en donner un avant-goût dans le cas discret.

## Des surfaces qui dégènèrent...

On peut facilement créer des suites de surfaces lisses qui « dégènèrent » et ne sont plus très lisses à la limite. Un premier exemple consiste à faire se rapprocher deux portions de surfaces de telle sorte qu'à la limite elles fusionnent. L'objet obtenu n'est pas une surface lisse, et cependant, c'est un objet géométrique encore « raisonnable » qui est bien un varifold entier. Mais on peut malheureusement faire bien pire encore ! On peut petit à petit faire « pousser des tentacules » de plus en plus fins et de plus en plus nombreux sur un plan tout en s'assurant que leur aire cumulée tende vers 0, ce qui produit un objet bien « épineux »...

Une propriété importante des varifolds est qu'ils ne « voient » pas les morceaux qui seraient d'aire nulle : les tentacules de notre second exemple ne seront pas visibles à la limite en tant que varifolds car, précisément, leur aire tend vers 0.

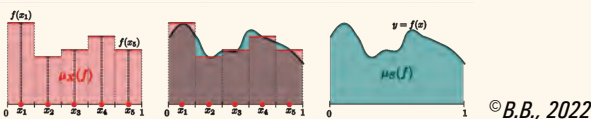


## Les structures discrètes : objets numérisés, données...

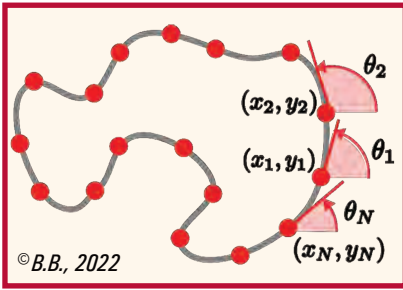
La notion de varifold est suffisamment générale pour pouvoir modéliser les singularités qui apparaissent dans les films de savon, et dans la plupart des structures discrètes de surfaces ; leur définition apparaît même plus facile à appréhender dans ce cadre.

### Un premier pas vers les varifolds

Imaginons qu'on numérise le segment  $S = [0, 1]$  en retenant un nombre fini de points  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  régulièrement espacés dans ce segment. On peut définir à partir de l'ensemble  $X$  un objet mathématique *a priori* plus compliqué,  $\mu_X$ , qui à une fonction  $f$  continue et positive sur  $\mathbb{R}$  associe  $\mu_X(f) = (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)) / 5$ . Cette somme peut être interprétée comme une somme de rectangles de largeur  $1/5$  et de hauteurs respectives  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_5)$ , qui est « proche » de l'aire sous la courbe représentative  $C_f$  de  $f$  sur  $S$ . Si l'on définissait  $\mu_S(f)$  comme étant cette aire sous  $C_f$  on aurait  $\mu_X(f)$  « proche » de  $\mu_S(f)$ . En d'autres termes, on peut lire la proximité entre le segment  $S$  et sa version discrète  $X$  « simplement » en calculant  $\mu_X(f) - \mu_S(f)$  (pour des fonctions  $f$  à choisir).



Considérons l'objet discret suivant : on numérise une courbe lisse  $\Gamma$  du plan en retenant un nombre fini  $N$  de points  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N)\}$  de  $\Gamma$ . Pour avoir un varifold, il nous faut ajouter un ingrédient à la recette : un peu de géométrie. En numérisant  $\Gamma$ , on va non seulement retenir  $N$  points, mais en plus, en chacun de ces points, on va retenir la droite tangente. Pour cela, on appellera  $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_N$  l'angle que fait la droite tangente avec l'axe horizontal en chacun des points.



On retiendra finalement  $X = \{(x_1, y_1, \theta_1), (x_2, y_2, \theta_2) \dots (x_N, y_N, \theta_N)\}$ . Le varifold  $V_X$  que l'on va associer à la discrétisation de  $\Gamma$  encode  $X$  : il retient de façon couplée la localisation de la courbe à travers les points sélectionnés et les directions des droites tangentes à travers les angles associés.  $V_X$  est un objet à première vue compliqué : c'est une application qui prend en argument une fonction continue de  $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$  et qui est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble  $X$  paraît plus simple que l'objet  $V_X$ . Cependant, l'ensemble des varifolds forme un espace équipé de meilleurs outils pour le mathématicien analyste. Cette idée d'étudier un objet par voie détournée en regardant comment il interagit avec un autre ensemble (de fonctions ici) est très fécond en mathématiques.

Notre premier varifold  $V_X$  encode ainsi  $N$  points et angles de  $\Gamma$ . À une fonction continue  $f : \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V_X$  associe le nombre réel

$$\frac{1}{N} (f(x_1, y_1, \theta_1) + f(x_2, y_2, \theta_2) + \dots + f(x_N, y_N, \theta_N)).$$

On pourrait également construire un varifold à partir d'un ensemble de points discrétisant une surface, ou à partir d'ensembles de points en dimension plus élevée. Une fois qu'on a construit un varifold  $V_X$ , on peut accéder aux informations géométriques contenues dans la structure en choisissant des fonctions  $f$  en lesquelles évaluer  $V_X$ . Par exemple, on peut de cette façon calculer les courbures : essayer de repérer les parties de l'objet très « pliées » ou, inversement, les portions plus planes. On peut également comparer les numérisations  $X$  et  $X'$  de deux courbes distinctes en calculant  $V_X(f) - V_{X'}(f)$  pour des fonctions  $f$  bien choisies : cela peut ensuite être utilisé pour déformer un objet en un autre. On peut enfin utiliser ces varifolds discrets pour étudier les films de savon numériquement, bouclant ainsi la boucle !



**B. B.**



# Quand la forme devient fractale

Enka Blanchard, Andreï Rodin et Florentin Waligorski  
*Chercheuse transdisciplinaire au CNRS*  
*Philosophe-mathématicien*  
*Traducteur scientifique*

Les objets géométriques habituels comme les cercles, triangles, polygones, polyèdres..., ont une propriété en commun : les plus petites parties de ces objets sont « plus simples » que ne le sont les plus grandes (ou l'objet). Par exemple, les côtés d'un triangle sont des segments, des éléments « plus simples » que le triangle lui-même. Les sommets du triangle sont eux-mêmes des points, qui sont tous semblables et « *n'ont pas de parties* », comme le disait Euclide ; de fait, ils n'ont pas de structure interne. Ainsi, les points sont des atomes géométriques primitifs qui, malgré leur « simplicité », permettent une impressionnante variété de formes géométriques.

## Le monde et sa complexité face à l'hypothèse atomiste

La question est de savoir comment nos outils mathématiques peuvent appréhender la complexité de la Nature, qui s'étend aussi bien aux grandes qu'aux petites échelles. On pourrait au départ supposer que cette complexité se réduit, aux plus petites échelles, à quelque chose d'aussi simple que l'ensemble des atomes ou que les lettres d'un alphabet, comme conceptualisé par Démocrite, ce philosophe grec du V<sup>e</sup> siècle avant notre ère connu comme l'inventeur du concept d'atome. Nous voyons cependant une régularité et des motifs dans le monde qui nous entoure et il semble naïf de le réduire à une collection d'atomes individuels et indépendants.

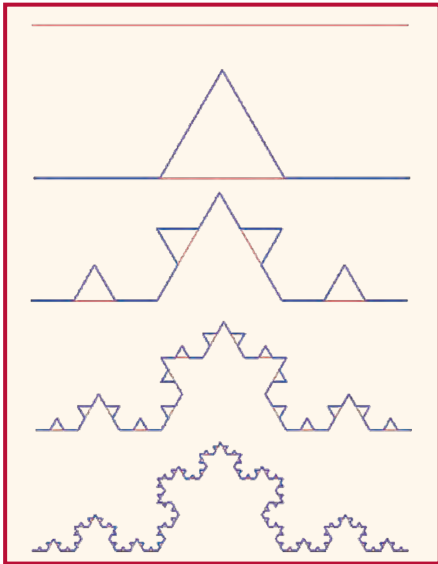
En gardant la question atomiste en tête, posons-nous une question plus pratique : quelle est la longueur des côtes de la Grande-Bretagne ? Le mathématicien polono-franco-américain Benoît Mandelbrot (1924–2010) s'est posé cette question et a apporté une réponse plutôt inattendue dans un article fondateur datant de 1967. D'abord, il remarqua que différentes sources officielles fournissaient des valeurs assez différentes. Ensuite, il comprit la raison de cette divergence, qui était en fait plutôt évidente : le résultat des mesures, dans ce cas, dépend de l'échelle qui définit quels détails de la côte sont observés et lesquels sont ignorés. Plus la côte est connue avec une grande précision, plus



la courbe résultante « fait des zigzags » et plus la mesure de sa longueur augmente. Nous avons alors un contre-exemple à l'intuition commune selon laquelle des mesures répétées avec des instruments de plus en plus précis permettront de converger vers une valeur limite « vraie ». Cette intuition est généralement utile, surtout lorsque l'on a affaire à des courbes « lisses », comme un cercle. L'approximation de sa circonférence peut aussi être réalisée par le périmètre inscrit (ou circonscrit) de polygones réguliers dont le nombre de côtés croît. Ces mesures itérées convergent bien (et permirent les premières approximations de  $\pi$ ).

Pour la côte cependant, alors que de plus en plus de détails fins sont trouvés à toutes échelles (théoriquement, même jusqu'au niveau moléculaire), la longueur mesurée ne peut pas être bornée ; en d'autres termes, elle tend vers l'infini.

## Un objet extraordinaire : le flocon de von Koch



Les quatre premières étapes de la construction (sur l'un des trois côtés du triangle équilatéral).

© Pierre Soille et Jean-François Rivest / Journal of visual communication and image representation, 1996

Considérons maintenant un exemple différent, une des premières fractales étudiées : le *flocon de von Koch*, construit en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870–1924). Prenons un triangle équilatéral et divisons en trois parties égales chacun de ses trois côtés. Remplaçons chaque segment central par un « cône » dont les deux segments ont la longueur du segment retiré. Continuons de cette manière avec chaque côté (ou segment linéaire) du polygone (non convexe) ainsi obtenu : on le divise en trois parties égales, etc. Comme limite à ce processus, on obtient une « forme » délimitée par une courbe qui est « partout barbelée ». Le périmètre de la figure limite obtenue est infini (alors que la figure entière est contenue dans un cercle de rayon fini) : en effet, son

périmètre augmente de  $1/3$  à chaque étape de la procédure de construction, ce qui le rend visiblement non borné. Malgré sa complexité, l'infographie standard permet de représenter cette courbe (jusqu'au niveau du point d'encre) de

manière satisfaisante pour la plupart des besoins. Helge von Koch a introduit cet objet comme un exemple de courbe qui est continue partout mais différentiable nulle part (c'est-à-dire qu'en aucun de ses points la courbe n'admet de droite tangente). Le flocon était conçu comme un exemple permettant de dissocier le concept de continuité de celui de différentiabilité. Benoît Mandelbrot a eu la grande intuition que de telles constructions mathématiques peuvent également être utilisées pour modéliser des phénomènes naturels ou technologiques, y compris des processus très élémentaires... comme la mesure de la longueur d'une côte. Le flocon de von Koch possède cette propriété : la complexité de la construction ne diminue pas à des échelles plus petites mais reste exactement la même (c'est *l'auto-similarité*). Une telle invariance de la complexité à toutes les échelles n'est pas une règle générale dans la nature, mais la réduction de la complexité à des échelles plus petites n'est pas non plus une loi universelle. Les constructions géométriques infinies de ce type sont donc légitimes, et Mandelbrot les a appelées *fractales*.

L'imagerie informatique a joué un rôle important dans le changement de point de vue sur ces objets qui étaient auparavant considérés comme des « monstres mathématiques ». Dans le livre de Mandelbrot de 1982, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Co.), on trouve de nombreuses images de fractales générées par ordinateur, qui ont l'air étonnamment douces et imitent des paysages naturels, des plantes, des nuages...

## Des objets qui questionnent certaines notions « intuitives »

Les fractales sont appelées ainsi en particulier en raison de la « dimension de Hausdorff », d'après le mathématicien allemand Felix Hausdorff (1868–1942) qui a introduit ce concept pour la première fois en 1918. Les dimensions de Hausdorff des formes fractales prennent en effet des valeurs qui font naturellement intervenir des nombres qui ne sont pas des entiers.

La notion habituelle de « dimension » est celle de la dimension topologique, définie comme suit. Fixons la dimension (topologique) d'un point à 0, et la dimension topologique d'une ligne (continue mais pas nécessairement droite) à 1. En général, le « bord » d'une ligne (si elle a un bord) est un point. Par exemple, un segment de droite [AB] a deux « bords », qui sont ses extrémités A et B. Cela permet de définir la dimension topologique de manière inductive : un objet de dimension  $n$  aura un bord de dimension  $n-1$ . Par exemple, le bord d'un disque (qui est une surface en 2D) sera le cercle de dimension 1). Le bord d'une boule pleine (solide 3D) sera la sphère (surface 2D).

Cette définition en rejoint une deuxième, basée sur le concept de mesure. Si l'on prend un segment et que l'on double sa longueur, le segment final aura bien deux fois la longueur initiale. Cependant, si l'on prend un carré et que l'on double la longueur d'un côté, la surface du carré sera multipliée par 4, et le volume du cube correspondant sera multiplié par 8. Cela donne une idée de la relation entre la mesure et la dimension topologique : l'exposant est égal à la dimension topologique de l'objet géométrique correspondant.

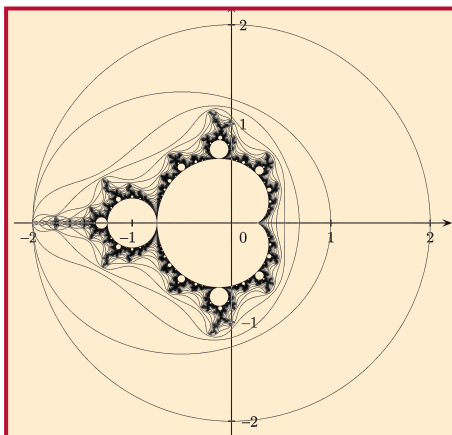
On pourrait s'aventurer à imaginer que la même règle s'applique universellement à toutes sortes d'objets géométriques. Mais en fait, une telle conjecture serait fautive, et les fractales, à commencer par le flocon de von Koch, en sont des contre-exemples. Pour s'en convaincre, on remarque déjà que le flocon de Koch est une ligne continue : le processus (infini) de sa construction ne rompt pas sa continuité. Il a donc une dimension topologique égale à 1.

Voyons cependant ce qu'il advient de sa « longueur » lorsqu'elle est mise à l'échelle. Puisque la « longueur » totale du Flocon de Koch est infinie, le problème est délicat... Essayons plutôt de comparer les rapports entre certains éléments spécialement choisis de notre construction, qui restent finis. Considérons alors un « côté » du flocon complet, dont on appelle P et Q les deux extrémités. Comme le nombre d'itérations est infini, si l'on prend la figure entre P et le point situé au tiers de [PQ], on retrouve exactement la même figure, à un facteur d'échelle près. En « zoomant » (ou « dézoomant ») avec un facteur 3, on retombe donc sur la figure originale (c'est l'auto-similarité). En faisant grossir l'image par un facteur 3, on obtient donc quatre figures, chacune « identique » (en fait, isométrique) à l'originale. Ce comportement ne correspond donc pas à ce que l'on attendrait de la dimension topologique : l'exposant  $x$  correspondant devrait être tel que  $3^x=4$ . Un élément les relie cependant : ce nombre (*dimension de Hausdorff*) est bien compris entre la dimension topologique d'une ligne et celle d'une surface.

## On trouve $\pi$ dans l'ensemble de Mandelbrot !

Prenons désormais un exemple plus élaboré, aux propriétés étonnantes, découvert au début du XX<sup>e</sup> siècle par Gaston Julia (1893–1978) et Pierre Fatou (1878–1929), et nommé en hommage à Benoît Mandelbrot. Il s'agit d'une partie du plan complexe, correspondant à l'ensemble des points C pour lesquels la suite récurrente définie par  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ , avec  $Z_0=0$  et  $C=a+bi$ , est bornée. Visuellement, on peut y voir une cardioïde principale, elle-même surmontée par des « bourgeons » circulaires portant des « antennes » très ramifiées.

Une première propriété est qu'un point appartient à l'ensemble de Mandelbrot si, et seulement si, le module des nombres complexes  $|Z_n|$  qui lui sont associés est inférieur à 2, pour tout entier  $n$ . Les lectrices et les lecteurs familiers des nombres complexes et de la récurrence sont invités à établir ce résultat ! Attaquons-nous désormais à une deuxième propriété étrange et peu connue :  $\pi$  se retrouve naturellement, et de plusieurs manières, dans l'ensemble de Mandelbrot.



L'ensemble de Mandelbrot.

© Geek3, 2009

Plaçons-nous d'abord au niveau du point de rebroussement  $C_0 = 0,25 + 0i$ , de coordonnées  $(0,25; 0)$ . D'après la relation  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C_0$ , avec  $Z_0 = 0$ , et une récurrence élémentaire, les nombres complexes  $Z_n$  (avec  $n \geq 0$ ) sont en fait tous des nombres réels et inférieurs à 0,5. Ainsi,  $C_0$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot. Mais que se passe-t-il « autour » du point  $C_0$ ? Pour le savoir, considérons des points  $C_\varepsilon = 0,25 + \varepsilon + 0i$ , de coordonnées  $(0,25 + \varepsilon; 0)$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

On observe que les nombres complexes  $Z_n$  associés à  $C_\varepsilon$  finissent tous par diverger, quelle que soit la valeur de  $\varepsilon > 0$ . En outre, plus  $\varepsilon$  est grand, moins il faudra d'itérations pour que les modules de  $Z_n$  deviennent supérieurs à 2. Au contraire, plus  $\varepsilon$  se rapproche de 0, plus il faudra d'itérations. On aperçoit des décimales bien connues apparaître une ligne sur deux... Des calculs extrêmement fastidieux permettent d'obtenir une relation simple

entre  $\varepsilon$  et  $N(C_\varepsilon)$ , à savoir  $N(C_\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

À la place de calculer le périmètre de polygones, on pourrait approximer  $\pi$  de cette manière ! Il existe heureusement des méthodes beaucoup plus efficaces.

$\varepsilon$	$C_\varepsilon$	$N(C_\varepsilon)$
1,0	1,25	2
0,1	0,35	8
0,01	0,26	30
0,001	0,251	97
0,0001	0,2501	312
0,00001	0,25001	991
0,000001	0,250001	3140
0,0000001	0,2500001	9933
0,00000001	0,25000001	31414
0,000000001	0,250000001	99344
0,0000000001	0,2500000001	314157

Nombre  $n = N(C_\varepsilon)$  d'itérations avant que le module de  $Z_n$  ne devienne supérieur à 2.

© F.W., 2022

Le nombre  $\pi$  apparaît à d'autres endroits dans l'ensemble de Mandelbrot. Au moins trois points distincts (à symétrie près) font ainsi apparaître le nombre préféré des mathématiciens ; il est conjecturé qu'une infinité de tels points existe. Il est même possible de faire le lien avec la suite de Fibonacci (qui se retrouve dans les bourgeons de l'ensemble de Mandelbrot)! Décidément, les fractales,  $\pi$  et la suite de Fibonacci sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

*E.B., A.R. & F.W.*



Détail d'une œuvre fractale (non documentée) hommage à Benoît Mandelbrot, exposée à l'occasion du Congrès international des mathématiciens de 2010.

*Photo : É.T., 2010 (Hyderabad, Inde)*

### **Pour en savoir (un peu) plus**

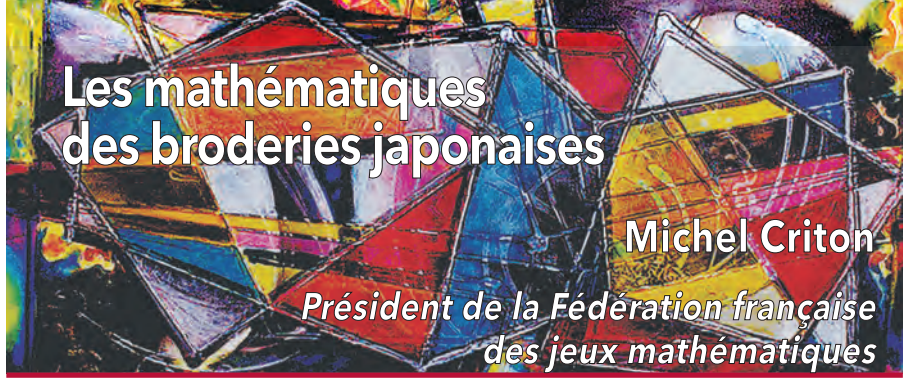
« Pi and the Mandelbrot set. » Numberphile, vidéo de Brady Haran, 8 min, 2016, disponible en ligne (en anglais).

« Fibonacci numbers hidden in the Mandelbrot set. » Numberphile, vidéo de Brady Haran, 10 min, 2018, disponible en ligne (en anglais).

*Le fascinant nombre  $\pi$ .* Jean-Paul Delhayé, Belin, 2018.

*On the validity of fractal dimension measurements in image analysis.* Pierre Soille et Jean-François Rivest, *Journal of visual communication and image representation* 7, 1996.





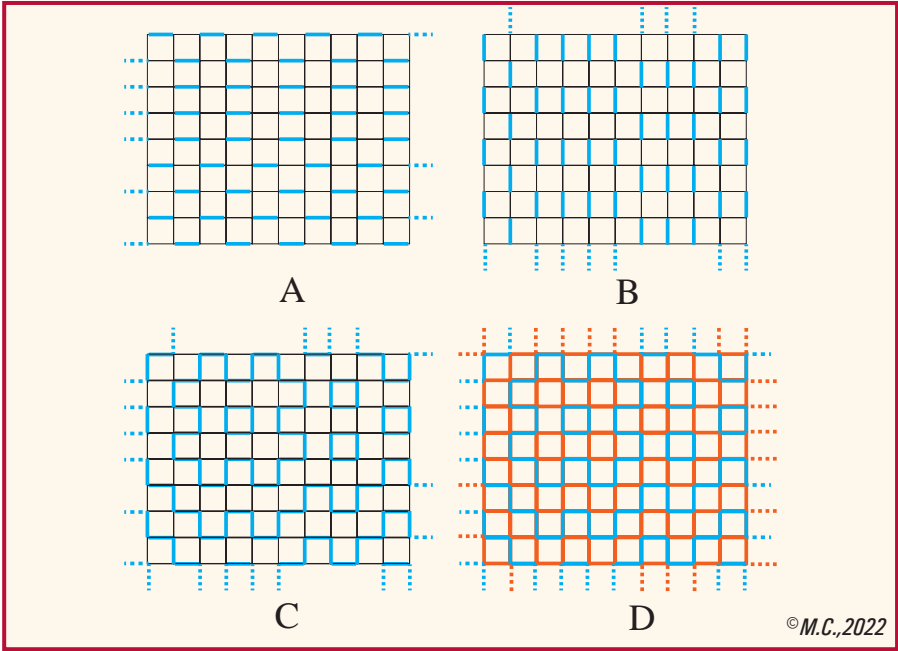
Un certain type de broderies japonaises, les *hitomezashis*, font apparaître des motifs géométriques susceptibles d’inspirer les mathématiciens. Au Japon, l’art de la broderie s’est principalement développé durant la période Edo (de 1600 à 1868), durant laquelle le pays s’est quasiment fermé aux étrangers, notamment aux Européens.

## Des motifs géométriques extrêmement codifiés

Les broderies traditionnelles japonaises, nommées *sashikos*, avaient pour but d’utiliser des morceaux de tissu plus ou moins usagés et de leur donner une nouvelle vie en y ajoutant des broderies décoratives. Parmi ces broderies, les *hitomezashis* présentent des motifs géométriques très codifiés.

La broderie se pratique selon un quadrillage à mailles carrées. On brode des points réguliers en passant alternativement sur et sous le tissu. La figure A montre des broderies horizontales, le premier point de chaque droite horizontale passant sur le tissu ou sous le tissu de façon aléatoire. Par exemple, on peut décider de lancer un dé à six faces pour chaque droite horizontale : si le résultat est pair, on commence cette ligne en passant sous le tissu, et si le résultat est impair, on commence en passant sur le tissu (et on relance ainsi le dé pour chacune des lignes horizontales).

La figure B montre des broderies verticales effectuées selon le même mode opératoire. En superposant les figures A et B, on obtient un *hitomezashi* (figure C). Celui-ci présente des lignes continues formant des motifs. Parmi ces motifs, certains sont ouverts, mais d’autres forment des boucles fermées. La figure D met en évidence le complémentaire (ou dual) du *hitomezashi* représenté en figure C : les points invisibles sur le tissu, mais qui seraient visibles sous le tissu, apparaissent en rouge et forment d’autres motifs du même type.



©M.C.,2022

Les boucles des *hitomezashis* ont toutes la forme de polyminos. On appelle *polymino* un assemblage de plusieurs carrés élémentaires unitaires (de même dimension 1×1). Le mot «polymino» a été créé en 1953 à partir d’une (volontairement fausse) étymologie du mot «domino» (assemblage de deux carrés élémentaires) par le mathématicien américain Solomon Golomb, qui leur a consacré un ouvrage : *Polyominoes* (Charles Scribner’s Sons, 1953, réédition augmentée aux Princeton University Press en 1994).

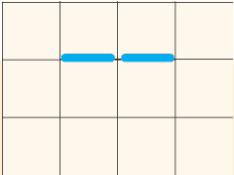


Solomon Wolf Golomb  
(1932 – 2016).  
©University of Southern California

Si les boucles des *hitomezashis* sont toutes des polyminos, comme nous le verrons, tous les polyminos ne sont pas des boucles de *hitomezashi*, loin de là ! En effet, le mode de construction des *hitomezashis* interdit que, sur une droite horizontale ou verticale, on ait deux segments consécutifs, comme sur la figure E.

Ainsi, des douze pentaminos, seul le pentamino X peut correspondre à une boucle de *hitomezashi*.

E  
Une configuration impossible pour un *hitomezashi*.



©M.C., 2022

Les douze pentaminos et les petits noms que leur attribua Golomb.

© S. Golomb, 1965 / Princeton University Press, 1994

Répartition de seize formes identiques 5 (1957) de François Morellet (1926–2016) présente un pavage d'un carré avec seize quadraminos « L ».

© É. Thomas, 2021 (Centre Pompidou, Paris)

Comme nous allons le voir, aucun hexamino, aucun heptamino et aucun octomino (assemblages respectifs de six carrés, sept carrés et huit carrés unitaires) ne peut correspondre à une boucle d'un *hitomezashi*. Un certain nombre de « théorèmes » concernant ces broderies ont été démontrés cette année par les deux jeunes mathématiciens américains Colin Defant et Noah Kravitz, en particulier à propos de ces boucles de *hitomezashis*. Dans ce qui suit, l'unité de longueur est égale à la longueur du côté d'un carré élémentaire du quadrillage, et l'unité d'aire à l'aire d'un carré élémentaire du quadrillage.

Théorèmes :

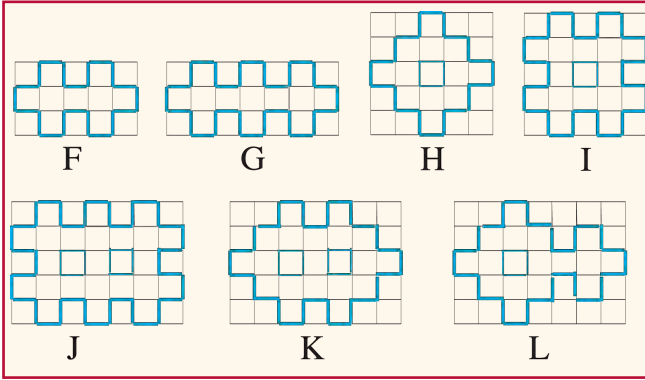
- Toute boucle de *hitomezashi* s'inscrit dans un rectangle à côtés horizontaux et verticaux dont les dimensions sont toujours égales à des nombres impairs d'unités.
- La longueur d'une boucle de *hitomezashi*, exprimée en unités de longueur, est toujours congrue à 4 modulo 8 (c'est un multiple de 8 augmenté de 4).
- L'aire de la surface intérieure à une boucle de *hitomezashi*, exprimée en unités d'aire, est toujours congrue à 1 modulo 4 (c'est un multiple de 4 augmenté de 1), donc impaire.

Pour de « petites » valeurs, on a déterminé le nombre de boucles possibles connaissant les dimensions du rectangle dans lequel elles sont inscrites (les boucles différentes obtenues par symétrie étant comptabilisées).

Nombre de boucles de *hitomezashis* possibles en fonction des dimensions du rectangle dans lequel elles sont inscrites.

hauteur \ largeur	1	3	5	7	9
1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1
5	0	1	2	4	8
7	0	1	4	11	27
9	0	1	8	24	76



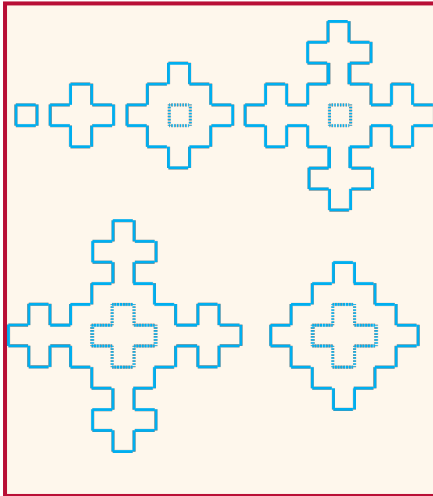


Vérifiez les résultats de Defant et Kravitz sur ces exemples, et en particulier que l'aire (exprimée en nombre de petits carrés unitaires) délimitée par une boucle est toujours un nombre de la forme  $4n + 1$  avec  $n$  un entier !

©M.C., 2022

	F	G	H	I	J	K	L
Aire	9	13	13	17	25	21	17
Périmètre	20	28	20	28	36	28	28

## Des courbes fractales en embuscade !



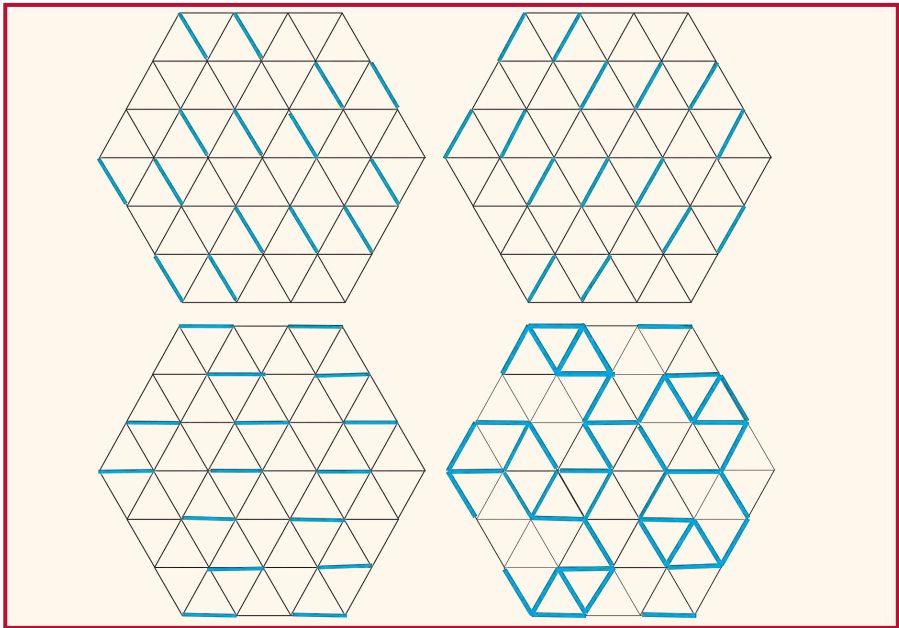
Vers des motifs autosimilaires à l'aide de *hitomezashis* géants.

©M.C., 2022

Une autre voie intéressante est l'exploration de structures qui croissent comme des cristaux de neige, à la façon des flocons imaginés par le mathématicien suédois Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). En généralisant le développement de ces structures (on peut le faire de différentes manières), on tend vers des structures fractales.

D'autres pistes ont été imaginées, comme par exemple la construction de *hitomezashis* sur un réseau à mailles triangulaires. (Voir *Hitomezashi Stitch Patterns*, littéralement «Les *hitomezashis* tissent des motifs», vidéo en anglais de 11 min, Numberphile, 2021, disponible en ligne.)

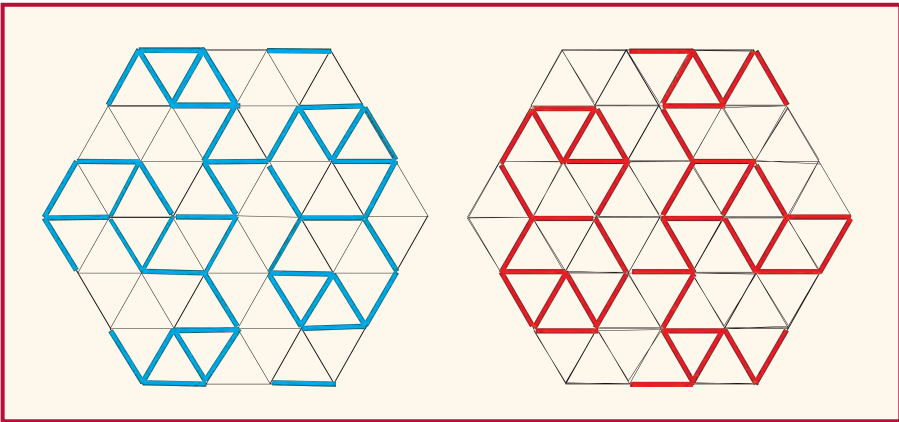
Les points de broderie sont alors effectués successivement selon les trois directions du réseau.



Sur un réseau triangulaire.

© M.C., 2022

Ici encore, on obtient une figure duale en représentant les points situés sous le tissu, et non les points apparents.



Un *hitomezashi* et son dual (obtenu simplement en retournant le tissu).

© M.C., 2022

Il reste encore beaucoup de choses à découvrir sur les mathématiques sous-jacentes à ce type de broderies, que la vidéo de Numberphile et l'article de Colin Defant et Noah Kravitz ont remis sur le devant de la scène. Un site Internet, le *Hitomezashi Stitch Pattern Generator*, permet même de générer soi-même ses propres *hitomezashis* en fonction de sa fantaisie. (<https://hitomezashi.glitch.me>, en anglais, NeilM77, 2021)

De nombreuses explorations combinatoires, numériques, géométriques, fractales, topologiques... sont sans doute à portée de main.



Veste obtenue à partir de la technique du *hitomezashi*.

© Kiriko Made, 2022



M. C.

Une poche de rangement.

© BeBe Bold Europe, 2022

### Pour en savoir (un peu) plus

*Loops and Regions in Hitomezashi Patterns.* Colin Defant et Noah Kravitz, 2022, disponible en ligne.

*A two-dimensional introduction to sashiko.* Carol Hayes et Katherine Seaton, 2020, disponible en ligne.





# Les sculpteurs et les formes mathématiques

Denise Demaret-Pranville

*Mathématicienne et artiste plasticienne*

Aussi loin que l'on peut remonter dans l'histoire, les mathématiques semblent avoir joué un rôle utilitaire dans de nombreuses œuvres d'art, comme la géométrie élémentaire ou la perspective, qui sont des outils indispensables à bon nombre d'artistes (voir la brochure *Maths Langage Express*, 2019). Certains objets mathématiques sont ensuite eux-mêmes devenus des sujets artistiques : on trouve de nombreuses représentations de polyèdres chez Albrecht Dürer ou Léonard de Vinci, on rencontre des suites mathématiques chez des artistes contemporains comme le plasticien américain Donald Clarence Judd (1928–1994) ou le peintre, graveur et sculpteur français François Morellet (1926–2016). La représentation de ces objets s'est souvent faite en 2D, mais quelques artistes ont choisi de réaliser des sculptures donnant forme, de cette manière, aux mathématiques.

## Antoine Pevsner et les surfaces réglées

Antoine Pevsner (1884–1962) est le paradigme de l'artiste qui a choisi comme sujet de ses sculptures des surfaces réglées, tout en se défendant d'avoir recours aux mathématiques. Il le clamait : *« Il n'y a pas de formules dans mes constructions spatiales [...]. Quand on trouve dans mes œuvres des surfaces développables et des surfaces gauches [...], ces surfaces sont utilisées comme moyen plastique et non pas comme la représentation d'une formule algébrique. »* Malgré son refus de donner une dimension mathématique à ses œuvres, on ne peut s'empêcher de voir dans ses sculptures des surfaces éminemment géométriques. Une *surface réglée* est engendrée par le déplacement d'une droite dans l'espace. Cela signifie qu'en chaque point de la surface (« lisse » et « bien courbe ») passe une droite incluse tout entière dans la surface ; une telle droite est appelée *génératrice*. Parmi les surfaces réglées, on trouve les surfaces *développables*, pour lesquelles le plan tangent à la surface est constant le long de chaque génératrice. La sculpture d'Antoine Pevsner *Projection dynamique au 30° degré*

est une surface réglée qui est un assemblage de surfaces coniques et de surfaces cylindriques. La surface cylindrique fait un angle de  $30^\circ$  avec l'horizontale et semble «posée» sur la surface d'un cône. L'ensemble est une surface développable unique et continue.



©É.T., 2021  
(Centre Pompidou, Paris)

*Projection dynamique au  $30^\circ$  degré.*  
Antoine Pevsner, 1951,  
laiton brasé et peint à la bronzine.

©D. D.-P., 2014

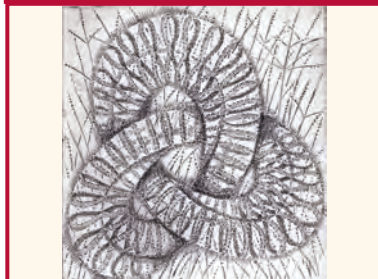
## Max Bill, l'incontournable bande de möbius et le nœud de trèfle

Vous connaissez sans doute la mythique bande de Möbius (ou ruban de Möbius), cette surface non orientable à deux dimensions qui n'a qu'une seule face et dont la construction est élémentaire à partir d'une bande de papier. Si le génial artiste néerlandais Maurits Cornelis Escher (1898–1972) l'a magistralement représentée avec ses fourmis qui parcourent inlassablement son unique face, le plasticien suisse Max Bill (1908–1994) lui a rendu un vibrant hommage sculptural en la déclinant en une vingtaine de versions.



*Ruban sans fin (version IV).* Max Bill, 1960–1961,  
granit gris de Wassen.

©D. D.-P., 2014



*Nœud de trèfle,* par Patrice Jeener.

©Patrice Jeener

Le *nœud de trèfle* est le bord d'un ruban de Möbius auquel on a fait subir trois demi-torsions. Cette forme géométrique a inspiré l'artiste français Patrice Jeener (né en 1944),

présent chaque année au Salon culture et jeux mathématiques, et dont les gravures représentent des surfaces mathématiques. Il illustre ainsi, à sa manière, sa vision d'un nœud de trèfle.

La théorie des nœuds ne se limite pas au seul nœud de trèfle. Pour les mathématiciens, un *nœud* est une ligne continue fermée dans l'espace, qui forme des boucles (plus ou moins nombreuses et tortueuses). Le *nœud trivial* est une simple corde fermée qui ne forme pas de boucle ; le cercle est une incarnation du nœud trivial.

Après le nœud trivial, le nœud le plus élémentaire est le nœud de trèfle, qui admet trois croisements. On peut ensuite classer les nœuds selon le nombre de leurs croisements. L'artiste français Jean-Michel Othoniel construit des sculptures en assemblant des boules en verre. Il forme des sortes de colliers qu'il torsade afin d'obtenir des nœuds qui présentent un certain nombre de croisements (voir l'article *Une année de formes mathématiques dans les musées parisiens* dans cette même brochure). Il s'est rapproché du mathématicien mexicain Aubin Arroyo, qui travaille sur les nœuds et sur une théorie des reflets. L'association entre ces deux explorateurs est un bel exemple d'échange entre l'univers des mathématiques et l'art contemporain (voir *Nudos Salvajes (Nœuds Sauvages)*, Aubin Arroyo, Jean-Michel Othoniel, Juan-Manuel Ruisánchez Serra et Fabiola Manjarrez, Éditions Othoniel, 2017).

## Aux sources de l'inspiration de François Morellet

François Morellet est le paradigme de l'artiste qui a trouvé dans les objets mathématiques l'outil indispensable à la mise en œuvre de sa démarche et à sa vision de l'action de créer. Les mathématiques lui permettent de décrire et de mettre en pratique sa théorie sur la création de ses œuvres. Pour lui, la subjectivité doit être la moins présente possible. Pour cela, il réalise des œuvres mettant en place des protocoles qui font intervenir un nombre minimum de choix artistiques. Il décrit sa démarche comme la recherche de systèmes ; il qualifie son travail d'« *art systématique* ». Si la plupart de ses œuvres sont des tableaux qui font référence aux mathématiques, il a également réalisé quelques sculptures. Les grilles et les trames sont très présentes dans les tableaux de François Morellet, on les retrouve dans sa sculpture *Sphère-Trames*, constituée de tiges métalliques assemblées entre elles de façon à donner l'illusion que l'on est en présence d'une sphère.



*Sphère-Trames*. François Morellet,  
1962 – 1963.

© D. D.-P.

Une grande partie de l'œuvre plastique de Bernar Venet (né en 1941) tourne autour des mathématiques, que ce soient ses tableaux représentant des formules mathématiques ou ses sculptures. Il réalise des sculptures monumentales constituées d'arcs de cercle en acier et leur donne pour titres des mesures en degrés qui correspondent à la mesure de l'angle au centre qui intercepte ces arcs. En 2011 il investit le parc du château de Versailles ; ses œuvres s'insèrent dans les allées du parc ou dialoguent avec l'architecture du château.



219,5° Arc × 28. Bernar Venet, 2011,  
acier corten.

© D. D.-P., 2011



85,8° Arc × 16. Bernar Venet, 2011,  
acier corten ; hauteur : 22 m.

© D. D.-P., 2011

## Volume et mouvement : Ulysse Lacoste, le sculpteur de rêves

Né en 1981, Ulysse Lacoste se consacre à la création de sculptures géométriques en métal. Il imagine des formes qui, *a priori*, n'ont pas de lien particulier avec les mathématiques. Il les dessine, les affine, fait des patrons, les imagine en mouvement, et peu à peu il est amené à penser géométriquement en volume. Il constate que les mathématiques l'aident et qu'elles sont même nécessaires et incontournables pour réaliser ses sculptures et étudier leur stabilité. Il les réalise d'abord en petit format puis les imagine à taille humaine ; il obtient ainsi des sculptures qu'il peut faire vivre en permettant à des acteurs du cirque de les faire rouler ou se mouvoir. Une de ses sculptures récentes, *Le Grand Rulpidon*, a d'abord été réalisée à l'échelle 1/20<sup>e</sup>, soit avec un diamètre de 8 cm. Il s'agit de l'intersection de deux cylindres dont les axes sont perpendiculaires. C'est un objet qui roule, ce qui lui donne l'idée de le réaliser à taille humaine et de le proposer à des acteurs ou des danseurs afin de réaliser des performances. Très prochainement, une réplique monumentale de cette œuvre va prendre place à Paris, à l'Institut Henri-Poincaré, à proximité de la Maison des mathématiques, dont l'ouverture est annoncée pour début 2023.



Modèle réduit du *Rulpidon*.  
Ulysse Lacoste, 2019. ©É.T., 2019



Un *Rulpidon* à taille humaine.  
Ulysse Lacoste, 2018. ©É.T., 2018

Autre explorateur des formes, Jean-Marc Castera s'est spécialisé dans la géométrie des arts traditionnels, avec une prédilection pour les pavages aperiodes, dont les plus connus sont sans doute ceux de Penrose (voir *Croquons les maths Express*, 2021). Artiste multimédia accompli, il a récemment étendu le champ de ses investigations avec l'installation « De 5 à 7 ». Avec son stand « Zellij Experience », c'est un grand ami du Salon Culture et Jeux Mathématiques, tout comme François Dejeumont, le tailleur de pierre qui sculpte de magnifiques polyèdres en marbre ou en gré du Gers.



Installation « *De 5 à 7* ».  
Jean-Marc Castera, 2021.

©É.T., 2021 (galerie Art et Société, Paris)

Sculptures en pierre réalisées  
par François Dejeumont.

©P.A., É.T., 2012





Michel Tombroff est né à Bruxelles. Il fait des études d'ingénieur et d'informatique théorique. Il se passionne pour les mathématiques, la logique et la philosophie, ce qui le conduit à adopter une démarche artistique s'inspirant de ces différentes passions. Dans son œuvre intitulée *Deux*, les trois mille quatre cent cinquante-six premières décimales de la racine cubique de deux (1,259921...) sont représentées par des réglettes disposées sur un cube, soit cinq cent soixante-seize décimales sur chaque face du cube, le côté de chaque face étant égal à vingt-quatre unités. Chaque décimale est représentée par une réglette dont la longueur est égale, en centimètres, à la valeur de la décimale. Les réglettes ont donc des longueurs comprises entre 1 et 9 cm. Elles sont disposées en spirale en commençant au sommet du cube. L'artiste reprend cette technique des réglettes dans plusieurs œuvres, et en particulier pour représenter les décimales de  $\pi$ .

On le voit, l'imagination des sculpteurs est sans limite pour représenter tous types de formes et de surfaces sur lesquelles les mathématiciens travaillent. Nul doute que les abstractions auxquelles réfléchissent aujourd'hui géomètres et topologues sauront à leur tour inspirer les artistes de demain... et pour bien longtemps !

*D. D.-P.*



$\pi$ .  
Michel Tombroff, 2018.

© E.T., 2018 (mairie du V<sup>e</sup> arrondissement, Paris)



*Deux*. Michel Tombroff, 2018,  
réglettes de bois disposées sur un cube  
de 45 cm × 45 cm × 45 cm.

© D. D.-P., 2020





# Une année de formes mathématiques dans les musées parisiens

Édouard Thomas

*Mathématicien et journaliste scientifique*

L'amateur de géométrie, de topologie, de théorie des nœuds, de probabilités, d'algèbre, de formes et de nombres voit (et parfois traque) les mathématiques partout autour de lui. L'un de ses terrains de chasse privilégiés est le musée : les collections permanentes, les expositions temporaires et les événements qui y sont organisés sont bien souvent l'occasion de se confronter au regard que porte un artiste sur un thème mathématique, ou de découvrir comment une communauté d'individus éloignée dans le temps ou dans l'espace a résolu des questions de nature purement mathématique. Ces derniers mois ont été exceptionnellement riches à cet égard dans la capitale. Vous n'avez pas pu en profiter pleinement ? Ou au contraire vous aimeriez vous replonger dans l'ambiance ? Ces quelques lignes (subjectives) et photographies (rendues parfois difficiles par les conditions d'exposition) sont faites pour vous !

## L'émotion pure : les inscriptions calendaires olmèques

Une exposition de taille relativement modeste, « Les Olmèques et les cultures du golfe du Mexique » au musée Branly, nous a bouleversé. Les commissaires ont eu à cœur de faire connaître l'artisanat, les coutumes, les traditions et le mode de vie de ce peuple précolombien de Méséoamérique, qui s'est épanoui de -2500 à -500. Accueilli par des statues monumentales et effrayantes, le spectateur est immédiatement plongé dans l'univers d'Indiana Jones. Très vite, cependant, la mathématique s'invite, inattendue, visible, massive, visuelle : sur de nombreuses œuvres figurent des datations calendaires (voir encadré). L'amateur de mathématiques se trouve saisi de stupeur et d'émotion devant ces traces de dates écrites en base 20, gravées dans la pierre. Découvrir et contempler ces symboles « en vrai » et « en fonctionnement » sur les vestiges présentés est une tout autre expérience que voir, dans un ouvrage, une copie en noir et blanc de points et de traits horizontaux. En outre, des panneaux explicatifs assez complets montrent « comment ça marche », quasiment sans rien glisser sous le tapis. C'est autant de belle science mise à la portée de tous les visiteurs !

## La pratique du compte long

Le système calendaire du compte long a longtemps été considéré comme étant d'origine maya (sud du Mexique et nord de l'Amérique centrale). Avec la découverte de la stèle C de Tres Zapotes, certains experts l'attribuent désormais aux Olmèques.

Les dates en compte long s'expriment essentiellement en base *vigésimale* (ou base 20). Les termes désignant les unités de mesure du temps sont connus : 1 *k'in* représente un jour ; 20 *k'in* représentent 1 *uinal* (vingt jours) ; 18 *uinal* représentent 1 *tun* ou 360 *k'in* (trois cent soixante jours) ; 20 *tun* représentent 1 *katun* ou 7 200 *k'in* (sept mille deux cents jours) ; 20 *katun* représentent 1 *baktun* ou 144 000 *k'in* (cent quarante-quatre mille jours).

Notez l'entorse faite au système vigésimal avec le choix pratique de représenter 18 *uinal*, au lieu de 20 *uinal* :  $18 \times 20$  *k'in* (360 jours) est plus proche d'une année solaire (environ 365 jours) que  $20 \times 20$  *k'in* (400 jours). Les unités de mesure du temps en compte long sont donc 1, 20, 360, 7 200, 144 000 (quand une base vigésimale pure utiliserait 1, 20, 400, 8 000, 160 000).

Les symboles de numération employés pour représenter tous les « chiffres » en base 20 (donc les entiers de 1 à 19) sont des traits horizontaux pour marquer 5 et des points pour marquer l'unité. Ainsi, trois traits horizontaux surmontés de deux points représentent le « chiffre » 17. Le zéro est codé par une absence de marque, ce qui peut prêter à confusion dans la lecture d'un nombre. Enfin, les symboles se lisent du bas vers le haut.



Partie inférieure de la stèle C de Tres Zapote, État de Veracruz, Mexique.

© É. Thomas, 2021 (musée Branly)

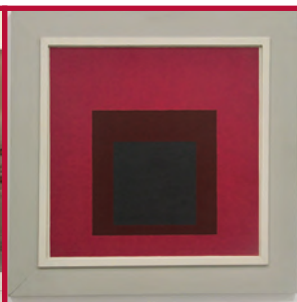
La date figurant sur la stèle C de Tres Zapotes se lit ainsi, de bas en haut : 18 *k'in* + 16 *uinal* + 6 *tun* + 16 *katun* + 7 *baktun* (les *baktuns* figurent sur la partie supérieure de la stèle, non présentée dans l'exposition). Cela totalise 1 125 698 jours depuis la création du monde dans la mythologie olmèque, qui correspondrait au 11 août 3114 avant notre ère. Ainsi, la date écrite en compte long sur la stèle serait le 1<sup>er</sup> septembre 32 avant notre ère !

## Géométrie du carré et topologie avec Anni et Josef Albers

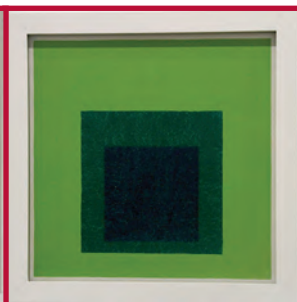
Faisons un bond de plus de deux mille ans dans le temps. Le Musée d'art moderne a présenté une ambitieuse exposition, « Anni et Josef Albers ». C'était l'occasion de découvrir en profondeur les travaux d'Annelise Fleischmann (1899–1994), ou Anni Albers de son nom d'artiste, et les recherches de Josef Albers (1888–1976). Les deux artistes se sont rencontrés en 1922 au Bauhaus. L'ampleur des recherches des deux époux en matière de géométrie et de topologie nous a sidéré. On apprend qu'ils ont travaillé avec leur ami le mathématicien Max Dehn (1878–1952) sur des sujets liés à la topologie, la théorie des nœuds en particulier. Le clou du spectacle était cependant la présentation de tableaux de la série « Hommage au carré ». Dans une scénographie admirable, on y découvrait en effet quelque quarante tableaux grand format de Joseph Albers, extrêmement émouvants en plus que d'être hypnotiques et obsédants. L'artiste en a peint près de trois mille au cours des vingt-cinq dernières années de sa vie ! Son obsession était en fait plus la couleur que le carré lui-même : il sensibilisait ses élèves au caractère relatif des coloris (la même couleur mise en présence de deux autres teintes très différentes va apparaître plus claire ou plus foncée selon le contexte). De fait, dans les œuvres de la série « Hommage au carré », les aplats de couleur ne sont jamais superposés : aucun n'est « au-dessus » d'un autre !



*Nœud.*  
Anni Albers, 1947.



*Hommage au carré  
(sur ses gardes).*  
Josef Albers, 1952.



*Hommage au carré.*  
Josef Albers,  
entre 1952 et 1955.

© É. Thomas, 2021 (musée d'art moderne)

## Les modèles mathématiques de l'IHP en vedette

Pour les amateurs de topologie et de belles surfaces, il fallait faire l'effort de monter à la coupole du musée national des arts asiatiques Guimet pour voir l'installation «Needles» («aiguilles») de Toshimasa Kikuchi (né en 1979), inspirée des modèles mathématiques de l'Institut Henri-Poincaré (IHP). Les surfaces représentées permettaient des effets d'ombre du meilleur effet.



Surface de Kuen :  
modèle des collections de l'IHP.

Vue de l'installation « Needles »  
de Toshimasa Kikuchi.

Surface de Kuen : représentation  
de Toshimasa Kikuchi.

©É. Thomas, 2021 (musée Guimet)

## Transformations et nœuds sauvages au Petit Palais

Les fans de théorie des nœuds, de topologie, de belles transformations géométriques, d'art optique, de jeux de miroirs et d'effets visuels en tous genres avaient rendez-vous au Petit Palais. L'installation «Le théorème de Narcisse» de Jean-Michel Othoniel (né en 1964), déployée dans l'ensemble de l'édifice, jardin compris, a en effet ravi les amateurs de mathématiques visuelles ! Surfaces, transformations géométriques et topologie ont été conviées et incarnées dans près d'une centaine d'œuvres monumentales et colorées.

Les recherches de l'artiste autour des nœuds, et en particulier des nœuds sauvages, se font, depuis dix ans, avec la complicité du mathématicien mexicain Aubin Arroyo (né en 1974). Le titre de l'installation évoque explicitement les mathématiques et, avec un zeste de psychologie, le fait que le spectateur contemple non seulement une œuvre, mais également tout son environnement et son propre reflet déformé.



*Nœuds sauvages.* Jean-Michel Othoniel, 2020-2021.

© É. Thomas, 2021 (Petit Palais)



*Nœuds miroirs.* Jean-Michel Othoniel, 2021.

© É. Thomas, 2021 (Petit Palais)

## De l'abstraction et un ruban de Möbius cubiste

L'exposition « Chagall, Modigliani, Soutine... Paris pour école » au musée d'art et d'histoire du judaïsme revenait sur ce mouvement artistique du début du XX<sup>e</sup> siècle que l'on a appelé l'École de Paris. Parmi les nombreuses peintures (et les quelques sculptures) abstraites qui étaient présentées figurait un ruban de Möbius cubiste de très grand format. Il fallait oser !

*Composition abstraite.* Vladimir Baranoff-Rossiné, 1910.

© É. Thomas, 2021 (musée d'art et d'histoire du judaïsme)



Au même moment, l'exposition «La collection Morozov» à la Fondation Louis-Vuitton tenait toutes ses promesses. On s'est en particulier émerveillé devant la géométrisation de l'espace de la composition chez Henri Matisse et devant les audacieuses sinuosités d'André Derain. Les symétries axiales de Claude Monet, très minutieuses, répondaient aux effets géométriques de Vincent van Gogh, de Paul Cézanne et même de Paul Gauguin. Les transformations formelles de Pablo Picasso et les abstractions graphiques de Natalia Gontcharova achevaient de nous séduire.

Enfin, l'exposition «Elles font l'abstraction», proposée au Centre Pompidou, proposait de revenir, comme son nom l'indique, sur le rôle pionnier de nombreuses artistes dans l'histoire, trop souvent écrite au masculin, de l'émergence de l'abstraction dans les arts plastiques, de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle aux années 1980. Des œuvres de Natalia Gontcharova, Lioubov Popova, Varvara Stepanova, Alexandra Exter et Olga Rozanova rappelaient que l'abstraction géométrique moderne trouve ses racines en Russie, pays dans lequel les femmes ont pu franchir dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle les portes des académies des beaux-arts. De même, un ensemble d'œuvres du Bauhaus montrait comment, bien que cantonnées au domaine de la tapisserie, les femmes de cette école allemande redéfinirent l'abstraction à travers les arts décoratifs. Puis, dès les années 1940, l'histoire de l'abstraction se développa de façon particulièrement vive aux États-Unis, avec par exemple Lee Krasner. L'Amérique du Sud, l'Amérique latine, le continent africain, le Moyen Orient et l'Asie n'étaient pas oubliés et permettaient de mettre en avant les processus de création, tant dans les pratiques héritées de traditions variées que dans le style ou le geste.

Il est définitivement temps de retrouver le chemin des musées !

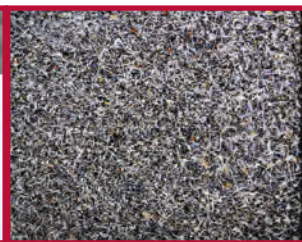
**É. T.**



*Vide.*  
Natalia Gontcharova, 1913.



*Oval sculpture (n°2).*  
Barbara Hepworth, 1943.



Une œuvre de Jackson Pollock des années 1950 ? Non, un tableau (sans titre) de 1947 de son épouse, Lee Krasner !

© É. Thomas, 2021 (Centre Pompidou)



# Vidéo et environnement numérique : de nouveaux processus d'apprentissage

Salomé Cojean

*Maîtresse de conférences au Laboratoire de  
recherche sur les apprentissages en contexte*

L'usage du numérique dans un contexte pédagogique a démarré il y a plusieurs décennies, chaque innovation technologique ayant toujours trouvé son application dans le domaine de l'éducation. Lors de l'invention et la diffusion de la télévision dans les foyers, les premiers programmes éducatifs apparaissent *via* la radio-télévision scolaire. Depuis, l'usage d'Internet a également modifié les possibilités de diffusion de l'information (on parle alors d'*e-learning*), et chaque nouveau support (ordinateur, tablette, réalité virtuelle...) peut être envisagé comme un support d'apprentissage. Le numérique, par rapport aux supports traditionnels papier, permet de proposer des informations sous différentes formes (texte, image...) mais également sous différentes modalités (visuelle, auditive...). Quels sont les apports (et potentiellement les contraintes) de ces nouveaux supports dans les situations d'apprentissage ?

## L'information sous toutes ses formes

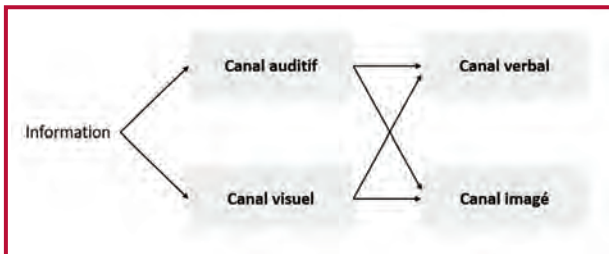
L'apport des illustrations dans l'apprentissage est indéniable. Les individus semblent apprendre plus efficacement avec du texte et des images plutôt qu'avec un texte seul. Pour comprendre cet effet positif, il est nécessaire de s'intéresser au fonctionnement cognitif des individus qui apprennent. Chaque apprenant traite l'information qu'il perçoit en *mémoire de travail* avant de l'envoyer, ou non, en mémoire à long terme pour s'en rappeler plus tard. La mémoire de travail fait partie de la mémoire à court terme, c'est-à-dire que l'information n'y est maintenue que le temps d'être traitée. Selon les chercheurs britanniques Alan Baddeley et Graham Hitch, à l'origine en 1974 de l'un des modèles les plus connus de la mémoire de travail, deux sous-systèmes séparés traitent l'information selon ses caractéristiques : la *boucle phonologique* traitera l'information verbale (c'est-à-dire tout ce qui relève du langage écrit ou entendu), tandis que l'information imagée sera traitée par le *calepin visuo-spatial*.



Proche de ce modèle, le *modèle du double codage* du chercheur canadien Allan Paivio (en 1990) propose également la distinction entre deux canaux (verbal et imagé) de traitement de l'information qui peuvent fonctionner en parallèle. De la même manière que la capacité en mémoire de travail est limitée pour chaque individu, chaque canal a une capacité limitée de traitement. En d'autres termes, si un apprenant est confronté à un texte seul, l'entièreté de l'information est traitée dans la boucle phonologique / le canal verbal. Cependant, s'il est confronté à un texte associé à des images, le contenu du texte sera traité dans le canal verbal tandis que les illustrations seront traitées en parallèle dans le calepin visuo-spatial / le canal imagé. Deux fois plus d'informations seront donc traitées en même temps sans davantage surcharger la capacité en mémoire de travail de l'apprenant, enrichissant ainsi l'apprentissage.

Des études ont été réalisées pour tester cet effet, en comparant les performances d'apprentissage d'un texte seul et du même texte accompagné d'une image. Selon l'analyse d'une cinquantaine de telles études réalisée par les chercheurs américains Howard Levie et Richard Lenz en 1982, il apparaît que le texte illustré est significativement plus efficace, avec en moyenne un gain de performance de 36 %. Cela fonctionne à condition que les illustrations représentent le contenu du texte. En effet, ajouter des illustrations uniquement décoratives dans un document n'aura aucun effet positif sur l'apprentissage, même si certains travaux suggèrent qu'elles pourraient induire un état émotionnel, motivationnel, ou des stratégies favorables à l'apprentissage. Les illustrations animées seront quant à elles d'autant plus favorables à l'apprentissage qu'elles représentent un mouvement dans l'espace ou un changement dans le temps.

Le second apport notable du numérique est la possibilité d'ajouter à l'information visuelle traditionnelle (texte, illustration...) de l'information audio (musique, discours...). Sur la base des modèles de la mémoire de travail et du double codage, de nouvelles théories cognitives de l'apprentissage multimédia ont été développées en intégrant cet effet de modalité. Ainsi, dans les modèles de Richard Mayer (2014) ou de Wolfgang Schnotz (2014), une distinction entre les canaux de traitement est ajoutée au niveau sensoriel : l'information est



Version simplifiée du modèle de Mayer de 2014.

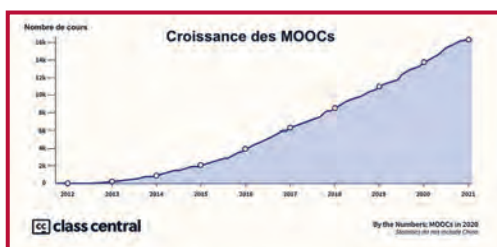
© S.C., 2022

d'abord traitée séparément selon si elle est visuelle ou auditive, puis, dans un second temps seulement, selon si elle est verbale ou imagée. Cela signifie donc que si le document propose un texte

et une illustration, les deux canaux sont utilisés au niveau verbal / imagé, mais l'information est traitée entièrement par le canal visuel, au risque d'atteindre sa limite de traitement. Si l'illustration est accompagnée d'un discours oral, l'information auditive sera traitée en parallèle de l'information visuelle, doublant ainsi la capacité totale de traitement de l'information. Les études réalisées vont dans ce sens, avec de meilleures performances d'apprentissage observées lors de la présentation d'un graphique associé à un discours oral plutôt qu'écrit.

## Le format vidéo

Les vidéos se sont peu à peu imposées dans les environnements pédagogiques ces vingt dernières années à la suite de trois événements majeurs : 1) le développement des MOOC (*massive online open courses* ou *formations en ligne ouvertes à tous*), ces plateformes de cours qui proposent leur contenu sous forme de modules vidéo ; 2) l'intérêt croissant pour les situations de *classe inversée*, durant lesquelles la leçon peut être proposée sous forme vidéo avant le regroupement en classe ; 3) la situation sanitaire sans précédent liée à la Covid-19, durant laquelle de nombreux cours, à tous les niveaux scolaires et universitaires, ont été dispensés en ligne de manière synchrone ou asynchrone, et donc médiatisés par la vidéo.



Augmentation du nombre de cours disponibles en ligne sur les plateformes de formations en ligne ouvertes à tous (hors Chine) jusqu'au 1<sup>er</sup> janvier 2021.

© Class Central, 2021

L'apprentissage par vidéo présente de nombreux bénéfices. Il permet notamment de cumuler les effets positifs précédents des illustrations animées et de la multimodalité. En effet, en général, dans une vidéo, l'information visuelle imagée est associée à un discours verbal oral. Les deux canaux de traitement de l'information sont donc sollicités en parallèle quel que soit le niveau (verbal / imagé et visuel / auditif), maximisant ainsi les capacités de traitement par l'apprenant.

En revanche, ce format présente également des contraintes à prendre en compte. La première est le manque de *structuration* du document et la difficulté à retrouver des éléments précis au sein de la vidéo. De manière générale, identifier la structure d'un document, c'est-à-dire l'organisation de son contenu, est essentiel dans un apprentissage. Cela permet de repérer les informations

importantes (celles présentes dans les titres notamment) et d'organiser ces informations entre elles (hiérarchiquement ou autre). Un document écrit, même s'il ne présente pas de sommaire ou de titre pour chaque partie, peut être «scanné visuellement» afin de repérer les grandes parties, grâce aux paragraphes par exemple. De cette manière, il est aussi possible de s'aider de cette exploration visuelle pour retrouver une information spécifique. Dans une vidéo, l'individu doit manipuler la barre de navigation et faire des sauts de quelques secondes à plusieurs minutes jusqu'à ce qu'il retrouve l'information souhaitée.

### Apprentissage vidéo : quelques recommandations

- Il est essentiel de combiner structuration de la vidéo (fournir un sommaire) et segmentation de la barre de navigation pour faciliter la navigation et la recherche d'information. L'apprentissage du contenu de la vidéo pourra lui aussi être facilité, à condition que l'apprenant soit dans un traitement actif de ces aides.
- Les pauses sont nécessaires à l'apprentissage en vidéo, mais les apprenants sous-utilisent cette option. Il est donc important d'imposer des pauses régulièrement. L'apprenant pourra reprendre le visionnage après la durée qui lui convient le mieux ; il n'y a actuellement pas de recommandation sur la durée optimale de pause.
- La durée des vidéos (ou des segments entre deux pauses imposées pour une vidéo longue) doit être courte. Les préconisations varient entre une et six minutes (!). Cette durée est évidemment à adapter en fonction de la complexité du contenu présenté.
- Les sous-titres ne sont intéressants que si le discours de la vidéo est dans une langue étrangère. Si le discours est en français pour des apprenants français, les sous-titres n'apporteront que de la redondance inutile, voire nocive pour l'apprentissage. Il peut cependant être envisagé d'en fournir pour les apprenants malentendants. Dans ce cas, il vaut mieux qu'ils soient disponibles en option facilement accessible, et non par défaut lors du lancement.
- Voir l'enseignant en plus du contenu présenté pourrait diviser l'attention de l'apprenant et avoir un effet négatif sur l'apprentissage. Cependant, cela a en fait plutôt un effet positif : la gestuelle de l'enseignant guide l'attention de l'apprenant envers la tâche, et le sentiment de présence sociale augmente la motivation de l'apprenant.

La seconde contrainte majeure du format vidéo est la quantité d'information qui est délivrée en *flot continu*. Contrairement à un texte écrit, l'information n'est plus disponible une fois traitée. Lors de la lecture d'un texte, l'apprenant va pouvoir adapter son rythme de lecture à son niveau de compréhension

(comme ralentir à la lecture d'un passage difficile), alors qu'en vidéo ce rythme est imposé. Proposer un bouton « pause » pourrait théoriquement être utile à cette gestion du rythme : les pauses permettraient à l'apprenant de traiter efficacement les informations vues et entendues avant d'en recevoir de nouvelles. Cependant, quand cette option est disponible, les apprenants en font très peu usage. L'explication probable est qu'ils ne se rendent pas compte de l'utilité que peuvent avoir ces pauses sur la qualité de leurs processus d'apprentissage (selon des études récentes, seul un tiers des apprenants utilise le bouton « pause » sur une vidéo d'une vingtaine de minutes, et parmi les apprenants qui en font le nombre moyen de pauses est inférieur à 2). En revanche, lorsque les pauses sont imposées aux apprenants, en nombre bien plus important, elles permettent d'améliorer significativement la performance d'apprentissage.

## Distanciel ou présentiel : ce que dit la recherche

Les vidéos sont largement exploitées lors des cours en distanciel (*e-learning*) : soit elles peuvent être déposées sur une plateforme pour être visionnées par les apprenants quand ils le souhaitent, soit le cours se déroule de manière synchrone, le plus souvent avec l'enseignant qui présente un support visuel. La première question était de savoir si ce format pouvait présenter des avantages par rapport à l'apprentissage traditionnel sur papier. La seconde question, à un niveau plus général, est de savoir si l'apprentissage à distance peut être aussi efficace que l'apprentissage en présentiel. Une *méta-analyse* (synthèse de nombreux articles sur un même sujet) de *second ordre* (méta-analyse de méta-analyses) récente menée par Florence Martin et ses collaborateurs en 2022 montre que, même si l'effet est faible, les cours présentés à distance sont plus efficaces que les cours en présentiel sur les performances académiques. Par ailleurs, les avantages associés au format distanciel sont souvent énoncés en termes de flexibilité, temporelle et géographique, et de coût financier. Les études montrent en outre un effet positif global du format de classe inversée sur l'engagement des apprenants : la mise en place d'un format hybride combinant vidéos à consulter en distanciel et sessions en présentiel pourrait ainsi être une solution convenant au plus grand nombre.

Pour l'enseignant, les deux formats (présentiel ou distanciel) ne permettent pas de faire la même chose, mais cela ne devrait pas être perçu comme une contrainte. L'erreur est souvent de chercher à recréer un cours présentiel en distanciel, alors qu'il faudrait plutôt tirer profit des avantages de chaque format. Chacun offre des possibilités différentes de présentation de l'information et d'interactions entre enseignants et étudiants, ou entre étudiants (quiz, messagerie instantanée...) qu'il convient d'utiliser à bon escient. Par exemple, en présentiel,

pour savoir si les étudiants comprennent le contenu présenté, les enseignants peuvent observer les expressions faciales des étudiants ou leur poser directement la question de savoir si tout va bien. En situation d'apprentissage en distanciel, l'observation des visages des étudiants n'est plus possible si ces derniers n'activent pas leur caméra. En revanche, il sera alors plus facile de leur proposer un questionnaire en ligne pour évaluer leur niveau de compréhension en temps réel. Ainsi, les informations recueillies en présentiel présentent des limites importantes (les expressions faciales peuvent ne pas refléter le niveau de compréhension, ou en posant une question à l'oral le risque est que seuls les étudiants qui ont compris répondent), alors que la méthode facilitée par le distanciel permettrait d'évaluer le niveau de l'ensemble des étudiants de manière plus précise.

Pour un contenu donné (par exemple un cours de mathématiques), plusieurs formats de présentation sont possibles, que ce soit en termes de support (texte, image, vidéo), ou de modalité de diffusion (présentiel ou distanciel). La littérature scientifique permet de se positionner quant aux apports et contraintes de chaque format. Au fur et à mesure des avancées technologiques, de nouveaux formats sont testés et pourront être utilisés au mieux pour des objectifs pédagogiques. Récemment, les travaux en intelligence artificielle

permettent d'envisager la conception de plateformes d'apprentissages différenciés au plus proche des caractéristiques des apprenants, mais c'est encore une autre histoire...

*S. C.*



L'interface fonctionnelle du site Carmin.tv (lancé en 2021), qui propose déjà près de cinq mille vidéos de mathématiques.

© Carmin.tv, 2022

## Pour en savoir (un peu) plus

Une bibliographie sélective mais assez complète (en anglais) est disponible en ligne pour approfondir le sujet ou retrouver les sources spécialisées utilisées lors de la rédaction de l'article :

<https://sites.google.com/view/salomecojean/biblio>





# Anna Kiesenhofer : une mathématicienne médaille d'or aux JO de Tokyo !

Édouard Thomas

*Mathématicien et journaliste scientifique*

*Cet article est dédié à Denis Barberot (1953–2018).*

La mathématicienne autrichienne Anna Kiesenhofer est née le 14 février 1991. Elle était jusqu'à récemment en post-doc à l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL, Suisse). Elle travaille sur des sujets à la frontière entre les équations aux dérivées partielles (qui décrivent la plupart des phénomènes physiques, à toutes les échelles), la géométrie symplectique (qui s'apparente à une vaste extension mathématique de la mécanique classique) et les systèmes dynamiques.

## Un parcours professionnel en forme de carte postale

Originaire de Niederkreuzstetten, Anna Kiesenhofer aime les sciences : la physique, l'anatomie, la physiologie et, bien entendu, les mathématiques, qui sont pour elle le meilleur langage pour exprimer la physique et comprendre le monde. En mathématiques, on peut voir ce qui est faux : les énoncés sont clairs, des hypothèses aux conclusions en passant par les démonstrations. Dans d'autres sciences, s'est-elle convaincue, les résultats sont souvent plus flous, moins rigoureux.

Son petit village de Basse-Autriche (le plus étendu des neuf États fédérés du pays) étant situé à moins d'une heure de route de Vienne, c'est tout naturellement vers la capitale autrichienne que la jeune femme va se tourner pour s'inscrire en licence de mathématiques. Son master, elle part le faire en Grande-Bretagne, à l'université de Cambridge. Puis c'est en Espagne, à l'Université polytechnique de Catalogne (Barcelone), qu'elle va poursuivre une thèse de doctorat, sous la direction d'Eva Miranda Galceran, sur le thème des systèmes intégrables. En 2017, elle est recrutée par l'EPFL. Parlant couramment l'allemand, l'anglais, l'espagnol et le français (et se débrouillant un peu en catalan), la jeune enseignante chercheuse est promise à un brillant avenir.



Le centre de Niederkreuzstetten, en Autriche.

© Bwag / Commons, 2015

## En maths comme en sport : une jeune femme en pleine forme !

Mais toute médaille a deux faces. Mathématicienne professionnelle, Anna Kiesenhofer s'intéresse également depuis 2010 à... l'athlétisme, qu'elle découvre à l'occasion de ses études à Vienne (on ne le répétera jamais assez : les maths mènent à tout !).

Adepte de duathlon (épreuve de course à pied et de cyclisme) et de triathlon (le duathlon avec la natation en plus), elle a cependant dû arrêter la course à pied suite à une blessure. Elle s'est alors reconvertie au cyclisme en 2014, en amateur, sans entraîneur ni parraineur ou contrat professionnel. En 2016, l'année où elle soutient sa thèse, Anna Kiesenhofer remporte la troisième étape du Tour cycliste féminin international de l'Ardèche : l'ascension du mont Ventoux, réputée particulièrement difficile. Le monde cycliste professionnel la découvre alors. Elle intègre Lotto-Soudal en 2017, une fameuse équipe cycliste féminine belge créée en 2006. Malheureusement, elle s'aperçoit rapidement que le monde professionnel n'est pas à son goût ; elle préfère retrouver son indépendance, en dehors même des clubs sportifs.

En 2019, elle explose dans son pays : elle est championne d'Autriche du contre-la-montre, et championne nationale sur route. Par ailleurs, elle arrive cinquième au championnat d'Europe du contre-la-montre. Elle enfonce le clou

l'année suivante en conservant son titre de contre-la-montre et en remportant le championnat national de course de côte. Elle s'offre en outre un podium au Tour de l'Ardèche, où elle finit troisième au classement général final. Du haut de son mètre soixante-sept, c'est une cycliste complète, qui sait grimper, descendre, placer des accélérations... Ce qu'elle aime : le défi tant mental que physique que représentent les épreuves d'endurance, la satisfaction de pousser le corps et l'esprit dans leurs derniers retranchements, la joie d'aller au bout de soi et de se dépasser. Son parcours rappelle celui de l'Italienne Vittoria Bussi (née en 1987) : Bussi est elle aussi titulaire d'un doctorat en mathématiques (de l'université d'Oxford, dans un domaine très proche de la géométrie symplectique), cycliste de haut niveau (elle a été détentrice du record du monde de l'heure du 13 septembre 2018 au 30 septembre 2021, avec 48,007 km parcourus sur piste) après avoir commencé l'athlétisme avec le triathlon, et spécialiste de contre-la-montre. Les deux jeunes femmes se sont d'ailleurs retrouvées alignées le 17 octobre 2021 au Chrono des nations-Les Herbiers-Vendée, une course cycliste française de contre-la-montre ; l'Autrichienne a terminé deuxième et l'Italienne, cinquième.

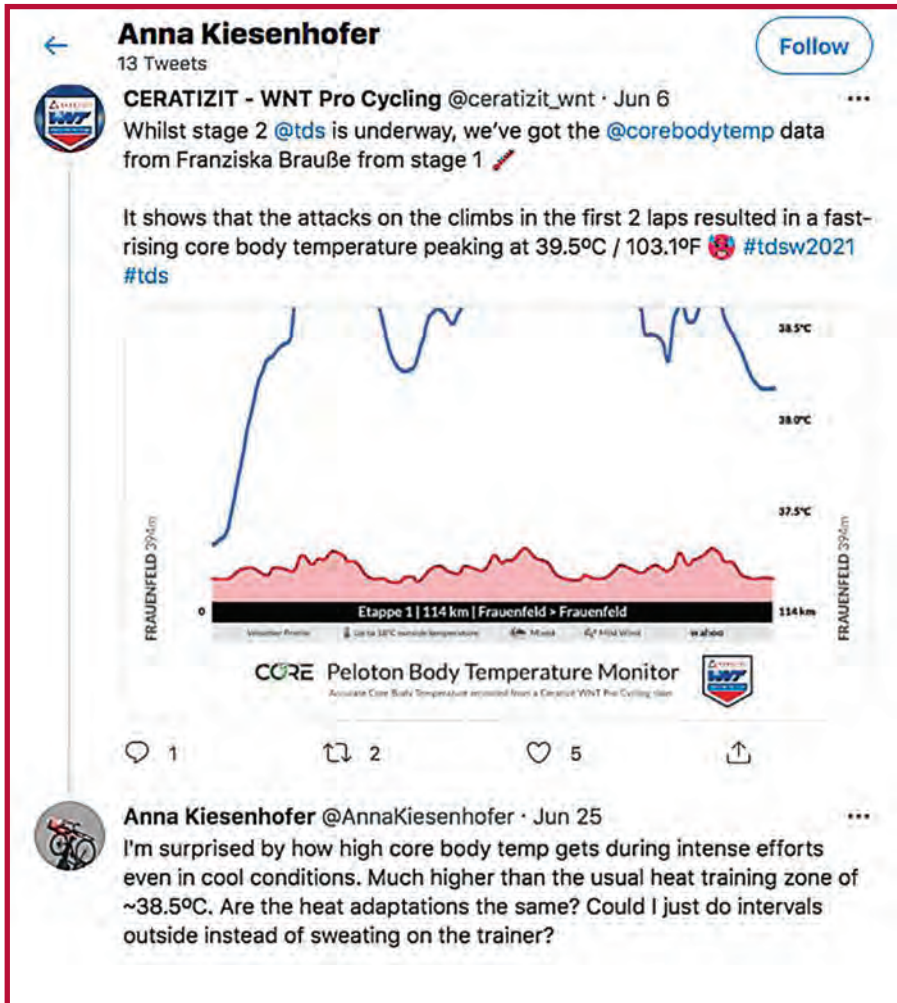
## Tokyo 2020 : une préparation en bonne et due forme des JO

L'année 2021 commence sous les meilleurs auspices pour Anna Kisenhofer. En juin, elle conserve, pour la troisième année consécutive, son titre national en contre-la-montre. Ses différents succès lui valent de représenter son pays aux Jeux olympiques (JO) de Tokyo dans l'épreuve féminine de course en ligne sur route.

La course de 137km se déroule le 25 juillet, et notre adepte de la petite reine s'y prépare intensément sur son temps libre, avec rigueur et discipline, depuis 2019 : « *J'ai tout sacrifié durant dix-huit mois pour cette journée!* » Tout au long de cette période, elle gère seule son programme, sa préparation physique, son régime alimentaire, la documentation scientifique et technique, son équipement, sa stratégie : « *Je ne suis pas le genre de cycliste qui se contente d'appuyer sur les pédales!* » s'amuse-t-elle. De fait, elle n'apprécie guère les experts auto-proclamés (entraîneurs, nutritionnistes et autres conseillers sportifs) aux discours bien rodés, stéréotypés et... souvent inadaptés. Ainsi, plusieurs mois avant la course, Anna Kisenhofer a conduit une étude quantitative sur la température à Tokyo car l'acclimatation lui a semblé être un facteur prépondérant. Elle en a tiré un tableau préparatoire des efforts à fournir en fonction de la température extérieure, de l'altitude, des différentes étapes de la course et de son propre métabolisme. Elle a réalisé ensuite des mesures de température interne à l'aide de capteurs CORE en situations d'effort



comparables pour valider son approche scientifique (sous la forme d'un bracelet de montre, ces capteurs mesurent la température des fluides corporels qui circulent sous la surface du bracelet). L'analyse de ces données, ensuite, c'est essentiellement une affaire de mathématiques...

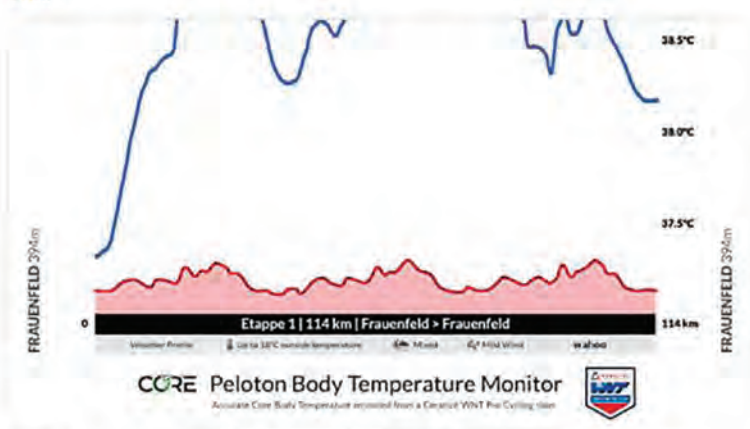


**Anna Kiesenhofer** 13 Tweets Follow

**CERATIZIT - WNT Pro Cycling** @ceratizit\_wnt · Jun 6

Whilst stage 2 @tds is underway, we've got the @corebodytemp data from Franziska Brauße from stage 1 📈

It shows that the attacks on the climbs in the first 2 laps resulted in a fast-rising core body temperature peaking at 39.5°C / 103.1°F 🇩🇪 #tdsw2021 #tds



**CORE Peloton Body Temperature Monitor**  
Accurate Core Body Temperature recorded from a Ceratizit WNT Pro Cycling rider

1 2 5

**Anna Kiesenhofer** @AnnaKiesenhofer · Jun 25

I'm surprised by how high core body temp gets during intense efforts even in cool conditions. Much higher than the usual heat training zone of ~38.5°C. Are the heat adaptations the same? Could I just do intervals outside instead of sweating on the trainer?

Sur ce retour d'expérience, Anna a mesuré une température interne excessive, de 39,5° C au lieu des 38,5° C attendus. Elle s'interroge en commentaire sur ce qu'il convient de corriger pour améliorer sa thermorégulation, avant de se documenter et d'affiner sa préparation.

© Anna Kiesenhofer, 2021/ intervals.icu

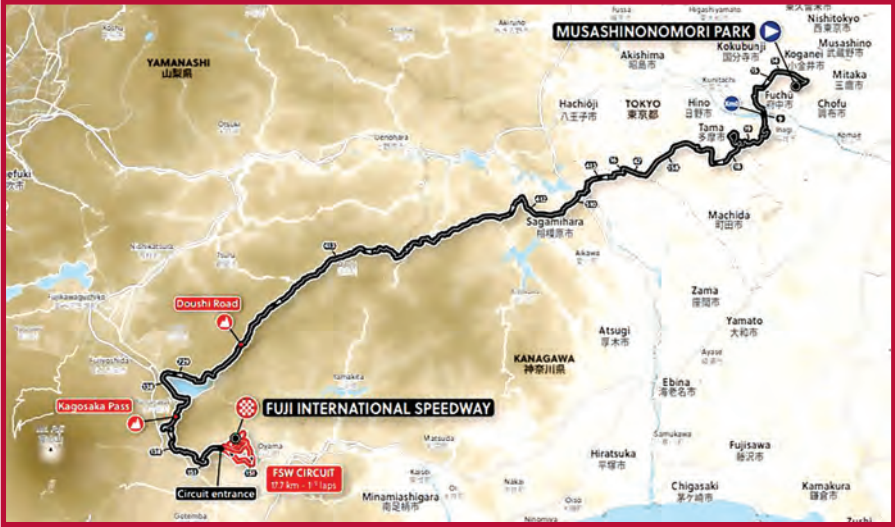
## Une stratégie qui prend forme dans l'esprit de la cycliste

Quand elle aborde les Jeux olympiques d'été de 2020 (qui, pour cause de pandémie, se sont déroulés en 2021, du 23 juillet au 8 août), l'objectif sportif d'Anna Kiesenhofer est de se hisser dans les vingt-cinq premières places. Il s'agit de sa première participation aux JO. Soixante-sept cyclistes sont alignées sur la ligne de départ de l'une des disciplines olympiques reines. Parmi elles, les Néerlandaises, les « quatre V », font figure d'épouvantail : Anna van der Breggen est la championne olympique en titre, Marianne Vos (championne olympique 2012) est considérée comme la meilleure cycliste de sa génération, Annemiek van Vleuten allait remporter la victoire aux JO de 2016 avant qu'une chute d'une extrême violence ne la prive du titre (au profit de van der Breggen), et la benjamine Demi Vollering a déjà une solide réputation. Chacune d'elles est capable de remporter l'épreuve. De fait, les Néerlandaises sont les grandes favorites.

D'autres nations phares du cyclisme, dont l'Italie et l'Allemagne, ont obtenu des résultats suffisants dans les années précédentes pour aligner le nombre maximal de quatre coureuses. Pour ces équipes, c'est un avantage stratégique de première importance : elles peuvent désigner une « domestique » (une coureuse qui fera des allers-retours aux voitures de ravitaillement pour ramener à ses partenaires les boissons, la nourriture, les poches à glaçons, les gels énergétiques et prendre les informations et consignes des directeurs d'équipes) et une « capitaine » (une cycliste en tête de peloton dont le rôle est de partir avec toute athlète parmi les favorites qui essaierait de s'échapper en solitaire). Les deux autres cyclistes, les « favorites » de l'équipe, peuvent ainsi s'économiser au sein du peloton, l'une « protégeant » l'autre en se plaçant devant de manière à lui éviter de faire face au vent. Une telle organisation est d'autant plus stratégique qu'aux Jeux olympiques les radios sont traditionnellement interdites : les athlètes doivent communiquer de vive voix, au vu et au su de toutes les concurrentes qui les entourent, et revenir régulièrement aux voitures de ravitaillement pour échanger sur la stratégie à adopter en fonction des événements. Il est donc important d'avoir à tout moment une « capitaine » (généralement une cycliste aguerrie) à l'avant du peloton, pour garder un œil sur les initiatives des concurrentes, et une « domestique » (souvent une cycliste plus jeune) pour gérer le ravitaillement. À ce niveau, le cyclisme est un sport d'équipe plus qu'une pratique individuelle !

Parmi les favorites figurent également une coureuse britannique, une polonaise, une belge, une australienne, une danoise ou encore une sud-africaine.

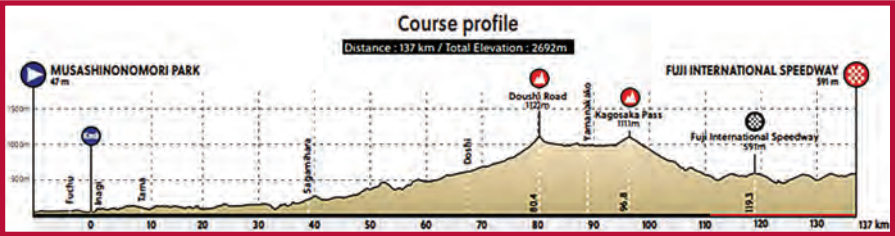
Anna Kiesenhofer est la seule représentante de son pays. Elle n'a pas d'équipière pour l'épauler. Avec l'entraîneur national Klaus Kabasser, l'une des rares personnes de confiance dont elle s'est entourée, elle a mis au point sa stratégie dans le plus grand secret : lancer une attaque « au kilomètre zéro », à peine la ligne de départ franchie.



Les cent trente-sept kilomètres de la course.

© procyclingmaps.com

Le dénivelé cumulé positif (DCP) officiellement retenu entre le kilomètre 0 et le kilomètre 137 figure sur le profil ci-dessous : DCP=2 692 m. En réalisant une estimation grossière « à la main » de DCP en fixant arbitrairement un pas tous les dix kilomètres, on trouve moins de 1 500 m (quasiment la moitié de DCP, un chiffre qui n'est pas représentatif des efforts qui vont devoir être consentis par les coureuses). Le choix du pas de discrétisation lorsque l'on calcule un dénivelé cumulé est fondamental (voir l'encadré suivant) !



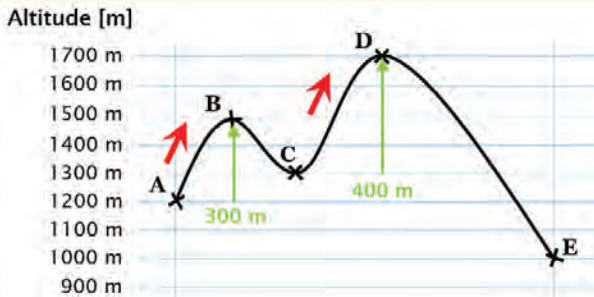
Le dénivelé de l'épreuve (parcours en zone neutre compris).

© procyclingmaps.com

## Comprendre le dénivelé

En cyclisme comme en randonnée, le *dénivelé* (ou *dénivelé global*) est la différence d'altitude relative entre deux lieux géographiques. Ainsi, par exemple, sur un parcours fictif, entre un point P de départ situé à 1 000 m et un point Q d'arrivée situé à 1 200 m, le dénivelé est de +200 m. Si l'on introduit une étape R située à 400 m, le dénivelé entre P et R est de -600 m. Et si l'on ajoute encore un passage S situé lui aussi à 1 000 m, le dénivelé entre P et S est de 0. Ce qui ne veut pas dire que « c'est tout plat » entre P et S, mais simplement que les montées et les descentes se compensent !

On affine alors le dénivelé global précédent (qui a peu d'intérêt pour un sportif) avec le *dénivelé cumulé positif* et le *dénivelé cumulé négatif*, qui sont la somme de tous les dénivelés globaux positifs (respectivement négatifs) intermédiaires. Le choix d'un pas de discrétisation (mesurer tous les kilomètres, ou bien tous les mètres) est alors important et dépend des besoins, car le résultat numérique obtenu peut varier du simple au double ! Un sportif va généralement découper son parcours en « tronçons approximatifs » de montées et de descentes. Un cartographe et un cycliste n'obtiendront donc pas les mêmes chiffres, pas plus qu'un mathématicien féru de calcul intégral ou un adepte de géométrie fractale !



Le dénivelé global entre A et E, égal à -200 m, n'est pas représentatif des efforts que l'athlète doit fournir sur [AE]. Le sportif a choisi de découper son parcours [AE] en plusieurs tronçons : [AB] (montée de dénivelé +300 m), [BC] (descente de dénivelé -200 m), [CD] (montée de dénivelé +400 m) et [DE] (descente de dénivelé -700 m).

© François Jourjon, 2016  
Source : Randonner malin

Dans notre exemple, avec le choix de découpage du parcours par le sportif, on a un dénivelé cumulé positif de 700 m et un dénivelé cumulé négatif de -900 m. On retrouve que le dénivelé global (en mètres) est bien égal à  $700 - 900 = -200$  m. Pour un sportif, ces informations sont souvent plus importantes pour évaluer les efforts à fournir que connaître par exemple la distance précise entre A et E.

## L'expérience de la course masculine

Il fait terriblement chaud en ce dimanche 25 juillet, au moment où les jeunes femmes vont s'élancer : 33°C ! Et il n'y a quasiment pas de vent (2 km/h). Comment aborder une telle course ? Rares sont les athlètes qui se sont autant investies que la jeune mathématicienne dans leur préparation, mais toutes les équipes féminines ont pu profiter d'une expérience grandeur nature. En effet, la veille s'est tenue la course masculine sur route ; les coureuses ont donc pu la suivre en direct, l'analyser et discuter ensuite avec leurs homologues masculins, avant d'affiner leurs stratégies. Le circuit est commun aux deux courses : le départ se fait à Saitama (banlieue nord-est de Tokyo) et l'arrivée sur le circuit automobile du mont Fuji (jadis utilisé pour la Formule 1), avec une boucle d'une centaine de kilomètres en plus pour la course masculine, comprenant la redoutable ascension du mont Fuji (6,5 km à 10,6 % de moyenne).

Ce qui a surpris les observateurs de la course masculine, c'est le nombre d'allers et retours effectués par les coureurs, à cause des conditions météorologiques, pour aller chercher de l'eau et de la glace aux véhicules de ravitaillement. En outre, avec ses 234 km, et en particulier sa longue ascension particulièrement abrupte et brutale du mont Fuji, le circuit proposé aux coureurs était sans aucun doute le plus redoutable, le plus difficile de toute l'histoire des Olympiades modernes.

Il est apparu que le favori, Wout van Aert, s'est trouvé fort isolé à la fin de la course pour mener la chasse aux deux cyclistes qui s'échappaient, dont l'Équatorien Richard Carapaz, qui remportera l'épreuve. Le Belge, privé de ses coéquipiers qui ont tout donné pour « tirer à bout de bras » le peloton en début de course, a été « plombé » par une dizaine de favoris qui le suivaient dans sa roue sans rien faire pour l'aider dans sa charge ; il réussira tout de même à finir deuxième, après des efforts herculéens, mais sans espoir de rattraper Carapaz.

Légitimement, les équipes féminines favorites en ont conclu que, dans ces conditions, il ne faut pas brûler toutes ses allumettes, et arriver sur la fin de la course avec au minimum deux coureuses. Dans un contexte où les grimpeuses peuvent difficilement s'illustrer, faute de montées suffisamment rudes (le dénivelé global, d'environ +1 000 m, n'est pas suffisant pour « larguer » facilement des concurrentes), ces stratégies défensives vont jouer en faveur de celle, offensive, d'Anna Kiesenhofer.

## Sur la forme, une course comme on n'en a jamais vu...

Avant la course proprement dite, toutes les cyclistes paraded, durant dix kilomètres, derrière le véhicule d'un commissaire de course qui règle la vitesse. Le but est autant d'accorder aux athlètes de s'échauffer et de tester leur matériel que de permettre aux nombreux curieux de venir applaudir toutes ces sportives. Le parcours cérémoniel en zone neutre conduit les concurrentes du parc Musashinonomori (à proximité de l'aéroport de Chofu) à Saitama, le point de départ des cent trente-sept kilomètres de la course. Rétrospectivement, les images sont absolument saisissantes durant ces dix kilomètres : les quatre Néerlandaises figurent en tête de peloton, alignées côte à côte sur la ligne de front, vestes rafraîchissantes sur le dos, quand Anna Kiesenhofer, qui n'est jamais très à l'aise au milieu des autres coureuses, est la toute dernière cycliste, isolée derrière la queue du peloton. Pourtant, quelques instants avant d'atteindre la ligne de départ, elle remonte tout le groupe, arrive en tête du peloton, et deux cents mètres après le début officiel de la course, elle place son attaque !



Anna Kiesenhofer (à droite) lance son attaque.

© SWpix, 2021

La «capitaine» sud-africaine Carla Oberholzer lui emboîte le pas, de même que la «capitaine» polonaise Anna Plichta. Cette dernière et Kiesenhofer ont couru dans la même équipe professionnelle par le passé : les deux Anna se connaissent bien. La Polonaise sait qu'il ne faut pas laisser partir l'Autrichienne. L'Israélienne Omer Shapira et la Namibienne Vera Looser, seules représentantes de leurs pays respectifs, voient là l'opportunité d'exister dans cette course et rejoignent l'échappée. Le peloton ne réagit pas ! Pourtant, Plichta a la réputation d'être une cycliste très endurante ; Kiesenhofer et Shapira ne sont pas non plus des inconnues.

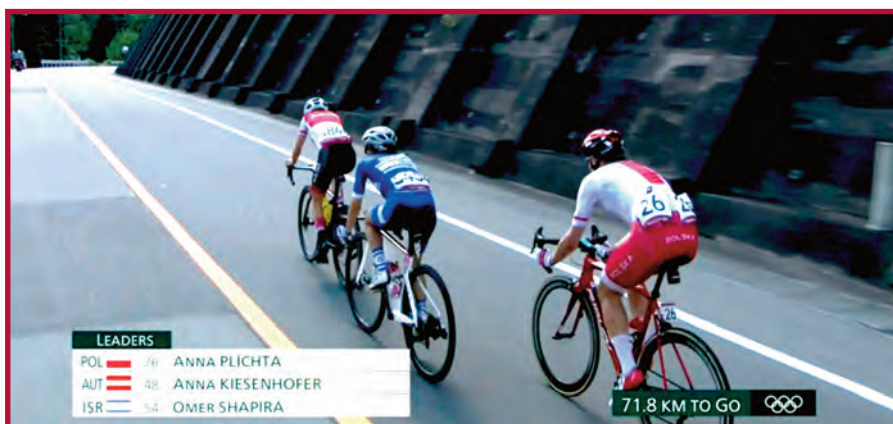
Le quintette va produire des efforts soutenus pour creuser l'écart avec le peloton ; l'avance va atteindre jusqu'à onze minutes, fait rarissime dans le cyclisme féminin à ce niveau. Chacune à son tour, les cinq athlètes de l'échappée prennent la tête durant une trentaine de secondes, entraînant les quatre autres dans sa roue, avant de céder sa place à la suivante et de «glisser» en queue de la file pour reprendre du souffle. Plichta impose un rythme d'enfer, que Kiesenhofer est heureuse d'entretenir. Seule Shapira va parfois «passer son tour» ou rester en tête moins longtemps que les autres, sans doute pour s'économiser.

Car la réalité cycliste est implacable : plus la vitesse est grande, plus la résistance de l'air est forte ; plus la résistance de l'air est forte, plus l'énergie consommée par la cycliste est importante. Une coureuse «protégée» au sein du peloton économise jusqu'à 40 % d'énergie par rapport à une coureuse dans une échappée !

Finalement, c'en sera trop pour Looser, puis pour Oberholzer, qui vont décrocher.

Derrière, les Allemandes et quelques autres coureuses vont tenter, en vain, d'entraîner le peloton. Les Néerlandaises pantouflent à l'arrière, visiblement non concernées, adoptant, tout comme les Italiennes et les Américaines, une stratégie extrêmement défensive qui laisse les autres cyclistes perplexes. Jouant l'attente, le peloton est constamment neutralisé. Les fréquentes annonces des commissaires de course à moto, qui indiquent aux coureuses le temps qui les sépare des cyclistes de l'échappée, n'y feront rien. Après la course masculine de la veille, aucune équipe ne prend l'initiative de «sacrifier» une coureuse pour faire le travail et «tirer» seule le peloton. On assiste à une course psychologique plus que physique.

C'est dans la seule montée significative du parcours, sur la route Doushi (4,3 km à 6,1 % de moyenne), que les « quatre V » vont décider d'attaquer. Malheureusement, la meilleure grimpeuse du peloton, Annemiek van Vleuten, va connaître une défaillance matérielle, puis chuter quelques minutes plus tard. Elle va néanmoins se remettre rapidement en selle, rejoindre le groupe, se mettre en danseuse et lancer une attaque que personne ne sera en mesure de suivre. La cause semble entendue : les yeux rivés sur l'écran du petit moniteur qui lui indique la puissance dégagée par ses énergiques coups de pédale, lancée telle une fusée, la Néerlandaise va rattraper le trio Kiesenhofer–Plichta–Shapira, laisser ses trois concurrentes sur place, et foncer vers la victoire.



Anna Kiesenhofer (en tête, avec le numéro 48), Omer Shapira (portant le numéro 54) et Anna Plichta (numéro 26).

©NHK, 2021

Cela ne va pourtant pas se passer ainsi : en l'absence de communication radio, ne réussissant pas à bien comprendre les informations fournies par les commissaires à moto, étant loin du véhicule de son directeur de course, elle ne va pas réussir à doser son effort. En outre, hantée sans doute par sa terrible chute aux JO de 2016 (et sa récente chute quelques minutes plus tôt), elle va adopter une vitesse particulièrement précautionneuse dans les descentes. De fait, le peloton va finir par la rattraper.



Du côté du trio, à 43 km de l'arrivée, profitant d'une baisse d'inattention de Plichta lors d'un ravitaillement dans la montée du col de Kagosaka (2,2 km à 5,5 % de moyenne), Kiesenhofer va placer une accélération musclée. Shapira s'accroche, mais l'Autrichienne est dans une forme... olympique, et s'échappe irrémédiablement.

Ce n'est que très tardivement que certaines coureuses vont se décider à agir, dont la cycliste française. La chasse commence alors. De son côté, Kiesenhofer semble en difficulté : visiblement, « elle en bave », elle souffre le martyr. Mais la cadence ne faiblit pas : si le peloton se rapproche inexorablement de l'Israélienne et de la Polonaise, qui sont restées soudées, les coureuses ne regagnent quasiment pas de temps sur la vaillante Autrichienne. À moins de sept kilomètres de l'arrivée, le peloton aperçoit Shapira et Plichta. Annemiek van Vleuten trouve alors l'énergie de les dépasser, entraînant le peloton dans son sillage, et regagne du temps sur Kiesenhofer. Mais cette dernière est désormais hors d'atteinte. Se retournant une dernière fois, elle ne voit personne derrière elle et franchit la ligne d'arrivée après trois heures, cinquante-deux minutes et quarante-cinq secondes d'une course physique et acharnée. Elle s'effondre à même le sol et laisse éclater sa joie et son émotion. Pour l'Autriche, c'est la première médaille d'or olympique en cyclisme depuis 1896, où Adolf Schmal avait remporté une épreuve masculine à Athènes lors des Jeux de la première olympiade.

Une minute et quinze secondes plus tard, Annemiek van Vleuten, poursuivie par l'Italienne Elisa Longo Borghini, franchit à son tour la ligne d'arrivée... en lançant les bras au ciel en signe de victoire ! La Néerlandaise, tout comme une partie du peloton, avait tout simplement « oublié » que Kiesenhofer était encore devant. La déception est alors énorme quand elle apprend qu'elle n'a remporté « que » l'argent, et non l'or (et le bronze pour l'Italienne, comme aux précédents JO).

L'incroyable confusion et la performance exceptionnelle de Kiesenhofer font instantanément entrer cette course dans la légende. Les images de la Néerlandaise franchissant la ligne pensant qu'elle a remporté l'épreuve font immédiatement le tour du monde. La victoire surprise de l'Autrichienne, devant toutes les favorites d'une des disciplines les plus prestigieuses et difficiles des Jeux olympiques, fait une publicité monstre pour le cyclisme féminin. Les commentateurs sont unanimes : Anna Kiesenhofer a rendu aux Jeux leur esprit olympique, dans une course où l'absence de communication radio a perturbé



bien des équipes. « *J'ai tout sacrifié pour ce jour, pour être dans les vingt-cinq premières. Remporter la victoire, c'est incroyable!* » savourait la personnalité sportive autrichienne de l'année 2021 peu après sa course.

**É. T.**

Anna Kiesenhofer a remporté l'or olympique en course sur route.

© Reuters / Hartmann



Au sommet du podium, l'Autrichienne laisse exploser sa joie, en présence d'Annemiek van Vleuten (argent, à gauche) et d'Elisa Longo Borghini (bronze, à droite).

© Tim de Waele

### **Pour en savoir (un peu) plus**

Une course à voir et à revoir ! La course en ligne féminine de cyclisme sur route des Jeux olympiques d'été de 2020 peut être intégralement et librement visionnée en ligne sur la Chaîne olympique, à l'adresse suivante :

**<https://olympics.com/en/video/women-s-road-race-cycling-road-tokyo-2020-replays?uxreference=playlist>**

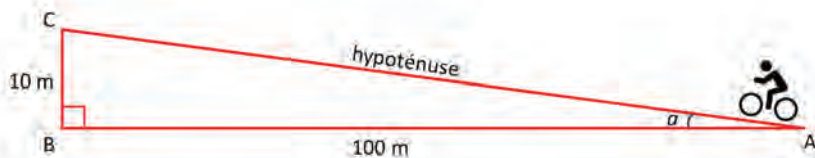
Les commentaires sont assurés par le journaliste sportif néo-zélandais Marc Watson, assisté de la coureuse cycliste australienne Rochelle Gilmore.

Les cinq minutes que dure la conférence de presse (également disponible en ligne) permettent par ailleurs de constater que la jeune femme, indépendante et d'une grande maturité, n'est pas du genre à s'en laisser conter ou à mâcher ses mots : « *J'ai arrêté de croire aux miracles* », « *Ne fais pas trop confiance aux autorités* », « *Ceux qui disent qu'ils savent, en fait, ne savent pas* »... Son analyse est lucide, ses réponses sont claires. Et ses conseils pleins de bon sens ne surprendront pas les « matheux ».

## Ne dérapez plus avec les pourcentages !

Que signifie une « pente à 10 % », comme il en existe tant en France ? En principe, une pente de 10 % signifie que la composante verticale du déplacement correspond à 10 % de la composante horizontale : si on a avancé de cent mètres, on a monté de dix mètres (comme sur le schéma, qui n'est pas à l'échelle). En d'autres termes, la tangente de l'angle  $a$  de la pente vaut  $BC / AB = 10 / 100 = 0,1$  (ce qui correspond à un angle  $a$  de 5,71 degrés).

Cependant, en pratique, notre cycliste dispose de la distance à parcourir, soit l'hypoténuse AC du triangle, et non de la composante horizontale AB. Aussi on peut préférer diviser la composante verticale BC par la composante oblique AC, ce qui correspond en fait au sinus de  $a$ . Avec cette approche, la pente est alors de 10 % si le sinus de notre angle vaut 0,1 (ce qui correspond à un angle  $a$  de 5,74 degrés). On a deux angles différents, selon la notion de « pente » utilisée.



Le triangle ABC est rectangle en B.

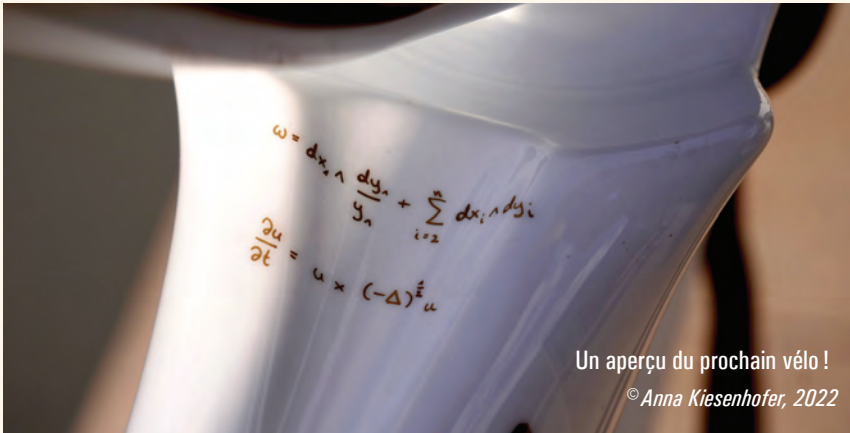
©É.T., 2022

Pour un angle  $a$  « petit », comme dans la course à pied ou le cyclisme, l'écart est infime et les deux notions peuvent être employées indifféremment. Il devient par contre significatif avec une pente importante. Prenez une pente de toit. Si l'élévation est égale à la composante horizontale (en d'autres termes, si  $AB = BC$ ), on obtient une pente de 100 % avec la définition standard. On calcule au passage que  $BC / AB = \tan(a) = 1 = 100\%$ , et  $a = 45$  degrés, comme dans tout triangle rectangle isocèle.

Mais la longueur de l'hypoténuse, nous dit Pythagore, est égale à  $AB \sqrt{2}$  (ou  $AC \sqrt{2}$ ). En conséquence, la pente calculée avec la seconde définition est  $\sin(a) = 1/\sqrt{2}$ , soit environ 0,707, ce qui correspond à une pente de 70,7 % (on retrouve bien entendu  $a = 45$  degré). Pour un même angle  $a$  et des distances AB et BC identiques, l'écart entre les deux « pentes » de 100 % et 70,7 % est devenu tout à fait significatif : il faut savoir quelle notion on utilise pour éviter toute ambiguïté !

## Un vélo vraiment personnalisé

Pour la course olympique, la méticuleuse Anna Kiesenhofer, qui a refusé de se faire sponsoriser, a eu toute liberté pour constituer elle-même le vélo qui lui semblait le plus adapté. Le cadre est un Addict RC30 (Scott, 2020), la selle est de la marque Specialized. Le guidon est un Stembar F1 (Farsports, 2019), muni d'un ordinateur Wahoo qui indique à la cycliste la puissance dégagée par ses coups de pédale. Le groupe de transmission est un Dura-Ace Di2 (Shimano, 2016) dont Anna a modifié certains éléments : pédalier Red onze vitesses (SRAM, 2013) et système de poulie surdimensionné OSPW (CeramicSpeed, 2015) monté sur le dérailleur arrière pour améliorer l'efficacité de la transmission. Les capteurs de puissance, situés dans les pédales, sont des Assomia Duo (Favero Electronics, 2017). Les roues, enfin, sont des Squad 5.8 Silver Line (Xentis, 2013) et les pneumatiques des Grand Prix 5000 Tubeless (Continental, 2019). Pour des raisons de sécurité, tous les cycles en compétition aux Jeux olympiques doivent peser au moins 6,8 kg, et chacun de leurs éléments doivent avoir été approuvés par l'Union cycliste internationale.



En avril dernier, Anna Kiesenhofer a rendu public un élément significatif de son futur vélo. En lettres dorées (comme sa médaille olympique), elle a fait graver sur le cadre deux équations mathématiques. La première est la « *forme normale d'une structure b-symplectique sur une variété 2n-dimensionnelle* ». La seconde est la demi-équation des ondes, que la jeune mathématicienne a étudiée durant sa thèse et ses quatre années de post-doctorat.

Aujourd'hui, Anna s'est reconvertie comme cycliste professionnelle, sans rejoindre une équipe, choisissant de développer les projets sportifs qui lui tiennent à cœur. Elle a donné rendez-vous à ses admirateurs pour les Jeux olympiques de Paris en 2024.





Association pour l'animation mathématique

## DÉCOUVREZ LES MATHS AUTREMENT !

Concours, animations,  
stages, conférences....

---

Depuis plus de 20 ans,  
Animath propose des  
activités pour toutes et  
tous **à partir de la 4e !**

<https://animath.fr>



LA BANQUE  
DU MONDE  
DE L'ÉDUCATION  
DE LA RECHERCHE  
ET DE LA CULTURE

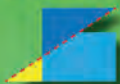
## UNE BANQUE CRÉÉE PAR DES COLLÈGUES, ÇA CHANGE TOUT.

- **L'expertise d'une banque dédiée** aux personnels de l'Éducation nationale, de la Recherche, de la Culture, de l'enseignement public agricole et de l'enseignement privé sous contrat.
- **Une banque coopérative** fondée sur des valeurs de confiance et de proximité.
- **Un service de banque en ligne** pour rester proche malgré la distance.
- **L'expertise de conseillers** qui assurent un suivi personnalisé de vos comptes.
- **Des assurances** conçues pour s'adapter à votre statut et à vos besoins.

**Crédit  Mutuel**  
**Enseignant**

# MORCEAUX CHOISIS DE GÉOMÉTRIE

## GEOMETRIC DISSECTIONS



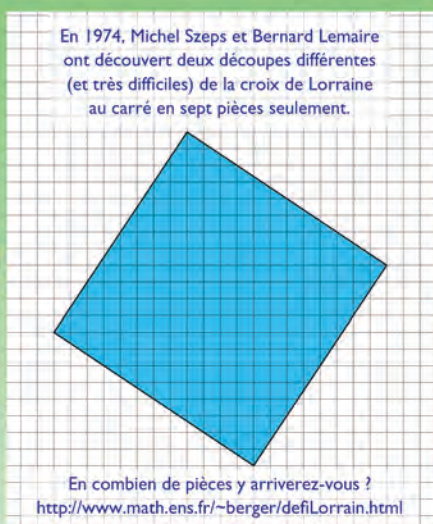
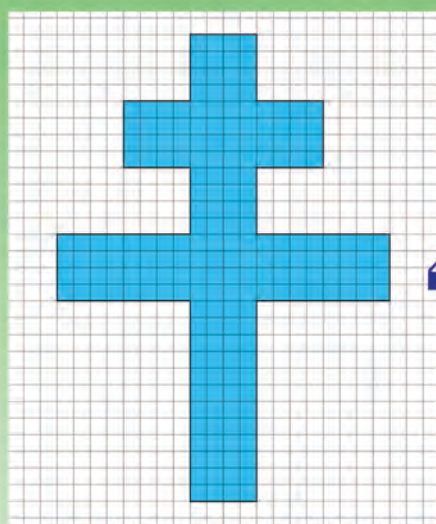
### Du plaisir géométrique à partager

Si deux polygones ont même aire, on peut découper l'un en un nombre fini de plus petits polygones... qui s'emboîtent exactement pour former l'autre, tel un puzzle.

C'est le domaine des *découpes géométriques* (voir article dans cette brochure).

Des défis logiques vous seront proposés sur <http://CultureMath.ENS.fr/découpes>

Suivez notre actualité sur Twitter : @MCDGmaths



### Une entrée privilégiée dans les mathématiques, de 10 à 110 ans

**Créatif** : réalisez d'ingénieuses découpes en un nombre minimal de pièces !

**Ludique** : un papier, un crayon ou un écran, c'est parti...

**Pédagogique** : chaque défi est un puzzle à résoudre !

**Collaboratif** : contribuez à réaliser un catalogue inédit de découpes.

**Scientifique** : un domaine de la géométrie peu exploré ; devenez rapidement expert.e !

**Méthodologique** : tâtonner, raisonner et... maîtriser les techniques.

**Interactif** : commentez les solutions dans un forum, proposez vos découpes !

**Accessible** : totalement gratuit et ouvert à toutes et à tous.

**Convivial** : un logiciel développé par Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas.

**Périodique** : des défis proposés régulièrement par Bernard Lemaire, inventeur de nombreuses découpes.

En lien avec Fatrazie ([www.fatrazie.com](http://www.fatrazie.com)), Kafemath ([www.kafemath.fr](http://www.kafemath.fr)), Playmaths (<https://playmaths.blog4ever.com>) et Mathcurve ([www.mathcurve.com](http://www.mathcurve.com)).



# tangente

l'aventure mathématique

Le seul magazine de culture mathématique  
fête ses 35 ans en 2022. **Abonnez-vous !**



## Bibliothèque Tangente

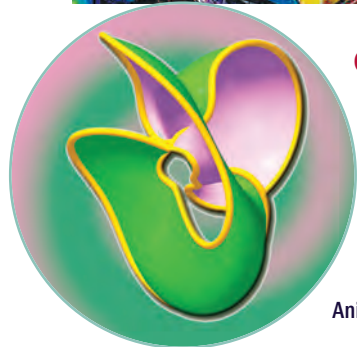
La plus belle collection mathématique au monde



Consultez les numéros de *Tangente* sur  
**[tangente-mag.com](http://tangente-mag.com)**

Achetez les livres et abonnez-vous sur  
**[www.infinimath.com/librairie](http://www.infinimath.com/librairie)**





Cette brochure a été réalisée par le  
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de

Marie José Pestel

Édouard Thomas a assuré la relecture.

Imprimée grâce à  
Animath

Elle réunit les signatures de

Marie José Pestel

Bertrand Hauchecorne

Enka Blanchard, Andreï Rodin, Florentin Waligorski

Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas

Jean-Jacques Dupas

François Lavallou

Blanche Buet

Michel Criton

Denise Demaret - Pranville

Salomé Cojean

Pour sa dix-neuvième parution, *Math express* a fait appel à des auteurs aussi généreux que les réalisateurs de cette brochure sont «décalsés» ! Les conditions incroyables dans lesquelles ils ont réussi à faire parvenir ces pépites mathématiques et géométriques mériteraient à elles seules une autre brochure. Nous les remercions vivement de nous avoir fait confiance et de donner à nos lecteurs, toujours plus nombreux, l'occasion de comprendre l'étendue des formes mathématiques.

---

Visuel de couverture : Noémie Souillard - noe.souillard@gmail.com

Illustration chapitres : «*Impromptu 1*» – Métamorphose des accords – Valentin Afanassiev : [www.afanasieff.ru](http://www.afanasieff.ru)

Illustration fin de chapitres : «*Entrelacs récursif*» – Jean-François Colonna – [www.lactamme.polytechnique.fr](http://www.lactamme.polytechnique.fr)

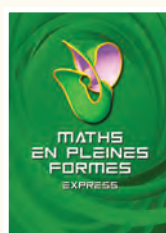
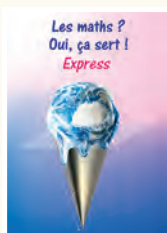
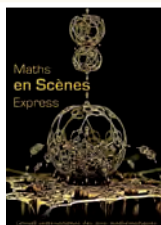
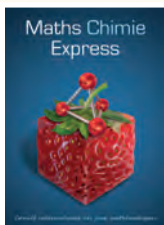
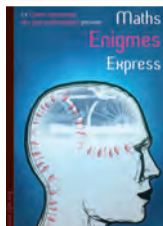
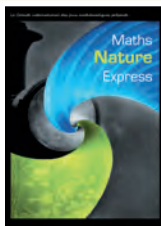
Mise en page : Patrick Arrivetz

Impression : Presses de CIA GRAPHIC – 03 86 90 96 10



# MATHS EXPRESS

## UNE COLLECTION CIJM





**CIJM**  
**INSTITUT HENRI POINCARÉ**  
**11 RUE PIERRE ET MARIE CURIE**  
**75231 PARIS CEDEX 05**

**WWW.CIJM.ORG**