# MATHS JEUX CULTURE EXPRESS

CIJM

# Sommaire

# Préface introductive

Lisa Rougetet

Enseignant-chercheur en histoire des mathématiques
Université de Bretagne Occidentale, Brest

Benjamin Franklin (1706 – 1790) affirmait dans ses *Essais de morale et d'économie politique* : *« Le loisir est du temps pour faire quelque chose d'utile. »* Cette conception occidentale a longtemps influencé notre appréciation des jeux, notamment au XIX^e^ siècle au moment où la fabrication de jeux éducatifs et pédagogiques a explosé. Le jeu avait alors une fonction utilitariste : on pouvait se divertir sans perdre de temps inutilement, en manipulant des concepts historiques, géographiques ou mathématiques.

Ces dernières années, cette conception a beaucoup changé, et bien que l'on retrouve une idéologie officielle, la pratique a énormément évolué : notre société actuelle, une société dite *de loisir*, est la plus ludique depuis le XVIII^e^ siècle et le thème abordé dans cette brochure Maths Express 2019, *Jouons ensemble aux mathématiques* en est un bel exemple !

La fonction de cette préface introductive est double : d'une part, il s'agira de motiver les trois grands thèmes qui ont été retenus pour structurer l'ensemble des différentes contributions de la brochure, à savoir *Jouer pour jouer*, *Jouer pour apprendre* et *Jouer pour faire de la recherche en mathématiques.* Ces thèmes sont en effet le reflet des trois caractéristiques des récréations mathématiques identifiées au cours de l'histoire, notamment depuis le XV^e^ siècle : les récréations mathématiques devaient être curieuses et divertissantes, permettre de diversifier l'enseignement parfois rébarbatif des mathématiques, et découvrir des mathématiques nouvelles. Le Projet Ozanam[1] dans lequel s'inscrit cette brochure vise à mettre en évidence ces caractéristiques, à montrer que les mathématiques récréatives font partie intégrante de notre culture et qu'elles se doivent d'être mises à disposition de toutes et tous.

D'autre part, malgré un cloisonnement de nature éditoriale des différentes contributions, nous souhaiterions montrer que ces trois thèmes sont loin d'être complètement déconnectés ; à travers l'exemple des jeux de type Nim et de leur histoire nous montrerons qu'une même récréation mathématique permet

1 Le Projet Ozanam a pour objectif de valoriser l'histoire et le développement des récréations mathématiques, notamment au travers du personnage de Jacques Ozanam (1640 – 1718), mathématicien et professeur de mathématiques pouvant également être considéré comme un des premiers « vulgarisateurs » de mathématiques. Le projet est porté par l'association Plaisir Maths, le CIJM sur le 20^e^ salon de 2019, le Centre François Viète (centre de recherches en histoire des sciences et des techniques) et l'Université de Bretagne Occidentale.

à la fois de s'adonner à un plaisir ludique, mais aussi de découvrir des nombres qui n'avaient jamais été pensés auparavant, tout en s'inscrivant dans une dimension historique forte. Cet exemple servira en quelque sorte de grille de lecture de la brochure et montrera comment les cloisonnements peuvent en fait être évités.

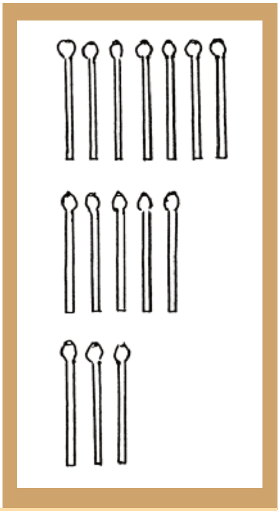
NIM, A GAME WITH A COMPLETE MATHEMATICAL THEORY.

BY CHARLES L. BOUTON.

Titre de l'article de Charles L. Bouton, paru en 1901 dans *The Annals of Mathematics*.

L'appellation jeu de Nim date de 1901, on la trouve pour la première fois dans un article rédigé par le mathématicien de Harvard Charles Leonard Bouton, publié dans *The Annals of Mathematics*. L'article de Bouton pose en quelque sorte les jalons de la théorie mathématique des jeux qu'on appellera *jeux combinatoires*[2] à partir des années 1970. Le jeu de Nim présenté par Bouton se joue de la manière suivante : on dispose trois rangées d'objets sur une table, par exemple des allumettes comme le montre l'illustration ci-contre, chacune disposant d'un nombre quelconque d'allumettes. À tour de rôle, les deux joueurs choisissent une seule rangée et retirent un nombre quelconque d'allumettes : une, deux… toute la rangée si voulu. Au moins une allumette doit être retirée à chaque coup. Le joueur qui prend la (ou les) dernière (s) allumette (s) remporte la victoire.

On dit alors que le jeu est joué en *version normale* (et dans le cas où le joueur qui prend la dernière allumette perd, le jeu est joué en *version misère*).



*Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusements.*
Harry Edwin Eiss (1988), Greenwood Press, Inc.

2 Jeux qui se jouent à deux joueurs, alternativement, sans hasard et à information complète/parfaite (pas de cartes cachées par exemple). » Le nombre de coups dans une partie est fini et le gagnant est la plupart du temps déterminé par le dernier coup.

## Les clés de la victoire

Après quelques parties, les joueurs se rendent compte assez rapidement qu'il existe des positions qui leur sont favorables, et que s'ils les laissent à leur adversaire, ce dernier ne pourra rien faire pour empêcher la victoire. Par exemple, laisser la position 1 – 1 ou 2 – 2 ou $n$ – $n$ à son adversaire assure la victoire (à condition de se ramener à chaque coup à une position où les deux rangées contiennent le même nombre d'allumettes). De manière générale – et c'est la théorie exposée par Bouton dans son article de 1901 – pour identifier si une position est *gagnante*[3] ou non, il faut d'abord traduire le nombre d'allumettes contenues dans chaque rangée en binaire. Dans notre exemple, la configuration 7 – 5 – 3 devient 111 – 101 – 011 (nous gardons volontairement le 0 à gauche dans l'écriture binaire de 3 pour avoir le même nombre de chiffres dans les trois nombres). Plaçons ensuite ces nombres en colonne, en alignant bien les unités entre elles, pour effectuer ce que nous appelons aujourd'hui la Nim - somme : il s'agit d'additionner chaque colonne en base 2 et sans retenue (c'est-à-dire que 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1 et 0 + 0 = 0).

On obtient alors :

$$\begin{array}{c} 1\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,1 \end{array}$$

La Nim - somme de cette position n'étant pas nulle (elle le serait si la somme de chacune des colonnes était égale à 0), cela signifie que la position est gagnante et que le prochain joueur peut jouer un coup qui lui donnera l'avantage sur son adversaire[4]. C'est un des premiers résultats de la théorie des jeux combinatoires, que l'on pourrait énoncer ainsi : une position de Nim est gagnante si et seulement si la Nim - somme des nombres d'allumettes de chaque rangée est non nulle.

Après Bouton, d'autres mathématiciens s'intéressent au jeu de Nim et à ses variantes. Des résultats plus généraux concernant des classes de jeux, et non plus des jeux en particulier, sont énoncés dans les années 1930 par, entre autres, Emanuel Lasker, Roland Sprague et Patrick Grundy, permettant à la théorie des jeux combinatoires de s'ancrer petit à petit dans la recherche en mathématiques, bien que cette intégration se soit faite difficilement.

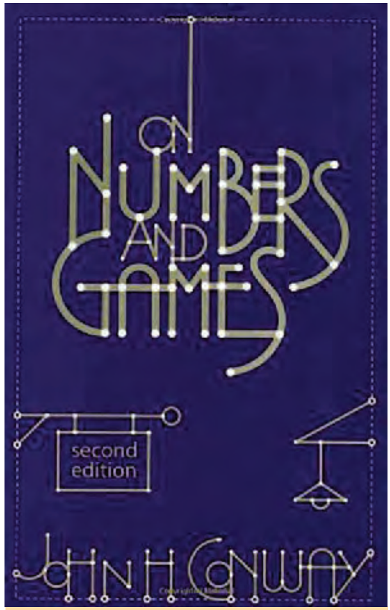
En 1976, le mathématicien pluridisciplinaire John Horton Conway publie un ouvrage, *On Numbers and Games* (AK Peters - CRC Press), dans lequel il présente sa théorie des nombres surréels et montre l'analogie entre les nombres et les jeux.

3 Une position est dite *gagnante* si le prochain joueur à jouer dispose d'une stratégie gagnante pouvant le mener à la victoire.

4 Par exemple, retirer une allumette de la rangée qui en contient sept pour obtenir la position 6 - 5 - 3, soit en binaire 110 - 101 - 011, qui donne une Nim-somme nulle. Retirer une allumette de la rangée qui en contient cinq ou de celle qui en contient trois fonctionne également.

Les nombres surréels n'avaient alors jusqu'à présent jamais été rencontrés dans l'histoire des mathématiques, et ouvrent aujourd'hui la recherche vers d'autres voies d'exploration[5] en mathématiques et en informatique.

Le thème *Jouer pour faire de la recherche en mathématiques* prend ici tout son sens.



**Première de couverture de la seconde édition de l'ouvrage *On Numbers and Games* de John Conway sur les nombres surréels.**

Bien évidemment, ce n'est pas en 1901 qu'un jeu de type Nim (dont les mécanismes ludiques sont similaires) est présenté pour la première fois : on trouve déjà chez les auteurs d'ouvrages de récréations mathématiques à partir des XVI$^{e}$–XVII$^{e}$ siècles des problèmes arithmétiques qu'on qualifierait aujourd'hui de *jeux de Nim à une pile*.

La première source remonte à Luca Pacioli, mathématicien italien de la Renaissance, qui propose dans son manuscrit de 1508, le *De Viribus Quantitatis*, un problème consistant à additionner à tour de rôle (il y a deux joueurs) des nombres compris entre 1 et 6, le gagnant étant celui qui atteint le nombre 30 le premier[6]. Cette version additive se retrouve ensuite dans quasiment tous les ouvrages de récréations mathématiques à partir du XVII$^{e}$ siècle : les *Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres* de Claude Gaspard Bachet (1612), les *Récréations mathématiques et physiques* de Jacques Ozanam (1694), ainsi que dans ses multiples rééditions. À cette époque, le rôle des récréations mathématiques était essentiellement de piquer la curiosité du lecteur en lui proposant des énoncés accrocheurs, mais également de montrer *« qu'on ne doit point mépriser ces petites subtilités, qui aiguisent l'esprit et habilitent l'homme à des plus grandes choses »* (Bachet, 1612, préface).

Jacques Ozanam précise que ces récréations sont destinées à tout le monde : *« […] les jeux d'esprit sont de toutes les saisons et de tous les âges ; ils instruisent les Jeunes, ils divertissent les Vieux, ils conviennent aux Riches, et ne sont pas au-dessus de la portée des Pauvres : les deux sexes peuvent s'en accommoder sans choquer la bienséance. »* (Ozanam, 1694, Préface). On voit parfaitement ici les dimensions ludique et pédagogique revendiquées par les auteurs, dans la double optique de *Jouer pour jouer*, mais aussi de *Jouer pour apprendre*.

5 Pour une introduction aux nombres surréels de Conway, voir *Des jeux aux nombres surréels*. Lisa Rougetet, Images des mathématiques, CNRS, 2015.*URL : https://images.math.cnrs.fr/Des-jeux-aux-nombres-surreels*

6 Par exemple, le joueur A dit 3, le joueur B dit 5, ce qui fait un total de 8. Le joueur A choisit à présent 4, ce qui donne un total de 12, puis le joueur B choisit 1, qui amène à 13, etc. jusqu'à ce que l'un des joueurs arrive à 30.


Portrait de Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581 – 1638).
*Source : Institut de France*

Frontispice de l'ouvrage de Bachet, imprimé en 1612 : *Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres.*

*Source : Nabu Press*


PROBLEMES
PLAISANS ET
delectables, qui se font par
les nombres:
*Partie recueillis de divers autheurs, & inventez de nouveau avec leur demonstration,*
PAR CLAVDE GASPAR BACHET S'. DE MEZIRIAC.
*Tres-utiles pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se servent d'Arithmetique.*
A LYON.
Chez Pierre Rigaud, en rue Merciere, au coing de rue Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune.
M. DC XII.
*avec Privilege de l'Autheur.*

À partir des années 1940 – 1950 sont conçues les premières machines électromécaniques destinées à défier l'humain au jeu de Nim, dans une configuration avec quatre rangées d'objets, chacune pouvant en contenir entre un et sept. Le Nimatron (fabriqué en 1940) et le Nimrod (fabriqué en 1951), machines aux dimensions considérables pesant plus d'une tonne, exposées au cours de foires ou de salons industriels, ont disputé et remporté de nombreuses parties face aux visiteurs fascinés par les ampoules clignotantes qui reflétaient, soi-disant, l'activité pensante de la machine.

Une jeune femme jouant contre le Nimatron.

*Source : The Nimatron. Condon Edward (1942), The American Mathematical Monthly*

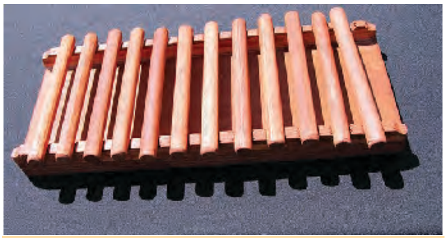

Le Nimrod exposé lors d'un salon industriel à Berlin en Octobre 1951.
*© Bert Sass, Landesarchiv Berlin*

Ensuite, à la fin des années 1960, des machines purement mécaniques – bien moins volumineuses et onéreuses à construire – sont commercialisées pour le grand public, qui peut tester ses compétences, par exemple, face à

Dr. Nim grâce aux différentes variantes du jeu de Nim à une pile qu'il propose[7]. Avec l'arrivée des ordinateurs personnels dans les années 1970, le jeu de Nim sera développé sous la forme de programmes, encore connus aujourd'hui de nos étudiants en informatique dans leurs premières activités de programmation.


Plateau de jeu du Dr. Nim, commercialisé par E.S.R. Inc. en 1966.
*Photographie : L. Rougetet*

Enfin, sans qu'il ne soit explicitement mentionné de la sorte, le jeu de Nim a su trouver sa place dans le célèbre jeu télévisé français Fort Boyard (Adventure Line Productions), diffusé depuis 1990, comme l'un des duels – celui des bâtonnets – contre les maîtres du temps dans la salle du Conseil.



Jeu des bâtonnets, ici avec 12 bâtonnets initiaux.
© *recreanimes.fr*

*L'année dernière à Marienbad*, film d'Alain Resnais.
*Source : www.labyrinthiques.fr et Argos Film*

Il apparaît également de façon récurrente dans le film d'Alain Resnais, *l'Année dernière à Marienbad*, sorti en 1961, et sera d'ailleurs connu pendant un temps sous le nom de *jeu de Marienbad* avec la configuration 7–5–3–1 (jouée en version misère).

Voilà bien des exemples qui montrent comment le jeu de Nim est pleinement ancré dans notre culture ludique, et qu'il permet finalement bien – sans aucune considération pour le système binaire – de *Jouer pour jouer*.

Bonne lecture !

***L. R.***

7 Par exemple, Dr. Nim peut jouer une partie dans laquelle il y a initialement quinze billes, chacun des joueurs (le joueur humain et Dr. Nim) peut en retirer une, deux ou trois à chaque tour et le dernier joueur à prendre la dernière bille a perdu.

# Exemples historiques de hasard apprivoisé

Ulrich Schädler

Directeur du Musée Suisse du Jeu

Les jeux et les mathématiques ont des liens naturels qui les lient depuis leurs origines. Voici quelques exemples des derniers deux mille ans, illustrés par des exemplaires conservés au Musée Suisse du Jeu (11 rue du château, 1814 La Tour-de-Peilz, Suisse).

## L'Antiquité et les osselets : quand l'empereur romain s'amuse

La seule règle de jeu de l'Antiquité qui nous a été transmise est celle d'un divertissement peut-être inventé par l'empereur romain Auguste (–63, +14). Dans une lettre à son beau-fils et successeur Tibère, il écrit en effet : *« Durant le repas, nous avons joué comme des vieillards ; soit hier soit aujourd'hui ; on jetait les osselets et, chaque fois que l'un d'entre nous amenait le coup du chien ou le six, il ajoutait aux enjeux un denier par osselet, et celui qui faisait le coup de Vénus ramassait tout. »*

**Osselets de différentes époques.**

*© Musée Suisse du Jeu*

En quoi consiste ce jeu ? D'abord, Auguste et ses comparses jouent avec des osselets, appelés aussi *astragales*, du nom d'un os qui se trouve dans la cheville des bovins, ovins et caprins. Un osselet se prête bien aux jeux de dés car il tombe toujours sur l'une de ses quatre faces : le côté large convexe, le côté large opposé concave, le côté étroit relativement plat (appelé *chien*), ou le côté étroit tortueux. À la différence du dé cubique (à six faces), l'osselet tombe plus souvent sur l'un des côtés larges et rarement sur les côtés étroits…

Les Grecs associaient aux quatre faces des valeurs numériques, selon le principe de l'équilibre des opposés qui s'additionnent pour obtenir le chiffre 7 : les faces étroites valent 1 et 6, les faces larges 3 et 4. Les valeurs 2 et 5 sont absentes. Dans le jeu d'Auguste, on ne compte pas les valeurs : on doit payer une pièce d'argent pour chaque face étroite. Ainsi, on constitue une caisse, remportée par le joueur qui lance le *coup de Venus* (coup de valeur 1–3–4–6, tel que les quatre osselets montrent les quatre faces différentes).

Peu avant l'an 1000, Wibold, évêque de Cambrai de 967 à 972, inventait son *ludus clericalis*, un jeu consacré à l'éducation religieuse, dont la description énumère de manière systématique, pour la première fois semble-t-il, les cinquante-six combinaisons possibles en jouant avec trois dés. Dans son jeu, chaque combinaison est attribuée à une vertu chrétienne. Le but du jeu est d'obtenir des couples de vertus qui, ensemble, totalisent vingt et un points. Cette somme résulte de l'addition des résultats opposés : le résultat le plus faible, 3 (1–1–1, « charité »), et le résultat le plus élevé, 18 (6–6–6, « humilité »), le deuxième plus faible, 4 (1–1–2, « foi »), et le deuxième plus élevé, 17 (5–6–6, « tempérance »), etc. Le couple (3, 18), constitué de deux valeurs qui ne se produisent que d'une seule manière, est plus difficile à réaliser que, par exemple, (10, 11), qui peut être réalisé à partir de six combinaisons.

Trois nombres égaux ne peuvent être obtenus que d'une seule façon. Pour un double avec un troisième nombre différent, il y a trois manières possibles. Trois nombres distincts peuvent tomber de six façons différentes.

Cependant, les permutations n'ont pas joué un rôle pour Wibold : les tirages

1–3–7,

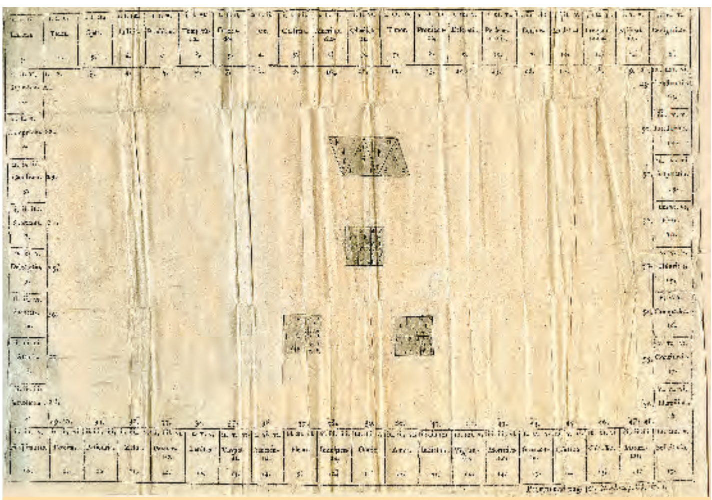
1–7–3,

3–1–7,

3–7–1,

7–1–3
et
7–3–1

sont considérés comme identiques.



**Plan pour le « jeu clérical » de Wibold de Cambrai**
**(*Chronicon Atrebatense et Cameracense*, Baudri de Thérouane, 1615).**

**Joueurs de dés.**

*© Bibliothèque de l'Escorial (Libro de los juegos, Alphonse X, 1284)*

Les différentes fréquences de combinaisons et de permutations sont habilement converties en règles de jeu de dés, que le roi espagnol Alfonso X de Castille, dit Alphonse le Sage (1221–1284), nous a transmises pour la première fois dans son *Livre des jeux* de 1284. La base mathématique de ce type de jeu de dés avait été expliquée en détail quelques années auparavant par l'auteur français inconnu du poème *La Vieille* (ou *De Vetula*). La description par Alfonso du jeu de dés Guirguiesca montre de quoi il s'agit :

*« Si le joueur lance un double 6, ou 6 et 5, ou 2 et 1, il est "azar". Et il gagnera un pari dans la valeur qu'ils avaient précédemment convenue entre eux. Mais s'il ne lance pas un "azar", mais quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ou dix points dans une combinaison quelconque, c'est la "chance" pour l'autre joueur. Et celui-ci misera autant qu'il le voudra. Et si le joueur qui lance les dés obtient à nouveau la même "chance", c'est ce qu'on appelle "rencontre" et il gagne le pari, qu'il ait annoncé le résultat à l'avance ou qu'il restait silencieux. Mais s'il n'obtient pas une "rencontre", mais un "azar", il perd tout. Et s'il ne lance ni une "rencontre" ni un "azar", mais n'importe quel autre nombre, alors il prend cela comme sa "chance" et lance maintenant les dés, jusqu'à ce que sa "chance" ou celle de l'autre joueur tombe. S'il lance la sienne, il gagne, s'il lance celle de l'autre, il perd. »*

Vous pouvez miser autant que vous le souhaitez pour votre point de chance, ce qui permet d'adapter votre mise selon la probabilité avec laquelle un certain résultat peut être attendu. Les chances sont bien meilleures pour un 7 (avec six possibilités) que pour un 4 (trois possibilités seulement).

Ce divertissement a conduit au jeu britannique Hazard pour devenir, au XVIIIe siècle, le Craps, très populaire dans nos casinos.

# Une chouette, un avare, des dés, une cloche et un cheval blanc

Provenant d'Italie, où il se nomme Pela il chiù («Tonds le hibou»), un jeu est arrivé en France au XVII^e siècle et a connu un grand succès avec des éditions en Allemagne, aux Pays-Bas et ailleurs. On utilise des jetons et trois dés, dont les combinaisons sont inscrites sur les cercles concentriques formant le plateau. Pour chaque combinaison, des lettres indiquent ce que le joueur doit faire : la lettre P ordonne de payer un, deux ou trois jetons, la lettre T permet en revanche d'en gagner. Avec 18, on tombe sur la chouette et on remporte «Tout», mais on peut aussi se contenter de «Moitié» voire de «Rien».

Jeu de la chouette (Jan Hendriksen, vers 1820).
*© Musée Suisse du Jeu*

Le jeu suit le même principe que les britanniques Put and Take (joué avec une toupie) ou le Long Lawrence (joué avec un dé long).

En Allemagne, entre le XVIII^e et le XX^e siècle, on pratiquait une variante en utilisant un dé multiface : douze faces contiennent des numéros, six des abréviations indiquant les actions : NH, NG, ND, LS, SZ et TA. Au début de la partie, les joueurs nourrissent une caisse commune, puis suivent les instructions sur les faces : Nimm Halb («prends la moitié»), Nimm Ganz («prends tout»), Nimm Deins («prends ta mise»), Lass Stehen («ne gagne ni ne paie pas»), Setze Zu («fais une nouvelle mise»), Tritt Aus («retire-toi») ou encore Trink Aus («finis ton verre») !


Dé multiface, serpentin (Allemagne, XIX^e siècle).
*© Musée Suisse du Jeu*

Un autre jeu de dés connu surtout en Allemagne depuis le XVIe siècle, est aussi basé sur les combinaisons et donne un rôle spécifique au 7. Sur le plateau de jeu sont indiqués les numéros de 3 à 11, avec le 7 (l'Avare) au centre. Chaque joueur lance à tour de rôle deux dés et additionne les chiffres obtenus. Si le résultat correspond à une case vide sur le plateau, il doit déposer un de ses jetons sur cette case. Si par contre la case est déjà occupée par des jetons, il gagne ces derniers. Si le chiffre obtenu est le 7, le joueur doit mettre un jeton sur la case centrale de l'Avare. Sur la case 7, on ne ramasse rien : l'Avare ne donne pas. Seulement dans le cas où un joueur ferait un 2 ou un 12, il ramasse tous les jetons qui se trouvent sur le plateau, y compris ceux sur la case de l'Avare. Le jeu repose sur le fait que, en jouant avec deux dés, le 7 arrive beaucoup plus souvent que le 2 ou le 12.

Plateau du jeu de l'Avare (Aloys Bestelmeier, Nuremberg, vers 1800).
*© Musée Suisse du Jeu*

Un des jeux les plus populaires tout au long du XIXe siècle et pendant la première moitié du XXe était Cloche et Marteau, parfois aussi appelé le Jeu du Cheval Blanc. Au début de la partie, cinq cartes sont mises aux enchères aux joueurs : la cloche, le marteau, la cloche et le marteau, le cheval blanc et l'auberge, la douane. Ensuite, les joueurs lancent les dés à tour de rôle. Il y a huit dés cubiques spéciaux, chacun marqué d'un seul côté (six dés montrent chacun un des nombres de 1 à 6, un dé porte un marteau, un autre une cloche). Selon le résultat, le lanceur doit payer des jetons au détenteur d'une carte ou reçoit des jetons de la caisse ou des joueurs. Ainsi, ayant lancé le marteau et réalisé un total de cinq points sur les dés, le joueur doit payer cinq jetons au propriétaire de la carte du marteau. Sortir huit faces blanches, par contre, l'oblige à payer un jeton au propriétaire du cheval blanc. Gagne le dernier joueur qui possède encore des jetons à la fin de la partie.


Jeu du Cheval Blanc (Léon Saussine, Paris, 1880 – 1900).



Ainsi, de nombreux jeux de société permettent d'apprivoiser le hasard, d'appréhender des méthodes de dénombrement ou de se familiariser avec le calcul de probabilités. Les cartes de Cloche et Marteau possèdent-elles les mêmes probabilités de l'emporter ? Combien un joueur devrait-il payer pour acheter une carte afin qu'elle lui apporte, en moyenne, plus que ce qu'il a payé ?

Autant de questions qui ouvrent la porte sur le monde des mathématiques.

***U. S.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***Jeux et Jouets gréco-romains.*** Véronique Dasen et Ulrich Schädler (éditeurs), *Archéothéma* 31, novembre – décembre 2013.

***Créateurs de chances. Les loteries en Europe***. Ulrich Schädler (éditeur), Musée Suisse du Jeu, 2012.

***Le noble jeu de l'oie en France de 1640 à 1950***. Henry-René D'Allemagne, Grund, 1950.

# La représentation des femmes dans le jeu de société

Virginie Tacq

Game designeuse
Fondatrice de Ludilab

Le jeu de société contemporain connaît ces dernières années une légitimation croissante en tant qu'objet culturel, dans l'espace européen francophone. L'année 2017 pose un jalon dans cette reconnaissance par la création de la Société des auteurs de jeux (**www.societedesauteursdejeux.fr**) ainsi que par la parution de l'essai de Michel Lalet *Auteur de jeux de société : un art à part entière* (Ilinx, 2018). Les protagonistes posent les mêmes objectifs : la promotion ou la reconnaissance du jeu en tant qu'objet culturel, c'est-à-dire qui véhicule des éléments de la culture dont il est issu.

Parmi le grand nombre de champs différents qui peuvent être explorés, intéressons-nous ici à celui du genre, et plus particulièrement du genre féminin. Dans cet article, le genre se distingue du sexe par sa composante principale qui serait sociale, contrairement au sexe, qui serait biologique. Il sera l'ensemble des éléments non biologiques caractérisant différemment les femmes et les hommes. Sous cet angle, que peut-on dire des représentations qui sont faites des personnages de genre féminin dans les jeux de société ?

Ces représentations peuvent être abordées sous plusieurs aspects : dans les visuels, dans la mécanique du jeu (quel pouvoir est accordé à qui ?), mais aussi dans les règles ou encore dans les thématiques choisies. Concentrons-nous sur les éléments visuels, qui se retrouvent sur la boîte et dans le jeu lui-même, sous forme des personnages par exemple. Déjà, les femmes sont-elles représentées dans les jeux ? Ensuite, comment ces femmes sont-elles représentées ?

## Premier constat : peu de personnages féminins à l'honneur

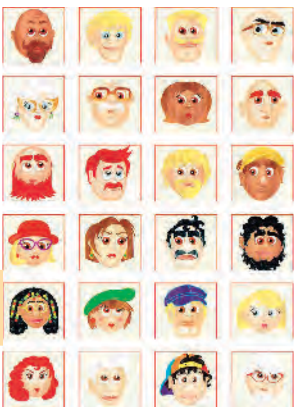
Concernant la couverture des boîtes de jeux, une étude menée en 2017 nous apprend que sur l'échantillon analysé dix couvertures comprennent des personnages qui peuvent être identifiés comme féminins contre onze boîtes comprenant des personnages identifiés comme masculins. Elle montre également que, sur l'ensemble des personnages féminins, 52 % sont dessinés dans un rôle plutôt passif, contre 40 % des personnages masculins.

Parmi les jeux qui comprennent des personnages humains ou anthropomorphiques dont le genre peut être identifié, on distingue quatre types de représentations quantitatives des personnages féminins : l'absence, la mixité, la parité, la non-mixité féminine.

*L'absence* : c'est le cas dans des jeux dont tous les personnages sont masculins, aucun n'étant donc féminin. C'est le cas du jeu Kingdomino (Blue Orange, 2016), de l'auteur français Bruno Cathala, qui a remporté en 2017 le prestigieux prix du Spiel Des Jahres (« jeu de l'année » en allemand). Les joueurs et joueuses incarnent chacun et chacune un roi qui veut étendre son royaume, sans possibilité de choisir un autre personnage.


Kingdomino, de Bruno Cathala.and amusements.
*© Blue Orange, 2016*

*La mixité* : c'est le mélange des personnes de genres différents au sein d'un groupe. Il s'agit ici de trouver au sein du jeu des personnages féminins et masculins, dans des proportions non fixées. Le très connu Qui est-ce ? (Theo et Ora Coster, 1979), aujourd'hui édité par le géant Hasbro, en est un bon exemple. Dans les personnages habituels, nous retrouvons seize hommes pour huit femmes. Outre une plus faible représentation du genre féminin, ce déséquilibre pose un problème dans le jeu lui-même. En effet, il s'agit de deviner le personnage choisi par son adversaire en posant des questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Le jeu commence très souvent par « C'est une fille ? » ou « C'est un garçon ? », ce qui donne un désavantage direct à la personne qui aurait choisi une fille, vu qu'il y en a deux fois moins.



Qui est-ce ? de Theo et Ora Coster.
*© Hasbro Gaming, 2011*

*La parité* : elle désigne un équilibre entre les genres, représentés chacun pour moitié. Nous voyons apparaître des jeux dont le nombre de personnages féminins équivaut au nombre de personnages masculins. C'est le cas du jeu Baf, de Rustan et Eli Hakansson (Gigamic, 2017), dans lequel il faut parcourir un donjon et vaincre des monstres en leur mettant des baffes. Chaque rôle est représenté sur une carte, dont l'une face propose le pendant féminin du rôle et l'autre face le pendant masculin, comme la voleuse/le voleur.

**Baf, de Rustan et Eli Hakansson.**
*© Gigamic, 2017*

*La non-mixité féminine* : certains jeux, assez rares, proposent de n'incarner que des personnages féminins. Asmadi Games nous en fournit un exemple avec One Deck Dungeon de Chris Cieslik (2017). Le jeu, lui aussi sur une thématique d'aventures dans un donjon, ne permet donc d'incarner que des femmes.

**Baf, de Rustan et Eli Hakansson.**
*© Gigamic, 2017*

Même si l'on ne dispose malheureusement pas encore de chiffres précis concernant la répartition de ces différents types de représentations dans un échantillon de jeux significatif, il semble tout de même que l'absence de personnages féminins et la mixité sont les cas les plus récurrents.

## Deuxième constat : les stéréotypes dominent encore

Après la question de la quantité de femmes présentes, une seconde question est donc celle de la qualité des représentations : comment ces femmes sont-elles représentées ? L'enjeu de cette représentation est de proposer une diversité de personnages, qui refléteront la richesse de la société et permettront éventuellement à un large public de s'y identifier.

Pourtant, très souvent, ces représentations sont stéréotypées, au sens qu'elles donnent à voir des images figées et simplifiées, qui sont créées en généralisant le comportement de quelques individus à propos d'un groupe entier. Cela a comme résultat une vision parfois très étriquée de la réalité.

Dans le jeu Secrets, de Bruno Faidutti et Eric Lang (Repos Production, 2017), il existe deux sortes de représentations féminines, illustrant deux stéréotypes distincts. La première, majoritaire, est celle des jeunes femmes, toutes dessinées dans un style pin-up. Ces représentations en jupe courte ou fendue de la journaliste, de la scientifique, de l'assassine, sont sexualisées et vouées à être offertes au regard masculin. La seconde consiste en la représentation non sexualisée du personnage de la diplomate, femme plus âgée, plus épaisse que les autres personnages féminins. Cela renvoie indirectement à l'association entre sexualité, beauté et jeunesse, de laquelle les femmes plus âgées et moins minces seraient exclues. Elles n'auraient dès lors plus de raison d'être sexualisées. Sa tenue vestimentaire est également plus couvrante, avec une robe jusqu'en dessous du genou.


Secrets, de Bruno Faidutti et Eric Lang.
*© Repos Production, 2017*

Il existe bien d'autres expressions de ces stéréotypes, beaucoup plus marquées. Le jeu Océanos, d'Antoine Bauza, édité par Iello en 2016, nous en apporte par un de ses personnages une illustration complète. Nommé Daisy, ce personnage prend place dans son sous-marin. Ce vaisseau, similaire à celui des autres personnages, répond complètement à des stéréotypes associées aux femmes : complètement rose, en forme de licorne, il arbore un hublot en forme de cœur et un rouge à lèvres géant. Daisy, quant à elle, habillée d'une robe rose et pourvue d'un large décolleté, se maquille… Les autres personnages féminins du jeu connaissent également une sexualisation comparable, par le biais d'un décolleté similaire.


Océanos, d'Antoine Bauza.
*© Iello, 2016*

## Une grille de lecture pour alimenter la réflexion

Au contraire, certains jeux tirent leur « épingle du jeu » et tentent de briser les stéréotypes associés à la représentation des femmes dans l'univers du jeu. Dans One Deck Dungeon, ainsi que dans Baf, les personnages féminins sont dessinés dans des attitudes évoquant la force, la robustesse, la vigilance. Leurs postures pourraient être celles de personnages masculins dans le même rôle. Leurs tenues vestimentaires sont diversifiées et correspondent à leurs rôles et à leurs exigences de praticité ou de protection.

Il est certain qu'en cherchant, il est toujours possible de trouver des exemples alimentant l'un ou l'autre type de représentations. Les jeux cités ici l'ont été à titre illustratif, afin de mettre en évidence des traitements du genre féminin actuellement en vigueur dans l'industrie du jeu de société. Si vous êtes sensible à l'importance éducative d'une meilleure parité dans tous les domaines, ouvrez les yeux lors de votre prochaine commande au père Noël !

Encore une fois, il ne s'agit pas de supprimer ou censurer les illustrations qui auraient une dimension stéréotypée, mais bien de proposer une première grille de lecture sur les représentations féminines dans les jeux. Cette sensibilisation permettra, nous l'espérons, un regard plus éclairé sur cet objet culturel si particulier qu'est le jeu.

***V. T.***

### Pour en savoir (un peu) plus :

***La diversité en boîtes.*** Grégory De Backer, Haute École de Bruxelles - Brabant - IESSID, Bruxelles ( Belgique ), 2018.

***Auteur de jeux de société : un art à part entière.*** Michel Lalet, Ilinx, 2018.

***Mathématiques récréatives, éclairages historiques et épistémologiques.***
Sous la direction de Nathalie Chevalarias, Michèle Gandit, Marcel Morales et Dominique Tournès, EDP Sciences–UGA Éditions, 2019.

# Les jeux mathématiques de société

Dans le monde ludique de notre société contemporaine, on assiste avec joie à une impressionnante explosion de jeux que l'on peut classer sans hésiter dans la catégorie des jeux mathématiques. Faisons un petit tour dans un magasin. On peut ainsi remarquer qu'en plus des jeux de plateau traditionnels comme les Échecs, les Dames, le Go…, on trouve également toutes les déclinaisons possibles autour du très classique Morpion, du Tic-tac-toe plan au Tic-tac-toe en 3D, et jusqu'à la version astucieuse de Gobblet Gobblers (Blue Orange, 2001), qui propose trois tailles pour chaque pièce afin de permettre de « cacher » la plus petite. Il en va de même pour d'autres jeux d'alignement : Puissance 4 et Puissance 5, Quarto (Gigamic, 2007), Pentago (Mindtwister, 2006), Crescendo (Topi Games, 2016), Qwirkle (Mindware et Iello, 2006). Les jeux de pavage ne sont pas en reste, de Blocus (Mattel Games, 2013) à Azul (Plan B Games, 2018), de même que les jeux de logique comme Mastermind, Set ou Deblock ! (Asmodée, 2017). Tous ces jeux de nature mathématique ont une présentation non genrée : les pièces ne sont pas figuratives, elles sont de matériaux divers et variés et le graphisme est uniquement basé sur les formes et les couleurs. *A priori*, les jeux matématiques seraient donc hors d'atteinte de toute représentation stéréotypée du genre féminin (ou masculin !).

Quoique… L'histoire d'un jeu sur les formes et les couleurs (trois formes, trois couleurs différentes avec des contraintes pour les placer sur une grille de taille 3 × 3), initialement commercialisé en 2006 sous le nom de Logeo (Huch & Friends), mérite notre attention. Nous l'avons en effet retrouvé il y a une dizaine d'années commercialisé sous une presentation allèchante mêlée à un imaginaire culinaire avec trois chocolats (de couleurs rose, blanche et marron et de tailles différentes) sous le nom de Chocolate Fix (Ravensburger, 2010 ; Think Fun, 2018), puis avec des chocolats vert, marron et blanc sous le nom de Chocologique (Think Fun, 2011). Aujourd'hui, il se présente aussi sous le nom de Meta-Forms (AC-Déco, 2018) ; la boîte de jeu représente un petit garçon à lunettes. Ce n'est d'ailleurs pas le seul : Equilibrio (Asmodée, 2007), Architecto (Asmodée, 2007) ou encore Perspecto (Foxmind, 2007) sont d'autres exemples de jeu présentant, sur la boîte, un garçonnet à l'air éveillé.

Toutes les bibliothécaires travaillant en ludothèque vous le diront : devinez quelle version de Logeo choisissent les garçons ? Celle avec les chocolats colorés ou celle avec le petit garçon à lunettes ?

M.J. P. et L. R.

# Casse-tête et puzzles à découpage

Alain Zalmanski

Collectionneur de casse-tête
Administrateur du site *Fatrazie.com*

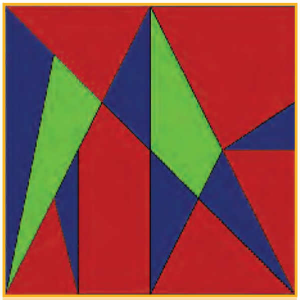
Faits de fragments découpés qu'il faut rassembler pour reconstituer une image, les puzzles à découpage sont sans doute l'origine même des jeux de patience. Vous avez peut-être eu l'occasion de jouer avec des boîtes de cubes constitués de morceaux de six illustrations découpées puis collées de façon adaptée sur chacune des faces des cubes. Le but est de reconstituer successivement chacune des six illustrations, souvent issues de contes de fées, données comme modèle. Il s'agit le plus souvent de jouets simplissimes, à nombre de pièces limité, destinés à apprendre la reconnaissance des formes ou des couleurs aux jeunes enfants.

Boîte de cubes en bois.
© *The French Attic Bazaar*

L'évolution vers des découpages non carrés, dont les pièces sont multiformes, mais difficiles à distinguer les unes des autres, a conduit aux puzzles, dont certains peuvent posséder plusieurs milliers de pièces. Ils représentent souvent un paysage, dont le fond de couleur pastel ou constitué de dégradés rend la résolution extrêmement difficile. Ils exigent de la patience et de la méthode, plus que des mathématiques, hors les observations géométriques qui s'imposent.

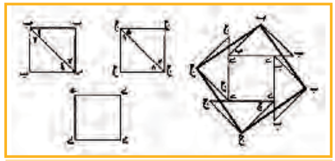
## Un savoir-faire entre art et maths : les découpes géométriques

Il est une catégorie de jeux qui peut être employée avec succès pour se forger des intuitions mathématiques, ou au moins pour développer une certaine familiarité avec les objets dont traite la reine des sciences (nombres et calcul mental, géométrie élémentaire, symétrie, vision dans l'espace, représentation de formes et de volumes sophistiqués…). Ce sont les casse-tête. Leur spécificité est de ne pas opposer des adversaires : le joueur est seul face à l'énigme qui lui est proposée. En matière de création de casse-tête, la dernière tendance est de proposer des découpages élémentaires, en peu de pièces, non pour reconfigurer une figure géométrique imposée, mais pour réaliser soi-même une figure possédant une certaine symétrie. Les puzzles à base de décomposition et



Les quatorze pièces du Stomachion.
*© Sterling, 2003*

recomposition de figures sont connus depuis plusieurs siècles. Le Stomachion d'Archimède, par exemple, préfigure le Tangram. Un autre découpage géométrique emblématique semble remonter au X$^{e}$ siècle, avec la proposition par Abu al-Wafa, mathématicien persan, de découper trois carrés égaux en neuf parties qui, assemblées, produisent un seul grand carré. À vos ciseaux !

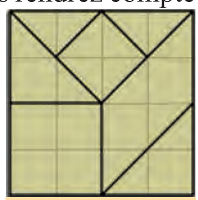


Les carrés d'Abu al-Wafa.
*© Reza Sarhangi*

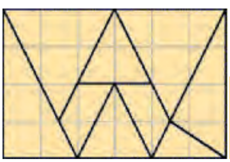
Au début du XIX$^{e}$ siècle apparut le puzzle chinois par excellence, le Tangram, carré dont le découpage est un modèle du genre. Il s'agit d'utiliser les sept pièces qui le composent pour reproduire une silhouette ou une figure géométrique imposée. On raconte que Napoléon, durant son exil, s'en est distrait ! L'étude du Tangram fut enrichie en 1903 par Sam Loyd, avec son classique *Huitième livre de Tan* (Dover, 1968), qui contient près de sept cents modèles. Un monument aussi exhaustif que possible a été ensuite publié par Jerry Slocum, Jacob Botermans, Dieter Gebhardt, Monica Ma, Xiaohe Ma, Harold Raizer, Dic Sonneveld et Carla van Splunteren (*The Tangram Book*, Sterling, 2004).

Les sept pièces
du Tangram.
*© Nathan, 1998*

On en trouve deux variantes, le Pythagore et le To-Dong (ou Brise-croix), dont les découpages très élégants permettent la reconstitution de formes et figures des plus variées. En fabriquant ces puzzles, vous vous rendrez compte de la difficulté de reconstituer ne serait-ce que le carré ou le rectangle d'origine… On trouve des variantes de différentes formes, toutes difficiles à reconstituer et, surtout, génératrices de figures originales dont on trouve moult exemples dans les livres ou sur Internet.



Les sept pièces
du Pythagore
*Image A. Zalmanski*



Les neuf morceaux
du Puzzle de 9.
*Image Thérèse Éveilleau*

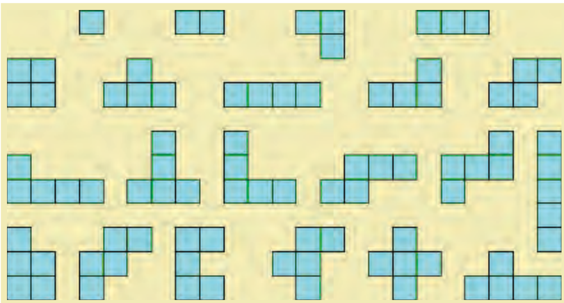
Les sept pièces
du Brise-croix.
*Image Odile Berget*

Les neuf morceaux
du Cœur brisé.
*Photo A. Zalmanski*

Les neuf morceaux
de l'Œuf magique.
*Photo A. Zalmanski*

## Les objets géométriques combinatoires : vers un renouveau

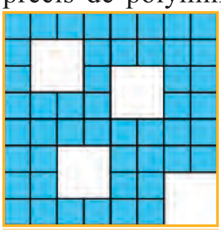
Il faut attendre 1953 pour voir apparaître un renouveau du découpage géométrique avec les travaux de Salomon Golomb sur les *polyminos*. Il s'agit dans un premier temps de dénombrer tous les assemblages possibles de carrés unitaires en les collant selon un de leurs côtés. Deux configurations sont considérées comme identiques si elles coïncident après rotation ou symétrie de l'une d'elles. On définit ainsi le *monomino* (carré unitaire isolé), puis le *domino* classique, le *trimino*, le *tétramino*, le *pentamino*, l'*hexamino*… obtenus à l'aide de respectivement deux, trois, quatre, cinq, six… carrés unitaires.



Il n'existe qu'un monomino (!) et qu'un domino. On dénombre ensuite deux triminos, cinq tétraminos et douze pentaminos.

*© Bryan Derksen, 2006*

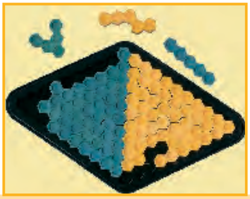
L'*ordre* du polymino est le nombre de carrés nécessaires à la construction d'une configuration. Un pentamino est ainsi un polymino d'ordre 5. Un polymino n'est pas nécessairement simplement connexe : il peut comporter des « trous ». À ce jour, il n'existe toujours aucune formule générale donnant le nombre de polyminos d'un ordre donné. André Sainte-Laguë (1882–1950), auteur du fameux *Avec des nombres et des lignes* (Vuibert, 1946), avait dès 1925 répertorié à la main les polyminos, sans en tirer parti du point de vue ludique. Golomb, lui, aidé de l'ordinateur, a su trouver des jeux exploitant ses découpages. Les polyminos ont donné lieu à une abondante littérature. Ils ont inspiré le jeu Tetris (Alekseï Pajitnov, 1984). Ils engendrent enfin d'innombrables questions ludiques ou plus sérieuses, notamment en combinatoire : recherche du nombre précis de polyminos d'un ordre donné, construction de figures diverses, pavages… Pour les amateurs, les plus intéressants sont les pentaminos. Ils permettent, par exemple, de constituer des rectangles de taille $3 \times 20$ (deux solutions seulement, à quatre symétries près), $4 \times 15$ (trois cent soixante-huit solutions), $5 \times 12$ (mille dix solutions) ou encore $6 \times 10$ (deux mille trois cent trente-neuf solutions).



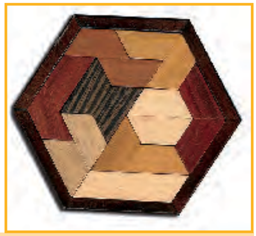
Un polymino d'ordre 48.
*© Herman Tulleken, 2018*

La notion même de polymino, objet géométrique élémentaire formé de carrés juxtaposés, a été étendue à des configurations de polygones réguliers. Avec des triangles, on obtient des *polyamants* ou des *calissons*, comme les a appelés le mathématicien Thomas O'Beirne, qui leur a consacré en 1961 une étude (*Puzzles and Paradoxes*, Dover, 2017). David Klamer, lui, a opté pour l'étude des hexagones. Ces objets élémentaires, en plus de poser de redoutables questions combinatoires, permettent de réaliser des casse-tête élaborés.

Assemblages de triangles équilatéraux : un *diamant* (deux triangles), un *triamant* (trois), un *tétramant* (quatre) et un *pentamant* (cinq).
*Photo A. Zalmanski*



Casse-tête composé des vingt-deux *hexamants* d'ordre 5 (ou associations possibles de cinq hexagones). Il faut reconstituer le losange !
*Photo A. Zalmanski*



Casse-tête composé des douze *triamants* d'ordre 6 (ou associations possibles de six triangles).
*Photo A. Zalmanski*

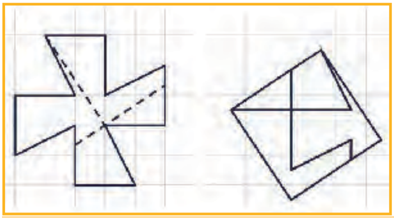
Tous ces casse-tête visent à paver un espace délimité avec des pièces de certaines formes engendrées de façon régulière et logique, afin d'aboutir à des figures, géométriques ou non. Le nombre de solutions est souvent élevé pour un pavage donné. L'amateur se rendra cependant vite compte que, malgré les plus de deux mille solutions que comporte le pavage d'un rectangle $6 \times 10$ par les douze pentaminos, en trouver une est loin d'être évident !

## Casse-tête pour esthètes à base de découpes géométriques

La dissection de figures procède d'un autre principe : il s'agit de découper une pièce géométrique donnée en un nombre limité de formes qui permettent de reconstruire d'autres polygones (de même aire que la pièce de départ).

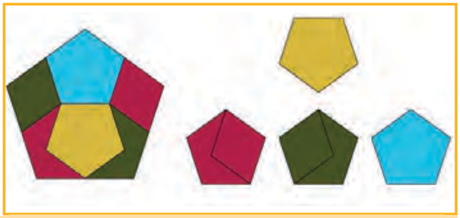
Des pièces « égales » (isométriques par exemple) rendent les problèmes d'autant plus élégants et intéressants. À leur époque, c'est-à-dire bien avant l'avènement de l'informatique, des créateurs tels que Sam Loyd (1841 – 1911), Henry Ernest Dudeney (1857–1930), Joseph Steven Madachy (1927 – 2014) ou encore Harry Lindgren (1912 – 1992) ont trouvé des découpes alliant la sobriété à une rare élégance.

Plus récemment, Gavin Theobald et Greg Frederickson ont rivalisé d'ingéniosité pour proposer des bijoux géométriques, souvent sophistiqués.



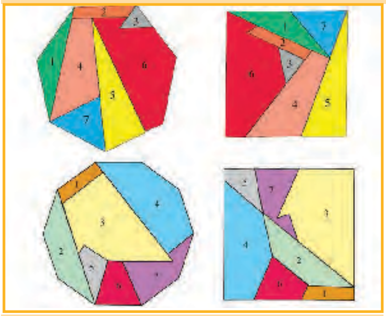
Découpe de la croix de fer de César
au carré en quatre pièces, par Sam Loyd.

*Image Natacha Laugier*



Découpe d'un grand pentagone en quatre petits
pentagones isométriques, en six pièces,
par Harry Lindgren.

*© The Inner Frame*

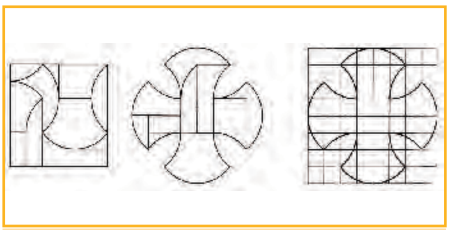


Quelques exploits de Gavin Theobald.
En haut : découpe de l'heptagone régulier
(sept côtés) au carré en sept pièces.
En bas : découpe du décagone régulier
(dix côtés) au carré en sept pièces.

*© Gavin Theobald*

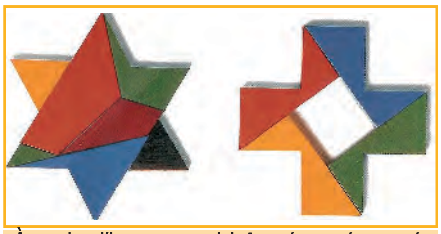
Ce type de dissection a fait l'objet d'études théoriques et pratiques extrêmement poussées. En France, le mathématicien Bernard Lemaire est l'un des spécialistes de la discipline. Un *blog* proposant des centaines de découpes originales, « Morceaux choisis de géométrie », hébergé par le site CultureMath, devrait bientôt voir le jour.

Mais revenons aux casse-tête…



Exemple de transformation obtenue
par Gavin Theobald : découpe articulée d'une croix
grecque arrondie en carré en onze pièces.

*© Gavin Theobald*



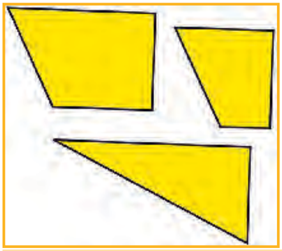
À gauche : l'hexagramme doit être réarrangé en carré,
de deux façons différentes. À droite : la croix grecque,
avec un carré central évidé, doit être réarrangée soit en
carré creux avec une croix grecque en son centre,
soit en carré plein de plus petite dimension.

*Photo A. Zalmanski*

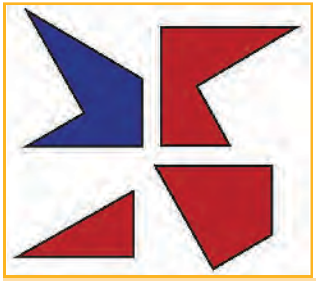
Chaque année, durant l'International Puzzle Party, grand raout réservé aux collectionneurs et créateurs, de nombreux casse-tête, toujours inédits, sont présentés. Un nouveau genre est apparu récemment : minimalistes, ils consistent en quelques pièces, de forme géométrique souvent élémentaire, qui sont à combiner afin de réaliser une ou plusieurs figures possédant un axe ou un centre de symétrie. Rotations et retournements sont autorisés, mais pas les chevauchements ni les constructions qui sortent du plan.

Ces casse-tête sont bien souvent redoutables !

***A. Z.***

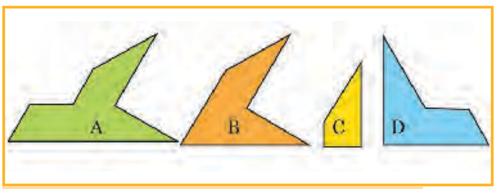


3 Pieces 9 Symmetric Shapes :
utiliser ces trois morceaux pour réaliser une figure symétrique.
Il existe neuf solutions.
*© Emrehan Halici, 2017 (www.puzzleup.com)*

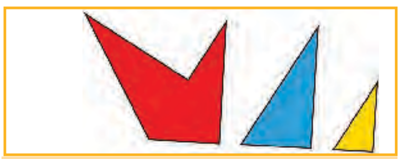


French Revolution :
utiliser la pièce bleue et deux pièces rouges quelconques pour former une figure symétrique. Trois casse-tête sont ainsi posés, chacun possédant une solution unique.
*© Nick Baxter, 2017*

Symmetrick : utiliser ces deux morceaux pour réaliser une figure symétrique.
Ce casse-tête de Vesa Timonen (2012) accompagne le XX^e^ salon Culture et Jeux Mathématiques.
*Photo MJP*




Making Tower : placer les quatre pièces de manière à reconstituer une lettre « A » qui évoque la Tour Eiffel. Une autre disposition des pièces permet d'obtenir une autre forme symétrique. Par ailleurs, en assemblant A et B, une forme symétrique est possible, de même qu'avec A, C et D et qu'avec B, C et D.
*© Tsugumitsu Noji, 2017*



Sym 353 : utiliser les trois pièces pour former une figure symétrique.
Il existe quatre solutions
*©Jerry Loo et Stanislas Knot, 2017*

Spir ala rips : placer les deux pièces à plat, toujours sans chevauchement, de façon à ce que la forme qui en résulte puisse être coupée en deux pour donner deux figures de forme identique.
*© Vesa Timonen, 2017*

# Les récréations mathématiques ont bonne presse

Michel Criton

Président de la Fédération française des jeux mathématiques

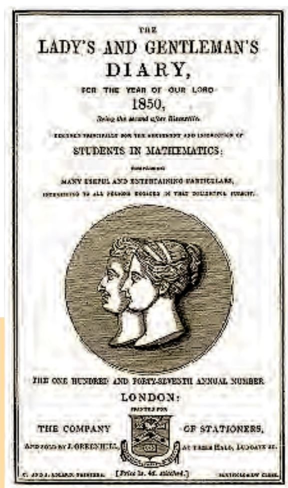
Jusqu'au XVII^e^ siècle, les mathématiques récréatives se diffusent essentiellement par des correspondances entre savants ou entre amateurs, ainsi que par des « défis » proposés à tous publics et diffusés sous forme de lettres ou d'affiches.

Ce n'est qu'à partir du XVIII^e^ siècle que ces divertissements intellectuels que sont les jeux mathématiques apparaissent dans des publications destinées à un plus large public. Un précurseur dans ce domaine a été le *Ladies' Diary* publié en Grande-Bretagne. Cet almanach destiné aux dames a été créé en 1704 et il fusionnera avec le *Gentleman's Diary* en 1841 pour devenir *The Lady's and Gentleman's Diary*, qui paraîtra en Angleterre jusqu'en 1871.

## Des précurseurs en Grande-Bretagne et aux États-Unis

Le *Ladies' Diary* publia des problèmes de toutes sortes, rébus, énigmes, mais aussi casse-tête et problèmes mathématiques, parfois très difficiles, qui sont proposés à ses lectrices (et lecteurs…). Tous les grands mathématiciens britanniques de cette époque ont participé à cette entreprise de vulgarisation et de popularisation particulièrement réussie, en proposant des problèmes ou en les résolvant.

Aux États-Unis, Samuel Loyd (1841 – 1911) abandonne ses études dès l'âge de 17 ans pour se consacrer presque exclusivement à sa passion des échecs et des jeux de toutes sortes. Il est probablement

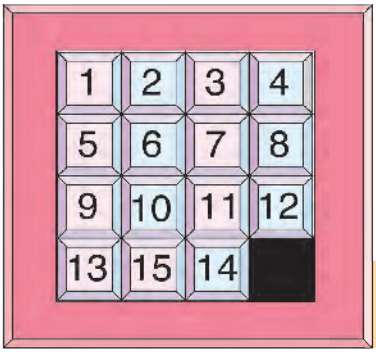



**Un exemple de problème diffusé par le** ***Lady's and Gentleman's Diary*** **:**
*« Quinze demoiselles sortent chaque jour en promenade en cinq rangées de trois. Comment doivent-elles être disposées pour que chacune d'elles se trouve successivement une seule fois en compagnie de chacune des autres ? »*
*© The Compagny of Stationers, 1850*

l’un des créateurs de jeux et de casse-tête les plus prolifiques et les plus inventifs, mais également l’un des plus « professionnels », puisque plusieurs de ses inventions seront brevetées et commercialisées avec un succès indéniable.

Après sa période exclusivement échiquéenne, Sam Loyd publie ses énigmes mathématiques et logiques dans de nombreux journaux et périodiques : *The Brooklyn Daily Eagle*, *New York Journal*, *San Francisco Examiner*, *Boston Herald*, *Philadelphia Inquirer*, *Chicago Record Herald, Woman’s Home Companion*…

Son casse-tête le plus connu est le Taquin (ou *14-15 puzzle* en anglais), assemblage de quinze petits carrés coulissant dans un cadre de 4 sur 4, qu’il s’agissait de remettre dans le bon ordre, sachant que, pour des raisons de parité, la moitié des configurations possibles ne sont pas réalisables. Au départ, le jeu est tel que tous les carrés sont dans l’ordre naturel, excepté les deux carrés portant les numéros 14 et 15, qui sont inversés. Sam Loyd offrit un prix de mille dollars (une fortune, à l’époque !) pour celui ou celle qui réussirait à remettre les carrés dans le bon ordre, ce qu’il savait impossible.




Le Taquin de Sam Loyd. On demande de remettre les carrés 14 et 15 dans le bon ordre. © M. Criton

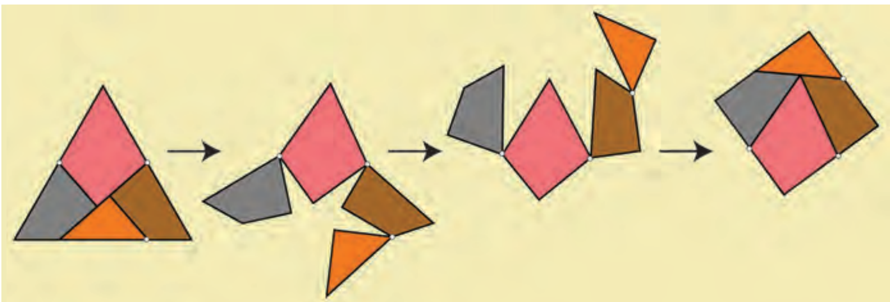
On peut également citer le jeu Quittez la Terre, que Sam Loyd breveta en 1896. Ce jeu est constitué de deux cartons circulaires rivetés par leur centre. Treize guerriers chinois étaient dessinés en partie sur le carton du dessus, et en partie sur celui du dessous. En faisant tourner l’un des cartons par rapport à l’autre, l’un des guerriers… disparaît !


En faisant tourner l’un des disques de carton, on fait apparaître ou disparaître un personnage.

© Sam Loyd, 1898

Le Britannique Henry Ernest Dudeney (1857–1930) est pratiquement contemporain de Sam Loyd, quoique plus jeune de seize années. Les deux hommes, qui collaborent à de très nombreux journaux, des deux côtés de l'Atlantique, rivalisent d'ingéniosité dans l'invention de problèmes. Ils n'hésitent pas à se faire des emprunts mutuels, à tel point que l'on ne sait pas toujours lequel des deux est à l'origine de tel ou tel problème. Ils finissent d'ailleurs par convenir d'échanger leurs créations. Dudeney était plus mathématicien que Loyd, et les problèmes qu'il invente sont donc davantage des défis mathématiques, alors que Loyd s'ingénie à habiller systématiquement les siens de façon amusante.

L'invention la plus célèbre de Dudeney est celle du découpage articulé permettant de transformer un triangle équilatéral en carré.



Le fameux puzzle articulé de Dudeney. © M. Criton

## *Le Sphinx* : une revue belge qui a maintenu la flamme

La première revue entièrement consacrée aux jeux mathématiques a été la revue en langue française *Le Sphinx*, créée et animée par le mathématicien belge Maurice Kraitchik. Elle paraît de 1931 à 1939 et connaît un succès grandissant parmi le public scientifique. Cette réussite conduira d'ailleurs Maurice Kraitchik à organiser un premier Congrès international des récréations mathématiques en août 1935, à Bruxelles, puis un second à Paris en 1937.


© Bibliothèque royale de Belgique

La revue *Le Sphinx*, si elle ne touche pas, malgré tout, un très large public, saura maintenir la flamme chez quelques passionnés qui susciteront, à leur tour, l'intérêt pour les récréations mathématiques au sein de la génération suivante. Citons parmi les fidèles correspondants de cette revue le mathématicien amateur Victor Thébault (1882–1960), originaire du

Mans (Sarthe). Son livre intitulé *Récréations mathématiques parmi les nombres curieux*, dont la renommée traverse l'Atlantique, propose des centaines de problèmes, souvent d'inspiration récréative, à la revue américaine *The American Mathematical Monthly*. Thébault disait, à propos des problèmes purement récréatifs : *« Certains mathématiciens affichent une opinion bien proche du dédain en traitant de " bricoles " ce genre de problèmes. Bricoles si l'on veut, mais dont la solution demande souvent autant de pénétration, d'ingéniosité, de subtilité que bien des questions réputées plus profondes. »*

## Martin Gardner, journaliste et… vulgarisateur hors pair

Le journaliste scientifique américain Martin Gardner (1914 – 2010) est certainement l'auteur contemporain qui aura converti le plus de lecteurs aux joies des divertissements mathématiques. De 1957 à 1980, il a tenu chaque mois la rubrique de jeux mathématiques de la revue *Scientific American*. Il n'est pas un thème de l'univers des jeux mathématiques, et même, d'une façon plus large, de la culture mathématique, qui n'ait été un jour abordé par Gardner dans ses célèbres chroniques. La rubrique a eu un retentissement non seulement auprès des lecteurs de la revue, mais également auprès de la communauté scientifique et mathématique, qui a largement participé à cet échange avec le grand public.

Martin Gardner n'a pourtant pas fait de hautes études mathématiques. Tout son talent a été de transmettre des idées qu'il a recueillies auprès de mathématiciens, et de les présenter ou de les habiller, de façon à les rendre attractives pour le grand public. Il a également fait connaître l'œuvre de ses prédécesseurs (Sam Loyd et Dudeney, qu'il a réédités), ainsi que la production de vulgarisateurs d'autres pays.

La revue américaine *Scientific American* fera des émules un peu partout dans le monde. Gardner, tout d'abord, sera lui-même relayé par l'Américain Douglas Hofstadter puis par le Britannique Ian Stewart. En Grande-Bretagne, Hubert Phillips, alias Caliban, publie des énigmes mathématiques dans le *Daily Telegraph* et dans l'*Evening Standard* pendant de nombreuses années. Au Danemark, on peut citer Mogens Esrom Larsen (actif dans l'*Illustreret Videnskab*). En France, pendant une vingtaine d'années, Pierre Berloquin tient la rubrique de jeux mathématiques « Jeux & Paradoxes » dans la revue *Science et Vie*, puis la rubrique « En toute logique » dans les pages du cahier « *Sciences et Techniques* » du journal *Le Monde*. Marie Berrondo, alias Eurêka, publie un problème chaque mois dans la revue économique *Valeurs Actuelles* et collabore à la revue *Jeux et Stratégie*, dédiée à tous les jeux de réflexion. D'autres prendront le relais : Gilles Cohen puis Louis Thépault à *Science et Vi*e, Jean-Pierre Boudine et Robin Jamet dans *Science et Vie Junio*r, Élisabeth Busser, Gilles Cohen et Jean-Louis Legrand dans *Le Monde* et dans la revue *La Recherche*.

Mais il y a de la place pour d'autres auteurs et créateurs de récréations mathématiques et logiques ! Si l'offre n'est pas très étendue, l'engouement ne s'est jamais tari auprès des lecteurs, comme en témoigne le succès du Sudoku de nos jours. Toutes les revues, tous les journaux, quel que soit leur public, pourraient disposer de telles rubriques.

## Internet : une formidable mine de ressources pour les jeux

Grâce aux nouvelles possibilités offertes par le réseau Internet, les passionnés s'adonnent comme jamais aux récréations mathématiques. Le média permet de s'affranchir des inévitables limitations d'espace dans les journaux. Des forums se créent pour discuter des solutions, proposer des variantes ou des énigmes originales. La contrepartie est précisément cette profusion : comment s'y retrouver dans la multitude de sites, de *blogs*, d'articles, d'ouvrages électroniques, de magazines numériques, de chaînes vidéo, de jeux en ligne… qui fleurissent sur la Toile ? Sans parler du respect du droit d'auteur associé à toute nouvelle création, qui peut se retrouver reprise, dupliquée, pillée par des utilisateurs peu sensibilisés à ces problématiques…

Premier constat : les sites les plus complets sont en anglais (comme les encyclopédiques Mathworld d'Eric Weisstein, The Art of Problem Solving ou encore Math Is Fun). Deuxième constat : on trouve des sites techniques consacrés à un domaine mathématique précis, et d'autres très généralistes. Il y en a pour tous les types de public (individuels, équipes, amateurs, étudiants, chercheurs…) et pour tous les besoins (scolaires, culturels, pédagogiques, associatifs, professionnels, artistiques, visuels, manipulatoires, ludiques, expérimentaux…). En France, la Fédération des jeux mathématiques organise depuis 1987 le Championnat international des jeux mathématiques et le Comité International des Jeux Mathématiques coordonne différentes compétitions.

Du côté des magazines en ligne, *Images des mathématiques* (édité par le Centre national de la recherche scientifique) et *Interstices* (édité par l'Institut national de recherche en informatique et en automatique) proposent des articles de vulgarisation de qualité. La revue québécoise *Accromath* (éditée par l'Institut des sciences mathématiques et le Centre de recherches mathématiques de l'université de Montréal), essentiellement réalisée par des élèves et des étudiants, mérite d'être encouragée.

Enfin, une liste de sites francophones, classée par thématiques, est proposée en fin de brochure. Il y en a vraiment pour tous les goûts !

***M. C.***

## Le paradoxe de l'escargot

L'auteur de ce problème, Denys Wilkin (Nouvelle-Calédonie), le proposa à Pierre Berloquin, qui le publia dans sa rubrique « Jeux & Paradoxes » de *Science & Vie* en décembre 1972.

Un cordon élastique imaginaire [AB] est indéfiniment extensible. Au temps 0, il mesure 1 km de long. Par la suite, il s'étire instantanément de 1 km à la fin de chaque seconde. [AB] mesure donc 1 km pendant la première seconde, 2 km pendant la deuxième seconde…, $n$ km pendant la $n^{ième}$ seconde. Posé en A au temps 0, un escargot se dirige vers B à la vitesse constante de 1 mm par seconde. L'escargot parviendra-t-il en B en un temps fini ?

La réponse est… positive ! Elle se déduit de la divergence de la série harmonique.

Voici enfin une solution au « problème des demoiselles » proposé au *Lady's and Gentleman's Diary* par le révérend et mathématicien britannique Thomas Penyngton Kirkman (1806 – 1895).

| Sun. | Mon. | Tues. | Wed. | Thurs. | Fri. | Sat. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 5, 10 | 0, 1, 4 | 1, 2, 5 | 4, 5, 8 | 2, 4, 10 | 4, 6, 12 | 10, 12, 3 |
| 1, 6, 11 | 2, 3, 6 | 3, 4, 7 | 6, 7, 10 | 3, 5, 11 | 5, 7, 13 | 11, 13, 4 |
| 2, 7, 12 | 7, 8, 11 | 8, 9, 12 | 11, 12, 0 | 6, 8, 14 | 8, 10, 1 | 14, 1, 7 |
| 3, 8, 13 | 9, 10, 13 | 10, 11, 14 | 13, 14, 2 | 7, 9, 0 | 9, 11, 2 | 0, 2, 8 |
| 4, 9, 14 | 12, 14, 5 | 13, 0, 6 | 1, 3, 9 | 12, 13, 1 | 14, 0, 3 | 5, 6, 9 |

## Pour en savoir (un peu) plus :

***Mathématiques pour le plaisir.*** Jean-Paul Delahaye, Belin–Pour la Science, 2010.

***Jeux mathématiques… et* vice versa.** Jean-Pierre Bourguignon, Gilles Dowek, Jean-Christophe Novelli et Benoît Rittaud, Le Pommier, 2005.

***La chasse aux trésors mathématiques.*** Ian Stewart, Flammarion, 2018.

***Soyez fous !*** Raymond Smullyan, Dunod, 2007.

***Gödel, Escher, Bach, les brins d'une guirlande éternelle.*** Douglas Hofstadter, Dunod, 2008.

***Un journal mathématique original : le* Ladies Diary *(1704 – 1840)*.** Sloan Despeaux, *Image des mathématiques*, 2019.

# Jouons avec les probabilités !

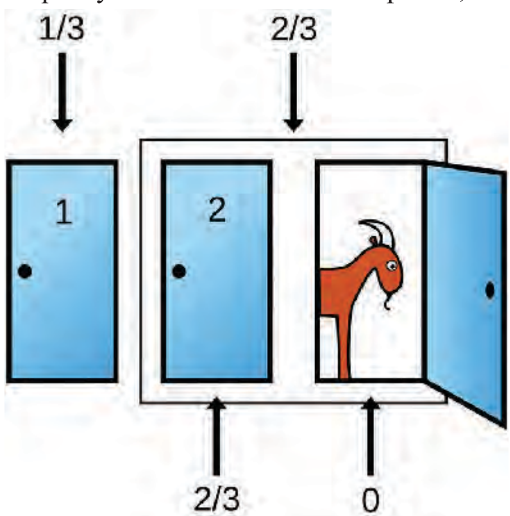
Léo Gerville-Réache

Université de Bordeaux
Laboratoire de l'Intégration du matériau au système (IMS)

Chaque science a son lot de paradoxes. Mais dès que l'on parle de probabilités, d'espérance ou encore d'infini, des questions apparemment simples peuvent vite devenir redoutables.

## Trois portes, une voiture et des chèvres : deux probabilités

Supposons que vous soyez dans un jeu télévisé et que vous ayez le choix entre trois portes, $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Derrière une porte se trouve une voiture, derrière les deux autres, des chèvres. Vous en choisissez une, disons $P_1$. L'animateur, qui sait exactement ce qu'il y a derrière chacune des portes, en ouvre une autre, disons $P_3$, où se cache une chèvre. Il vous annonce alors : *« Voulez-vous choisir la porte $P_2$ ? »* Est-il avantageux de modifier votre choix ?




Derrière l'une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouvent des chèvres.
*© Cepheus, 2006*

Si l'on demande une réponse rapide et intuitive, deux points de vue incompatibles s'opposent. Le premier affirme qu'après ouverture de la porte, il reste deux portes, chacune ayant tout autant de chances de cacher la voiture. On a donc tout autant de chances de gagner avec changement que sans changement. Le second affirme que, si l'on ne change pas de porte, on gagne si, et seulement si, on avait fait le bon choix dès le départ. Or ce choix avait, au début du jeu, une chance sur trois d'être le bon. Il y a donc une chance sur trois de gagner sans changer et deux chances sur trois de gagner en changeant. C'est le célèbre paradoxe de Monty Hall ! Ce jeu a effectivement été proposé à la télévision américaine de 1963 à 1986, sous le nom *Let's Make A Deal*, par l'animateur canadien Monty Hall.

Maurice Halprin, dit Monty Hall (1921–2017).
*Source Domaine public, 1968–1976*

Ceux qui défendent la réponse « 1 / 2 » reprochent aux défenseurs du « 2 / 3 » le fait de considérer que l'ouverture d'une mauvaise porte, $P_3$, laisse inchangée la probabilité que la porte initialement choisie soit la bonne (1 / 3). Il semble effectivement légitime de se demander pourquoi l'ouverture de $P_3$ ne modifie que la probabilité d'une des deux portes (en l'occurrence $P_2$). En particulier, si les deux portes $P_1$ et $P_3$ étaient ouvertes, cette probabilité deviendrait une certitude, soit dans un sens, soit dans l'autre. Cela montre donc que la probabilité varie en fonction des connaissances.

## Une polémique publique avec plusieurs milliers de lecteurs

Le fait est que dans le paradoxe de Monty Hall la probabilité que la voiture se cache derrière la porte sélectionnée initialement est toujours de 1 / 3 ; la modification de la probabilité se reporte uniquement vers la porte $P_2$. Ayant choisi au départ $P_1$, le paradoxe est dû au fait que si le présentateur ouvre la porte $P_3$, cela implique nécessairement qu'il y a une chèvre derrière $P_3$. Cependant, la réciproque est fausse ! En effet, s'il y a une chèvre derrière $P_3$, cette porte ne sera pas nécessairement ouverte par le présentateur. Aussi, le conditionnement par l'hypothèse qu'il y aurait une chèvre derrière $P_3$ n'est pas adapté au problème. Seul le conditionnement par l'hypothèse que le présentateur ouvre $P_3$ produit une réponse cohérente.

Les échanges polémiques en 1990 entre la journaliste américaine Marilyn vos Savant et plusieurs milliers de lecteurs et de téléspectateurs (dont des mathématiciens professionnels) ne sont pas sans enseignements sur la dureté des positions et la ténacité des convictions des uns et des autres…

Les paradoxes et polémiques issus de questions de nature probabiliste datent en fait des origines du calcul des probabilités. Le Jeu de Saint-Pétersbourg est un problème imaginé par Nicolas Bernoulli en 1713. Il fut repris par son neveu Daniel Bernoulli en 1738, puis par Jean Le Rond d'Alembert en 1767, sous la forme suivante :

*« Pierre joue avec Paul à croix [face] ou pile, avec cette condition que si Paul amène pile au premier coup, il donnera un écu à Pierre ; s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, deux écus ; s'il n'amène pile qu'au troisième coup, quatre écus ; au quatrième, huit écus ; au cinquième, seize ; et ainsi de suite jusqu'à ce que pile vienne ; on demande l'espérance de Paul, ou, ce qui est la même chose, ce qu'il doit demander à Pierre avant que le jeu commence, pour jouer avec lui à jeu égal, ou, comme on l'exprime d'ordinaire, pour son enjeu. »*

Alors, combien seriez-vous prêt à miser pour pouvoir jouer à ce jeu ? Un écu, deux écus ? Vous n'y êtes pas : l'espérance de gain du jeu est infinie, et en conséquence, vous devriez être prêt à payer n'importe quelle somme pour jouer ! Mais si l'on vous demandait ne serait-ce que cinquante écus (une petite fortune à l'époque) pour jouer, il est vraisemblable que vous refusiez…

Académie des sciences de Russie à Saint-Pétersbourg.

*© Florstein 2012*

Les discussions entre Daniel Bernoulli et d'Alembert produiront la *théorie de l'utilité espérée*, axiomatisée par le mathématicien John von Neumann (1903 – 1957) et l'économiste Oskar Morgenstern dans les années 1940, mais également une fameuse critique de Maurice Allais dans les années 1950. Réfléchissons précisément aux hypothèses du jeu. L'engagement de Paul, c'est-à-dire la promesse de payer Pierre rubis sur l'ongle quel que soit le nombre de lancers précédant pile, nécessite une réserve d'écus infinie. Les conditions du jeu imposent donc que la fortune de Paul soit infinie. La question est alors de savoir ce que l'on suppose de la fortune de Pierre. Deux cas sont envisageables : soit il dispose également d'une fortune infinie, soit il ne dispose que d'une fortune finie.

Le premier cas place Pierre à égalité avec Paul. Dans cette situation, en quoi une mise infinie serait-elle irrationnelle ; inéquitable ? Pour quelle raison Pierre refuserait-il de payer un enjeu infini ? Numérotons les écus de la fortune de Paul. Cette fortune est donc en bijection avec l'ensemble des entiers naturels. Le cardinal de l'ensemble des écus pairs de Paul est également infini. Aussi, mettons qu'il payera Pierre avec ses écus pairs. Pierre, faisant de même, paye son enjeu avec l'ensemble de ses propres écus pairs. Quelle que soit l'issue de la partie, le cardinal de l'ensemble des écus de Pierre, comme de Paul, sera encore le même (celui des entiers naturels). Quel que soit l'enjeu, fini ou infini, les joueurs ne risquent rien quant à la cardinalité de leurs fortunes respectives. Il n'y a donc aucune raison que l'un ou l'autre refuse de jouer. Un enjeu fini comme infini est clairement rationnel et équitable.

Dans le deuxième cas, Pierre ne peut proposer de miser qu'une somme inférieure ou égale à sa fortune finie. La question est alors de comprendre dans quelle mesure, et selon quel raisonnement, Paul doit accepter ou rejeter l'enjeu que proposera Pierre. L'analyse du premier cas nous a enseigné que Paul est indifférent à l'enjeu de Pierre. En effet, quels que soient l'enjeu et l'issue du jeu, Paul aura toujours une fortune de cardinal constant (celui des entiers naturels). Aussi, Pierre, qui dispose ici d'une fortune finie, proposera un enjeu nul. Enjeu que Paul n'a aucune raison de refuser d'avantage qu'un autre…

## Et la Belle au bois dormant, que doit-elle croire à son réveil ?

Proposé par le philosophe américain Adam Elga en 2000, le problème de la Belle au bois dormant est une expérience de pensée qui mêle probabilité et philosophie. C'est un paradoxe récent et très actif sur les réseaux sociaux, mais également dans la sphère académique.

«*Ce dimanche soir, des chercheurs vont endormir pendant quelques jours la Belle au bois dormant ; puis ils lanceront une pièce de monnaie équilibrée [non biaisée]. Selon le résultat, ils interrompront brièvement le sommeil de la Belle soit une, soit deux fois : si face, un réveil le lundi ; si pile, un réveil le lundi, un autre le mardi. Chaque fois, ils auront un entretien avec elle, puis la rendormiront à l'aide d'une drogue qui lui fera complètement oublier ce réveil. Voici que la Belle, qui connaît tout ce protocole, se réveille au cours de l'expérience, incapable de savoir si c'est lundi ou mardi. On lui demande alors :* "À quel degré devez-vous croire que la pièce est tombée sur face ?" *Enfin, si on est lundi, dès que la Belle a répondu à cette question principale, on lui annonce qu'on est lundi et on lui repose la question.*»

Selon les «tiéristes», très majoritaires, la Belle, parfaitement rationnelle, doit répondre 1/3 à la question principale, puis 1/2 à la question subsidiaire du lundi. Les «demistes», peu nombreux, répondent 1/2 à la première question, et 2/3 à la seconde. Ce demisme traditionnel est concurrencé aujourd'hui par le «double-demisme», qui répond 1/2 aux deux questions.

Aujourd'hui encore, aucun consensus ne s'est dégagé et le paradoxe reste ouvert.

Les nombreuses analyses du paradoxe se fondent schématiquement sur deux types d'analyses. D'une part, les raisonnements basés sur le calcul de probabilités conditionnelles et la formule de Bayes ; d'autre part, ceux basés sur la répétition de l'expérience et le comptage des fréquences de réveils «pile» et de réveils «face». Mais essayons de raisonner sans formule de Bayes ni répétition…

Partons de la seconde question posée à la jeune femme, une fois qu'on lui a annoncé qu'on est lundi. La Belle doit raisonnablement répondre 1/2. En effet, elle sait qu'on est lundi et qu'aucune drogue ne lui a été donnée. Il y a alors deux possibilités : «C'est un réveil "face"» ou «C'est un réveil "pile"». Elle n'a aucune raison de croire davantage en l'un qu'en l'autre. Si l'on voit les choses en termes d'expérience, il n'y a que deux possibilités : «C'est une expérience "face"» ou «C'est une expérience "pile"» ; comme précédemment, il n'y a aucune raison de croire davantage en l'un qu'en l'autre.

Maintenant, remontons le temps selon chacun des deux raisonnements et plaçons-nous avant l'annonce qu'on est lundi. En termes de réveil, il y a trois cas possibles : «réveil lundi "pile"», «réveil lundi "face"» et «réveil mardi "pile"». De ces trois cas, un seul est favorable à "face", et donc la réponse de la Belle doit être 1/3. Mais, en termes d'expérience, il y a toujours deux cas possibles : «C'est une expérience "pile"» ou «C'est une expérience "face"» ; de ces deux cas, un seul est favorable à "face" et la Belle doit donc répondre 1/2.

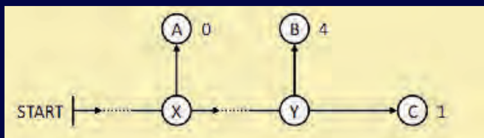
Donc, sans faire appel à Bayes ou à la répétition de l'expérience, la Belle sera tiériste si elle raisonne en termes de réveil, et double-demiste si elle raisonne en termes d'expérience. Lequel de ces deux raisonnements est le plus rationnel ?

Voilà une question qu'il est bien difficile de trancher…

***L. G.-R.***

## L'origine du paradoxe de la Belle au bois dormant

En 1994, Michele Piccione et Ariel Rubinstein, deux économistes renommés, proposent le problème du conducteur distrait. Après une soirée arrosée, vous devez rentrer chez vous. À la sortie du bar (« Start »), vous savez que votre maison est à la deuxième intersection à gauche (en B). Vu votre état, vous savez qu'une fois arrivé à un carrefour, vous serez incapable de vous situer, c'est-à-dire que vous ne saurez pas si vous êtes à la première ou à la seconde intersection. Si, au premier carrefour (X), vous tournez à gauche, vous ne gagnerez rien. Si vous allez jusqu'au carrefour (Y) et que vous tournez à gauche, vous gagnerez 4. Enfin, si vous allez toujours tout droit, vous gagnerez 1. Quelle stratégie maximisera votre espérance de gain ? Cette stratégie, construite à la sortie du bar, sera-t-elle encore optimale une fois arrivé à un carrefour ?




Modélisation du problème du conducteur distrait.

© LGR

À la première question, tout le monde s'accorde pour dire qu'il faudrait, à chaque intersection, poursuivre tout droit avec probabilité 2/3. Mais une fois au croisement des routes, la réflexion se complique... Quelle est la probabilité que vous soyez au premier carrefour ? C'est la question qui a inspiré le paradoxe de la Belle au bois dormant ! Mais que vous soyez demiste ou tiériste, le paradoxe du conducteur distrait ne s'arrête pas là...

### Pour en savoir (un peu) plus :

***Au pays des paradoxes.*** Jean-Paul Delahaye, Belin–Pour la Science, 2008.

***Le trésor des paradoxes.*** Philippe Boulanger et Alain Cohen, Belin, 2007.

***30 paradoxes renversants – Testez votre rationnalité.*** Léo Gerville-Réache, POLE, 2018.

***The Sleeping Beauty Controversy***. Peter Winkler, *The American Mathematical Monthly* 124, août-septembre 2017.

# Progressions et poursuites au Moyen Âge

Jacques Sesiano

Historien des mathématiques,
École polytechnique fédérale de Lausanne

Dès l'Antiquité on trouve des problèmes dits *récréatifs* dont le but est d'essayer de rendre agréable l'apprentissage des notions mathématiques. Le cadre en est la vie de tous les jours, mais la différence avec les problèmes d'application usuels est que les conditions sont peu vraisemblables, voire même absurdes. Comme il s'agit de provoquer l'intérêt de l'élève, ceci joint l'utile à l'agréable. Aussi de tels énoncés au charme inégalable apparaissent-ils régulièrement dans les ouvrages mathématiques médiévaux, à commencer par le recueil des *Propositions pour aiguiser l'esprit des jeunes gens* (*Propositiones ad acuendos iuvenes*) du moine irlandais Alcuin, que Charlemagne chargea peu avant 800 du l'établissement de l'enseignement public.

Représentation supposée de Charlemagne et d'Alcuin.
*© British Library, Royal Manuscript 16.G.VI*

## Des classiques : progressions arithmétiques ou géométriques

L'un des thèmes les plus communs de ces récréations mathématiques est la sommation des progressions. Dans celles dites *arithmétiques*, chaque terme se différencie du précédent par l'addition d'une quantité fixe. Ainsi, si $a_1 = a$ est le premier terme et $r$ la quantité fixe (la *raison*), alors $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r$, et le $n^{\text{ième}}$ terme sera $a_n = a + (n-1)r$ ; la somme de la progression vaudra alors :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = na + r(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = na + rn(n-1)/2.$$

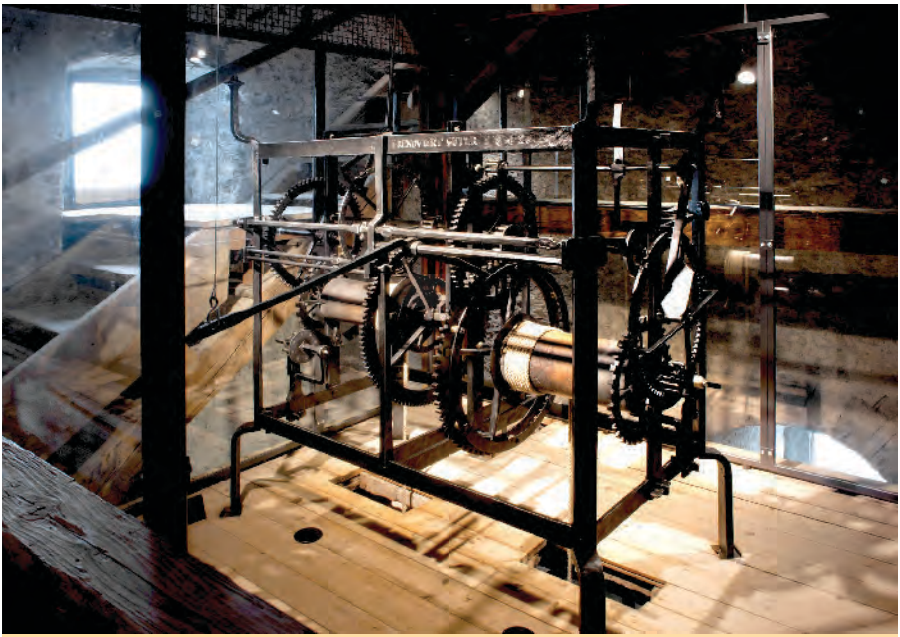
Dans le cas particulier où le premier terme $a$ et la raison $r$ sont égaux, cette somme est égale à $an(n+1)/2$.

Dans le cas des progressions dites *géométriques*, chaque terme se différencie du précédent par sa multiplication par une quantité fixe. Ainsi, si $a_1 = a$ est le premier terme et $r$ la quantité fixe (la raison), alors $a_2 = r\,a$, $a_3 = r^2 a$, et le $n^{ième}$ terme sera $a_n = r^{n-1} a$ ; la somme de la progression sera

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a\,(1 + r + \ldots + r^{n-1}) = a\,(r^n - 1)\,/\,(r - 1).$$

Ces formules étaient déjà connues dans l'Antiquité grecque, voire même en Mésopotamie, et des exemples de problèmes d'application ou récréatifs nous en sont parvenus. La présence de tels problèmes au Moyen Âge n'est donc pas surprenante.

Un manuscrit latin, écrit vers 1400, contient un problème dont voici la traduction de l'énoncé et de la réponse : *« Une horloge frappe durant un jour naturel vingt-quatre heures. On demande alors combien de coups elle a donnés au total, ajoutant tous les coups de chaque heure. [ ... ] Tu verras qu'en vingt-quatre heures l'horloge a frappé trois cents coups. »* Telle est en effet la somme des entiers naturels de 1 à 24. Un tel problème est spécifiquement médiéval : les horloges mécaniques, à poids, apparaissent vers la fin du XIII$^e$ siècle.



Moteur de l'horloge de la tour de Lucerne (Suisse), remontant à 1385 et refait en 1535.

*© Luzerner Zeitturm*

D’autres énoncés sont plus classiques, comme cette version (en français du XV$^e$ siècle) d’un problème du recueil d’Alcuin.
*« Je vis une eschielle qui avoit cent eschellons. Ou [Au] prem[i]er eschellon estoit un coulon [pigeon], ou second eschellon deux coulons, et ou tiers trois, et ou quart quatre, et ainsi jusques a cent. On demande quans [combien de] coulons estoient en toute l’eschielle. Responce : 5 050. »*

Nicolas Chuquet, mathématicien lyonnais de 1484, nous narre la singulière histoire d’une personne se déplaçant à pied en augmentant chaque jour la distance qu’elle couvre d’une lieue (la lieue, d’environ 4 000 m, est la mesure usuelle de distance à cette époque ; c’est ce que couvrirait en une heure un piéton marchant normalement). *« Ung homme va le premier jour une lyeue, le second jour deux lyeues, le tiers jour trois lyeues, et ainsi continuant et progredissant par ung. Assavoir monlt [On désire beaucoup savoir] en quantz jours il aura cheminé dix huyt lyeues. »*
Le nombre de lieues parcourues en $t$ jours égalera $t(t+1)/2$, qu’il faut donc égaler à 18 : *« Il convient trouver ung nombre que, adjousté avec 1 et icelle addicion multipliee par le subdouble [la moitié] d’icellui nombre, la multiplicacion monte dix huyt. [...] Si [Tu] trouveras* $R^2 36\frac{1}{4}\,\bar{m}\,\frac{1}{2}$ *. »*

On obtient en effet, en notation moderne : $t=\sqrt{36+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\cdot$

C’est là l’une des premières ébauches de symbolisme au Moyen Âge : $\overline{m}$ est l’abréviation de « moins », cependant que $R$ signifie « racine ». Ce symbolisme, tout comme celui qu’utilisait l’Antiquité grecque, résulte d’une abréviation des mots correspondants ; leur abondante répétition dans les textes mena tout naturellement à une simplification de leur écriture.


Extrait du manuscrit français, 1346.
*© Bibliothèque Nationale de France*

## Les problèmes de poursuite et les problèmes de rencontre

Une complication toute naturelle est de faire intervenir deux personnes dont l’une, partie après le premier, doit le rattraper. C’est l’origine des problèmes dits *de poursuite*.

Un manuscrit du XV$^e$ siècle contient l’exemple suivant : *« Deux pelerins partent de Montpellier pour aller à Saint-Jaques [de Compostelle] ; et partent tous deux en une eure, et y a [ ... ] 250 legues [lieues]. Avient que ils par-*

*tent touz deux ensemble, mes [mais] l'un chemine tous les jours dix legues, ne plus ne mains, et l'autre chemine le premier jour 1 legue, et le 2^e^ jour 2 legues, et le 3^e^ jour 3 legues, et va touz les jours en craissent de une legue fins qu'il ayt aconceu [jusqu'à ce qu'il ait rejoint] son compagnon. Je te demande en quans jours il aura aconceu son compagnon et combien ilz auront fait de chemin quant il [l'] aura aconceu.»*

Girolamo Tagliente, *Libro de abacho*, 1554.
*© Bibliothèque nationale de France*

Le texte trouve, pour le temps $t$ cherché, dix-neuf jours. L'indication de la distance entre les deux villes est inutile, puisqu'ils partent du même point ; la mention de la seconde ville est donc seulement anecdotique…

Voici le problème de poursuite que propose pour sa part, dans son manuel mathématique, le célèbre peintre Piero della Francesca (l'original est en italien). *«Deux amis veulent cheminer. Le premier a 25 milles d'avance sur l'autre, et chemine chaque jour 25 milles. Le second le suit et chemine le premier jour 1 mille, le second 2, le troisième 4, le quatrième 8, et va ainsi, doublant chaque jour, jusqu'à ce qu'il le rejoigne. Je demande en combien de jours il le rejoindra.»* Les distances couvertes après $t$ jours sont ici $25(t+1)$ et $2^t - 1$. La rencontre aura donc lieu durant le huitième jour. Le moment de la jonction y est précisé : les «vitesses» au huitième jour étant respectivement 25 et 128, l'intervalle restant de $200-127=73$ milles sera couvert après les 73/103^e^ du huitième jour.

L'étude de telles poursuites serait devenue lassante si on n'avait trouvé le moyen de les compliquer, en introduisant des mesures de longueur différenciées. Dans la forme, cela embrouille le problème ! Cette pratique peut avoir eu lieu dès l'Antiquité puisque Alcuin, fidèle adepte du savoir gréco-romain, en a déjà un exemple. *«À une extrémité d'un champ de 150 pieds de longueur se tenait un chien, à l'autre un lièvre. Le chien s'élança à la poursuite du lièvre. Mais alors que le chien faisait en un saut 9 pieds, le lièvre en franchissait 7. Que celui qui le désire dise*

*© Manuscrit 2669 de la Biblioteca Riccardiana de Florence*

*combien de pieds ou combien de sauts le chien poursuivant ou le lièvre poursuivi couvriront jusqu'à leur jonction. »*
Ici on donne l'écart initial et les longueurs des sauts de chaque animal en pieds, l'unité de longueur usuelle durant l'Antiquité et le Moyen Âge. Le problème est en fait élémentaire : avec chaque saut, l'écart initial s'amenuise de deux pieds, et le chien rejoindra le lièvre après $150/2=75$ sauts. La distance couverte par le lièvre sera ainsi de $75\times 7=525$ pieds, celle qu'aura parcourue le chien de $75\times 9=675$, dont la différence correspond bien à l'écart initial.

L'Allemand Christoff Rudolff, au milieu du XVI[e] siècle, propose un autre cas particulier (l'original est en allemand). *« Un lièvre devance un chien de 90 sauts. Chaque fois que le lièvre effectue 12 sauts, le chien en effectue 15, et le lièvre saute aussi loin que le chien. On demande combien de fois le chien doit effectuer 15 sauts pour rattraper le lièvre. »* Ici, les sauts ont même longueur, mais c'est leur fréquence qui diffère, et c'est cette différence de trois sauts qui réduira progressivement l'écart initial. Le lièvre sera donc atteint après trente groupes de sauts, soit un total de quatre cent cinquante sauts pour le chien et de trois cent soixante sauts pour le lièvre.

## Un sommet de sophistication en Italie avec Luca Pacioli

En fait, Rudolff résout d'une manière particulièrement simple le problème général où les sauts diffèrent non seulement en longueur mais aussi en fréquence. *« Un chien de chasse poursuit un renard, qui a 60 sauts d'avance. Chaque fois que le renard effectue 9 sauts, le chien en effectue 6, et 3 sauts du chien font autant que 7 sauts du renard. On demande combien de sauts devra faire le chien pour rattraper le renard. »* Ainsi, dans le temps que le chien effectue six sauts, le renard en effectue neuf ; mais, ces six sauts du chien égalent en longueur quatorze sauts du renard.

Donc, chaque fois que le chien effectue six sauts, la distance les séparant initialement, à savoir soixante sauts du renard, s'amoindrira de $14-9=5$ sauts du renard. Elle sera donc annulée après $60/5=12$ groupes de sauts, ce qui correspondra à $12\times 6=72$ sauts du chien, équivalents à $12\times 9=108$ sauts du renard, le chien couvrant avec ses soixante-douze sauts une distance de $(14/6)\times 72=168=108+60$ sauts du renard.

© Manuscrit Magliabechiano XI, 86
de la Biblioteca Nazionale de Florence

Le sommet de la sophistication est atteint en Italie. Un chat est au pied d'un arbre, un rat se trouve au sommet. Le chat monte un peu durant le jour mais redescend (d'une distance moindre) durant la nuit, et le rat descend durant le jour et remonte sensiblement durant la nuit. Quant à l'arbre, il croît entre eux durant le jour, mais rapetisse aussi durant la nuit ! Ce problème de trois mouvements élastiques doit avoir joui d'une grande faveur, car il apparaît (avec diverses données) dès le XV^e^ siècle. Celui qui suit est rapporté dans la *Summa de arithmetica* de Luca Pacioli, l'un des tout premiers ouvrages imprimés de mathématique (en 1494). La mesure utilisée est le bras, d'environ 60 cm.

Girolamo Tagliente,
*Libro de abacho*, 1554



*« Un rat est au sommet d'un arbre haut de 60 bras, et un chat est à son pied sur le sol. Le rat descend durant la journée de 1/2 bras et remonte la nuit de 1/6^e^ de bras. Le chat monte de 1 bras durant la journée et redescend la nuit de 1/4 de bras. L'arbre croît durant la journée, entre le rat et le chat, de 1/4 de bras, et rétrécit de 1/8 de bras durant la nuit. Je demande en combien de jours le chat rejoindra le rat, c'est-à-dire quand ils se rencontreront, et combien de bras l'arbre aura atteint en tout par suite de cette croissance, et de combien de bras auront avancé individuellement le rat et le chat. »*

À vos stylos !

***J. S.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***Récréations mathématiques au Moyen Âge***. Jacques Sesiano, Presses polytechniques romandes, 2014.

# Enseigner les mathématiques par les récréations ? Un projet pédagogique né au XIX<sup>e</sup> siècle

Jérôme Auvinet

Historien des mathématiques au laboratoire
de mathématiques Jean Leray (Université de Nantes)

Si, à la fin du XIX[e] siècle, les récréations mathématiques sont connues de longue date (on peut penser aux *Problèmes plaisans & délectables qui se font par les nombres* de Claude Gaspard Bachet, parus en 1612), leur usage pédagogique n'est explicitement développé qu'à partir de cette période par des mathématiciens soucieux de renouveler un enseignement jugé fastidieux. Charles-Ange Laisant (1841 – 1920), son ami Édouard Lucas (1842 – 1891) ou Émile Fourrey (1869 – ?) sont enseignants dans le système préparatoire pour les deux premiers et ingénieur des travaux publics pour le troisième.

Ils apparaissent comme les principaux promoteurs d'un changement de modèle dans l'instruction des élèves, à travers des ouvrages novateurs : l'*Initiation mathématique* (1906) de Laisant, l'*Arithmétique amusante* (1895) de Lucas ou les *Récréations arithmétiques* (1899) de Fourrey.

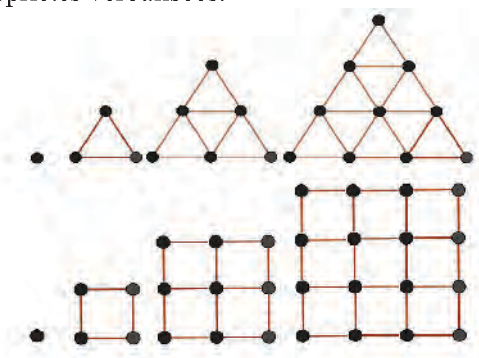
Comme l'explique Fourrey, il s'agit d'*« instruire en présentant la science par ses côtés curieux »*, d'enseigner en divertissant. Si les récréations ont été des amusements et des occasions d'exposer de manière originale des théories savantes, elles endossent ici un tout autre rôle. En puisant abondamment dans l'histoire des mathématiques, les auteurs exposent autant de situations qui sont prétextes à un exposé vivant des mathématiques.

## Les mathématiques par les récréations : amuser pour enseigner

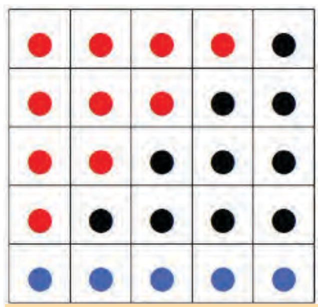
Laisant, raisonnant en pédagogue, propose ainsi dans son *Initiatio*n un ensemble de soixante-cinq leçons ordonnées, destinées aux enfants de moins de 12 ans, pour découvrir progressivement les premières notions de mathématiques, des plus simples (numération) aux plus évoluées (fonctions et suites de nombres). C'est une vision volontairement éloignée des programmes en vigueur, qui s'appuie sur la curiosité et la motivation propre à chaque enfant, usant de récréations incontournables : opérations particulières sur les nombres (comme la multiplication par 9 ou 11), progressions par différence et quotient (nous dirions suites arithmétiques et suites géométriques), ou encore les carrés magiques, largement étudiés par Fourrey. Quelques exemples de ces récréations, expressément utiles aux éducateurs au sens large (instituteurs, familles…), permettent de souligner leurs principaux mécanismes, leur intérêt pour « initier » aux mathématiques. Ces caractéristiques les distinguent en outre des usages traditionnels des récréations passées.

## Une pratique visuelle éloignée des processus rebutants

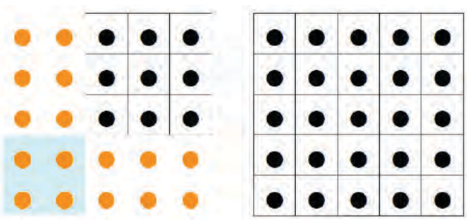
Peut-on enseigner les mathématiques sans chiffre, sans formule ? Nos auteurs invitent en effet à une autre pratique, éloignée de longs processus calculatoires rébarbatifs. Ce cadre nouveau repose davantage sur le regard que sur un symbolisme obscur. Le but est de pénétrer directement au cœur de la pratique mathématique dans toutes ses dimensions. Les nombres figurés apparaissent ainsi comme une visualisation aisément manipulable. Les nombres triangulaires (1, 3, 6, 10…) ou carrés (1, 4, 9, 16…), déjà présents chez Euclide et exposés par Fourrey, permettent, en unissant calcul et géométrie, de proposer de nombreuses propriétés verbalisées.

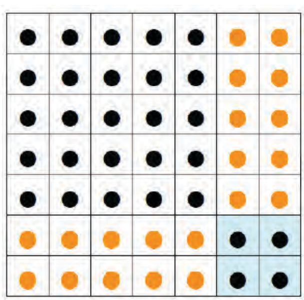


Les quatre premiers nombres
triangulaires et carrés.
© Fourrey, 1899



Tout carré est égal à son côté
augmenté de deux fois le nombre
triangulaire de rang précédent.
© Fourrey, 1899



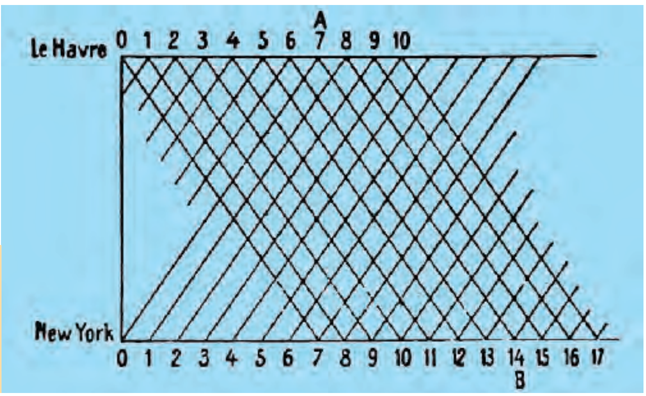


La somme des carrés de trois nombres
impairs consécutifs est égale à trois fois le carré du nombre moyen,
plus 8 (ici, $3^2 + 5^2 + 7^2 = 3 \times 5^2 + 8$).
© Fourrey, 1899

Quand Lucas propose aux jeunes élèves de construire des carrés magiques en remplaçant les nombres par des cartes à jouer, il observe : *« On réalise ainsi, soit avec le jeu de cartes, soit avec le jeu de dominos, soit avec le jeu de loto, un amusement scientifique pour les petits enfants. Les parents et les maîtres leur donneront ainsi, tout en jouant, les premières notions de l'addition. »* L'objectif est de progresser dans l'acquisition du calcul mental, sans avoir recours à l'écriture chiffrée.

Pratiquer verbalement la numération peut paraître surprenant : cela prend le contrepied des récréations de Bachet, qui justement se traitent *« par les nombres »* écrits ; c'est une démarche innovante et mobilisatrice. Une fois la notion de nombre consolidée, les carrés magiques resurgissent ainsi du passé en vertu de la pratique du calcul qu'ils permettent et des processus (nous dirions algorithmes) qu'ils illustrent et qui restent accessibles, car observables.

Laisant exprime pour sa part l'importance de solliciter le regard de l'apprenant, de l'entraîner à observer, à scruter des schématisations qui traduisent « la situation problème » de la récréation. Il rappelle ce problème de traversée de l'Atlantique dû à Lucas : chaque jour, un bateau part de New York pour Le Havre et inversement. Combien d'autres transatlantiques un bateau donné va-t-il croiser durant sa croisière ? Il l'accompagne d'une figure éclairante où la solution (15) « se voit » et n'est pas le produit d'un raisonnement tortueux.

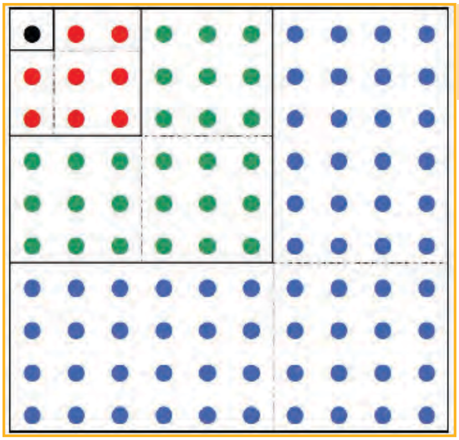



Un problème de rencontres entre navires.
*© Laisant, 1906*

## Mathématiques à manipuler pour attiser la curiosité

Si le dessin est le support privilégié du regard, les objets concrets de la vie courante permettent une pratique récréative basée sur l'expérimentation. Dès le début de son *Initiation*, Laisant insiste sur l'intérêt de faire manipuler des bâtons, des allumettes, des dés pour appréhender la notion de *« nombre concret »*.

Cette pratique récréative des mathématiques procède par exemples génériques, essais successifs, observations de symétries… L'attrait des questions posées sert de moteur à une expérimentation sur les procédés algorithmiques. Laisant propose ainsi de calculer la somme des cubes des $n$ premiers entiers à l'aide de jetons de couleurs. Le cube de 1 est représenté par un seul jeton, le cube de 2 par deux carrés de quatre jetons superposés (qui peuvent être posés sur le plan d'une table, comme les rouges de la figure suivante). Les trois couches de neuf jetons correspondant au cube de 3 sont disposées comme les jetons verts, etc.

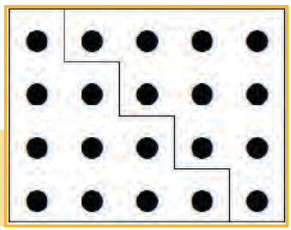


La somme de cubes aplatis.
© Laisant, 1906

L'imbrication des figures formées par les jetons de couleurs différentes permet d'obtenir un puzzle carré de côté $1+2+3+4+\ldots+n$, si bien que

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 = (n(n+1)/2)^2.$$

La somme des $n$ premiers entiers avait été précédemment obtenue par une figure comparable appelée, d'après Lucas, « le vol des grues ».



Le « vol des grues ».
© Laisant, 1906

Avec le choix d'une approche visuelle ou manipulatoire, il y a surtout la volonté de piquer la curiosité, y compris par le jeu. Fourrey présente ainsi le jeu du Piquet. Deux joueurs s'affrontent. Chacun d'eux doit ajouter, tour à tour, un nombre entier strictement inférieur à une limite donnée (par exemple 11) jusqu'à ce que le gagnant atteigne un seuil fixé (mettons 100). La stratégie gagnante est basée sur une suite arithmétique (12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89), qui fournit les nombres à annoncer successivement pour être vainqueur. Par ce support ludique, le jeu incite à une pratique du calcul mental pour l'emporter sur son adversaire.

Les cartes à jouer sont abondamment utilisées par Lucas et sont le support d'autres jeux relevant de progressions arithmétiques. Par exemple une file de crapauds et une file de grenouilles (en même nombre) se retrouvent en sens opposé, nez à nez, séparées par un espace. Il s'agit de permuter les grenouilles et les crapauds, sans reculer, par plusieurs déplacements d'un pas ou de sauts par-dessus un autre amphibien.

Après avoir donné la solution pour deux groupes de 2 (figure ci-jointe), 3 puis 4 et enfin $n$ amphibiens, Lucas donne le nombre minimal de coups nécessaires, soit

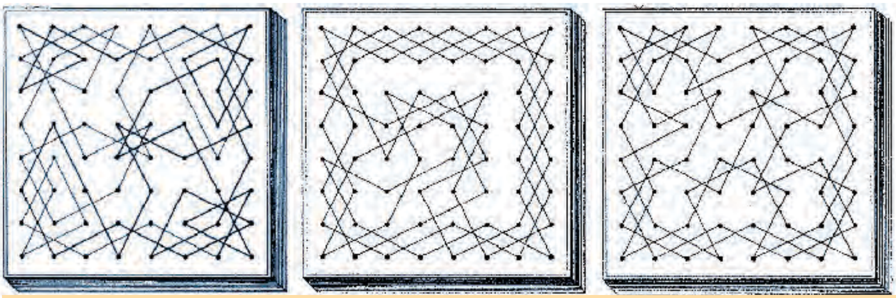
$$2\,[1+2+3+\ldots+(n-1)]+3n \\ = \\ n\,(n+2).$$

Les grands nombres sont l'occasion pour Laisant d'interpeller l'enfant par des valeurs impressionnantes. Lors d'un *« dîner cérémonieux »* entre douze personnes, la question est posée de dénombrer les façons de disposer les invités autour de la table.

C'est l'occasion d'introduire la notion de permutation de $n$ objets : il y a deux façons d'asseoir deux personnes, six d'en placer trois, *etc.*, jusqu'à plus de quatre cent soixante-dix-neuf millions pour le dîner en question.

La rapide progression des valeurs et la conversion en temps effectif (soit ici plus de quinze ans en prenant une seconde par configuration) accompagnent l'approche de ces nombres imposants, qui engage l'élève dans une pratique dépaysante.

De même, Lucas rédige une étude de la Fasioulette, un jeu scientifique *« pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin »*. Cette récréation esthétique attire l'œil et revient au problème d'Euler, soit à parcourir les soixante-quatre cases d'un échiquier à l'aide du cavalier en passant une et une seule fois par chaque case. Il explique dans sa dédicace l'ambition de ces jeux : *« Et lorsque l'heure du travail sonnera à nouveau, apportez encore dans vos études la vivacité et l'entrain que vous mettez en vos jeux. »*



**Quelques figures de résolutions du problème d'Euler.**

*© Lucas, 1889*

Au final, Laisant désire, grâce à son *Initiation mathématique, « libérer l'enfance ! »*. Cela signifie se placer en dehors de tout programme dogmatique, engager une pédagogie novatrice basée sur des expérimentations continuelles, comme le promeut son ami et pédagogue espagnol Francisco Ferrer (1859–1909).

Il y a aussi pour Laisant une dimension sociale forte, liée à son engagement politique, lui qui a été député. Enseigner les mathématiques par les récréations, c'est aussi donner des outils accessibles à tous les éducateurs et les élèves, quelle que soit leur classe sociale, pour initier de manière amusante à des mathématiques utiles à tous au sein de la société.

***J. A.***

## Pour en savoir (un peu) plus :


***Les récréations : des mathématiques à la marge***. Évelyne Barbin, *Les génies de la science* 30, Pour la Science, 2007.

***Mathématiques récréatives. Éclairages historiques et épistémologiques***. Sous la direction de Nathalie Chevalarias, Michèle Gandit, Marcel Morales et Dominique Tournès, EDP Sciences – UGA Éditions, 2019.

***Les preuves sans mots***. Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* 244, février 1998.

# Apprendre et enseigner avec des jeux de société

Nicolas Pelay

Président de Plaisir Maths
www.plaisir-maths.fr

Les jeux sont un formidable levier pour l'apprentissage. L'incroyable richesse et la diversité des jeux mathématiques pourraient laisser penser qu'apprendre de façon ludique serait un… jeu d'enfants. Il suffirait alors de mettre en place des ateliers ludiques dans l'enseignement pour résoudre les problèmes. Il n'en est rien ! En effet, l'utilisation de jeux pour l'enseignement est une activité délicate et complexe : il ne s'agit pas seulement de motiver les élèves mais de trouver comment articuler le plaisir du jeu et les apprentissages mathématiques visés par l'enseignant.

## Ce que permet le jeu mathématique en termes d'apprentissage

Un jeu mathématique est avant tout un jeu, qui doit en premier lieu permettre de vivre et d'éprouver le plaisir du divertissement. Cette activité privilégiée permet de construire des apprentissages à plusieurs niveaux : affectif, social et cognitif.

L'apprentissage fondamental que permet un « bon » jeu mathématique, est de faire prendre conscience que cette discipline peut être amusante. À une époque où elle a une image négative, avec des souvenirs parfois douloureux liés à des expériences difficiles vécues à l'école, il paraît essentiel de montrer que les mathématiques peuvent procurer du plaisir.

On pense souvent aux usages du jeu pour des apprentissages notionnels ou conceptuels ( compétences numériques, construction du nombre, représentation dans l'espace… ), avant même de réaliser que la majorité des blocages des élèves est affectif. Vouloir utiliser prématurément le jeu à des fins didactiques est contre-productif, car les enfants ne sont pas dupes : ils savent ce que c'est de jouer, et ils savent quand on essaie de leur faire passer un exercice déguisé pour un jeu, ou quand on détourne un jeu de société à des fins didactiques. Au contraire, les jeux mathématiques peuvent donner ou redonner confiance, faire éprouver le plaisir de faire des mathématiques, et les dédramatiser.

Cette « première rencontre plaisante et ludique » avec les mathématiques pourrait être le point de départ de tout projet éducatif qui vise à utiliser le jeu dans un projet d'apprentissage, car c'est du plaisir ludique que découleront ensuite tous les bienfaits des jeux mathématiques : motivation, goût pour la réflexion, développement du raisonnement, apprentissages conceptuels…

Le jeu a une fonction sociale importante dans le développement de l'être humain : jouer avec les autres, partager de bons moments, respecter des règles, apprendre à perdre, s'autoriser à se tromper, développer une argumentation sont des compétences que l'on acquiert en jouant. Cette composante sociale est essentielle : elle permet d'instaurer une culture ludique partagée, au sein d'une famille, d'une classe ou même d'une société. On parle de *contrat ludique* : dès lors qu'un jeu commence, un mode de fonctionnement implicite, avec des règles et des codes partagés entre tous, se met en place.

Les jeux mathématiques ont cette formidable capacité de stimuler l'esprit, d'inviter à se poser des questions, de permettre de résoudre des problèmes. Ils facilitent des apprentissages cognitifs à de multiples niveaux* :

- Réflexion, raisonnement, stratégie ;
- Compétences spatiales dans le plan ou l'espace ;
- Compétences numériques et calculatoires ;
- Connaissances conceptuelles mathématiques ;
- Connaissances culturelles et historiques.

S'il est vrai que tout jeu mathématique est porteur d'apprentissages potentiels, la question est d'identifier la nature exacte de ces apprentissages pour un enfant donné, et de savoir s'ils vont vraiment se réaliser en situation pour un projet didactique. C'est bien à cette question centrale que se trouvent confrontés les enseignants qui souhaitent utiliser le jeu avec une perspective éducative, pédagogique ou didactique !

## L'équilibre à trouver entre les pôles ludique et didactique

Le fait de devoir réaliser les objectifs d'un programme scolaire change fondamentalement la façon dont l'enseignant va pouvoir mener une activité ludique avec des élèves. Ce dernier est en effet placé face un double objectif : permettre aux élèves de jouer et prendre du plaisir ( pôle ludique ) et enseigner des notions mathématiques particulières ( pôle didactique ). Cela induit une certaine instabilité :

- Soit l'enjeu ludique l'emporte sur l'enjeu didactique : les enfants jouent mais ne sont pas en train d'apprendre la notion mathématique que l'enseignant visait ;

*Pour entrevoir un plus large éventail des possibilités, nous renvoyons à l'article suivant de Joëlle Lamon, qui propose un tour d'horizon des jeux, de la maternelle au collège.

• Soit l’enjeu didactique l’emporte sur l’enjeu ludique : l’enseignant dirige l’activité en fonction des objectifs qu’il a fixés, avec la possibilité que l’activité ne soit plus vécue par les enfants comme un jeu (détournement didactique).

Cette recherche d’équilibre est conceptualisée en didactique des mathématiques par le contrat didactique et ludique : tout se passe comme si l’enseignant faisait varier, au cours de son activité, un curseur entre le pôle ludique et le pôle didactique.

Sur une année scolaire, un enseignant dispose d’un espace donné et d’un temps contraint. Avec des classes de trente élèves, il va devoir en outre composer avec des aspects affectifs et sociaux, ce qui nécessite des adaptations dans l’organisation et la gestion de sa classe pour que les élèves parviennent à jouer en groupe et dans le calme, à respecter les règles et le matériel… C’est pourquoi certains jeux de société sont conçus spécifiquement par des enseignants et des chercheurs pour être utilisables en classe.

## Jouer pour réinvestir des connaissances

Apprendre à compter ou mémoriser ses tables demande du temps, cela nécessite des activités régulières et répétitives, qui peuvent sembler fastidieuses, mais qui peuvent être aussi finalement très agréables si elles sont faites de façon ludique. Les activités dites *de réinvestissement* sont particulièrement propices à l’utilisation du jeu, car les enjeux didactiques ne sont pas trop importants, et les enfants apprécient de consolider leurs connaissances par le jeu. On trouve ainsi de nombreux jeux numériques.

Numéricards, pour les grands nombres.
*© Lorin Walter, 2018*



Détective Mathéo, pour les opérations élémentaires.
*© Cat’s Family, 2013*

## Rituels ludiques pour construire des connaissances

L’apprentissage des mathématiques se faisant sur sur un temps long, il est nécessaire de ritualiser certaines activités, notamment dans le domaine du calcul et du développement des opérations élémentaires (addition, soustraction, division, multiplication). Dans ces conditions, il peut être très pertinent d’utiliser un jeu de façon régulière afin de développer des compétences sur le moyen et sur le long terme. La durée de jeu peut être très courte (quelques minutes), et l’enseignant peut introduire différents enjeux didactiques tout au long de l’année à partir d’un même jeu.

Mathador (Canopé, 1999), aujourd’hui très diffusé dans les écoles, est un bon exemple. C’est un jeu de calcul destiné aux élèves de 7 – 15 ans dans l’esprit du jeu Le compte est bon : il s’agit d’obtenir un nombre cible en utilisant des entiers déterminés par les valeurs des dés. Son intérêt didactique est de permettre de développer des habiletés de calcul mental, et son originalité (qui fait son intérêt ludique) repose sur le fait que les joueurs gagnent plus ou moins de points selon la complexité du calcul réalisé : le maximum de points est obtenu si le nombre cible est obtenu avec les quatre opérations usuelles. Initialement conçu comme un jeu de plateau, il existe aujourd’hui une version numérique de Mathador.

Mathador Flash, version « poche » de Mathador, pour le calcul mental.
*© Canopée–L2D, 2016*

## Jouer pour construire des notions mathématiques au programme

Construire de nouvelles notions mathématiques est un enjeu important de l’enseignement, notamment dans le domaine de la construction du nombre et de la géométrie. Aborder de nouvelles notions par le jeu peut être délicat car les enjeux didactiques peuvent facilement l’emporter sur les enjeux ludiques.

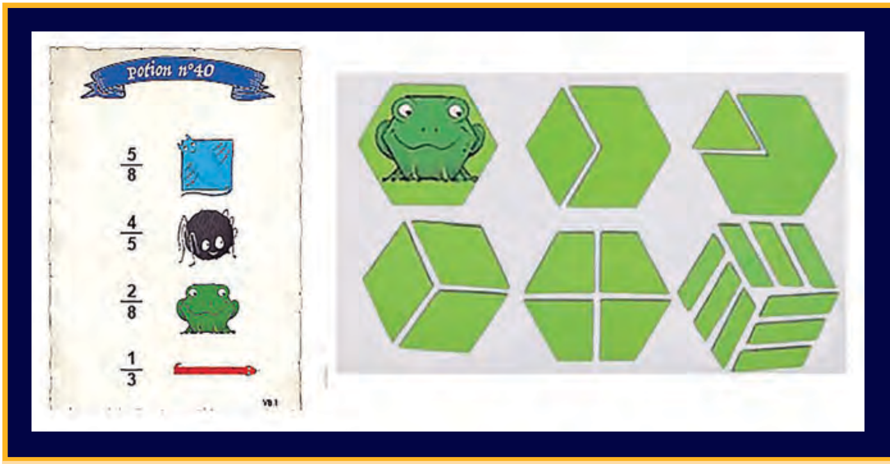
L’atelier des potions a été conçu dans le but de trouver un équilibre entre le pôle didactique et le pôle ludique. Conçu pour apprendre les fractions en s’amusant et en manipulant, il est devenu en 2018 le premier jeu mathématique primé à Educaflip, un label qui récompense des jeux à fort potentiel d’apprentissage.

L’objectif de ce jeu est que chaque enseignant puisse le mettre en place tout au long de sa séquence sur les fractions avec des buts précis et selon différents types d’organisation (en individuel, par petits groupes, en classe entière).


L’atelier des potions, pour l’apprentissage des fractions.

*© Plaisir Maths, 2018*

Dans L’atelier des potions, les joueurs sont des apprentis sorciers et sorcières qui concoctent des potions magiques pour devenir des maîtres des potions en gagnant des points de magie. Un découpage particulier des ingrédients a été réalisé, et les cartes sont conçues pour permettre des apprentissages spécifiques (fractions simples, fractions supérieures à 1, équivalence de fractions, somme de fractions, etc.) tout en maintenant les enfants dans une phase ludique.




La carte 40 est spécifique à la simplification des fractions. Pour obtenir deux huitièmes de grenouille, il est nécessaire que l’enfant comprenne que 2/8 peut s’obtenir avec la pièce « 1 / 4 de grenouille ».

*© Plaisir Maths, 2018*

## Une pratique qui se diffuse de plus en plus

Utiliser des jeux de société pour apprendre des mathématiques est une pratique qui se diffuse de plus en plus, que ce soit à l'école ou en famille, et qui permet de rendre les mathématiques amusantes et plaisantes pour le plus grand nombre. Ce changement d'approche des mathématiques prend du temps et ne pourra se faire que par une diffusion plus massive des actions de diffusion auprès du grand public et des enseignants : expositions (Mathissime par l'association Cap Sciences…), lieux dédiés (Salon Culture et Jeux Mathématiques, Maison des mathématiques et de l'informatique à Lyon, Maison Fermat à Beaumont-de-Lomagne), chaînes Youtube, associations de diffusion (cafés associatifs…) sont des moyens de diffusion privilégiés. D'autres encore restent sans aucun doute à inventer !

Les jeux mathématiques ont aussi bien leur place dans la famille que dans l'école : parents et enseignants peuvent partager cet objectif commun de rendre cette discipline tant redoutée attrayante et amusante ! Le reste suivra.

***N. P.***

### Pour en savoir (un peu) plus :

***Jouer/apprendre.*** Gilles Brougère, Economica, 2005.

***Manipuler et expérimenter en mathématiques : comprendre les difficultés des élèves pour mieux les résoudre***. Thierry Dias, Magnard, 2012.

***Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique.*** Thèse en didactique des mathématiques, 2011, Nicolas Pelay.

# Jeux de la maternelle au collège : tour d'horizon

Joëlle Lamon

Enseignante et chercheuse à la Haute École Francisco Ferrer, Bruxelles

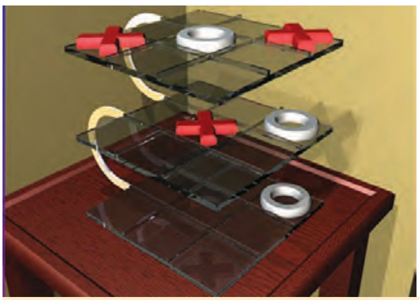
Responsable du site « Jeux mathématiques à Bruxelles», *www.jeuxmath.be*

Certains jeux constituent un matériel pédagogique hors pair pour l'enseignant qui en connaît les possibilités : le go, le poker, le bridge, Mastermind (Mordecai Meirowitz, 1971), Trio (Ravensburger, 1989)… Intéressons-nous à quelques autres, parfois moins connus, choisis pour la richesse de leurs possibilités à différents niveaux d'enseignement.

## Appréhender le plan et les trois dimensions de l'espace

Vous connaissez tous le Puissance 4, ce classique créé par Howard Wexler et édité dès 1974 par la Milton Bradley Company (MB). Mais avez-vous déjà joué au Puissance 4 à trois dimensions ? Paradoxalement, ce jeu est pourtant antérieur au premier ! En effet, il est apparu en 1968 aux États-Unis, sous le nom de Score Four. Il a été commercialisé sous les noms de 4 en ligne 3D, et de Tic Tac Toe 3D, son nom le plus courant actuellement.

Son principe est très simple : il s'agit d'être le premier à aligner quatre billes consécutives de sa couleur, dans n'importe quelle direction de l'espace. La simplicité de la mise en place et la beauté du matériel aident à s'engager rapidement dans le jeu, ce qui est un atout en classe. En outre, ces règles particulièrement faciles à comprendre permettent de commencer à y faire jouer dès le plus jeune âge (5 à 6 ans).



Une présentation du Tic Tac Toe 3D.

© CGTrader, 2016

photo J. Lamon

Souvent, au début, les enfants les plus jeunes placent plutôt les billes dans un plan horizontal, et sans tenir compte de ce que fait l'adversaire. Progressivement cependant, le joueur apprend d'une part à prendre en compte le jeu de l'autre, premier élément de la construction d'une stratégie, et d'autre part à placer des billes verticalement, puis en diagonale, en développant progressivement sa vue dans l'espace.

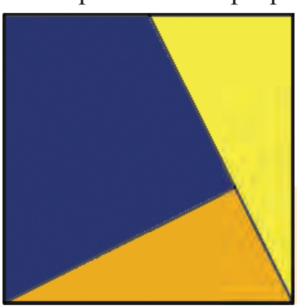
Que ce soit pour placer ses billes, ou pour repérer les alignements en construction chez l'adversaire, les joueurs sont obligés de changer de point de vue, ce qui est amplifié par le fait de pouvoir aligner ses billes en diagonale. Ce jeu aide donc s'orienter et se repérer dans un espace fini, celui du plateau de jeu.

Se construire une stratégie et anticiper celle de l'autre développent l'observation, la réflexion et l'anticipation, le tout se faisant en général mentalement, ce qui incite à mémoriser les alignements potentiels de chacun. Il existe une application pour tablettes, Qubic : Tic-tac-toe 4x4x4, permettant de s'entraîner en jouant contre l'ordinateur. Il est étonnant qu'il n'y en ait pas plus, comparativement à la foule d'applications existantes pour le jeu de Puissance 4 classique…

Plus tard, le jeu peut être utilisé pour expliquer les coordonnées dans l'espace, pour chercher des représentations à deux dimensions, par exemple en vue de créer des défis, pour garder une trace d'une partie, pour jouer sans le matériel, une fois que celui-ci est bien connu, ou tout simplement pour le plaisir de trouver un système de codage ou de notation des parties jouées.

## À la découverte de la géométrie, des polygones, des aires…

Le puzzle suivant est sans doute l'un des plus simples que l'on puisse imaginer. À partir des trois figures géométriques élémentaires que sont les deux triangles et le quadrilatère, il s'agit de reconstituer le carré. Les multiples possibilités offertes par le puzzle en font un outil didactique de choix, facile à transporter et à dupliquer. Il permet dans un premier temps de découvrir des polygones, convexes ou non, et de les nommer. Ce type d'activité est une belle occasion de susciter la créativité des élèves pour trouver de nouvelles figures.



Le puzzle à trois pièces, couteau suisse de l'enseignant en mathématiques à l'école primaire et au collège.

© J. Lamon

Ensuite, on peut se focaliser sur les quadrilatères et sur le triangle rectangle. En effet, les trois pièces du puzzle permettent de construire, outre le carré de départ, un rectangle, un triangle rectangle, un parallélogramme, un trapèze isocèle, et enfin un trapèze quelconque : autant de figures géométriques particulières qui peuvent dès lors être analysées pour la richesse de leurs propriétés.

Disposer de ce matériel est également intéressant pour faire découvrir des formules d'aires, une fois celle du rectangle établie, sans négliger cependant les généralisations, par exemple pour le triangle ou pour le trapèze. L'idée est de rechercher à chaque fois le lien entre la forme étudiée et le rectangle.

Faire construire le puzzle sur papier avec précision ou à l'aide d'outils numériques comme GeoGebra (Markus Hohenwarter *et al.*, 2018) sera en outre l'occasion de revoir les constructions géométriques de base.

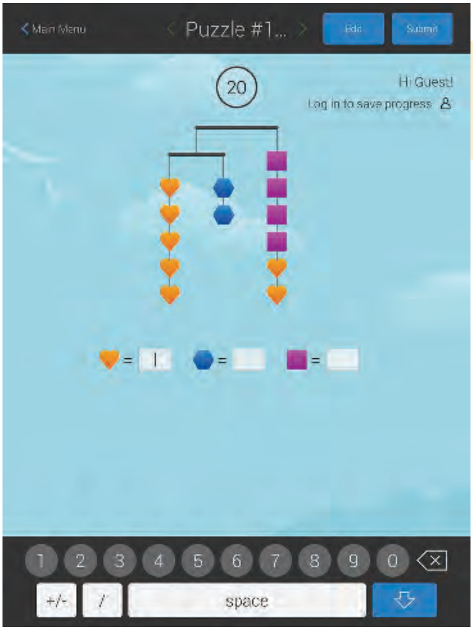
Enfin, ce matériel offre une belle porte d'entrée aux transformations du plan, par exemple en cherchant les transformations permettant de passer du carré de base à une autre figure, avec puis sans manipulation des pièces. Ces transformations peuvent également être construites sur papier ou à l'aide d'outils numériques, ce qui est l'occasion par exemple de découvrir de nouvelles fonctions du logiciel libre de géométrie dynamique GeoGebra.

Pour terminer, le calcul des mesures des côtés et des angles sera une occasion d'appliquer des notions de trigonométrie.

## Opérations sur les nombres, calculs, égalités, inégalités

Aux côtés de la géométrie et de l'étude des formes, l'autre grand thème présent dans tout le cursus de mathématiques est celui du nombre. Dès qu'il s'agit des opérations sur les nombres, l'une des difficultés de l'enseignant est d'assurer un retour à chaque élève sans donner la réponse. Ceci explique le succès de nombreuses applications d'exercices sur tablettes ou en ligne, appelés *exerciseurs*, où la correction est immédiate. Parmi celles-ci, certaines sont plus ludiques que d'autres, ou correspondent à de vrais jeux, comme Trio (voir sur le site du collège Albert-Camus de Frontenay-Rohan-Rohan, dans les Deux-Sèvres, onglets Disciplines, Mathématiques, Pour se divertir, puis Trio : la finale, en deuxième page) ou le jeu vedette Mathador (Réseau Canopé, 2016, **https://www.mathador.fr**), créé par Éric Trouillot en 1998.

Une application pour iPad, SolveMe Mobiles (Education Development Center Inc., 2014), librement accessible en ligne à l'adresse **https://solveme.edc.org/mobiles**, retient notre attention. Elle offre en effet la particularité de ne faire apparaître aucun calcul, mais simplement une égalité à établir en donnant une valeur numérique à différents symboles. L'égalité est visualisée sous la forme de balance, qui penche du côté du nombre le plus élevé en cas d'erreur, sans indiquer la réponse.




SolveMe Mobile, un outil de réflexion sur les nombres.
*© Education Development Center Inc., 2014*

Son aspect ludique permet à de jeunes enfants dès le CP de l'utiliser. Progressivement apparaissent des nombres plus grands, négatifs ou fractionnaires. Il est même possible de construire de nouveaux défis (option Build) ou d'avoir accès à des défis créés par d'autres (onglet SolveMe Community).

L'intérêt de ce jeu individuel est multiple : construire le concept d'égalité et d'inégalité, opérer sur des nombres, préparer aux équations, commencer à les manipuler. Comme il est possible d'écrire sur l'écran, on peut avoir une trace du raisonnement de l'élève, par exemple en faisant une capture d'écran, ou bien encourager l'entraide entre élèves, ou encore lui fournir une indication. De plus, la possibilité de créer soi-même de nouveaux défis permet d'atteindre des niveaux de difficulté assez élevés.

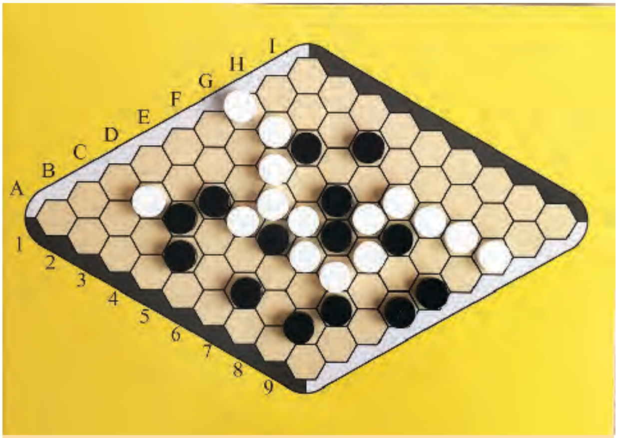
Pour le moment, cette application n'aborde malheureusement pas les nombres décimaux. Mais peut-être qu'une prochaine version en tiendra compte !

Côté tablettes, on retiendra AB Math (Nicolas Lehovetski, 2011) et Mathador (Canopé Besançon et Akrio, 2014) pour le calcul mental, DragonBox SliceFraction (Ululab, 2014) pour la mentalisation des fractions.

# Hex, un jeu de stratégie accessible à tous

Parmi la grande variété de jeux abstraits, pour deux joueurs, permettant de développer l'attention, la réflexion, l'anticipation et la construction de stratégies, le jeu de Hex est certainement le plus accessible, grâce à la grande simplicité de ses règles, tout en permettant aux joueurs expérimentés d'y trouver du plaisir.

Hex a été créé par Piet Hein en 1942, puis repris en 1948 par John Nash, qui lui a donné son nom. Le Comité International des Jeux Mathématiques en a proposé une nouvelle édition en 2010. Il se joue sur un plateau en forme de losange et ses cases sont hexagonales. Chaque joueur, alternativement, pose un pion de sa couleur ; le premier à avoir joint les deux bords de sa couleur a gagné. Le joueur qui a les pions blancs commence, ce qui lui donne un avantage. Lors de sa prise de décision, chaque joueur connaît parfaitement l'intégralité de ses possibilités d'action, celles de son adversaire, les gains résultant de ses actions et les motivations de son adversaire. On dit que Hex est un jeu à *information complète*.




Une partie gagnante au jeu de Hex :
les blancs ont gagné.

*© J. Lamon*

Hex peut être proposé à partir de 6 ans, ce qui permet de faire jouer librement et de construire progressivement une stratégie, et ce d'autant plus vite que les coups d'attente font souvent perdre la partie. Il a également pour avantage qu'une partie n'est jamais nulle, ce qui peut d'ailleurs se démontrer mathématiquement. En effet, si l'on va au bout d'une partie et que tous les pions sont posés, l'un des deux joueurs l'emporte ! Cela se prouve rigoureusement. Mieux encore : on démontre (par l'absurde, donc à l'aide d'un raisonnement

non constructif) qu'il existe nécessairement une stratégie gagnante pour les blancs. Une telle stratégie n'a jamais pu être produite pour des plateaux de grandes tailles, ce qui n'empêche pas l'ordinateur de battre régulièrement l'humain à plate couture. Essayez de vous mesurer en ligne à Hexilla (Jonatan Rydh, 2009) pour vous en convaincre… . Pour le jeu de Hex, les règles sont simples, le jeu est à information complète, il n'y a pas de hasard. Il peut donc être étudié à l'aide de la théorie des jeux et formalisé mathématiquement. C'est une porte d'entrée privilégiée pour aborder
rapidement des éléments de culture mathématique (raisonnement, théorie des jeux, décision). Enfin, il est aisé de modifier la taille du plateau de jeu, ce qui permet soit de développer le raisonnement logique dans des situations simples pour les plus jeunes (avec un plateau plus petit), soit de le complexifier pour des joueurs avancés (avec un plateau plus grand), ce qui fait que chacun peut y trouver un défi à sa portée.

Il n'y a pas que la logique, l'arithmétique ou la géométrie qui se prêtent à merveille à des approches ludiques. Tous les pans des mathématiques sont concernés ! Le jeu de société Set (créé par Marsha Falco en 1974, Gigamic), très populaire en Grande-Bretagne, permet d'initier à la combinatoire. Les jeux de plateau Triolet (DJ Games, 1996, As d'or du meilleur jeu de société à Cannes au Festival international du jeu), Multiplay (Canopé et L2D, 2004) et Mathador ont fait leur preuve en matière de calcul mental. Lights Out (Tiger Toys, 1995) est idéal pour aborder l'algèbre linéaire…

À l'heure où l'on parle de plus en plus de la nécessité d'engager chaque élève dans ses apprentissages, le jeu offre, on le voit, une porte d'entrée extraordinaire aux mathématiques, pour autant que l'enseignant soit conscient de ses possibilités et pense à faire les liens entre ceux-ci et les apprentissages.

***J. L.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***Motivez les enfants par le jeu.*** Renauld Keymeulen, Michel Van Langendonckt et Coralie Massin, De Boeck, 2018.

***Les mathématiques par le jeu, du plaisir à l'apprentissage.*** Eduscol, 2016, disponible en ligne.

***Des jeux pour enseigner les mathématiques.*** Joëlle Lamon, *Tangente Éducation* 47, 2018.

***Des jeux sur tablette pour apprendre les maths.*** Joëlle Lamon, *BGF Mag* 3, 2018.

# Jeux numériques et apprentissage des mathématiques

Laurence Schmoll

Université de Strasbourg,
LiLPa (EA1339–Linguistique, langues, parole)

La notion de jeu numérique recouvre des réalités assez différentes. Les critères qui permettent de rassembler les différents types de jeux numériques dans cette catégorie sont que le support proposé présente un caractère ludique et l'utilisateur y joue par l'intermédiaire d'un écran en actionnant tout ou partie de son corps (le bras, la main, le doigt ou même la voix), à l'aide ou non de périphériques d'interactivité comme une souris ou une manette. Le caractère ludique se manifeste à travers à travers des mécanismes de jeu plus ou moins complexes : pression du temps, récompenses, progression dans des niveaux, énigmes à résoudre, épreuves à surmonter, compétition, coopération, exploration, constitution d'une communauté…

## Des mécanismes ludiques pour engager pleinement le joueur

Les jeux numériques sont aussi nombreux et variés que les différents types de supports informatiques existants associés à des mécanismes ludiques de toutes sortes. Les jeux peuvent être aussi bien de réflexion (jeux de stratégie, jeux de logique, jeux de manipulation, jeux d'exploration…) ou d'action (jeux de rôle, jeux d'aventure, jeux de tir, jeux de rapidité…). Les premiers peuvent sembler plus pertinents pour l'apprentissage, notamment des mathématiques, mais il est tout à fait possible de trouver également des jeux d'action avec une visée d'apprentissage. Le jeu doit permettre au joueur de s'investir suffisamment pour qu'il puisse se divertir, éprouver une forme de plaisir. Même si au final c'est le joueur qui décide s'il s'amuse ou non, si le support qu'il utilise ou l'activité qu'il est en train de faire est un jeu, l'objet ou l'activité en question doit contenir suffisamment de mécanismes ludiques pour faire en sorte d'engager le joueur. La notion d'action est particulièrement importante dans la définition du jeu : l'utilisateur doit pouvoir prendre des décisions, faire des choix ou tester son habileté. Ces éléments ont des conséquences sur la réussite ou l'échec du jeu. Celui-ci ne se définit donc pas seulement par une identité visuelle et sonore forte, bien qu'elle puisse revêtir un attrait ludique non négligeable aux yeux de certains utilisateurs. Un site, comme BrainPop (FWD Media Inc., 1999–2019, fr.brainpop.com), dont la section « Mathématique » est assez fournie, ne peut ainsi pas être considéré comme une plateforme proposant des jeux numériques car il ne propose que des vidéos accompagnées de quiz.

## Les jeux numériques pour l'apprentissage

Concernant l'apprentissage, il existe différentes modalités du jeu numérique à visée sérieuse. En partant du plus sérieux pour aller vers le plus ludique, on trouve ainsi les simulations pédagogiques, les applications ludoéducatives, les jeux vidéo d'apprentissage et les jeux vidéo de divertissement détournés dans un but pédagogique.

### Les simulations pédagogiques

La simulation correspond à une reproduction, souvent simplifiée, de la réalité, dans laquelle on peut être immergé ou avec laquelle on peut interagir. Elle a pour caractéristique de proposer un environnement sensoriel (sonore, visuel), que l'utilisateur peut modifier, soit en changeant d'angle de vue, soit par une interactivité prévue. Il s'agit en réalité davantage d'une ressource interactive que d'un jeu car les seules règles qu'on y trouve sont celles propres à l'environnement ; il n'y a pas réellement de mécanismes ludiques mis en œuvre en son sein.

Les simulations pédagogiques sont particulièrement adaptées pour la géométrie, mais aussi pour d'autres concepts comme les fractions ou les mesures. Le site Édumédia (eduMedia, junior.edumedia-sciences.com/fr) en propose un certain nombre. D'autres simulations sont disponibles en ligne, comme le Café des Mathadores (Groupe média TFO, f.tfo.org/mathadores), à destination du cycle 2, qui propose quatre activités ludiques dans le contexte d'un café (répartir des biscuits de façon égale, assembler la monnaie pour payer l'addition…).


Grandeurs et mesures
(peser des objets avec une balance).
Cette activité est reproductible dans la réalité.
© eduMedia

À un niveau plus élevé, il existe des simulations, comme celles proposées sur le site de Patrick Moisan (patrickmoisan.net/copains/accueil.html), pour travailler sur les plans cartésiens ou sur les fonctions en manipulant des voitures sur une piste de course ou sur un plan incliné.

## Les logiciels et applications ludoéducatifs

Les applications ludoéducatives se trouvent en général en ligne et sont plutôt conçues pour un public jeune. Elles alternent des séquences purement ludiques et des séquences d'entraînement ou d'apprentissage, les deux étant séparées mais pouvant avoir une relation de cause – conséquence ou plutôt ici de réussite – récompense. Si le joueur réussit une séquence d'entraînement, il débloque l'accès à un jeu. Dans Madagascar Math Ops (Knowledge Adventure Inc., 2014), qui reprend l'univers et les personnages du film de DreamWorks, les pingouins doivent sauver d'autres animaux kidnappés en résolvant des additions, des soustractions ou des multiplications (partie consacrée au calcul mental). Chaque bonne réponse permet de remplir l'« Equationator » d'énergie afin de propulser des missiles qui viendront détruire les cages dans lesquelles les animaux sont enfermés (partie ludique).


Séquence d'entrainement
dans Madagascar Math Ops


Séquence de jeu
dans Madagascar Math Ops

©Knowledge Adventure Inc.

## Les jeux vidéo d'apprentissage (learning games)

Au contraire des applications ludoéducatives, l'approche du jeu vidéo d'apprentissage (ou *learning game*) consiste à intégrer, au moment de la conception, les contenus pédagogiques au scénario de jeu. Les éléments sérieux et ludiques sont indissociables.

Par exemple, Au défi (Groupe Média TFO, 2013, audefi.tfo.org/jeu/labyrinthe-equation) est un jeu de labyrinthe au sein duquel le joueur doit mouvoir un personnage pour activer des opérateurs et des chiffres afin d'atteindre le plus rapidement possible le nombre demandé par un arbitre.

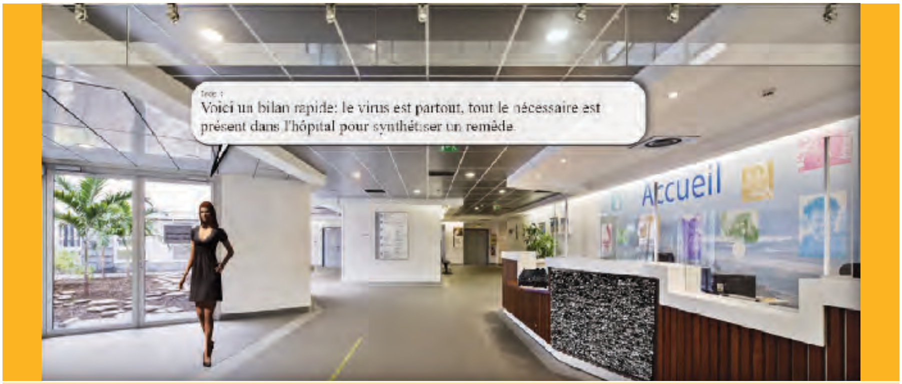
Côté géométrie, Droite Ninja (C. Piva, 2018, logicieleducatif.fr) entraîne à la manipulation des demi-droites, droites, segments, parallèles et perpendiculaires dans un environnement sonore et thématique ninja.


Tracer des droites
pour manier le sabre.
©Piva, C. / logicieleducatif.fr, 2018

Dans Fin Lapin 3 (Alloprof, alloprof.qc.ca/FinLapin), le joueur anime un lapin en résolvant des multiplications, des additions, des soustractions et des divisions. Plus le joueur répond rapidement, plus le lapin réussit ses épreuves, notamment des courses de vitesse.


À la poursuite du vilain bousier
avec Fin Lapin 3.
©Alloprof, s.d

The Walking Maths (Asius, Jadoul, Lemoine, Michau, 2018, jawa.fr/standalone/1127/index.html) immerge le joueur dans un hôpital au sein duquel il doit synthétiser un antidote contre un virus qui transforme la population en zombie. Au cours de l'aventure, il est amené à résoudre différents problèmes calibrés pour des élèves de collège en fin de cycle 4, impliquant des probabilités, des fonctions affines, de l'algorithmique ou encore les théorèmes de Thalès et de Pythagore.




Entrée dans l'hôpital et découverte de la mission

*©Asius et al., 2018*

### Le jeu vidéo de divertissement détourné dans un but pédagogique

L'emploi de jeux vidéo de divertissement détournés dans un but pédagogique (ou *serious gaming*) est une pratique moins courante au sein d'un cours : elle nécessite de la part de l'enseignant une bonne connaissance des jeux vidéo, ainsi qu'un travail, souvent de longue haleine, pour les « didactiser » (choix et définition des objectifs et des contenus, conception d'activités, de missions, d'un scénario ou d'une feuille de route permettant aux élèves de découvrir ou de pratiquer tout en jouant).

## Intérêts et limites des jeux numériques pour l'enseignement-apprentissage

Le jeu présente de nombreux avantages pour l'enseignement–apprentissage. La littérature scientifique met en avant son potentiel motivationnel et ses caractéristiques (socio)constructivistes : l'apprenant est amené à chercher par lui-même, essayer, expérimenter, coopérer pour atteindre un objectif. Même si le jeu peut imiter la réalité, les joueurs–apprenants savent faire la part des choses et ils n'ont par conséquent pas peur de se tromper, de faire des erreurs. Le jeu peut donc fortement atténuer l'insécurité des élèves quant à leurs représentations de leurs capacités, et même les engager suffisamment pour qu'ils répètent avec plaisir la même action jusqu'à la réussite du jeu (ce qui, si l'activité encadrant le jeu est bien pensée, implique également ou la compréhension ou l'appropriation des contenus d'apprentissage).

La spécificité du jeu numérique, comparé à des jeux plus « traditionnels », repose sur son potentiel immersif. Par son caractère multicanal (puisqu'il conjugue son, image et texte) et interactif, le joueur est immergé dans un environnement sensoriel sur lequel il peut agir. Ces deux spécificités du jeu vidéo permettent non seulement de répondre à tous les profils d'acquisition (apprenants visuels, auditifs, kinesthésiques) mais aussi de leur faire vivre une expérience totale, génératrice d'actions et d'émotions qui vont faciliter la découverte, la prise de décision et la mémorisation.

Ce serait cependant faire preuve d'angélisme que de considérer que le fait d'employer un jeu numérique en classe est la clé d'un succès garanti. Déjà, de nombreux jeux numériques à vocation pédagogique associent difficilement les mécanismes ludiques et les objectifs et contenus sérieux, proposant de ce fait des produits plus proches de l'exercice que du divertissement. Qui plus est, l'élève peut tout à fait considérer que l'objet qui lui est proposé, surtout s'il a été conçu dans un but d'apprentissage, n'est pas un jeu mais un support pédagogique comme un autre, surtout si c'est l'enseignant ou le parent qui le propose. Il faut également prendre en considération le facteur de la nouveauté. Le support peut représenter un attrait certain lors des premières utilisations, mais une fois passé l'effet de nouveauté, il est possible que l'intérêt pour ce type d'activité diminue pour finir par être considéré comme une activité parmi d'autres.

Pour finir, la plupart des jeux numériques existants pour l'apprentissage des mathématiques s'adresse plutôt à un public de primaire et se concentre sur un entraînement aux opérations arithmétiques basiques. Le jeu vidéo pour enseigner et apprendre les mathématiques *via* un scénario engageant et ludique, à l'image de The Walking Maths, reste donc encore un champ à explorer et à développer.

***L. S.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***Les jeux sérieux***. Dossier de Canopé, disponible en ligne : cndp.fr/crdp-reims/index.php?id=2237.

***Apprendre avec le jeu numérique***. Portail national de ressources Éduscol : eduscol.education.fr/jeu-numerique.

***Répertoire de sites éducatifs pour les élèves du préscolaire et du primaire***. La souris-Web : lasouris-web.org/primaire/math.html.

***Jeux sérieux gratuits***. Thot cursus, formation et culture numérique, rubrique « Mathématiques » : cursus.edu/formations/20912.

# Les conjectures, moteur des mathématiques

Élisabeth Busser

Mathématicienne,
rédactrice pour le magazine *Tangente*

Faire des hypothèses, en un mot « conjecturer », est à la base de bien des jeux. Les mathématiques elles-mêmes se sont souvent construites à partir d'hypothèses plus ou moins hasardeuses, de suspicions, d'intuitions… bref, de conjectures.

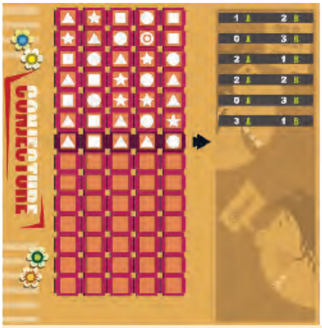
*« Je suis une conjecture. Maman dit que, quand je serai grande, je serai un théorème. »* Cette phrase, énoncée sérieusement par un petit bout de chou dans un dessin humoristique, traduit bien la réalité du mot « conjecture ». C'est un résultat que l'on espère vrai, qui est souvent vérifié sur de nombreux cas, mais jamais vraiment démontré rigoureusement. *Conjecturer,* c'est faire l'hypothèse que ce résultat est vrai. Les premières conjectures, l'enfant les fait en jouant, en faisant des expériences, en tâtonnant, en découvrant le monde. C'est plus tard qu'il les rencontre en mathématiques, soit parce qu'elles viennent d'être démontrées et que la presse s'en fait l'écho, soit parce qu'on s'y heurte encore et qu'on cherche toujours. C'est précisément cette recherche qui a, dans bien des cas, fait progresser les mathématiques.

## Conjecturer pour jouer, c'est déjà faire des mathématiques

Un jeu répandu et simple, où conjecturer amène à la victoire, c'est le Tic-tac-toe, ou Morpion. Sur une grille 3 × 3, deux adversaires s'affrontent, à coup de croix et de ronds, chacun tentant d'aligner ses trois mêmes symboles. Et les hypothèses de s'échafauder, conjectures élémentaires : si je me mets ici, il va se mettre là, oui mais si je me mets là, il pourra alors aligner ses trois pions.

**Un jeu de Tic-tac-toe.**
*© ThamBlog, 2015*

Un autre jeu, très connu lui aussi, demande plus de finesse dans les hypothèses, qui deviennent de véritables conjectures : le Mastermind (Hasbro, 1972). Il s'agit de deviner, en un nombre d'essais fixé, la place exacte, sur une ligne, de cinq pions de couleur, connaissant seulement à chaque essai le nombre de pions bien placés et celui des pions de la bonne



couleur mais mal placés. Il en existe plusieurs versions gratuites en ligne, et l'une d'elles porte bien son nom puisqu'elle s'appelle précisément… Conjecture (Jeuxclic.com, 2008). Par rapport au Mastermind, les pions de couleur sont remplacés par cinq pièces différentes (toutes représentées sur le deuxième essai ci-contre). Jouer, c'est donc bien souvent passer par l'étape « conjecture », et conjecturer, c'est déjà faire des mathématiques.

Une partie de Conjecture gagnée en sept essais (sur quatorze tentatives autorisées).
« A » indique le nombre de pièces bien placées, « B » le nombre de pièces correctes mais mal placées.

*© Jeuxclic.com, 2008*

## *« Un continent dont l'humanité serait assurée de l'existence »*

Il est en mathématiques des conjectures qui ont joué un grand rôle, par leur attrait ou par l'apport que la recherche de leur démonstration a amené. *« Imagine un continent dont l'humanité entière serait assurée de l'existence et auquel on ne trouverait aucun moyen d'accès ; voilà ce qu'est une conjecture mathématique ! »* écrit Denis Guedj dans le *Théorème du perroque*t (Points, 2000).

Une des conjectures les plus célèbres des mathématiques depuis l'Antiquité, au point que son nom est passé dans le langage courant pour désigner une situation impossible ou inextricable, est celle de la *quadrature du cercle* : il serait impossible de construire, à la règle et au compas dans le plan euclidien, en un nombre fini d'étapes, un carré d'aire égale à celle d'un disque donné. Les mathématiciens se sont acharnés durant des siècles sur cette affirmation. Il faudra attendre le début du XIX[e] siècle pour trancher la question et démontrer l'impossibilité en question.

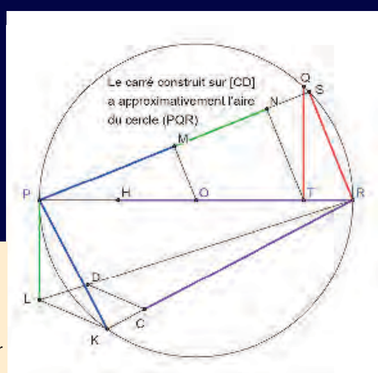
Vers 1621, le magistrat et mathématicien toulousain Pierre de Fermat posa « sa » conjecture : *« Il est impossible, écrit-il en marge de son exemplaire des Arithmétiques* de Diophante*, de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir. »* Non seulement on n'a jamais retrouvé trace de la démonstration, mais c'est en 1994 seulement qu'une preuve complète a été élaborée, par le mathématicien britannique Andrew Wiles : la célèbre conjecture est devenue théorème de Fermat–Wiles. La preuve de ce joli résultat arithmétique s'inscrit pleinement dans la recherche contemporaine : Wiles a en fait démontré qu'une conjecture fondamentale et redoutable (dite de *Taniyama – Shimura*) était vraie, et l'on savait que cette dernière impliquait l'énoncé de Fermat. La conjecture de Taniyama – Shimura fait elle-même partie d'un vaste édifice encore largement conjectural, le *programme de Langlands*, sur lequel travaillent avec acharnement plusieurs centaines de mathématiciens professionnels depuis des décennies. Les progrès obtenus ces dernières années sont sensationnels et prometteurs, mais le chantier reste encore largement en friche.


*Timbre émis pour célébrer la démonstration de la fameuse conjecture énoncée par Fermat.*
*© La poste, 2001*

## La quadrature du cercle : un puissant moteur

Quoi, un résultat non démontré, ça existe en mathématiques ? Oui, et pire que cela : la recherche de la démonstration, plus précieuse bien souvent que la démonstration elle-même, est un puissant moteur dans la marche des mathématiques. Le mathématicien allemand David Hilbert ne s'y était pas trompé lorsqu'en 1900 il dressa la liste des vingt-trois problèmes non encore résolus dont la recherche orienterait *« la pensée mathématique des générations futures »*. Parmi ceux-ci, l'hypothèse de Riemann est toujours non résolue. Elle porte sur les nombres complexes $s$ qui annulent la fonction zêta, définie par $1 + 1/2^s + 1/3^s + \ldots$ Cette question a fait et fait toujours avancer la science mathématique.

Mais peu de problèmes ont mis en émoi la communauté mathématique comme celui de la quadrature du cercle. D'innombrables amateurs ont imaginé d'invraisemblables tracés (constructions approchées, quadratrices…) et construit des traceurs de courbes spéciaux pour tenter de le résoudre. L'engouement a été tel qu'en 1775 l'Académie des sciences a décidé de refuser les mémoires sur le sujet ! Il n'empêche, les constructions approchées se sont développées en grand nombre, des valeurs de $\pi$ de plus en plus précises sont apparues, tout un pan de l'algèbre a été exploré.
Ce problème a conduit à faire le lien entre des propriétés géométriques, algébriques et analytiques, comme la transcendance de $\pi$, qui a permis d'en venir à bout, avec un détour par les équations algébriques et la théorie de Galois.
Beau parcours !




La quadrature du cercle approchée par Ramanujan (les segments de même couleur ont même longueur).
*© É. Busser*

On a beaucoup parlé ces dernières années de la résolution de la conjecture de Poincaré. Le mathématicien français Henri Poincaré formula en 1904 la conjecture qui porte son nom : *« La sphère $S^3$ est la seule variété orientable de dimension 3 sans bord et de taille finie qui soit simplement connexe. »* Dit autrement, imaginons, en 3D, un ballon et une bouée, tous deux avec un ruban autour. En faisant glisser le ruban doucement, on peut le ramener à un simple point sur le ballon, alors que si le ruban est enfilé autour de la bouée, le réduire en un point par glissement est impossible. Le ballon est qualifié de surface *simplement connexe* alors que la bouée ne l'est pas. Toute la différence entre les deux, disait Poincaré, est qu'une surface possédant cette propriété de connexité peut être déformée continûment en une sphère. La conjecture revêt une importance telle que sa résolution est mise à prix un million de dollars par le Clay Mathematics Institute en l'an 2000. À la surprise générale, le mathématicien russe Grigori Perelman en a donné une preuve dès 2003, refusant d'ailleurs la médaille Fields en 2006 et le prix en 2010…

### Des quêtes et de belles gerbes de résultats

Un autre beau parcours est celui des trois cent cinquante années de tentatives de démonstration de la conjecture de Fermat. Elles ont été le théâtre de développements inattendus et de l'exploration de terres inconnues, ce qui a permis de relier des domaines jusqu'alors disjoints. Après la démonstration de quelques cas particuliers, de nombreux mathématiciens ont « planché » sur la question, ouvrant des brèches importantes : Sophie Germain en théorie des nombres, ou Ernst Kummer, précurseur de la notion d'idéal, centrale en algèbre. Deux autres notions nouvelles sont intervenues : les courbes elliptiques rationnelles (d'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ avec $a$, $b$, $x$, $y$ rationnels, $a$ et $b$ constantes) et les formes modulaires, qui ont de remarquables propriétés de symétrie. Les mathématiciens japonais Yutaka Taniyama et Goro Shimura les ont associées dans une conjecture éponyme : toute courbe elliptique rationnelle est modulaire. Mais où est donc le théorème de Fermat ? Ce sont l'Allemand Gerhard Frey et l'Américain Ken Ribet qui le relient à la conjecture précédente : si le théorème de Fermat est faux, alors la conjecture de Taniyama – Shimura l'est aussi. Il suffisait donc de démontrer cette dernière, ce que fit Andrew Wiles en 1994 dans le cas particulier, qui était suffisant, des courbes semi-stables.

Il reste de ces moments de quête un stimulant formidable pour la recherche, qui débouche toujours sur une belle gerbe de résultats.

## Un florilège de conjectures qui attendent d'être vaincues

D'autres conjectures demeurent à ce jour sans démonstration, malgré d'intenses recherches ; c'est le cas de la conjecture de Goldbach, énoncée en 1742 (*« Tout entier pair supérieur à 4 peut s'écrire comme la somme de deux* *nombres premiers»*), ou celle de Riemann, de 1859 (*«Les zéros complexes de la fonction zêta qui ne sont pas les entiers relatifs $-2, -4, -6$… ont tous une partie réelle égale à 1/2»*). C'est aussi le cas de la conjecture de Syracuse, posée semble-t-il en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz et médiatisée à partir de 1952 lors d'un congrès à l'université de Syracuse aux États-Unis. On part d'un entier positif et on lui applique l'algorithme suivant : pair, on le divise par 2 ; impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ; on recommence avec le résultat obtenu. On fabrique ainsi une suite de nombres, comme 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. La conjecture avance que, quel que soit le nombre de départ, on arrive toujours à 1. On attend encore la démonstration de cette propriété… Tout aussi redoutable : les seuls entiers qui peuvent s'écrire en base 3, en base 4 et en base 5 uniquement avec des 0 et des 1 sont-ils 0, 1 et 82 000 ?

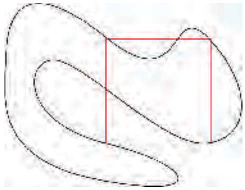
## Énigmes, conjectures, problèmes ouverts… pour tous les goûts

La liste des conjectures semble s'étendre à l'infini. La plupart sont extrêmement techniques et nécessitent un bagage mathématique évolué pour être appréciées. Certaines cependant sont accessibles avec peu de prérequis.

La *conjecture d'Erdös–Straus* stipule que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe trois entiers strictement positifs $t$, $u$ et $v$ tels que $4/n = 1/t + 1/u + 1/v$. La *conjecture des nombres premiers jumeaux* propose qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, comme 17 et 19, 101 et 103 ou 1019 et 1021, à savoir deux nombres premiers séparés de 2. Plus généralement, la *conjecture de Pollignac* avance qu'il existe, de même, une infinité de nombres premiers séparés de $2k$, et ce pour tout entier $k$. En 2013, Yitang Zhang, puis de nombreux autres mathématiciens en 2014, ont réussi à démontrer que la conjecture de Pollignac est vraie pour au moins un entier $k$ inférieur à 246. On est encore loin d'établir le résultat pour tous les entiers $k$… Pour rester dans les entiers, un nombre $n$ est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs ($n$ lui-même étant exclu). Ainsi, 6 et 28 sont parfaits : $6 = 3 + 2 + 1$ et $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. On conjecture qu'il n'existe pas de nombre parfait impair, et qu'il existe une infinité de nombres parfaits pairs.

Les amateurs de pavages se demandent toujours si l'on peut couvrir un carré de côté 1 avec les rectangles de côtés 1 et 1/2, 1/2 et 1/3, 1/3 et 1/4, 1/4 et 1/5… utilisés chacun une seule fois dans le pavage (la somme de leurs aires est égale à 1). Ou s'il existe un polygone permettant de paver le plan, mais pas de manière périodique (*problème d'ein Stein*, de l'allemand «une pierre»). Ou encore si un disque D peut être découpé en deux parties congruentes connexes G et H telles que le centre de D ne soit ni sur le bord de G ni sur le bord de H. Ou enfin si un rectangle peut être partagé en trois polygones congruents (hors rectangles).

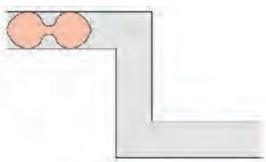
Pour rester dans la géométrie, on ne sait toujours pas s'il existe un parallélépipède rectangle dont toutes les longueurs (des douze côtés et des seize diagonales) sont des nombres entiers. Dans le plan, le *problème du nombre congruent* consiste à trouver quels sont les entiers qui sont l'aire d'un triangle rectangle de côtés tous rationnels. Le *problème du carré inscrit* (ou *conjecture de Toeplitz*) avance que toute courbe fermée simple dans le plan possède quatre points qui définissent un carré. C'est un théorème pour les courbes « suffisamment régulières », mais ça reste une question ouverte en général. À propos de carré, on ne sait toujours pas s'il existe un point P à l'intérieur du carré unité ABCD dont les distances PA, PB, PC et PD à chacun des quatre côtés sont tous des nombresrationnels…



Un carré inscrit dans une courbe.

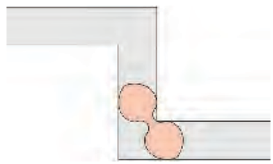
© *Étienne Ghys, 2012*

Le *problème du sofa* demande de trouver le canapé d'aire A maximale que peut posséder un canapé que l'on peut déplacer horizontalement dans un couloir d'un mètre de large avec un angle droit. On sait seulement que $2{,}219 < A < 2{,}370$.



La meilleure solution connue dans cette variante à deux angles droits du problème du sofa.

© *Dan Romik, UC Davis, 2017*



Enfin, les mathématiques discrètes, notamment la théorie des graphes, sont une mine inépuisable de conjectures. En voici une, redoutable, issue de la combinatoire (*conjecture de Frankl*). Une famille F d'ensembles est stable par union si l'union de deux ensembles quelconques de F est encore dans F. Ainsi, F = {Ø, {1,2}, {1,2,3}, {1}, {3}} est *stable par union* (avec Ø l'ensemble vide). La conjecture affirme que, dans toute telle famille F, il existe un élément appartenant à au moins la moitié des ensembles de F (ici, 1 appartient à trois des cinq ensembles de F).

Plus visuelle sont ces questions : existe-t-il huit points du plan (trois d'entre eux n'étant jamais alignés, quatre d'entre eux n'étant jamais sur un même cercle) dont les distances deux à deux sont des nombres entiers ? Tout polyèdre convexe admet-il un patron dont les faces, dessinées sur le plan, ne se chevauchent pas ? Quelle est la plus petite aire que peut avoir une surface recouvrant toute courbe du plan de longueur 1 ? Pour vous frotter à une jolie énigme mathématique, vous n'avez que l'embarras du choix !

***É. B.***

# Les problèmes à un million de dollars, les amateurs et le plaisir du jeu

Hervé Lehning

Agrégé de mathématiques et écrivain scientifique

Un million de dollars pour la solution d'un problème de mathématiques ? Pour certains, cela peut sembler une plaisanterie. Pourtant, c'est une réalité. Un milliardaire américain, Landon Thomas Clay (1926 – 2017), a fondé un institut de mathématiques, l'Institut Clay, qui a doté d'un prix d'un million de dollars sept problèmes de mathématiques, dits *problèmes du millénaire*. Tout le monde va-t-il se mettre aux mathématiques pour gagner un million de dollars ? Sans doute s'il s'agissait juste de résoudre une équation du second degré ! L'ennui est que les problèmes de mathématiques pouvant vous faire gagner un million de dollars sont autrement plus élaborés…

## La conjecture de Poincaré, un premier défi résolu

Le problème le plus « facile » du lot est probablement celui qui a déjà été résolu : la conjecture de Poincaré, qui a donc pris le statut de théorème, plus précisément de *théorème de Perelman*, du nom du mathématicien russe qui l'a démontré, Grigori Iakovlevitch Perelman (né en 1966). Voici son énoncé : *Une variété compacte orientable simplement connexe, à trois dimensions, sans bord, est homéomorphe à une hypersphère de dimension 3.*
Si vous comprenez de quoi il s'agit, vous avez une culture mathématique du niveau licence, au minimum. Autrement dit : avant de résoudre les problèmes du millénaire, il faut déjà comprendre leurs énoncés ! De ce fait, il y a fort peu de chances qu'un amateur en résolve un seul…

Pourtant, au siècle dernier, un amateur remplit des carnets de formules étranges presque toutes exactes. Il s'agit de Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920). Il semble le premier à avoir imaginé des formules relativement élémentaires comme l'étonnante $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} \cong \pi + 0{,}0005$. Même si elle peut venir d'un calcul numérique, on peut se demander comment il l'a imaginée ! Une idée est de diviser π par le carré du nombre d'or, puis de remarquer que le quotient est « proche » de 1,2 soit 6/5.

De façon plus surprenante, Ramanujan a remarqué que $e^{\pi\sqrt{163}}$ est « presque » un entier. Précisément, il vaut 262 537 412 640 768 744 avec une erreur de $10^{-12}$. Il est peu probable que cette égalité vienne d'un calcul numérique, surtout quand on pense aux moyens disponibles à l'époque. En fait, cette constatation vient de considérations très élaborées.
Pour finir, voici un développement qui figure dans les carnets de Ramanujan, mais qui n'a été démontré qu'en 1985 (l'égalité est cette fois exacte, il ne s'agit pas d'une approximation) :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103+26390n}{396^{4n}}}}.$$

Surprenant, n'est-ce pas ? Et il s'en trouve ainsi plusieurs milliers de cette nature dans les carnets du mathématicien indien autodidacte. Pourquoi l'avènement d'un tel nouveau prodige serait-il impossible aujourd'hui ? On peut imaginer que certaines formules, comme celle que Simon Plouffe découvrit en 1995 concernant le nombre π, soient découvertes par des amateurs (ce que n'est pas Simon Plouffe) car elle est abordable avec un logiciel de calcul formel et un bagage de première année de licence. La voici :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

Cette formule permet, en base 16, de calculer directement le $n^{ième}$ chiffre après la virgule du nombre π sans calculer les précédents !

## Un petit livre rempli de curieuses formules arithmétiques

Voici une dizaine d'années, j'ai découvert grâce à un article d'Étienne Ghys un petit livre rempli de chiffres qui, de loin, fait penser aux carnets de Ramanujan. Il a été écrit par un amateur, Vincent Thill, qui l'a baptisé très justement *Curiosités arithmétiques*. En l'ouvrant au hasard, nous découvrons une suite d'égalités étonnantes commençant par :

$$936^2 + 4\,160^2 + 1\,665^2 + 6\,048^2 = 7\,585^2.$$

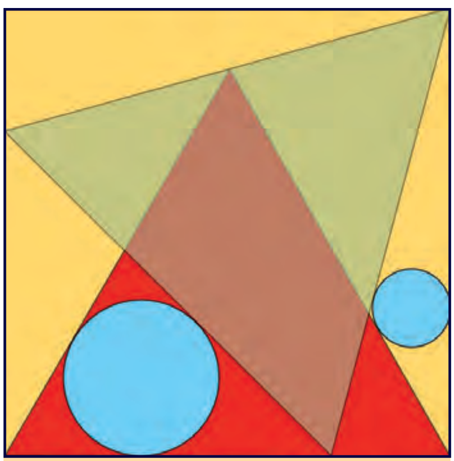
D'où cela provient-il ? La connaissance du théorème de Pythagore permet de deviner une application double de ce théorème. Par le calcul, on peut remarquer que $936^2 + 4\,160^2 = 4\,264^2$, que $1\,665^2 + 6\,048^2 = 6\,273^2$, et enfin que $4\,264^2 + 6\,273^2 = 7\,585^2$, d'où le résultat. Bien sûr, pour approfondir, on est mené à étudier ce que l'on nomme les *triplets pythagoriciens*. On y découvre des merveilles dignes de réjouir l'apprenti mathématicien autant que Ramanujan devait se réjouir des découvertes de ses formules. La différence est que, pour passionnante qu'elle soit, l'étude des triplets pythagoriciens est, de nos jours, du domaine de l'exercice d'école ou des jeux mathématiques. Les exemples de Vincent Thill sont passionnants pour animer des ateliers de collège ou de lycée mais ils ne feront pas avancer la recherche mathématique, à la différence des calculs de Ramanujan en son temps, qui eux font apparaître des relations entre des objets mathématiques de nature très différente.

## Détour par le Japon : les joyaux géométriques des sangakus

Les mathématiciens ont parfois des plaisirs étranges. Mais attention, c'est contagieux ! Au moins un cinéaste japonais a attrapé le virus. Takeshi Kitano n'est pas mathématicien mais acteur, animateur de télévision, humoriste, cinéaste… Lors de l'exposition « Mathématiques, un dépaysement soudain » à la Fondation Cartier en 2011 (à Paris), il proposa un défi mathématique aux visiteurs. Trouvez la formule la plus courte permettant d'exprimer 2011 en écrivant, dans l'ordre, les premiers nombres entiers, séparés par des opérateurs (+, –, ×, /, racines carrées, exposants, factorielles). Kitano proposait lui-même :
$(1 + 2 + 3)^4 + (5 \times 6 \times 7 \times 8) - (9 \times 10 \times 11) + 12 + 13$.
Une solution plus économe est : $(1+2)!! + (3!)^4 - 5$.

Que trouverez-vous pour 2019 ? Je propose $1 + 2 + (3!)^4 + 5! \times 6$, mais il y a peut-être mieux…

Cette évocation d'un artiste japonais et son goût des mathématiques mène à penser aux *sangakus*, ces petites tablettes mathématiques en bois pendues dans des sanctuaires shinto, et parfois dans des temples bouddhistes, au Japon. Elles datent de l'époque Edo (1603–1868), qui a précédé l'ère Meiji (1868–1912), pendant laquelle le Japon s'est occidentalisé. Ces petits tableaux peints représentent des figures mathématiques composées de droites et de cercles. Les commentaires échappent à ceux qui ne comprennent pas la langue, mais le mathématicien y verra un défi à relever, un problème à résoudre. Par exemple, dans la sangaku ci-contre, découvert par Hidetoshi Fukagawa (né en 1943), professeur de mathématiques japonais maintenant à la retraite, il s'agit de trouver le rapport des rayons des cercles bleus sachant que les deux grands triangles sont équilatéraux.



Quel est le rapport
des rayons des cercles bleus ?

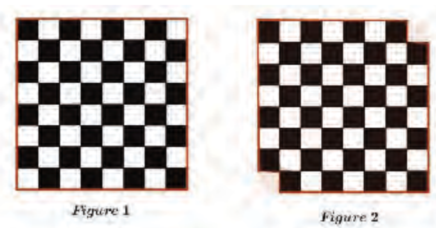
La réponse est 2, le démontrer ne demande que des connaissances de géométrie élémentaire concernant les similitudes et le théorème de Pythagore… mais également beaucoup d'astuce ! C'est ainsi un problème géométrique tout à fait représentatif des quelque mille sangakus qui nous sont parvenues sous la forme de ces petites tablettes votives.

## Arithmétique, combinatoire : des émerveillements renouvelés

Revenons à des plaisirs arithmétiques. Un *palindrome* est un mot qui se lit de manière identique dans les deux sens, comme « radar » ou « elle ». Les mots croisés en sont friands. On peut s'amuser de même en mathématiques. Un palindrome est alors un nombre qui se lit de même dans les deux sens, *a priori* en base 10, mais on peut étendre cette règle. Par exemple, 2002 est la dernière année palindromique en base 10, 2019 en est une autre… mais dans quelle base ? On peut également se poser la question : à quelle condition le carré d'un palindrome est-il un palindrome ? Voici quelques cas pour orienter votre recherche :
$111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$,
$10\,110\,001\,101^2 = 102\,212\,122\,262\,221\,212\,201$,
$1\,002\,001^2 = 1\,004\,006\,004\,001$,
$1\,012\,101^2 = 1\,024\,348\,434\,201$,
$2\,000\,002^2 = 4\,000\,008\,000\,004$,
$2\,001\,002^2 = 4\,004\,009\,004\,004$.

Pas de millions de dollars en jeu, mais une infinité de problèmes possibles… Le plaisir de trouver la solution reste le même, entre l'amateur et le mathématicien averti. Ainsi, l'argent ne motivait pas Perelman dans sa recherche d'une démonstration de la conjecture de Poincaré, puisqu'il a refusé le prix, qu'il avait pourtant gagné ! Ce plaisir de Grigori Perelman, de Takeshi Kitano, de Vincent Thill et de milliers d'autres amateurs, on peut le ressentir en résolvant des problèmes très simples, ou quand une question obscure semble s'illuminer brutalement. Voyez par exemple cette petite énigme :

*On dispose d'un échiquier et de dominos couvrant exactement deux cases contiguës. On supprime les deux cases de l'échiquier aux extrémités d'une diagonale. Peut-on le recouvrir par des dominos ? Si oui, comment ?*



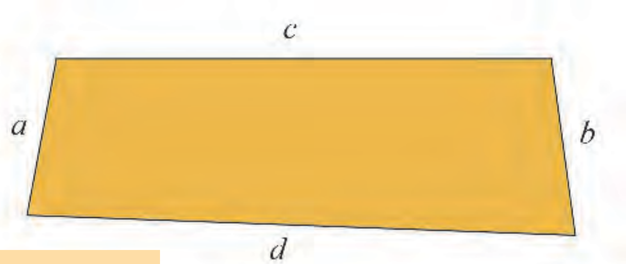

Un échiquier privé de deux cases.
©Le Pommier, 2015

Supposons que l'on ait réalisé un tel recouvrement. Il comporte trente et un dominos, puisque l'échiquier a soixante-deux cases. Chaque domino correspond à une case blanche et une case noire de l'échiquier, qui compte donc trente et une cases blanches et autant de cases noires. Ceci est absurde puisque notre échiquier tronqué comporte en fait trente cases blanches et trente-deux noires. Le recouvrement est donc impossible !

Ce problème peut être analysé d'une autre façon, avec la notion d'invariant, puisque l'égalité du nombre de cases blanches et de cases noires est un invariant des recouvrements. Le plaisir de la découverte de ce principe simple laisse entrevoir celui du mathématicien professionnel qui trouve une solution à un problème redoutable, million de dollars ou pas. Avec ces deux démonstrations, on voit un principe mathématique sous-jacent : la recherche de la beauté, que l'on soit amateur ou professionnel.

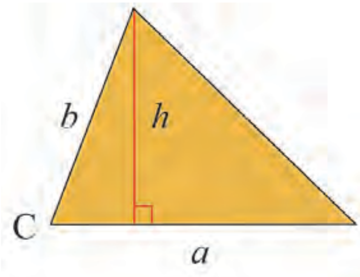
## Une question pratique : les inégalités fiscales sur le Nil

Les invariants et la recherche de la beauté peuvent faire penser à un calcul de l'aire des champs « presque rectangulaires » en Égypte ancienne. La formule utilisée était importante puisqu'elle servait à établir l'impôt ! Si un champ est « presque rectangulaire », il a deux « largeurs » $a$ et $b$ et deux « longueurs » $c$ et $d$. Il est logique de considérer, en première approximation, que son aire $A_{PR}$ est l'aire $A_R$ d'un rectangle de largeur égale à la moyenne des largeurs et de longueur égale à la moyenne des longueurs, soit $A_R = \frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$.




Un champ « presque rectangulaire ».

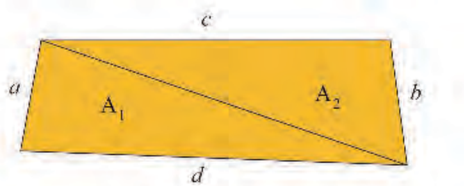
Bien entendu, cette formule est fausse et avantage le fisc. On pourrait considérer que c'est un « invariant fiscal », et donc que ça démontre que $A_{PR} \leq A_R$, mais ce n'est pas une preuve au sens mathématique du terme…

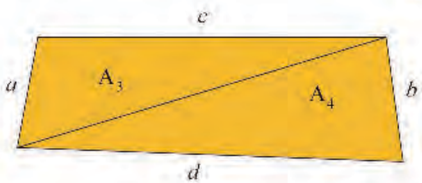


Le cas d'un triangle.

Pour le démontrer proprement, on considère d'abord le cas du triangle.

Son aire $A_T$ est égale au demi-produit de la base *a* par la hauteur *h*, qui est donc inférieure au demi-produit *a b*, avec égalité si, et seulement si, le triangle est rectangle en C. On considère alors les deux partages du quadrilatère initial suivant.



Le champ « presque rectangulaire » est coupé en deux de deux manières différentes.

En appliquant l'inégalité trouvée à chacun des triangles et en faisant la somme, on obtient :

$$A_{PR} \leq \frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$$

avec égalité si, et seulement si, le champ est rectangulaire. Joli, non ?

***H. L.***

## Pour en savoir (un peu) plus :

***Le plaisir de l'amateur.*** Étienne Ghys, I*mage des mathématiques*, 2009.

***Toutes les mathématiques du monde***. Hervé Lehning, Flammarion, 2017.

***Curiosités arithmétiques***. Vincent Thill, Le sanctuaire, 2008.

***Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés !*** Édouard Thomas, brochure *Maths Société Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2016.

# Reines rivales et indépendantes

Une première version de cet article (à jour seulement des résultats de 2015) est parue dans le n°459 (janvier 2016) de la revue *Pour la science* sous le titre «Le problème des huit reines et au-delà».

Jean-Paul Delahaye

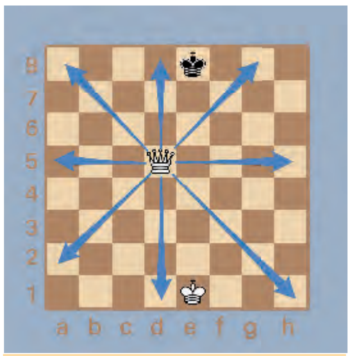
Professeur émérite à l'université de Lille-I,
équipe Cristal (UMR CNRS 9189)

Avoir des interactions est difficile, ne pas en avoir aussi. *Le problème des n reines* le montre. Bien qu'on s'en occupe depuis bientôt deux siècles, il reste mystérieux !

## Quand le grand Carl Friedrich Gauss oublie des solutions

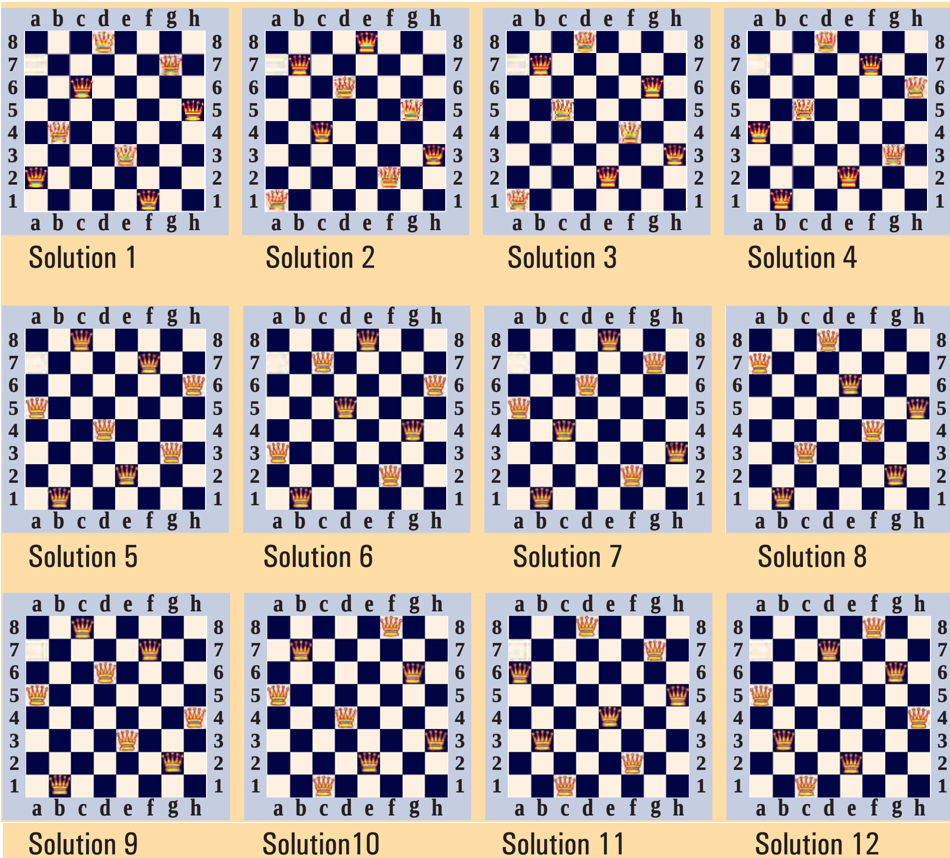
En 1848, un amateur du jeu d'échecs, Max Friedrich William Bezzel, pose le problème suivant : est-il possible de placer huit reines sur l'échiquier de telle façon qu'aucune ne soit en prise sur une autre ? Souvenez-vous : une reine aux échecs peut accéder à chacune des cases de la ligne horizontale, de la colonne verticale et des deux diagonales passant par la case qu'elle occupe.

Puisqu'il n'y a que huit lignes horizontales sur l'échiquier, et qu'une reine au plus peut se trouver sur une telle ligne dans une solution au problème, il est certain qu'il n'y aura pas plus de huit reines indépendantes sur l'échiquier $8 \times 8$, et que s'il existe des solutions elles comporteront toutes une reine par ligne au maximum. Il en va de même pour les colonnes.




Les déplacements autorisés de la reine sur un échiquier (les deux autres pièces figurées sont les rois).
*© SmartKids Chess, 2005*

Le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) étudia le problème et le résolut partiellement en proposant soixante-douze solutions avec, pour chacune, huit reines sur l'échiquier de soixante-quatre cases. Il avait oublié certaines configurations ! La première solution complète fut proposée en 1850, par Franz Nauk. Il y a quatre-vingt-douze dispositions convenables, donc vingt de plus que celles trouvées par Gauss. Elles se ramènent à douze quand on enlève les configurations se déduisant les unes des autres par des rotations ou des symétries. Deux d'entre elles possèdent la jolie propriété que jamais trois dames ne sont alignées, quelles que soient les droites que l'on envisage. Essayez de les trouver par vous-même !




Les douze solutions du problème des huit reines.

© *Pour la Science 459, 2016*

La généralisation du problème de Bezzel consiste à envisager un échiquier carré de $n$ cases de côté et à essayer d'y placer $n$ reines. C'est ce que l'on dénomme le *problème des n reines*. On découvre sans mal que pour $n = 2$ et $n = 3$ c'est impossible. En revanche, pour $n$ plus grand, cela semble toujours possible.

On envisage le problème de deux façons : (*i*) trouver pour tout entier $n$ une solution s'il en existe ; (*ii*) trouver toutes les solutions et les dénombrer, au moins pour les premières valeurs de $n$. Le problème (*i*) est aujourd'hui parfaitement résolu, cela sans avoir besoin d'un ordinateur : on décrit un procédé général sous forme géométrique qui, pour tout entier $n$ à partir de 4, construit une configuration convenable. De tels procédés sont nombreux et on en découvre régulièrement de nouveaux.

Le problème (*ii*) est bien plus délicat ! Imaginer des procédés « simples » qui, pour tout entier $n$, décrivent toutes les solutions ne semble pas envisageable.

On utilise donc des ordinateurs pour mener des calculs systématiques. C'est un exercice de programmation que tout étudiant en informatique a pratiqué au moins une fois.

Il est assez facile d'écrire un programme qui traite le problème jusqu'à $n = 12$. Aller au-delà demande plus de soin et de patience et est l'objet de records qui, du fait de l'explosion combinatoire, évoluent lentement.

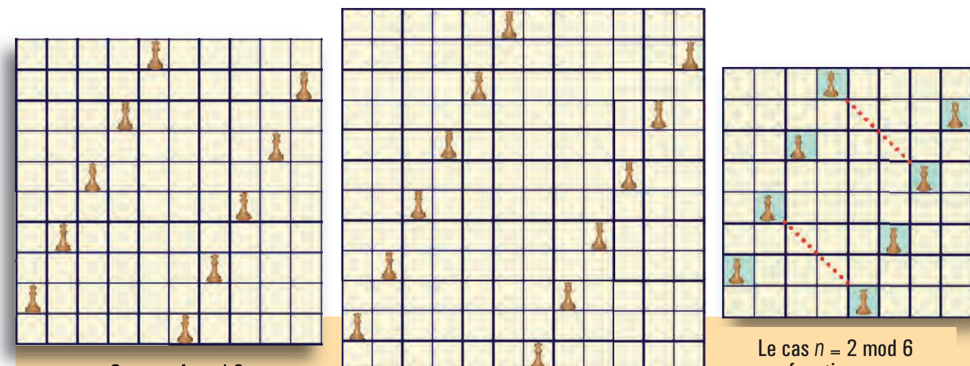
Aujourd'hui, le décompte des solutions a été mené jusqu'à $n = 27$. Réussir le décompte pour $n = 28$ est un difficile défi.

## On peut déjà commencer sans l'aide d'un ordinateur…

À défaut de pouvoir trouver le nombre exact de solutions pour tout $n$, on essaie de minorer ce nombre, car il est intéressant de savoir (et de démontrer) que le nombre de solutions augmente très rapidement en fonction de $n$. Quelques résultats sont connus, qui donnent de telles minorations du nombre de solutions (voir l'article de l'auteur cité en référence).

L'idée la plus simple, proposée dès 1874 par Emil Pauls, pour trouver une solution pour un entier $n$ quelconque est de disposer les reines régulièrement selon un double parcours rectiligne de cavalier, en s'arrangeant pour qu'il y ait une reine sur chaque ligne horizontale et une sur chaque rangée verticale.

La méthode est parfaite pour tout entier $n$ multiple de 6 (on écrit $n = 0 \bmod 6$), et pour tout entier $n$ de quatre unités plus grand qu'un multiple de 6 (on écrit $n = 4 \bmod 6$).



Cas $n = 4 \bmod 6$

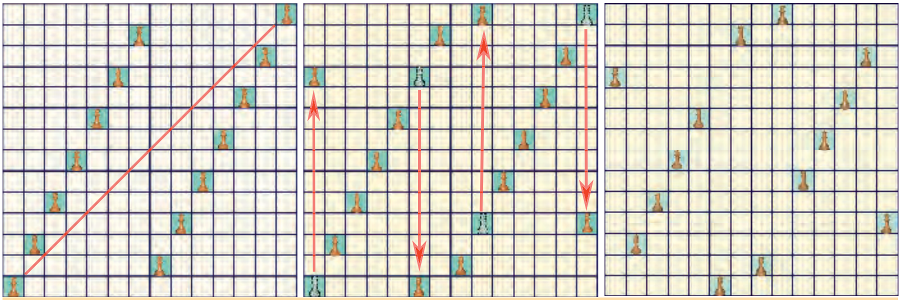
Cas $n = 0 \bmod 6$

Le cas $n = 2 \bmod 6$ ne fonctionne pas

La solution d'Emil Pauls pour certains entiers pairs.

© CIJM

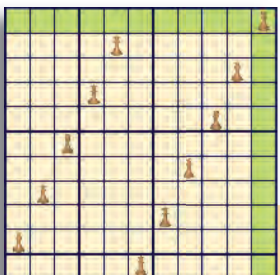
Pour les nombres pairs de deux unités plus grands qu'un multiple de 6 (on écrit donc $n=2 \bmod 6$), la méthode ne convient pas à cause des diagonales. Un autre schéma un peu plus élaboré permet de s'en tirer. On a donc une solution pour tout entier pair à partir de 4.



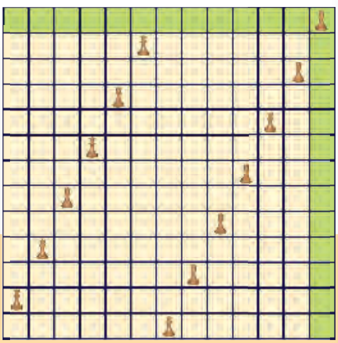
Cas $n$ = 2 mod 6 : on commence avec une solution où tout va bien sauf pour la grande diagonale. On déplace quelques reines. On obtient une solution.

© CIJM

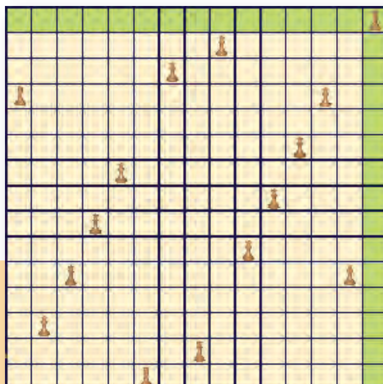
Pour les nombres $n$ impairs, que l'on peut donc écrire $n=2m+1$ avec $m$ un entier adéquat, on prend une solution pour le nombre pair une unité plus petit, à savoir $2m$, on la place dans le coin « en bas à gauche » de l'échiquier de côté $2m+1$, et on ajoute une reine dans le coin « en haut à droite ».



Cas $n$ = 5 mod 6



Cas $n$ = 1 mod 6



Cas $n$ = 3 mod 6

Cas $n$ impair : On part d'une solution pour $n$ = 1. On ajoute une ligne, une colonne et une reine en haut à droite.

© CIJM

Le problème ($i$) de trouver une solution pour tout entier à partir de 4 est donc résolu… sans avoir utilisé d'ordinateur. Disposer d'une solution est très bien, mais les connaître toutes ou réussir à les compter serait encore mieux. À moins d'une découverte mathématique, l'ordinateur semble cette fois indispensable.

On peut envisager au moins trois façons, de plus en plus « intelligentes », de rechercher toutes les solutions pour une valeur de $n$ donnée. Cette progression de la puissance quand on améliore les méthodes illustre l'idée qu'en informatique un programme peut être correct et fonctionner parfaitement pour les petites valeurs d'un paramètre, et pourtant être très « mauvais », car inefficace quand le paramètre augmente.

## Des programmes absurdes et des programmes plus malins

On commence par écrire un sous-programme qui, quand on lui propose une configuration quelconque de $n$ reines, indique si oui ou non elle est satisfaisante. Un tel sous-programme est facile à concevoir car deux dames en position $(a, b)$ et $(a', b')$ sur l'échiquier de côté $n$ sont en prise l'une avec l'autre si, et seulement si :
- $a = a'$ (elles sont placées sur la même ligne) ;
- ou bien $b = b'$ (elles se trouvent sur la même colonne) ;
- ou encore $a - b = a' - b'$ (elles sont sur la même première diagonale) ;
- ou enfin $a + b = a' + b'$ (elles se situent sur la même seconde diagonale).

La première idée qui vient à l'esprit pour calculer toutes les solutions pour un entier $n$ donné est de placer $n$ reines de toutes les façons possibles et, pour chaque configuration ainsi obtenue, d'utiliser le sous-programme qui indiquera si la configuration est solution ou non. Quand on place la première reine, il y a $n^2$ choix possibles ; de même pour la deuxième ; et cela jusqu'à la $n$-ième. Le nombre de configurations à tester est donc $(n^2)^n$, soit $n^{2n}$, ce qui pour $n = 8$ représente 281 474 976 710 656.

La deuxième idée consiste à remarquer que toute solution s'obtiendra en plaçant une reine par colonne, et qu'on peut même s'arranger pour que les reines placées ne soient pas situées sur les lignes déjà occupées au moment où on les place : il y a $n$ façons de placer la première reine dans la première colonne ; il y a $n - 1$ façons de placer la deuxième reine (car elle va sur la deuxième colonne, mais on n'envisage pas de la placer sur la ligne occupée par la première reine) ; il y a $n - 2$ façons de placer la troisième reine… ce qui conduit donc en tout à $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ configurations de $n$ reines à essayer. On les teste une à une avec le sous-programme décrit plus haut, qui peut d'ailleurs être simplifié puisque, par construction, les configurations qu'on lui soumet maintenant sont correctes pour les contraintes de lignes et de colonnes. Le gain est considérable entre la première méthode et la seconde ! Pour $n = 8$, il n'y a plus que quarante mille trois cent vingt configurations à tester, soit sept milliards de fois moins environ que par la première méthode.

On peut encore faire mieux ! La troisième méthode consiste à remarquer que, lorsqu'on place les reines une à une comme avec la deuxième méthode, il est possible de s'apercevoir rapidement qu'on est en train de construire une configuration qui ne pourra pas aboutir. Si par exemple on a placé une reine en $(1, 1)$ puis la deuxième en $(2, 2)$, elles sont sur la même diagonale et donc il faut cesser de prolonger ce début de configuration, qui ne donnera jamais de solution, quelles que soient les reines qu'on y ajoutera. Découvrir le plus tôt possible deux reines en prises dans l'énumération ordonnée de toutes les possibilités, et remettre en cause le choix qui y a conduit, est ce que l'on nomme la méthode de *backtracking* (ou *retour arrière*). Elle est d'usage courant pour s'attaquer à de nombreux problèmes combinatoires. Le gain obtenu par rapport à la seconde méthode est encore très intéressant et ce gain augmente avec $n$. Si on compte comme un essai une position où, soit on a réussi à trouver une solution, soit on a découvert qu'il sera impossible d'aller plus loin, alors on trouve les quatre-vingt-douze solutions pour $n=8$ en treize mille sept cent cinquante-six essais. Cela correspond à trois fois moins d'essais que par la deuxième méthode ! Pour $n=12$, le nombre d'essais se monte à 9 261 880 au lieu de $12! = 479\,001\,600$ par la deuxième méthode ; le gain est donc d'un facteur 50. Hélas, aucune formule simple connue ne fournit le nombre d'essais par la troisième méthode…

Il se trouve cependant que pour battre les records, il faut non seulement utiliser une bonne méthode – donc une variante du *backtracking* – mais aussi (*a*) la programmer très soigneusement, (*b*) faire exécuter en parallèle les calculs (ce qui n'est pas difficile ici car la méthode s'y prête bien), et (*c*) fabriquer et utiliser des puces spécialisées qui iront plus vite que les processeurs généraux pour l'exécution des calculs. C'est d'ailleurs ainsi que fonctionne le système informatique aujourd'hui détenteur du record pour $n=27$.

Qui saura aller au-delà ?

***J. - P. D.***

## Pour en savoir (un peu) plus :


***Le problème des huit reines et au-delà.*** Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* 459, janvier 2016.

Le site « N-Queens Problem ». Rosetta code, ***rosettacode.org/wiki/N-Queens***, 2019.

***Across the Board : The Mathematics of Chessboard Problems.*** John Watkins, Princeton University Press, 2007.

***A Survey of Known Results and Research Areas for n-Queens.*** Jordan Bell et Brett Stevens, *Discrete Mathematics* 309, 2009. [ Attention, le « théorème 2 » n'est en fait qu'une conjecture.]

***The n-Queens Problem.*** Igor Rivin, Ilan Vardi et Paul Zimmerman, *American Mathematical Monthly*, 1994. [ Attention, le « théorème 2 » et son corollaire sont faux. ]

# La célèbre conjecture P*vs*NP

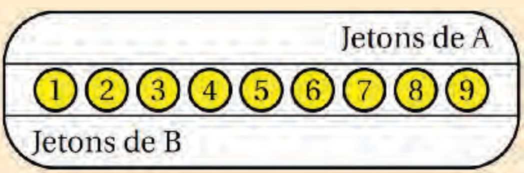
Abdallah Saffidine

Enseignant-chercheur,
Université de Nouvelle-Galles du Sud,
Sydney, Australie.

Avez-vous déjà joué à un jeu de société avec le plateau d'un autre jeu ? Très connue des enfants, cette pratique se retrouve sous le nom de *réduction* chez des chercheurs qui démontrent des équivalences entre jeux. Cette notion de réduction est fondamentale en informatique, notamment en théorie de la complexité. Elle est d'ailleurs à la base de la célèbre conjecture P *versus* NP, un problème ouvert parmi les plus difficiles des mathématiques et de l'informatique réunies. Examinons une succession de réductions de plus en plus élaborées entre divers jeux de stratégie abstraits.

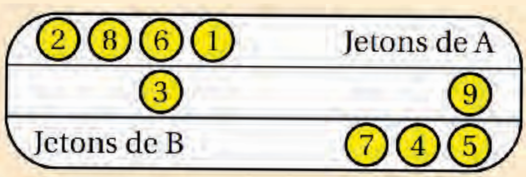
## Du Jeu du 15 vers le Morpion : le principe de réduction

Le Jeu du 15 a des règles élémentaires. Des jetons numérotés de 1 à 9 sont disposés, faces visibles, entre deux joueurs, A et B. Tour à tour, chaque joueur s'approprie un jeton encore disponible. Ainsi, la collection de jetons de chaque joueur croît petit à petit. Un *triplet gagnant* est un ensemble de trois jetons dont la somme fait 15, par exemple $\{1, 6, 8\}$. Le premier joueur à avoir amassé une collection comportant un tel triplet gagnant remporte la partie. S'il n'y a plus de jeton au milieu de la table et qu'aucun joueur n'a de triplet gagnant, on déclare la partie nulle.




Début de partie du Jeu du 15.

© A.Saffidine

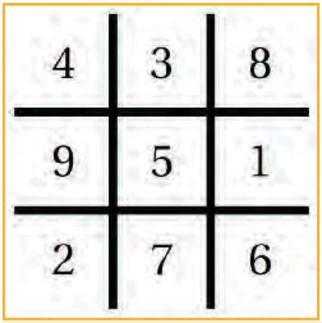



Fin de partie gagnée pour A.

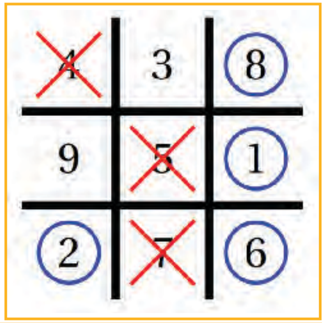
© A.Saffidine

Malgré ses règles simples, le jeu est peu visuel et identifier directement les meilleures stratégies pour A ou pour B n'est pas intuitif. L'astuce pour trouver les meilleurs coups est d'utiliser un carré magique (un arrangement des nombres de 1 à 9 en carré tel que trois nombres sont alignés horizontalement, verticalement ou en diagonal si, et seulement si, leur somme est 15).

Autrement dit, on peut représenter chaque position du Jeu du 15 comme un Morpion et appliquer ses stratégies du Morpion pour mieux jouer !




Position initiale du Morpion joué sur un carré magique de somme 15.




Fin de partie gagnée par A, qui utilise les cercles (et B les croix).

*© A.Saffidine*

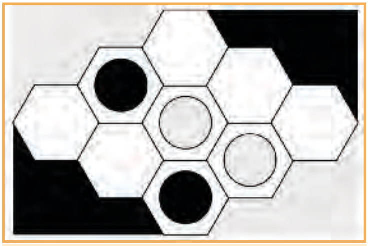
Une *réduction* est une transformation d'un problème $P_1$ en un autre problème $P_2$ telle que, si l'on sait résoudre $P_2$, alors on peut inférer une solution de $P_1$. Le principe du carré magique permet d'effectuer une réduction du Jeu du 15 vers le Morpion.

Une autre réduction a déjà été évoquée en introduction de la brochure : à toute position de Nim, on peut associer une opération de somme binaire sans retenue, la Nim-somme. Être capable de calculer le nombre de zéros dans cette somme permet de déterminer le gagnant théorique de la position de Nim. Il s'agit donc bien d'une réduction du problème de Nim vers le problème de la Nim-somme.

## Un petit tour du côté des jeux combinatoires

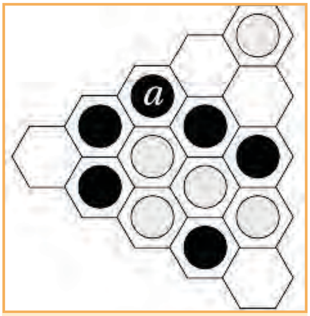
Inventé en 1942 par le poète et physicien danois Piet Hein, le Hex est jeu de stratégie abstrait, comme les Échecs et le Go. Il a été redécouvert par le célèbre économiste et mathématicien américain John Forbes Nash en 1948. Il a depuis fasciné de nombreux amateurs de jeux combinatoires.

Les joueurs, appelés Noir et Blanc, posent tour à tour des pions de leur couleur sur un plateau losange à pavage hexagonal. Pas de capture, pas de déplacement : les pions posés restent en place jusqu'à la fin de partie. Deux côtés opposés du losange sont marqués en noir et les autres sont en blanc. L'objectif de Noir est de créer une chaîne de pions (noirs) deux à deux adjacents connectant les deux bords noirs, et l'objectif de Blanc est de relier d'une chaîne de pions (blancs) les deux autres côtés. Par exemple, le schéma représente une position de type Hex (sur un plateau $3 \times 3$) où chaque joueur a déjà effectué deux coups. Comme pour le jeu de Go, il est possible de jouer au Hex sur des plateaux de différentes tailles, les plus communes étant $13 \times 13$ et $19 \times 19$.



Quel coup de Noir choisir ?
© A.Saffidine.

Le Y est un autre jeu combinatoire abstrait aux règles élémentaires : tour à tour, les joueurs posent un pion de leur couleur sur le plateau triangulaire à pavage hexagonal jusqu'à ce qu'un joueur parvienne à créer une chaîne de pions connectant les trois bords d'un coup.




Positions du jeu du Y sur un plateau de taille 5. Noir vient de gagner en posant le pion *a*.
© A.Saffidine

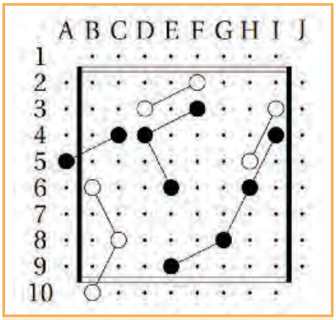
Outre des règles très similaires, le Hex et le Y partagent de nombreuses propriétés, notamment l'absence de partie nulle : un plateau rempli de pions contient toujours une chaîne unique gagnante. La proximité entre les deux jeux va au-delà : on peut exhiber une réduction du Hex vers le Y faisant correspondre à toute position de Hex une position de Y.

Cette réduction consiste à préparer le plateau en y jouant une série de pions blancs et noirs « dans les coins » afin de laisser un losange de cases vides, puis à reproduire la partie de Hex sur ce qu'il reste du plateau de Y.

Réduction du Hex vers le Y. La configuration précédente est surlignée en rouge.
© A.Saffidine

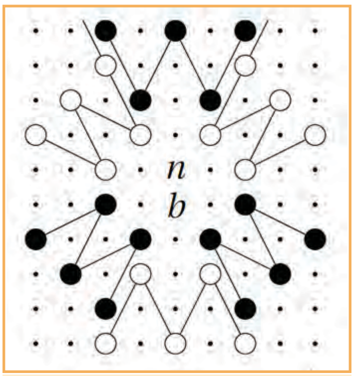
La réduction est telle que si la partie de Hex se joue sur un plateau de taille $n \times n$, la partie de Y correspondante se joue sur un plateau de côté $2n-1$. Si un joueur, humain ou machine, est capable de jouer parfaitement au Y sur toute taille, alors ce joueur peut utiliser la réduction pour jouer parfaitement au Hex sur toute taille. Bien sûr, la position issue de la réduction n'est pas une position de Y «naturelle» : aucun bon joueur de Y ne commencerait la partie en jouant dans les coins ! Mais cet aspect artificiel n'arrêtera pas un joueur «parfait» qui saura déterminer le meilleur coup dans n'importe quelle position de Y, y compris les plus biscornues.

Tout comme le Hex et le Y, le Twixt est un jeu de connexion inspiré d'Alex Randolph. On y joue sur un plateau carré en posant chacun son tour (Noir et Blanc) des pions de sa couleur. On ne connecte pas directement les pions adjacents mais on trace un trait entre les pions de même couleur à distance «saut de cavalier», du moment que cela ne croise pas de ligne adverse. Ainsi dans la figure ci-contre, les pions C4 et D4 ne sont pas connectés, mais Noir jouant C6 les connecterait indirectement via A5. Par contre, jouer Blanc en F4 ne connecterait pas H5 à D3 car le segment D4 – F3 bloque le passage. Le premier joueur à connecter les deux bords qui lui appartiennent gagne la partie.

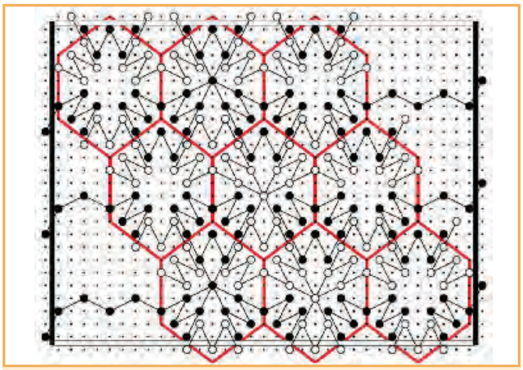



Une configuration de Twixt.
Quel coup de Blanc choisir ?
© A.Saffidine

De même que le Y, le Twixt se prête à une réduction depuis le Hex. Le pavage du plateau non hexagonal et les connexions à sauts de cavalier rendent la représentation du Hex moins directe que dans le cas du Y. On représente une case individuelle de Hex comme sur le schéma suivant. On fait ainsi correspondre à toute position de Hex une position de Twixt (la position de Hex précédente est encodée ici).




Noir simule jouer sur une case de Hex en posant un pion en *n*, et Blanc simule ce coup de Hex en jouant en *b*.
© A.Saffidine



Réduction du Hex vers le Twixt.
La configuration précédente est surlignée en rouge.
© A.Saffidine

D'une manière générale, si la partie de Hex est pratiquée sur un plateau de taille $n \times n$, alors la partie correspondante de Twixt est jouée sur un plateau de taille $(12n-1) \times (8n+3)$. Un joueur sachant jouer parfaitement au Twixt sur toute taille de plateau pourra donc jouer parfaitement au Hex.

Des chercheurs canadiens sont parvenus à construire une machine jouant parfaitement sur les « petits » plateaux de Hex (jusqu'à $9 \times 9$). Cependant, résoudre les plateaux de taille arbitraire semble bien plus complexe qu'au jeu de Nim : malgré les efforts de milliers de joueurs, de mathématiciens et d'informaticiens depuis soixante-dix ans, personne n'a trouvé de stratégie parfaite fonctionnant pour toute position. Aujourd'hui, le consensus est qu'il est impossible d'inventer une méthode « générale et rapide » pour la résolution des positions de Hex.

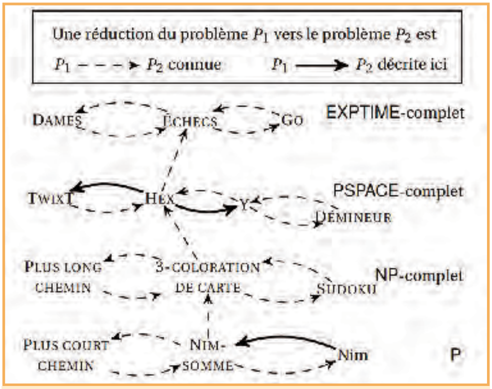
Moins de gens ont étudié le Twixt, mais la réduction ci-dessus conduit à la même conclusion : l'improbabilité d'une méthode rapide pour résoudre les positions de Twixt. En effet, une telle méthode, si elle existait, mènerait à une procédure rapide pour jouer parfaitement au Hex, contredisant l'opinion des chercheurs qui se sont penchés sur la question.

Ainsi, une réduction d'un problème $P_1$ vers un problème $P_2$ peut servir deux buts : si l'on sait résoudre « efficacement » $P_2$, alors on peut utiliser la réduction pour résoudre $P_1$. On l'a fait avec la réduction de Nim vers le problème de la Nim-somme. À l'inverse, si l'on a de bonnes raisons de croire que $P_1$ est « trop difficile », alors la réduction permet de propager tous ses arguments à $P_2$ et d'en conclure que $P_2$ est également « trop difficile pour être résolu de manière rapide et générale ». On l'a fait avec la réduction du Hex vers le Twixt !

## Classes de complexité et une question à un million de dollars

Le diagramme suivant liste certaines réductions reliant quelques jeux et puzzles. On s'intéresse toujours à une version généralisée du problème : il s'agit par exemple de jouer aux Échecs sur un plateau de taille arbitraire. Outre des jeux bien connus, le diagramme mentionne la tâche de colorier tous les pays d'une carte donnée en utilisant au plus trois couleurs et de sorte que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. On trouve également la tâches de trouver le plus long (ou le plus court) chemin entre l'entrée et la sortie d'un labyrinthe.

Le diagramme n'est pas exhaustif ! Chaque année, de nouveaux problèmes sont formulés et de nouvelles réductions sont inventées ou découvertes pour les relier aux problèmes connus.




*Quelques réductions connues.*

*© A.Saffidine*

Si l'on dispose d'une réduction d'un problème $P_1$ vers un problème $P_2$ et d'une autre réduction de $P_2$ vers un problème $P_3$, alors il est possible de combiner les deux réductions pour en obtenir une nouvelle de $P_1$ vers $P_3$ (c'est la transitivité des réductions). Par exemple, si l'on nous dit qu'il existe une réduction du Y vers le Démineur, on peut déduire qu'il existe une réduction du Hex vers le Démineur.

Le principe de transitivité permet ainsi de regrouper les problèmes du diagramme en classes de complexité telles que si $P_1$ et $P_2$ sont deux problèmes dans la même classe alors il existe une réduction de $P_1$ vers $P_2$ et il existe une réduction de $P_2$ vers $P_1$, chacune de ces réduction pouvant être donnée directement ou par transitivité. On peut voir sur le diagramme que les problèmes listés ici se rassemblent en quatre classes de complexité : EXPTIME-complet, PSPACE-complet, NP-complet, et P.

Il existe une preuve formelle démontrant qu'on ne pourra jamais « inventer » de réduction d'un problème EXPTIME-complet (comme les Échecs) vers un problème dans P (comme Nim). La fameuse question « La classe P est-elle égale à la classe NP ? », qui date du milieu des années 1970, revient à se demander s'il est possible d'inventer une réduction depuis un problème de la classe NP (par exemple le Sudoku) vers un problème de la classe P (par exemple Nim). Jusqu'à ce jour, personne n'est parvenu à exhiber une telle réduction, ni à démontrer qu'il n'en existait pas !

Cette situation fait de « P *vs* NP » une question mathématique difficile, si fondamentale qu'en 2000 le Clay Mathematics Institute l'a mise à prix un million de dollars.

***A. S.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***Les énigmes mathématiques du troisième millénaire.*** Keith Devlin, Le Pommier, 2005.

***Logique, informatique et paradoxes.*** Jean-Paul Delahaye, Belin – Pour la Science, 1995.

***L'intelligence et le calcul.*** Jean-Paul Delahaye, Belin – Pour la Science, 2002.

# Quand les mathématiques se font coopératives

Jean-Jacques Dupas
Ingénieur-chercheur au Commissariat à l’énergie atomique et aux énergies alternatives
Président de l’association Playmaths

Édouard Thomas
Mathématicien et journaliste scientifique

Depuis l’origine des mathématiques, les défis et la compétition sont des moteurs puissants pour l’avancement des connaissances. Les duels que se lancent les chercheurs sont de plusieurs types. Certains mathématiciens, pour s’illustrer ou épater leurs collègues, s’amusent à les mettre au défi de retrouver un résultat qu’ils ont déjà obtenu. D’autres peuvent inciter leurs pairs à se pencher sur des problèmes qu’ils jugent importants.

## La longue tradition des énigmes mathématiques mises à prix

L’histoire des mathématiques fourmille de ces deux types de démarches ! Ainsi, les mathématiciens italiens de la Renaissance se livraient à de redoutables joutes publiques, parfois richement dotées et aux enjeux d’importance, pour séduire un mécène et pouvoir poursuivre leurs activités. En France, le père jésuite Marin Mersenne (1588 – 1648), n’arrivant pas à établir la valeur de la surface sous une arche de cycloïde, encouragea ses contemporains à résoudre cette énigme, ce qui sera fait par Gilles Personne de Roberval.

Plus tard, ces défis seront lancés par des institutions. Le concours organisé en 1888 par le Suédois Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927) permit à Henri Poincaré de s’illustrer. Les vingt-trois problèmes énoncés en 1900 à Paris par David Hilbert (1862 – 1943) au Congrès international des mathématiciens ont été un moteur indiscutable de la recherche mathématique tout au long du XX^e^ siècle. D’ailleurs, certains tiennent encore. Dans la même veine, les sept « problèmes du millénaire » posés par l’Institut Clay en 2000 sont, chacun, dotés d’une récompense d’un million de dollars.

Cette petite liste illustre que l’émulation due à la compétition a joué et continue de jouer un grand rôle dans l’histoire des mathématiques. Mais les joutes ne représentent pas le travail quotidien des mathématiciens, qui est fait d’échanges, de discussions, de rencontres, de brassage d’idées… Pour cette raison, le monde des mathématiques est riche de *blogs* de grande qualité (essentiellement en anglais). De même, le « réseau social » MathOverflow

Le logo du site Mathoverflow.
©The MathOverflow Foundation

(**https://mathoverflow.net**), qui agit comme un site collaboratif ouvert ou un forum sur lequel les mathématiciens professionnels viennent exposer leurs problèmes de recherche, connaît un succès considérable. Les questions tendancieuses, litigeuses, mal formulées ou scolaires y sont découragées et rapidement supprimées. De nombreux mathématiciens de tout premier plan le fréquentent assidûment : des interrogations techniques très avancées sont souvent résolues en moins de quelques heures…

## Les projets Polymath : la révolution mathématique en direct

Le projet Polymath (**https://polymathprojects.org**), né en 2009 sous le clavier de Sir William Timothy Gowers, médaillé Fields en 1998, va plus loin encore. Il prouve que plusieurs cerveaux peuvent travailler ensemble pour résoudre des problèmes de mathématiques ambitieux plus difficiles. L'idée de départ était de s'attaquer à un problème de mathématiques non résolu, mais à la façon des projets *open source*, comme Linux ou Wikipédia. La méthode utilise donc les nouveaux outils que sont les *blogs* et un *wiki*, mémoires collectives à court terme et supports d'échanges rapides et continus favorisant le brassage des idées et la spontanéité. Le projet Polymath est de plus complètement ouvert et simple d'utilisation (pas d'installation de logiciel, pas d'inscription, anonymat respecté pour ceux qui le souhaitent…). Chacun peut ainsi contribuer ou suivre le développement du projet en temps réel.

L'objectif spécifique du premier projet Polymath était de trouver une preuve élémentaire d'un résultat, nommé DHJ (pour *density Hales–Jewett*), inspiré d'un théorème difficile de combinatoire dû à Alfred Hales et Robert Jewett en 1963. Les démonstrations connues de DHJ, datées de 1989 et 1991, étaient ardues, peu éclairantes et faisaient usage d'une machinerie mathématique lourde (la théorie ergodique). Une preuve plus élémentaire, au moins pour un cas particulier significatif, serait plus riche en idées nouvelles. Le projet commença quand Gowers mit en ligne une description du projet, des pointeurs vers des références, une liste de règles pour la collaboration afin de créer une atmosphère polie, respectueuse, invitant les participants à partager une idée par commentaire, dans le but d'encourager les contributeurs et de conserver à la conversation son côté informel.

Trente-sept jours plus tard, vingt-sept contributeurs avaient rédigé plus de huit cents commentaires, sans que personne ne soit spécialement invité à participer. Les échanges se firent en douceur malgré d'inévitables loupés (intervenants récurrents perturbant les débats, commentaires improductifs, idées prometteuses mais finalement stériles, arrivée de *spams*…). Tim Gowers fut déterminant dans son rôle d'administrateur et de modérateur.

Le groupe avait ainsi trouvé une preuve élémentaire de DHJ pour le cas envisagé (où $m=3$, voir les notations en encadré). Mais, de façon inattendue, les arguments pouvaient aisément être généralisés (à $m>3$) pour prouver le résultat complet. Le succès de ce premier projet fut foudroyant !

### Le théorème de Hales – Jewett à densité

Tout commence avec le jeu du Morpion, qui oppose deux joueurs et qui se pratique sur une grille carrée de trois cases de côté. Maintenant, modifions le plateau de jeu en supprimant deux cases, par exemple celle en haut à gauche et celle du centre. La grille qui en résulte peut toujours permettre d'aligner trois symboles. Combien de cases de la grille, au minimum, doit-on supprimer pour qu'il soit impossible d'aligner trois symboles ?
Avec la grille 3 × 3, il est nécessaire de supprimer trois cases, par exemple une diagonale : impossible, sur les six cases restantes, d'aligner trois symboles !
Passons maintenant à un Morpion 3D, qui oppose deux joueurs sur une « grille » 4 × 4 × 4 (un cube C de quatre cases de côté, donc de soixante-quatre cellules en tout). Pour gagner, chacun des deux joueurs doit aligner quatre de ses symboles, dans l'une des trois directions de l'espace (selon chaque tranche de C), selon les diagonales d'une tranche de C, ou selon l'une des grandes diagonales de C. Le nombre de configurations gagnantes augmente alors considérablement !
Avec un tel cube, combien de cellules doit-on enlever, au minimum, de manière à ce qu'il ne soit plus possible d'aligner quatre symboles ? La question est plus subtile que pour le Morpion traditionnel. Ce jeu enfantin réserve encore bien des surprises…
DHJ établit une estimation quantitative précise de l'analogue de cette question dans un cadre extrêmement général : la « grille » (ou *cube de Moser* pour les mathématiciens) de ce « Morpion généralisé » peut avoir $m$ cases de côté (où $m \geq 2$ est un entier quelconque), être placée dans un espace à $n$ dimensions (avec $n \geq 2$) et opposer $k$ joueurs ($k \geq 2$) qui donc, chacun, pour gagner, doivent aligner $m$ symboles.

L'enregistrement et la disponibilité du travail de Polymath est une source unique pour les étudiants en mathématiques, pour les historiens, les sociologues et les philosophes des sciences. Pour la première fois, on peut documenter la naissance et l'évolution pas à pas d'un résultat fondamental : idées soumises qui seront améliorées ou abandonnées, addition d'une multitude de raffinements, persévérance, erreurs de compréhension, montée de la tension au fur et à mesure que l'on approchait du but… Un véritable thriller !

## Dix années et une petite vingtaine de projets plus tard…

Depuis, les projets Polymath se sont succédé, généralement avec beaucoup d'enthousiasme, mais rarement avec le caractère « massivement collaboratif » observé pour la recherche d'une preuve élémentaire de DHJ. Les participants sont parfois les mêmes d'un projet à l'autre ; Tim Gowers et Terence Tao se sont particulièrement illustrés.

Le deuxième projet, lancé par Gowers en 2009 dans l'euphorie du moment, portait sur la « bonne » définition de certains objets en théorie des espaces de Banach. L'objectif était volontairement vague, afin que le rythme soit moins soutenu, et de fait le projet n'a jamais vraiment décollé…

L'enthousiasme est revenu avec le projet « mini Polymath », qui consistait à résoudre collectivement, en ligne (sur le *blog* « What's New » de Terence Tao), la sixième et dernière question des Olympiades internationales de mathématiques (juillet 2009). L'énoncé, de nature purement combinatoire, était le suivant. Soient $a_1, a_2 \ldots a_n$ des entiers strictement positifs distincts. Soit M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs ne contenant pas la somme $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel. Partant du point 0, elle doit effectuer $n$ sauts vers la droite, de longueurs $a_1, a_2 \ldots a_n$, dans l'ordre de son choix. Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de M. En quelques jours, cinq preuves différentes du résultat ont été obtenues ! L'expérience a été reconduite en 2010, 2011 et 2012, avec un enthousiasme moindre chaque année.

Les nombres premiers ont plusieurs fois suscité l'intérêt. Le quatrième projet visait à produire un algorithme déterministe permettant de générer un nombre premier de $k$ chiffres en temps « rapide » (polynomial en $k$). Un tel algorithme n'a pas été trouvé, mais les participants ont pu dresser un état complet des connaissances sur cette question, comprendre pourquoi elle était si difficile et comment elle s'articulait avec d'autres conjectures ou problèmes ouverts en mathématiques.

Le huitième projet, qui a suscité un enthousiasme sans doute sans précédent, a fait suite à l'extraordinaire percée, totalement inattendue, du discret Yitang Zhang. En mai 2013, ce mathématicien américain d'origine chinoise a en effet été à l'origine d'un coup de tonnerre. On ne sait toujours pas, aujourd'hui, s'il existe une infinité de nombres premiers séparés de deux unités, comme 3 et 5, 17 et 19 ou 29 et 31 (on parle de nombres premiers *jumeaux*). On pense que c'est le cas. De même, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers séparés de quatre unités, comme 7 et 11 (nombres premiers *cousins*), ou séparés de six unités, comme 5 et 11 (nombres premiers *sexys*). Là encore, on pense que oui. De manière générale, quel que soit l'entier $n$, on pense (conjecture de Polignac, 1849) qu'il existe une infinité de nombres premiers séparés de $2n$ unités. Ce qui revient à dire que tout entier pair $2n$ peut s'exprimer, d'une infinité de manières différentes, comme la différence de deux nombres premiers. Avant Yitang Zhang, on ne savait pas qu'un tel nombre pair existait. Depuis mai 2013, on sait qu'il doit nécessairement exister un tel entier inférieur à 70 000 000. En mobilisant des dizaines de mathématiciens durant plusieurs mois, le projet Polymath 8 a permis, fin 2014, de réduire la borne de Zhang à 246 et de mieux comprendre la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers séparés de $2n$ unités, avec un certain nombre pair $2n$ inférieur à 246. Mais on reste encore bien loin de la conjecture de Polignac qui avance que la propriété est vraie pour tous les nombres pairs…

Les projets Polymath, dont certains sont encore en cours actuellement, ne se sont cependant pas cantonnés à la théorie des nombres ou à la combinatoire, bien que cette dernière se taille la part du lion. La théorie des jeux (treizième projet, sur les propriétés de dés non transitifs) et les équations aux dérivées partielles (septième projet, relatif à l'équation de la chaleur) se sont par exemple invitées à la fête.

## Un modèle mathématique à étendre aux autres sciences ?

Polymath diffère des traditionnels projets de grandes équipes dans l'industrie ou dans les autres sciences, où le travail est en général découpé de façon statique et hiérarchique. Aujourd'hui, le seizième projet a été lancé (avril 2018), plusieurs sont arrivés à leur terme et ont abouti à la publication de résultats. Une question pertinente est de savoir si le processus peut être étendu pour intégrer encore plus de contributeurs. Ou de permettre à des contributeurs tardifs de rejoindre un projet lancé depuis plusieurs semaines et donc déjà très avancé. À quoi un nouveau participant peut-il être utile ? Des outils logiciels *open source* peuvent parcourir les contributions passées et favoriser le processus en découpant la discussion en modules… Des pistes restent à explorer pour encourager des sciences plus « ouvertes » ! L'application de ce modèle aux sciences expérimentales est cependant relativement délicate car les équipements sont assez difficiles à partager, même si les résultats, eux, le peuvent.

Est-il possible d'aller plus loin encore, et de fragmenter un problème de recherche ouvert de telle sorte que des amateurs non spécialisés mais motivés puissent résoudre l'un de ces morceaux ? Bien sûr, il existe de nombreux projets de calcul distribué visant à rassembler la capacité de calcul d'un grand nombre d'ordinateurs connectés au réseau Internet. Le plus célèbre d'entre eux, le Great Internet Mersenne Prime Search (George Woltman, 1996, **https://mersenne.org**), a permis, en vingt-deux ans, de trouver dix-sept nombres premiers gigantesques. On peut également « miner des *bitcoins* », pour ceux qui s'intéressent aux cryptomonnaies. Mais avec ces initiatives le « participant » reste relativement passif, voire n'a même pas connaissance du programme global de recherche ou des méthodes mises en œuvre. Il est possible d'impliquer beaucoup plus le « citoyen scientifique ».

Foldit (Université de Washington, 2008, **https://fold.it/portal** ) consiste à proposer au grand public un jeu vidéo expérimental ludique, qui permet au final d'aider les biologistes à comprendre le repliement des protéines. Galaxy Zoo (Galaxy Zoo Team, 2007, **https://www.zooniverse.org**) est un projet astronomique en ligne qui propose aux internautes de collaborer à la classification de plus d'un million de galaxies. L'organisation non gouvernementale internationale Electronic Frontier Foundation (EFF, **https://www.eff.org/awards/coop**) encourage financièrement les internautes à contribuer à des tâches de calcul distribué sur la Toile. Fondée en 1990 aux États-Unis par Mitch Kapor, John Gilmore et John Perry Barlow, l'EFF s'est notamment donné pour mission de soutenir les avancées technologiques qui préservent les libertés individuelles. Cela passe par le développement d'une cryptographie à la fois sécurisée et conviviale. Les prix de calcul coopératif qu'elle attribue sont les suivants : cent cinquante mille dollars (plus de cent trente mille euros) pour la découverte d'un nombre premier d'au moins cent millions de chiffres ; deux cent cinquante mille dollars (plus de deux cent vingt mille euros) pour la découverte d'un nombre premier d'au moins un milliard de chiffres.

De manière plus générale, sans doute, en mathématiques il est possible d'identifier des objectifs ( conjectures, classifications, algorithmes à tester …) suffisamment attrayants pour séduire des amateurs et suffisamment modulaires pour être fragmentés. Des idées ont été avancées en arithmétique, en combinatoire, en mathématiques discrètes ou encore en topologie (théorie des nœuds) mais rien n'a vraiment été tenté. Autant de pistes originales qui restent à explorer !

***J.-J. D. & É. T.***

Pour en savoir (un peu) plus :

***La formule secrète – Le duel mathématique qui enflamma l'Italie de la Renaissance.*** Fabio Toscano, Belin, 2011.

***L'homme, meilleur joueur que la machine***. Jean-Paul Delahaye, *Pour la science* 423, janvier 2013.

***Massively collaborative mathematics.*** Timothy Gowers et Michael Nielsen, *Nature* 461, 2009.

# Bibliographie
# « Maths Jeux Culture Express »

Le Comité international des jeux mathématiques est une association indépendante. Nous avons sélectionné les sites et les ouvrages suivants pour les lecteurs de *Maths Jeux Culture Express* qui souhaitent explorer plus avant les interactions entre jeu et mathématiques.


## Les grandes énigmes mathématiques :

*Le dernier théorème de Fermat.* Simon Singh, Fayard–Pluriel, 2011.
*La conjecture de Poincaré*. George Szpiro, Points, 2009.
*Les énigmes mathématiques du troisième millénaire*. Keith Devlin, Le Pommier, 2003.
*Amour et maths.* Edward Frenkel, Flammarion, 2015.

## Les casse-tête :

Blog « Les casse-tête de Chantal Pain », collection.cassetete.free.fr
*1000 casse-tête du monde entie*r. Pieter van Delft et Jack Botermans, Le Chêne, 1988.
*The puzzle arcade*. Jerry Slocum, Klutz, 1996.
*The anchor puzzle book*. Jerry Slocum et Dieter Gebhardt, Slocum Puzzle Foundation, 2006.
Site « Passion casse-tête », jeu-et-casse-tete.blogspot.com
Site « Puzzle World », **puzzleworld.org/PuzzleWorld/default.htm**

## Découpes, dissections et polyminos :

Site « Morceaux choisis de géométrie », CultureMath.ENS.fr/decoupes (prochainement).
*Découpages et pavages*. Bibliothèque Tangente 64, POLE, 2018.
*Polyominoes*. Salomon Golomb, Scribners, 1965.
*536 puzzles and curious problems*. Henry Dudeney, Scribners, 1967.
*Madachy's mathematical recreations*. Joseph Madachy, Dover, 1979.
*Geometric dissections*. Harry Lindgren, Van Nostrand, 1964.
*Puzzles and paradoxes*. Thomas O'Beirne, Oxford Press, 1965.
*Dissections: plane and fancy*. Greg Frederickson, Cambridge University Press, 2003.
*Hinged dissections: swinging and twisting*. Greg Frederickson, Cambridge University Press, 2002.
*Piano-hinged dissections*. Greg Frederickson, AK Peters–CRC Press, 2006.
*Ernest Irving Freese's geometric transformations*. Greg Frederickson, World Scientific Publishing, 2018.

## Les magazines en ligne :

*Images des mathématiques* (édité par le CNRS), **https://images.math.cnrs.fr**
*Interstices* (édité par l'Inria), **https://interstices.info**
*Accromath* (Institut des sciences mathématiques et Centre de recherches mathématiques de l'université de Montréal), **accromath.uqam.ca**

## Les sites Internet (en français, en anglais) :

Diconombre (Gérard Villemin), ***yoda.guillaume.pagesperso-orange.fr/TableMat.htm***
Mathcurve (Robert Ferréol), ***mathcurve.com***
CultureMath (École nationale supérieure), ***https://culturemath.ens.fr***
Mathworld (Eric Weisstein), **mathworld.wolfram.com**
The Art of Problem Solving, **https://artofproblemsolving.com**
Math Is Fun, **https://www.mathsisfun.com**
Online Encyclopedia of Integer Sequences (Neil James Alexander Sloane et Simon Plouffe), **https://oeis.org**

## Les blogs français (culture, récréations, ressources pédagogiques) :

Micmaths, le « bric-à-brac mathématique et ludique de Mickaël Launay », **https://www.micmaths.com**
Science4All (Lê Nguyên Hoang), **https://www.youtube.com**/channel/UC0NCbj8CxzeCGIF6sODJ-7A
Choux romanesco, vache qui rit et intégrales curvilignes (Jérôme Cottanceau, alias El Jj), **eljjdx.canalblog.com**
Récréomath (Charles-Édouard Jean), **recreomath.qc.ca**
Les récréations mathématiques (Philippe Fondanaiche), **diophante.fr**
Les inclass@bles mathématiqu€s (Olivier Leguay), **inclassablesmathematiques.fr**
Le blog-notes mathématique du coyote (Didier Muller), **https://www.apprendre-en-ligne.net/blog**
Math'O Man (Bernhard Elsner), **mathoman.com**
Le blog de Pierre Lecomte, **https://pierrelecomte.wordpress.com**
Bricomaths (Olivier Longuet), **bidouillesetmathscollege.blogspot.com**
Mathématiques magiques (Thérèse Éveilleau), **perso.orange.fr/therese.eveilleau**
Chronomath (Serge Mehl), **serge.mehl.free.fr**
Les-mathematiques.net, **les-mathematiques.net**
Les mathématiques pour tous (association Sesamath), **seminairespourtous.ens.fr/mpt**
Exercices et jeux mathématiques en ligne pour les élèves de l'école primaire (Dominique Pernoux), **dpernoux.free.fr/exercices-en-ligne.htm**
M@ths et Tiques (Yvan Monka), **https://www.maths-et-tiques.fr**
L'île des mathématiques (Pascal Gou et Océane), **https://www.ilemaths.net**

## Sources des articles et du complément d'enquête :

*A tribute to Paul Erdos*. Alan Baker, Bela Bollobas et Andras Hajnal, Cambridge University Press, 2012.
*Jeux de l'humanité*. Ulrich Schädler, Slatkine, 2008.
*Sept pères du calcul écrit, des chiffres romains aux chiffres arabes, 799–1202–1619*. Jérôme Gavin et Alain Schärlig, Presses polytechniques romandes, 2019.
**mathoverflow.net/questions/100265/not-especially-famous-long-open-problems-which-anyone-can-understand**
**https://mathoverflow.net/questions/225870/open-problems-for-undergraduates?rq=1**
**https://mathoverflow.net/questions/66084/open-problems-with-monetary-rewards**
**https://mathoverflow.net/questions/112753/can-pure-mathematics-harness-citizen-science/113878#113878**
**https://terrytao.wordpress.com/2014/12/16/long-gaps-between-primes**

# *Wanted*
# Les mathématiques mises à prix

Édouard Thomas

Mathématicien et journaliste scientifique

« Jeu » rime avec « enjeu ». Un joueur est le plus souvent face à des adversaires, l'enjeu est alors de les vaincre, d'accumuler plus de richesses qu'eux, ou d'arriver plus rapidement à un but. En mathématiques, il est rare que l'on soit en compétition contre un adversaire ; on cherche plutôt à « terminer la partie tous ensemble ». En fait, la question ne se pose pas vraiment en ces termes. Le « jeu » joué par des mathématiciens professionnels dans le cadre de leurs activités de recherche est en effet du genre coopératif et collaboratif. Mais alors, quels sont les enjeux ? La quête désintéressée du savoir (« finir la partie » ou au moins « passer un niveau », en un certain sens) ? Peut-être. La liberté de « sécher » sur les questions que l'on se choisit soi-même (« le plaisir du jeu ») ? Sans doute. Remporter des prix prestigieux, atteindre la gloire, associer son nom à un important résultat (« jouer pour la gagne ») ? C'est possible. Il existe d'ailleurs plusieurs prix richement dotés, spécifiques aux mathématiques ou qui peuvent les mettre à l'honneur. On pense au prix Abel (annuel, depuis 2003, environ 600 000 € de dotation), au Breakthrough Prize (annuel, depuis 2015, 2 700 000 €), aux prix Shaw (annuel, depuis 2004, 940 000 €), MacArthur (annuel, depuis 1981, 450 000 €), Wolf (annuel, depuis 1978, 90 000 €), Crafoord (tous les sept ans environ, depuis 1980, 450 000 €)… Face à cette surenchère somme toute récente, la médaille Fields, décernée tous les quatre ans, accompagnée des quelque 10 000 € dont elle est pourvue, prêterait presque à sourire.

Sourire ? Eh bien non : la « MF » reste en effet la plus célèbre distinction en mathématiques, celle qui fait le plus de sens pour les mathématiciens. Ce qui tendrait à prouver que ce n'est pas l'argent qui les fait courir. Mais jouons le jeu, et tirons le fil. Avec certains prix ronflants, il s'agit plus de politique, d'image, de marketing, de communication que de mathématiques. On sait moins que la mille fois vénérable reine des sciences foisonne de récompenses, promises à qui viendra à bout d'un problème de maths récalcitrant. Serait-on devenu vénal jusque dans les derniers bastions de la « science pure et dure » ?

On commence avec une grosse mise : un million de dollars ! C'est la somme, rondelette, qui sera offerte par l'Institut de mathématiques Clay, basé aux États-Unis, aux tombeurs de chacun des sept problèmes du millénaire (voir l'article d'Hervé Lehning). Le même montant attend le premier qui viendra à bout de la *conjecture de Beal*. Andrew Beal, banquier et mathématicien amateur, s'est essayé sur le dernier théorème de Fermat (lui-même richement mis à prix par le passé, et finalement prouvé par Andrew Wiles). En 1993, il a proposé la généralisation suivante : si les entiers $x$, $y$ et $z$ sont supérieurs à 1 et deux à deux *premiers entre eux* (sans facteur en commun autre que 1) et si les entiers $u$, $v$ et $w$ sont supérieurs à 2, alors l'équation $x^u + y^v = z^w$ ne possède aucune solution. La question est si obsédante que depuis 1997 Beal l'a mise à prix ! Aujourd'hui, elle vaut donc un million de dollars.

Mieux : deux millions de dollars avaient été proposés en 2007 par l'éditeur de jeux Tomy pour résoudre un puzzle, Eternity II, créé par Lord Christopher Monckton. Les deux cent cinquante-six pièces comportent un motif sur chaque bord et doivent paver un plateau de taille $16 \times 16$ de manière à ce que les côtés adjacents des pièces correspondent. Succès commercial garanti ! Ce puzzle anodin pose en fait des questions combinatoires intéressantes. En 2010, aucune des quelque vingt mille solutions (selon l'éditeur) n'avait été trouvée, et le prix a cessé. Une première version du puzzle, Eternity I (Ertl Company, 1999), avait déjà été mise à prix un million de livres (plus d'un million d'euros) par le créateur du jeu et des assureurs ; aidés de puissants ordinateurs, deux mathématiciens obstinés, Alex Selby et Oliver Riordan, avaient raflé le jackpot.

Dans le même état d'esprit, pour accompagner la sortie de l'ouvrage *Oncle Petros et la Conjecture de Goldbach* (Apostolos Doxiadis, 2000), les éditeurs Bloomsbury USA (aux États-Unis) et Faber and Faber (en Grande-Bretagne) ont proposé un million de dollars à quiconque résoudrait la fameuse conjecture (« tout nombre pair est somme de deux nombres premiers ») avant fin 2002.

Tous ces montants, faramineux en apparence, sont en fait bien faibles au regard de la difficulté des questions posées ! Tenter de les remporter est sans doute l'une des façons les plus vaines de s'enrichir…

Le roi des poseurs et des résolveurs de problèmes était le Hongrois Paul Erdös (1913–1996). Mathématicien errant, sans poste universitaire ou professionnel fixe, sans maison, sans biens, il parcourait le monde à la recherche de belles mathématiques. Il n'avait que sa petite valise, des carnets, des crayons, quelques effets, et son prodigieux cerveau. Bien que sans le sou, son enthousiasme pour certaines questions difficiles était tel qu'il proposait de les mettre à prix ! Depuis son décès, en la mémoire de ce mathématicien ermite étonnant par son talent, sa créativité, son dévouement et sa générosité intellectuelle, ses amis, notamment Fan Chung et Ron Graham, continuent d'entretenir ces prix. Mieux : Kevin Ford, Ben Green, Sergey Konyagin, James Maynard et Terence Tao, après avoir résolu en 2014 une importante question d'Erdös à 10 000 $ relative aux grands écarts entre des nombres premiers consécutifs, renvoient l'ascenseur. Tao propose ainsi 10 000 $ à quiconque réussira à améliorer leur résultat !

## Quelques problèmes mis à prix par Paul Erdös

500 \$. Prenez une infinité dénombrable de points du plan, $P_1$, $P_2$, $P_3$..., cinq d'entre eux n'étant jamais sur une même droite. Notez $R(n)$ le nombre de droites qui passent par quatre points exactement parmi les $n$ premiers points $P_1$, $P_2$... $P_n$. Est-il possible, pour une configuration donnée de ces points, que la limite $R(n)/n^2$ existe et ne soit pas zéro ?

100 \$ ou 25 000 \$. La *moyenne arithmétique* de deux entiers positifs impairs $a$ et $b$ est égale à l'entier $(a + b)/2$. Un nombre premier supérieur à 5 est *en avance* s'il est strictement inférieur à la moyenne arithmétique du nombre premier qui le précède et du nombre premier qui le suit. Par exemple, 13 est en avance car $13 < (11 + 17)/2$. Conjecture : il existe une infinité de nombres premiers en avance tels que le nombre premier suivant soit lui aussi en avance (comme pour 19 et 23). Gagnez 100 \$ si vous prouvez que c'est vrai, ou 25 000 \$ si vous prouvez que c'est faux !

3 000 \$. Plus technique : soit E un ensemble infini d'entiers strictement positifs. Si la somme des inverses de tous les éléments de E diverge, E contient-il des progressions arithmétiques de longueur arbitraire ?

Le mathématicien américain John Horton Conway a lui aussi une liste de quatre questions mises à prix 1 000 \$ chacune. L'une d'elles porte sur un jeu. Deux joueurs, à tour de rôle, choisissent un nombre strictement positif qui n'est pas la somme de multiples de nombres déjà précédemment cités. La personne qui est obligée de choisir 1 a perdu (et le jeu s'arrête). Il a été prouvé que le jeu termine en un temps fini. Supposons que le premier joueur commence en choisissant 16, et que les deux joueurs jouent parfaitement. Qui gagne la partie ?

Le mathématicien et musicien américain Clark Kimberling a lui aussi établi une liste portant notamment sur les suites d'entiers, la combinatoire ou la géométrie. En voici un à 50 \$ (une récompense moyenne) : prenons un triangle ABC arbitraire. Noam Elkies a prouvé en 1987 qu'il existe un unique point X tel que les triangles AXB, BXC et CXA aient des cercles inscrits de même rayon. Trouver les coordonnées barycentriques explicites de X.

L'analyste italien Alberto Bressan a mis deux problèmes à prix (500 \$ chacun). Le premier peut être paraphrasé ainsi. Le feu se déclenche à l'instant $t = 0$ dans un disque de rayon 1. Il se propage à vitesse unitaire dans toutes les directions. Pour stopper sa progression, une barrière est construite, en temps réel, à une certaine vitesse constante $v$, de sorte que la longueur de la barrière au temps $t$ est égale à $v \times t$. Quelle doit être la vitesse de construction $v$ de manière à pouvoir toujours circonscrire l'incendie ?

Sur Internet, les pages d'accueil des mathématiciens regorgent de pépites. Anatole Katok a convaincu le Center for Dynamics and Geometry de l'université d'État de Pennsylvanie (États-Unis) d'offrir dix mille dollars à quiconque réussirait à décrire le comportement des trajectoires régulières sur un billard triangulaire quelconque. Cela fait en particulier des décennies que l'on se demande si ces trajectoires sont *ergodiques* (à savoir, si elles décrivent tout le triangle et si, en moyenne, elles passent dans une surface S du triangle un temps proportionnel à l'aire de S).

Zhi-Wei Sun offre 2 400 $ à qui prouvera que tout entier peut s'écrire $t^2+u^2+v^2+w^2$ avec $t$, $u$, $v$ et $w$ quatre entiers, $t$ étant lui-même un carré et $t+24u$ étant aussi un carré. De même, il offre 1 350 $ à qui établira (ou invalidera) que tout entier peut s'écrire $a^2+b^2+c^2+d^2$ avec $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre entiers, $a+3b+5c$ également un carré. Et bien d'autres dans le même goût !

En France, Michel Talagrand propose 1 000 $ ou 5 000 $ pour la résolution de quelques conjectures en analyse ou en combinatoire. Jusqu'en décembre 2020, Gérard Cornuéjols offre 5 000 $ de prix pour quiconque résoudra l'une des douze conjectures d'optimisation combinatoire qu'il propose. Pour revenir à des mathématiques plus accessibles au grand public, Christian Boyer, administrateur du site **www.multimagie.com**, propose huit mille euros et douze bouteilles de champagne pour des énigmes portant sur les carrés magiques. Il suit en cela une démarche initiée par Martin Gardner (1914–2010), journaliste scientifique, mathématicien amateur et chroniqueur légendaire.

De son côté, le 14 mars 2017 (jour de π), Mickaël Launay proposait une récompense de trois euros et quatorze centimes (!) à qui ferait *« des avancées significatives »* dans l'étude de la « farfalle de Fibonacci » (voir en ligne sa vidéo « Le mystère de la farfalle »)…

Scott Aaronson, Jeffrey Shallit, Doron Zeilberger, Ian Morrison, Alexandre Eremenko… offrent des récompenses pour résoudre des problèmes de maths. D'autres encore, moins fortunés, plus imaginatifs ou plus joueurs, proposent des livres dédicacés, un café, une bière, un repas dans un restaurant gastronomique… Donald Knuth expédie des « dollars hexadécimaux » de la banque (imaginaire) de San Serriffe à qui trouvera des erreurs dans ses ouvrages. Stanislaw Mazur a offert en 1972 une oie (vivante) à Per Enflo pour avoir « cracké » un problème relatif aux espaces de Banach. Pour obtenir la réponse à une question probabiliste portant sur un modèle d'évolution, Elizabeth Allman est prête à aller pêcher, fumer et expédier un saumon d'Alaska…

En fait, les mathématiciens semblent plutôt chercher à attirer l'attention de leurs collègues sur les défis qui s'immiscent dans leur quotidien et qui invitent à la modestie. Les récompenses promises à qui résoudra ces énigmes témoignent surtout de l'enthousiasme, de l'humour décalé et de la bonne ambiance qui règnent globalement dans cette communauté !

***É. T.***

BIENVENUE SUR LE STAND

# LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE SE PREND AU JEU

Avec les laboratoires de recherche en sciences mathématiques du CNRS, des universités Caen Normandie, de Lorraine, Paris Diderot et Sorbonne Université, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, l'Institut Henri Poincaré, l'IREM de Paris et la Maison des Mathématiques et de l'Informatique.

# Centre de recherche Inria de Paris en bref

**600**
**personnes dont**
**520 scientifiques**

**36 équipes**
**de recherche**

**22** bourses ERC depuis 2009

**1** à **2** nouvelles start-up par an

En partenariat avec :

le CNRS, l'EHESS, l'ENPC, l'ENS, Inserm, Mines ParisTech, Paris Dauphine, Sorbonne Université, Université de Paris, Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

*Membre de :*

PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS

ALLIANCE SORBONNE UNIVERSITÉ

Inria.fr/Centre/Paris

@inria_paris

Cette brochure orchestrée par
Lisa Rougetet

a été réalisée par le
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de
Marie José Pestel et Édouard Thomas

Imprimée grâce à
la Mairie de Paris, l'Inria, le CNRS, La Fondation Blaise Pascal, la Fondation Jacques Hadamard, la Fondation Science Mathématiques de Paris, le Crédit Mutuel Enseignant et les Éditions POLE.

Elle réunit les signatures de

Lisa Rougetet
Ulrich Schädler
Virginie Tacq
Alain Zalmanski
Michel Criton
Léo Gerville-Réache
Jacques Sesiano
Jérôme Auvinet
Nicolas Pelay
Joëlle Lamon
Laurence Schmoll
Élisabeth Busser
Hervé Lehning
Jean-Paul Delahaye
Abdallah Saffidine
Jean-Jacques Dupas
Édouard Thomas

Cette brochure interdisciplinaire
réunit des auteurs qui partagent la même passion
pour le jeu et la pédagogie.
Vous découvrez grâce à eux l'histoire, l'actualité et l'avenir
de deux domaines que l'on n'associerait pas forcément.
Qu'ils soient vivement remerciés pour avoir accepté, malgré leur
emploi du temps chargé, de nous offrir ces textes de qualité.

Maquette de couverture
Elsa Godet

Réalisation
Patrick Arrivetz

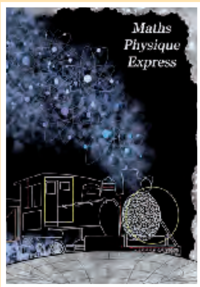
Imprimée sur les presses de
CIA GRAPHIC — 03 86 90 96 10

Mai 2019

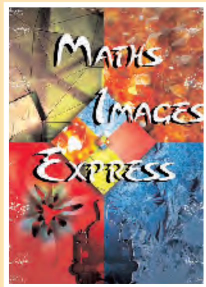
# Maths Express

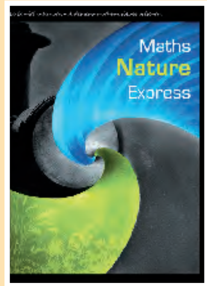
## Une collection CIJM

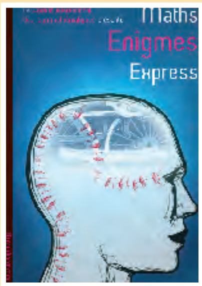
cijm.org/accueil/productions-cijm/90-maths-express

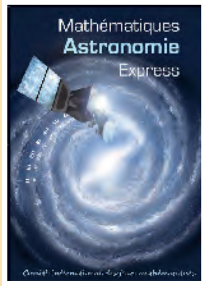


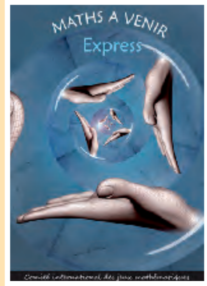


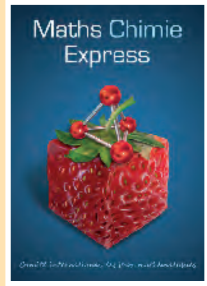


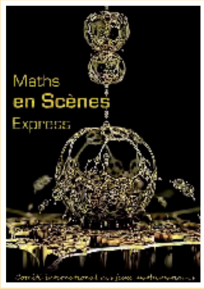



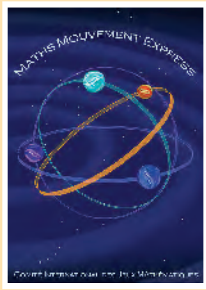



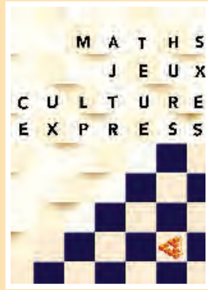











CIJM
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
www.cijm.org