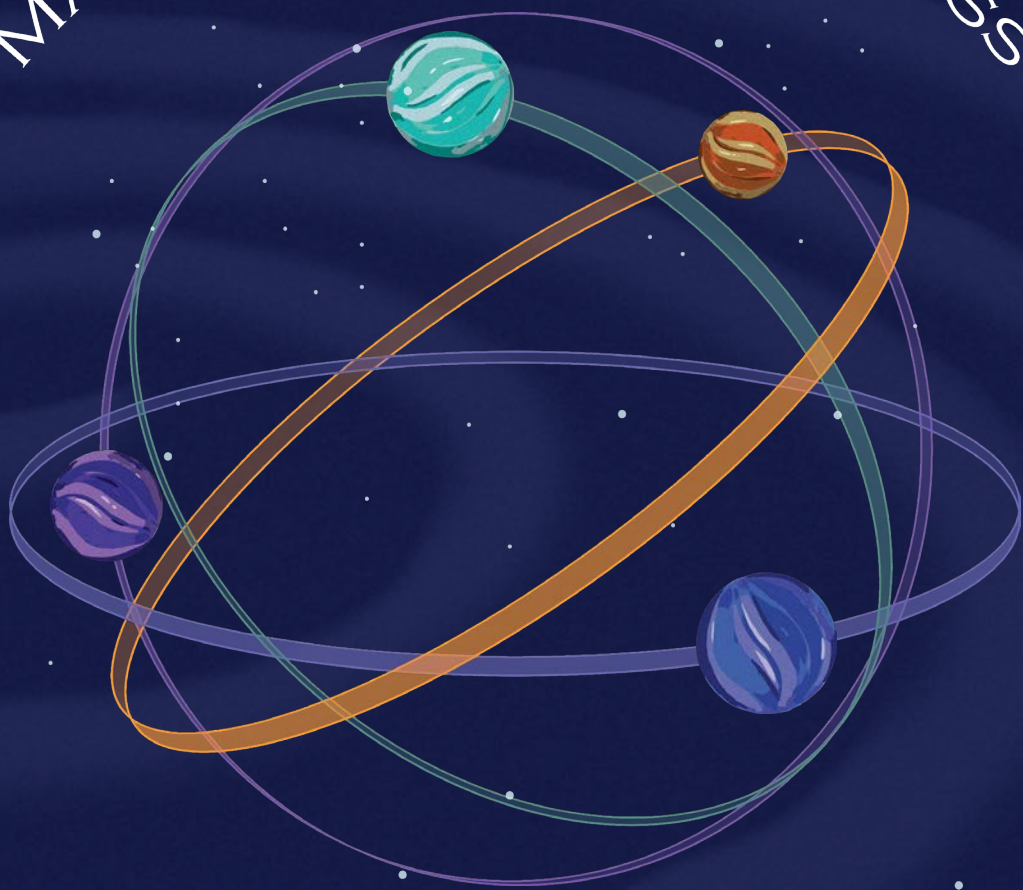


MATHS MOUVEMENT EXPRESS



COMITÉ INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES

SOMMAIRE

Introduction	1
Jean-Philippe Uzan	
Zénon : quand le mouvement se heurte à l'infini	3
Hervé Lehning	
Des instruments traceurs de courbes	9
Jean-Jacques Dupas	
Quand les roues des voitures tournent à l'envers	15
Michel Criton et Édouard Thomas	
Le mouvement est comme rien	21
Roland Lehoucq	
Contorsions cosmiques	27
Jean-Philippe Uzan	
Les points de Lagrange : un ticket gratuit vers les étoiles ?	33
Emmanuel Trélat	
Le mouvement sous toutes ses coutures	39
Fabrice Neyret	
Quand les ondes dessinent des motifs géométriques	45
Laure Saint-Raymond et Thierry Dauxois	
Comment déguster un bon brownien	51
Roger Mansuy	
La « DATA VIZ » : donnez vie à vos données !	57
Arnaud Sallaberry et Pascal Poncelet	
Danser les maths : la chorégraphie, de la symétrie aux algorithmes	63
Gaël Octavia	
La musique éclairée par les mathématiques	69
Élisabeth Busser	
La représentation du mouvement dans l'art	75
Denise Demaret-Pranville	
Dynamorigami : la dynamique des plis	81
Vincent Floderer	
Une course démoniaque	87
Nicolas K. Blanchard	
Jeux et déplacements	93
Anatole Dahan	
Bibliographie sélective	99
Durs	106

RETROUVEZ SUR : www.cijm.org ► Productions CIJM ► Maths Express
MATHS MOUVEMENT EXPRESS COMPLÉMENT D'ENQUÊTE

**Les mouvements des corps célestes,
quand la gravitation rencontre la géométrie**

Jérôme Perez

... INTRODUCTION

JEAN-PHILIPPE UZAN

INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE PARIS, UMR 7095 DU CNRS

Le mouvement a été un moteur de connaissances. Il nous empêche de nous fossiliser dans nos certitudes sur la nature. De la philosophie à la danse, en passant par la physique et la musique, il nous renvoie à l'espace et au temps, aux « objets » dans l'espace et le temps, dans l'espace-temps, aux changements de l'espace-temps lui-même. Les mathématiques ont été inspirées par ce ballet indiscipliné lui soumettant des questions et des défis.

Qu'est-ce donc que le mouvement ? Peut-on le décomposer en une série de positions statiques ? Sur l'exemple du paradoxe de Zenon, Hervé Lehning souligne que ces questions ont animé les philosophes et les mathématiciens. De façon plus sensuelle et incarnée, la danse aborde cette même question, comme l'illustrent certaines chorégraphies de Dore Hoyer ou, plus récemment, de Kitsou Dubois avec ses danses en apesanteur. Gaël Octavia nous propose de découvrir une autre relation entre danse et maths...

En physique, le mouvement est partout. Sa description a nécessité d'identifier des concepts comme ceux de trajectoire, de vitesse, d'accélération, de les mathématiser et de les relier par des équations permettant de prédire les mouvements. Roland Lehoucq revient sur les pas de Galilée et de son principe de relativité alors que Laure Saint-Raymond retrace les liens entre la propagation des ondes et les figures géométriques. Les habitués de la collection de modèles de l'Institut Henri-Poincaré savent peut-être que certains d'entre eux, les quartiques, ont été initialement étudiés par Augustin Fresnel et Ernst Kummer pour leurs relations avec la propagation de la lumière.

La formulation d'équations du mouvement ouvre sur les équations différentielles, sur les systèmes dynamiques et sur les thématiques du déterminisme et du chaos. Jean-Jacques Dupas présente des instruments permettant de représenter courbes et trajectoires. Aux échelles microscopiques, les multiples collisions atomiques invitent les probabilités au cœur

du mouvement. Roger Mansuy nous guide dans ce monde où il faut formaliser le hasard.

Les processus de diffusion, de matière ou de chaleur, fournissent des exemples d'équations d'évolution qui ne sont pas réversibles dans le temps. En ce qui me concerne, je vous propose de me suivre dans un monde plus courbe et élastique où les trajectoires sont à remplacer par des géodésiques et où l'espace lui-même change. On parlera alors un peu la langue de la géométrie différentielle.

Le mouvement suscite de nombreuses autres questions. Pensons au mouvement perpétuel et à la seconde loi de la thermodynamique, à la mécanique quantique et à la notion de trajectoire, aux méthodes hamiltoniennes et lagrangiennes... Chacune est liée à des branches entières des mathématiques : systèmes dynamiques, chaos, géométrie différentielle, équations stochastiques, géométrie symplectique, théorie des groupes... Quel festival !

Montaigne déclare que «notre vie n'est que mouvement». Le vivant ne peut se concevoir sans mouvement. La théorie darwinienne de l'évolution rend toute vision fixiste intenable. Tout bouge : les espèces, les techniques, les idées. Ce changement se mathématise comme un mouvement dans un espace d'espèces ou d'idées, souvent de très grande dimension. Notre quotidien nous confronte à de nombreux mouvements qui peuvent aussi se modéliser afin de comprendre leur nature et leur cause : mouvements migratoires, bancaires, aériens, sociaux... Il est souhaitable de pouvoir les représenter, ce que Pascal Poncelet aborde sur l'exemple des «data».

Faisons un pas de plus en suivant Edgar Allan Poe, pour qui «tout mouvement de quelque nature qu'il soit est créateur». Créateur de nouvelles formes, le mouvement se déploie dans l'art, par sa représentation, comme l'explique Denise Demaret-Pranville, ou dans son imitation, pour suivre Fabrice Neyret ou Vincent Floderer. Élisabeth Busser nous montre que la musique ne fait pas exception. Pour finir sur une note ludique, et surtout incontournable dans le Salon de la culture et des jeux mathématiques, Nicolas K. Blanchard nous plongera dans les mouvements d'un joueur sur un plateau de jeu.

En mouvement, donc. Même si il n'est comme rien, il est le symbole de disciplines qui évoluent dans leurs sujets et dans leurs méthodes, qui échangent et se redéfinissent.

J.-P. U.

ZÉNON : QUAND LE MOUVEMENT SE HEURTE À L'INFINI

HERVÉ LEHNING

Agrégé de mathématiques, écrivain scientifique,
membre de l'ARCSI

Les fameux paradoxes du philosophe présocratique grec Zénon d'Élée (V^e siècle avant notre ère) tendent à prouver que le mouvement est impossible! Sauf à penser que Zénon le croyait vraiment, il s'agit d'humour autant que de philosophie. Voici donc l'histoire d'une course entre Achille, réputé excellent coureur, et la tortue, dont chacun connaît la lenteur :

« La tortue est partie en avance. Elle est déjà bien loin lorsque Achille se met à courir. Quand il atteint le point où elle se trouvait, toute tortue qu'elle est, elle a fait du chemin. Chaque fois qu'Achille passe par le point où elle se trouvait, elle n'y est plus. Elle a progressé. Le même cauchemar recommence jusqu'à l'infini pour ce pauvre Achille. Jamais, il ne rattrapera la tortue! »



Partie en avance,
la tortue va-t-elle semer Achille ?
© Hervé Lehning

UNE SOMME INFINIE DE NOMBRES QUI EST FINIE...

Dans une autre version du paradoxe, Achille tire une flèche contre un arbre. Cette flèche ne peut atteindre l'arbre pour la même raison ! Elle reste « piégée » par le découpage du temps en instants successifs. Bien sûr, tout cela est absurde, le mouvement est possible. L'erreur fondamentale du raisonnement de Zénon est d'imaginer une suite infinie d'instant distincts, alors que cette notion est une fiction. La seule ayant une réalité dans ce domaine est celle d'intervalles de temps. Ceux-ci ont toujours une durée non nulle. Ce que nous nommons communément « instant » est en fait un intervalle très court, un intervalle dont la durée est indiscernable pour nos sens. Le temps ne s'arrête jamais, il s'écoule. La course d'Achille ne peut être ainsi divisée à l'infini : les étapes de Zénon sont fictives ! De nos jours, on répond au paradoxe de Zénon par les mathématiques : une somme infinie de nombres peut être finie (voir l'encadré Infini potentiel ou actuel ?). En fait, pour Zénon, il s'agissait plutôt d'une question de conception du monde...

Avec ces deux paradoxes, Zénon voulait réfuter l'idée d'un monde continu : entre deux points (ou deux instants), il y en a toujours un autre. Cette idée est purement mathématique et n'a aucun sens en physique : à force de diviser l'espace, on tombe vite au niveau atomique, et en deçà, où la matière devient insécable. Les grandeurs infinitésimales sont des idéaux mathématiques, bien pratiques pour les calculs, mais elles n'ont pas de réalité physique tangible ou matérielle.

Ainsi, aussi pertinente soit-elle, la réponse calculatoire exposée dans notre encadré manque sa cible. Plus exactement, elle vaut exactement la réponse de Diogène de Sinope, célèbre philosophe cynique, qui, quand on lui exposa le paradoxe d'Achille et de la tortue, se contenta de se lever et de marcher, prouvant ainsi le mouvement de la manière la plus évidente qui soit. Quel besoin de sommer des séries infinies pour cela ? De toute façon, pouvons-nous seulement faire mieux ?

Si elles répondent à des questions concrètes, les mathématiques restent pour autant une science abstraite, qui opère sur des idéaux. C'est ce qui fait leur force.



Infini potentiel *versus* infini actuel

De nos jours, le paradoxe de Zénon est souvent vu comme une erreur de calcul, qui consiste à voir la somme $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ comme infinie, ou dénuée de sens. Pourtant, on peut la voir comme le résultat du partage d'une pizza selon la règle suivante : le premier prend la moitié, le suivant, la moitié du reste, et ainsi de suite.

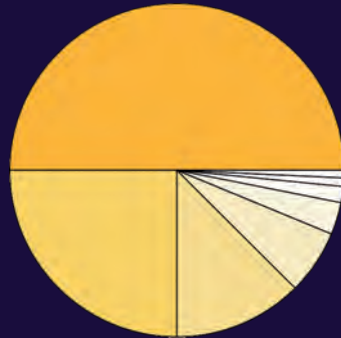
Si les convives sont en nombre infini, la pizza sera entièrement distribuée, ce qui fournit l'égalité $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$. Cette méthode est celle qu'utilisait Archimède dans l'Antiquité, en évitant l'introduction de l'infini : il montrait que plus on prenait de termes, plus on s'approchait de 1. Cette façon de faire correspond à une conception de l'infini appelée *infini potentiel* : tout nombre peut être dépassé.

Le premier invité prend la moitié de la pizza.

Le deuxième prend la moitié de ce qui reste, soit un quart.

Le troisième prend la moitié du reliquat, et ainsi de suite.

Avec une infinité de convives, toute la pizza est partagée !



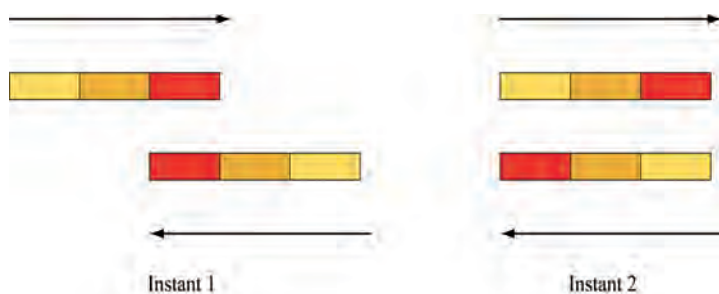
© H. Lehning

Au XVIII^e siècle, Leonhard Euler envisageait la somme $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ comme un nombre ordinaire sur lequel on peut effectuer des calculs. Voici à quoi cela correspond. En multipliant S par 2, on obtient $2S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1 + S$, ce qui se simplifie en $S = 1$, d'où le résultat. La méthode est simple mais repose sur l'idée que S possède un sens, autrement dit sur l'infini actuel, c'est-à-dire un infini qui existe vraiment. Pour cette raison, la méthode d'Euler peut fournir des résultats surprenants ; elle est de toute façon à manier avec une extrême prudence. Par exemple, si on lui donne un sens, la somme $T = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ aboutit à l'équation $T = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \dots) = 1 + 2T$, donc au résultat $T = -1$, qui semble totalement absurde puisque T est la somme de nombres tous strictement positifs.

En fait, avec la théorie moderne des séries divergentes (réservée aux spécialistes car non encore complètement aboutie), il est possible de donner un sens à certains résultats de ce type. Dès le XIX^e siècle, des mathématiciens comme Ernesto Cesàro ou Bernhard Riemann ont donné un sens explicite à certaines intuitions d'Euler relatives aux séries divergentes. Développer cette histoire nous entraînerait trop loin ; le lecteur intéressé pourra cependant chercher à se documenter sur les sommations linéaires, stables et régulières.

MONDE DISCRET, CONTINU...OU NI L'UN NI L'AUTRE !

À l'opposé, un autre paradoxe de Zénon, moins étudié de nos jours, réfute l'idée d'un monde discret : après un instant (juste après), il y en a un autre et pas d'autres entre les deux. De même que pour le paradoxe d'Achille, il est possible de l'exposer dans des termes plus modernes. Imaginons deux trains de trois wagons roulant en sens opposés, à la vitesse d'un wagon par instant. Si les deux premiers wagons se croisent à l'instant 1, les deux trains sont côte à côte à l'instant 2. À quel instant le wagon de tête du premier train croise-t-il le deuxième wagon du second train ?



À chaque instant passe un wagon.

© H. Lehning

S'il n'existe aucun instant entre les instants 1 et 2, la réponse est : «Jamais !» Réfléchissez-y en vous appuyant sur le schéma. Le monde ne serait ainsi ni discret, ni continu. La pertinence des paradoxes de Zénon est là.

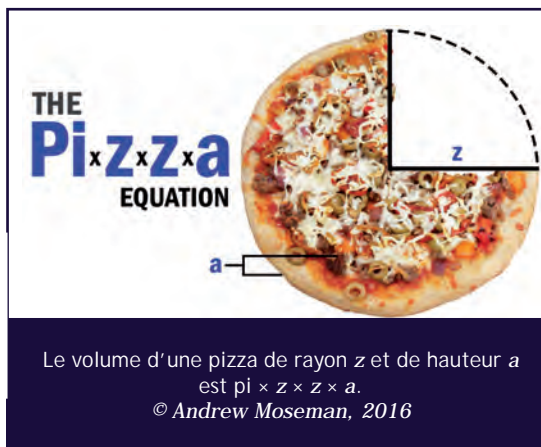
Les paradoxes de Zénon concernent le concept d'infini, c'est-à-dire une notion mathématique sans équivalent dans le monde physique sauf au niveau potentiel. Ils justifient la méfiance des Grecs anciens vis-à-vis de l'infini actuel. Cette remarque ne signifie pas que la notion d'infini n'a pas d'application concrète en physique comme en mathématiques.

Mais restons sur les paradoxes de l'infini pour examiner ce qu'en pensait le mathématicien et philosophe Abu Yusuf al-Kindi (801–873) : «Le monde est fini car si nous supposons un monde infini et si nous en ôtons

une partie finie alors le reste sera ou bien fini ou bien infini. Dans le premier cas, si nous lui restituons la partie finie qu'on lui a ôtée, alors il restera fini mais il devient égal à ce qu'il était au début, le fini est donc égal à l'infini. Si le reste est infini, qu'en adviendra-t-il si nous lui restituons la partie ôtée? Il ne peut devenir plus grand qu'il ne l'était au début, on aura alors un infini plus grand que l'infini; il ne peut pas non plus rester inchangé puisqu'on lui a ajouté une partie. Supposer un monde infini entraîne des contradictions et donc ceci est impossible. »

Cette impossibilité a été levée par l'Allemand Georg Cantor (1845–1918), qui a montré que l'infini mathématique est forcément multiple. Dans la pratique, les mathématiciens utilisent deux concepts, l'infini dénombrable (celui de ce que l'on peut énumérer : les nombres entiers et les nombres rationnels essentiellement) et l'infini non dénombrable (celui des nombres réels, des points de la droite, du plan ou de l'espace). Ces deux infinis suffisent pour faire des mathématiques, mais Georg Cantor a malgré tout posé une question : existe-t-il un infini « coincé entre les deux » ? Incapable d'y répondre, il fit l'hypothèse, dite *hypothèse du continu*, qu'il n'existait pas de tel infini. Dès lors, cette question devint de toute première importance, et l'histoire de l'hypothèse du continu a connu de nombreux rebondissements au cours du XX^e siècle... et encore aujourd'hui !

Nous n'irons pas plus loin sur ce sujet très technique car cela nous demanderait d'approfondir énormément la question et de préciser les fondements des mathématiques utilisés... Cela prouve cependant que les questions soulevées par Zénon sont loin d'être naïves et que la meilleure façon d'y répondre est sans doute celle de Diogène, ce qui n'enlève rien à l'utilité et à la beauté du concept d'infini mathématique précisé par Cantor.



UNE VISION TOTALEMENT DÉJANTÉE DES PARADOXES

Les paradoxes de Zénon ont servi hors des mathématiques et de la philosophie, en psychanalyse, en particulier à Jacques Lacan au XX^e siècle. Voici ce qu'il en disait le 21 novembre 1972 dans la séance inaugurale de son séminaire « Encore » : « *Ce que Zénon n'avait pas vu, c'est que la tortue non plus n'est pas préservée de cette fatalité d'Achille ; c'est que comme son pas, le sien à elle, est de plus en plus petit, elle n'arrivera jamais non plus à la limite. Et c'est en ça que se définit un nombre, quel qu'il soit, s'il est réel. Un nombre a une limite, et c'est dans cette mesure qu'il est infini. Achille, c'est bien clair, ne peut que dépasser la tortue, il ne peut pas la rejoindre. Mais il ne la rejoint que dans l'infinitude.* »

Lacan brodait alors sur l'amour entre Achille et sa maîtresse Briséis pour dire que celle-ci ne sera jamais tout à lui (!), comme Achille ne rejoindra jamais complètement la tortue. Derrière ces phrases, on sent bien l'infini imaginé par Lacan, celui d'Euler et des sommes de séries. En l'occurrence, la référence aux mathématiques semble servir de métaphore pour dire que quelque chose désirée (posséder complètement Briséis) peut ne pas être réalisable. Mais est-il besoin de mathématiques pour le savoir ?

De façon générale, Lacan (et bien d'autres...) utilisait les mathématiques comme boîte à outils métaphoriques...

H.L.

Pour en savoir (un peu) plus :

Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle. Douglas Hofstadter, Dunod, 2008.

Soyez fous! Raymond Smullyan, Dunod, 2007.

Toutes les mathématiques du monde. Hervé Lehning, Flammarion, 2017.

Mathématiques et philosophie. Collectif, Bibliothèque Tangente 38, POLE, 2010.

DES INSTRUMENTS TRACEURS DE COURBES

JEAN-JACQUES DUPAS

Ingénieur-chercheur au Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Président de l'association Playmaths

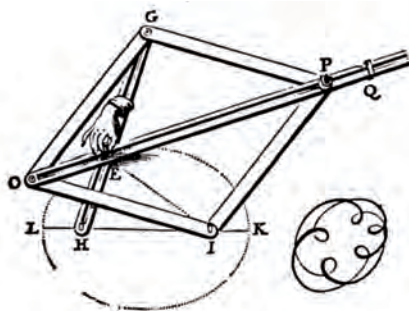
La géométrie et les instruments sont intimement liés. Le cercle est-il antérieur au compas ou le compas antérieur au cercle? Difficile de répondre! La géométrie d'Euclide est une géométrie de la règle et du compas. Au III^e siècle avant notre ère, Archimède fut le premier mathématicien à considérer les courbes mécaniques comme sujet d'étude légitime. La *spirale d'Archimède* est ainsi le lieu d'un point se déplaçant uniformément sur une ligne droite, qui elle-même tourne à une vitesse constante. C'est l'une des rares courbes connues de l'Antiquité autre que la ligne droite et les coniques! Il s'agit en fait de la première courbe mécanique (tracée par un point mouvant) de l'Antiquité...

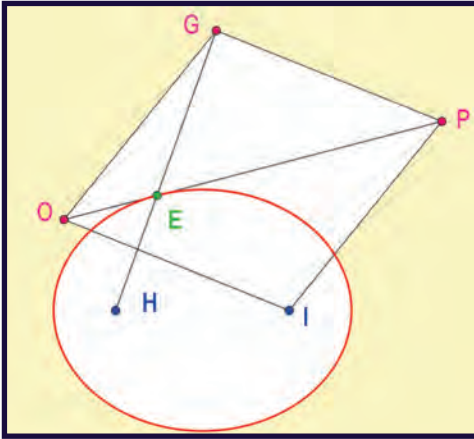
DES MACHINES MÉCANIQUES VENUES DU MONDE CONIQUE

Les coniques de l'Antiquité (ces courbes obtenues par intersection d'un plan et d'un cône, comme les ellipses, les paraboles et les hyperboles) vont être intensément étudiées par la suite, ce qui va déboucher sur des mécanismes permettant de les tracer. On en trouve par exemple dans le *De Organica Conicarum Sectionum* de Frans van Schooten, publié en 1646, comme celui-ci, qui permet de tracer des ellipses.

Le mécanisme de van Schooten, très astucieux, utilise des articulations et des glissières.

© Frans van Schooten, 1646





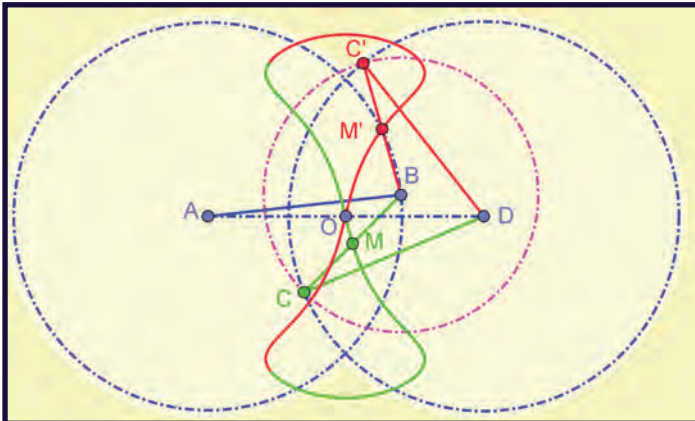
La construction géométrique associée au mécanisme de van Schooten.

Le losange OIPG possède un point fixe I, qui est l'un des deux foyers de l'ellipse. Le point P du mécanisme tourne autour de I. Le point courant E de l'ellipse est donné par l'intersection des droites (HG) et (OP).

© J.-J. Dupas, 2017

DES CERCLES ET DES DROITES À TOUTE VAPEUR!

L'invention de la machine à vapeur relance l'intérêt pour les mécanismes et va permettre la création de la cinématique (*kinêma* signifiant «mouvement» en grec). La *cinématique* est... l'étude des mouvements. Le piston poussé par la vapeur se déplace en ligne droite. On voudrait bien alors récupérer un mouvement circulaire... ou, réciproquement, obtenir un mouvement linéaire à partir d'un mouvement circulaire. Vers 1784, James Watt invente un mécanisme, à trois barres, qui «approxime» la droite sur un segment. Ce dispositif sera encore utilisé pour les voitures de course dans les années 1950! Watt indiquait dans une lettre à son fils que c'était l'invention dont il était le plus fier.

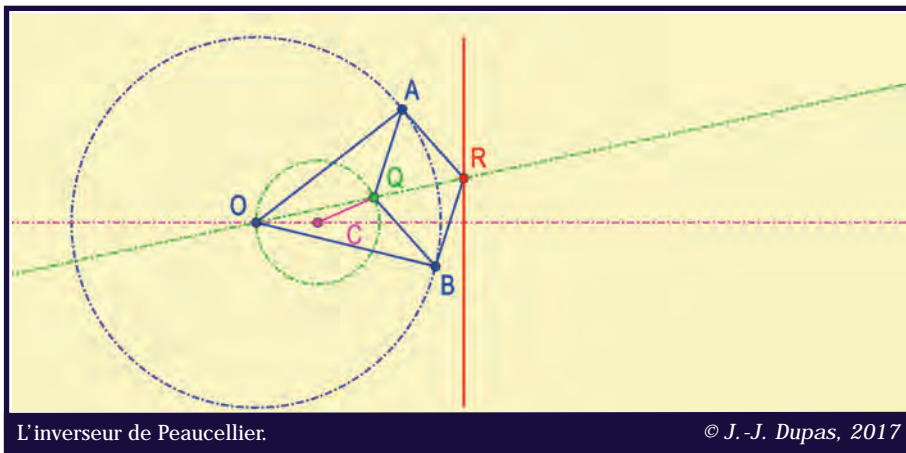


Le mécanisme de Watt.
© J.-J. Dupas, 2017

Les deux des barres [AB] (bleu) et [CD] (vert) possèdent la même longueur et tournent autour de deux points fixes, A et D, donc B et C parcourent les deux cercles bleus. La troisième barre, [BC], est articulée sur les deux premières à l'aide d'un pivot. Le centre M de cette barre semble parcourir un petit segment de droite. Pour les applications, c'est une bonne approximation de la droite autour du point d'inflexion O. En vérité, M parcourt un morceau d'une courbe (en vert). La courbe entière, obtenue en remplaçant C par C' (et donc M par M', en rouge), devient sous certaines conditions une *lemniscate de Bernoulli*.

En 1850, Pafnouti Tchebychev produit un autre mécanisme, qui est toujours une approximation. C'est en travaillant à son amélioration qu'il découvre les polynômes qui le rendront célèbre. Les travaux de cinématique ne sont donc pas futiles !

Une solution exacte est donnée par un polytechnicien, le général Charles Peaucellier, avec un système à six barres. Sa découverte passe inaperçue et sera retrouvée en 1871 par un étudiant lituanien, Lipman Lipkin.



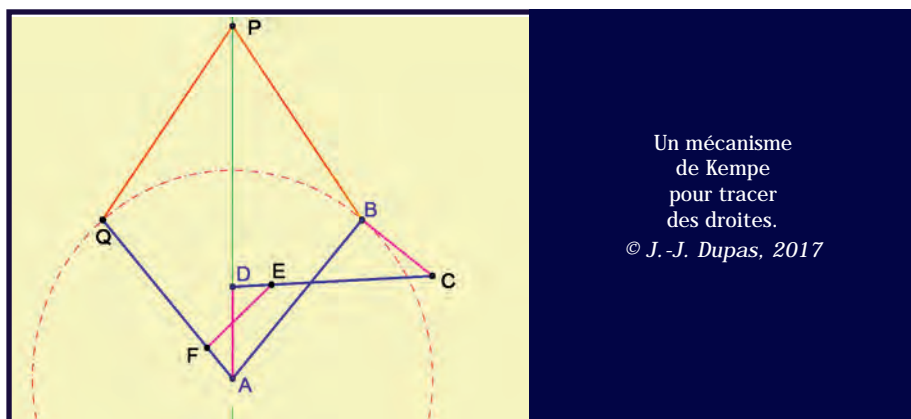
L'inverseur de Peaucellier est constitué des barres bleues [OA], [OB], [AQ], [AR], [BQ] et [BR], et de la barre violette [CQ]. On a $OA = OB$ et $AQ = QB = BR = RA$. Le point O est fixe et les barres sont toutes articulées ; on s'intéresse au lieu décrit par le point R. Or, $OQ \times OR = OA^2 - AQ^2$, qui est constant. Cette relation correspond à la définition mathématique d'une

transformation géométrique déjà bien connue des Grecs, l'inversion. Si O est fixe, Q et R parcourent des courbes « inverses ». Donc si le point Q parcourt le cercle vert de centre C grâce à la barre $[CQ]$, alors le point R parcourt une droite rouge perpendiculaire à la droite (OC) . L'inverseur de Peaucellier est ainsi la matérialisation de l'inversion (d'où son nom).

En 1874, le mathématicien James Joseph Sylvester introduit l'inverseur en Grande-Bretagne. La même année, une autre solution est présentée à une réunion de la British Association avec seulement quatre barres : le parallélogramme croisé de Hart.

L'INVENTEUR ALFRED BRAY KEMPE ENTRE EN PISTE

En 1875, le Britannique Kempe (celui qui est par ailleurs connu pour sa « preuve », erronée, du théorème des quatre couleurs) va déterminer d'autres mécanismes pour générer un mouvement rectiligne.



Un second mécanisme a été proposé par Kempe en 1875. Les barres bleues, $[AQ]$, $[AB]$ et $[CD]$, ont la même longueur, ainsi que les barres roses, $[AD]$, $[EF]$ et $[BC]$, et que les barres orange $[BP]$ et $[QP]$. Le point E est tel que $AF = DE \times DA^2/DC$. Si A et D sont fixes, alors le point P parcourt la droite verte lorsque B parcourt le cercle rouge.

Or, faire des maths, c'est généraliser. C'est ainsi que Kempe montre en 1876 que non seulement on peut tracer des droites avec des systèmes articulés, mais que toute courbe algébrique continue (c'est-à-dire une relation

du genre $f(x, y) = 0$ faisant intervenir uniquement des puissances entières de x et y , des additions et des multiplications, comme les polynômes) peut être tracée avec un mécanisme de type système articulé. De plus, un théorème de Karl Weierstrass affirme que toute courbe continue sur un segment peut être approximée par un polynôme. Donc, en fait, toute courbe continue, aussi sophistiquée et farfelue soit-elle, peut être générée avec un système articulé !

UN RÉSULTAT EXTRAORDINAIRE... ET PEU CONNU

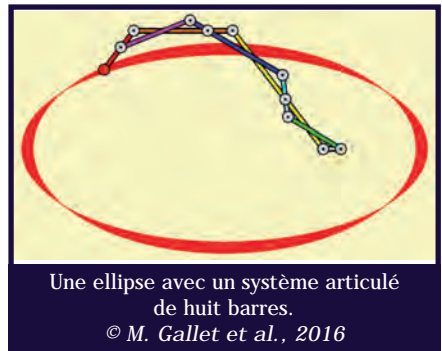
Ce résultat aussi extraordinaire que peu connu est le *théorème d'universalité de Kempe*. Le mathématicien américain William Thurston (1946–2012) l'aurait résumé, lors d'une conférence, par : « *Si votre signature est une suite continue de courbes (vous ne levez pas le stylo), alors il existe un mécanisme pouvant exécuter votre signature !* »

Comment Kempe s'y prend-il ? Il transforme les coordonnées cartésiennes (x, y) de la courbe $f(x, y) = 0$ en coordonnées polaires (r, θ) . La fonction f peut alors être exprimée en sommes de $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$... Grâce à des parallélogrammes et des parallélogrammes croisés, Kempe construit des *multiplicateurs* (dispositifs qui transforment θ en $n\theta$, avec n un entier), des *additionneurs* et des *translateurs*. La combinaison astucieuse de ces mécanismes permet la construction de la courbe !

Mais si ce résultat assure l'existence d'un mécanisme (et qu'il fournit une méthode pour en construire un), ce dernier est toujours excessivement complexe, à la limite des possibilités humaines. Le procédé de Kempe ne permet nullement de déterminer le dispositif «le plus simple».

L'INFORMATIQUE APPORTE UN NOUVEAU SOUFFLE

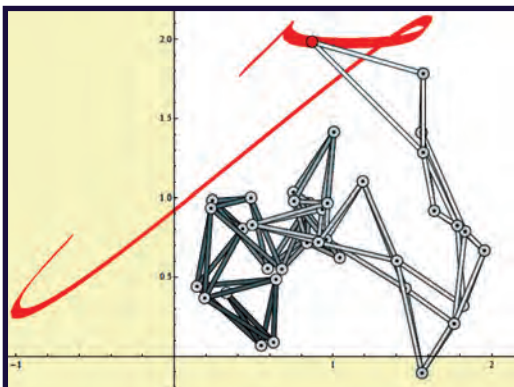
Notre chance par rapport à Kempe est que l'informatique peut nous aider. Aussi Matteo Gallet, Christoph Koutschan, Zijia Li, Georg Regensburger, Joseph Schicho et Nelly Villamizar dans leur papier *Planar Linkages Following a Prescribed Motion* proposent en 2016 un nouvel algorithme en se restreignant aux courbes paramétriques.



Cela produit un mécanisme avec «seulement» huit barres et dix articulations pour une ellipse.

Plus impressionnant (et délirant?) est ce système articulé de vingt-six barres et trente-sept articulations qui trace le «J» de la signature de John Hancock (le signataire de la déclaration d'indépendance des États-Unis), prenant ainsi au mot William Thurston...

Les systèmes articulés n'en finissent pas d'inspirer les mathématiciens! Avec les informaticiens, ils n'ont pas fini de trouver des méthodes pour générer automatiquement les mécanismes appropriés aux courbes, aussi tarabiscotées



Le mécanisme traçant le J de la signature de John Hancock.
© M. Gallet et al., 2016

soient-elles. Ce qui évidemment aura des répercussions, que ce soit en robotique ou dans les nombreux mécanismes de la vie de tous les jours...

J.-J. D.

Pour en savoir (un peu) plus :

How to draw a straight Line. Alfred Kempe, 1877 (réédition Nabu Press, 2012).

Sir Alfred Bray Kempe, an amateur kinematician. Asok Kumar Mallik, *Resonance*, 2011.

Tracer une droite... sans la règle ! Jean-Jacques Dupas, Bibliothèque Tangente 59, POLE, 2017.

Distinguished figures in mechanism and machine science. Sous la direction de Marco Ceccarelli, Springer, 2007 (tome I), 2010 (tome II), 2014 (tome III).

QUAND LES ROUES DES VOITURES TOURNENT À L'ENVERS

MICHEL CRITON

Président de la Fédération française des jeux mathématiques

ÉDOUARD THOMAS

Journaliste scientifique

Le principe du cinématographe repose sur la projection d'images successives fixes (un phénomène discret), que notre cerveau réinterprète comme un phénomène continu. Vous avez toutes et tous réalisé ou utilisé, dans votre enfance, un folioscope (ou *flip-book*). Il s'agit d'un carnet dont les pages sont le support de dessins successifs correspondant à un mouvement. Lorsque l'on feuillette rapidement le carnet avec le pouce, on a l'illusion du mouvement. La technique du cinéma est basée sur le même principe !



Joseph Antoine Ferdinand Plateau
(1801-1883).

© Daguerrréotype de 1843



Un folioscope.

© Nicolas Plateau, 2014

Plusieurs explications existent pour comprendre cette illusion de mouvement continu. La première évoque la « persistance rétinienne ». En 1829, le mathématicien et physicien belge Joseph Plateau a, le premier, établi qu'une image qui se forme sur la rétine met environ un douzième de seconde avant de s'effacer. Ainsi, en dessous de douze images par seconde, nous voyons donc une succession d'images fixes, et au-delà, nous avons une

impression de mouvement, tout d'abord saccadé, et de plus en plus fluide lorsque l'on augmente la fréquence.

Mais cette persistance n'explique pas l'impression de mouvement continu. Une explication plus récente fait appel à l'effet Phi dû au fonctionnement de notre cerveau, qui comble l'intervalle entre deux images fixes avec le mouvement «le plus vraisemblable», comme s'il «voyait» ce mouvement s'effectuer.

Les trucs en «scope»

Joseph Plateau (1801-1883) a découvert la synthèse du mouvement et créé dès 1832 un phénakistiscope, jouet optique donnant l'illusion du mouvement grâce à la persistance rétinienne. Dès 1834, le mathématicien britannique William George Horner (1786-1837) perfectionnera cet objet en un nouvel appareil optique donnant l'illusion du mouvement, le zootrope. En 1877, Charles-Émile Reynaud (1844-1918) propose le praxinoscope, tambour sans fente comprenant en son centre un cylindre à facettes de miroirs. La perception des mouvements s'en trouve améliorée. Quinze ans plus tard, il fait breveter le théâtre optique, qui réunit les techniques de l'analyse du mouvement et l'art de la projection à l'aide d'une lanterne magique. En 1895 s'imposera le cinématographe des frères Lumière.



Un phénakistiscope.
© *animage.org*



Un disque
de phénakistiscope
datant de 1834
d'Alphonse Giroux.
© *É. Thomas, 2018*



Un zootrope
de la London Stereoscopic and Photographic Company
datant de 1870.
© *É. Thomas, 2018*

Le praxinoscope
de Charles-Émile Reynaud.
© *G. Tissandier*



Aux tout débuts du cinéma, les premiers films comportaient seize ou dix-huit images par seconde. La fréquence a ensuite été normalisée à trente images par seconde, ce qui explique l'impression d'accélééré et de saccadé lorsque nous visionnons de très vieux films que l'on projette à la vitesse standard des films actuels.

Mais venons-en à l'illusion (involontaire) qui nous fait voir les roues de voitures tourner dans le bon sens, puis ralentir, se figer l'espace d'un instant, et enfin tourner à l'envers. Il est paradoxal que le cinéma du XXI^e siècle, avec ses techniques de truquages et d'«effets spéciaux», n'ait pas réussi à remédier à ce défaut de perception qui différencie le cinéma de la vraie vie!

La plupart des voitures ont des jantes qui présentent une symétrie d'ordre 5 (comme ci-contre). Mais il existe aussi des jantes «sport» avec des symétries d'ordre 6, 7, 8, 9, voire plus.

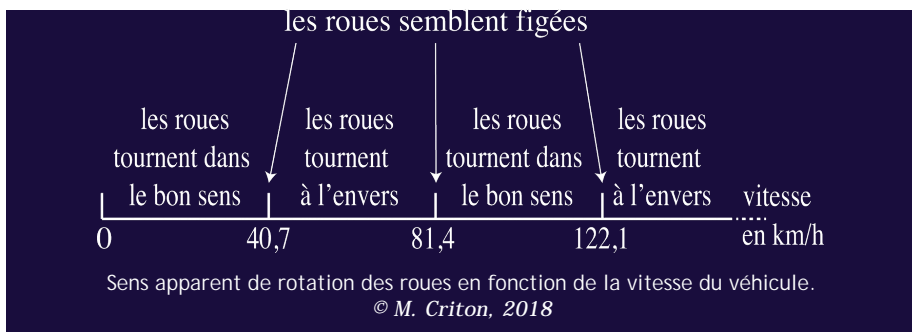
Le diamètre le plus standard d'une roue de voiture équipée de son pneu est d'environ 60 centimètres. Supposons donc qu'une voiture soit équipée de jantes admettant une symétrie d'ordre 5. À quelle vitesse doit rouler une telle voiture pour que le spectateur ait l'illusion que ses roues ne tournent pas?



Le calcul est assez simple. La roue doit tourner de $n \times (360^\circ/5)$ par trentième de seconde (n étant un entier naturel), soit $30n \times 72^\circ$ par seconde. Une rotation de 72° des roues correspond alors à un déplacement de la voiture de $0,6 \pi/5$ mètre. Pour que les rayons de la jante semblent immobiles, il faut donc que la voiture avance de $n \times 3,6\pi$ mètres par seconde, soit une vitesse multiple d'environ 40,7 km/h

De 0 à 40,7 km/h, on voit les roues tourner dans le bon sens. À 40,7 km/h, les roues semblent figées. Entre 40,7 km/h et 81,4 km/h, on les voit tourner à l'envers; à 81,4 km/h, elles apparaissent à nouveau figées; entre 81,4 km/h et 122,1 km/h, on les verra à nouveau tourner à l'endroit, etc.

Pour des jantes «sport» présentant une symétrie d'ordre k , vous pourrez vérifier que la voiture doit avoir une vitesse de $18n \pi/k$ mètres par seconde pour que les roues apparaissent comme figées.



LE SPECTRE D'UNE EXPLICATION PLUS MATHÉMATIQUE

Le même phénomène s'observerait bien sûr avec les pales d'un hélicoptère, avec les ailes d'un moulin à vent ou encore les bras d'une éolienne, même si l'effet est moins saisissant avec un objet fixe qu'avec un objet mobile comme un véhicule : le contraste entre le sens apparent de rotation des roues et le mouvement de translation apparaissent contradictoires. Pour notre cerveau, quelques millisecondes représentent une durée assez courte pour faire croire à un mouvement fluide. Ce laps de temps reste cependant suffisamment long pour que les objets continuent de se déplacer. Imaginez pour un hélicoptère dont les pales tournent à cinq cents tours par minute ! Cet intervalle de temps permet à chaque pale de faire le tiers d'un tour complet. Pour cette raison, si la vitesse de rotation de l'hélice est une fraction exacte de la cadence de capture d'image de la caméra qui filme la scène, alors sur l'écran de projection les pales de notre hélicoptère en vol sembleront à l'arrêt.

Il s'agit d'un phénomène qui n'est pas propre au cinéma, à la vidéo ou à l'animation : on le retrouve par exemple dans le son ou l'image. En fait, il s'agit à chaque fois d'une manifestation du « repliement de spectre », bien connu de tous ceux qui s'occupent de théorie du signal.

Mathématiquement, cet effet est observé à chaque fois que deux phénomènes périodiques sont superposés : celui qui est observé (le mouvement P_1 de la pale de l'hélicoptère), et celui qui observe (la cadence P_2 de capture d'images de la caméra). Or, P_1 et P_2 n'étant pas en phase, il apparaît un décalage, qui est ensuite mal interprété par le cerveau.

Pour capturer convenablement un signal d'une fréquence donnée, l'échantillonnage (c'est-à-dire la fréquence de la capture d'images de la caméra) doit se faire à une fréquence supérieure au double de celle

du signal. C'est le fameux théorème de Shannon–Nyquist, l'un des résultats les plus fondamentaux de la théorie de l'information, omniprésente dans nos sociétés modernes.

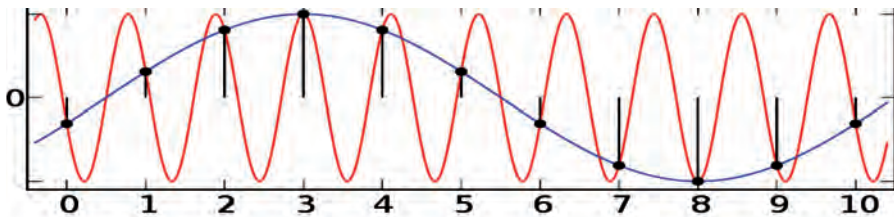
Pour l'enregistrement audio (au format MP3 par exemple), on utilise en général une capture à 41 kHz, à 44,1 kHz ou à 48 kHz, afin de pouvoir inclure tout le spectre jusqu'à 20 kHz, ce qui constitue la limite audible pour les humains. On enregistre bien à plus du double de la fréquence maximale que l'on veut capturer, et donc aussi de toutes les fréquences inférieures. Le théorème de Shannon–Nyquist est respecté, et nos oreilles s'en réjouissent.

De même, pour enregistrer convenablement trois pales d'hélicoptère tournant à cinq cents tours par minute (soit huit tours par seconde), il faut une cadence de capture supérieure à $8 \times 3 \times 2$ (soit 48) images par seconde. En prenant une cadence de cinquante images par seconde, ce que permet un matériel professionnel, le spectateur n'aura plus l'impression d'avoir des pales tournant dans le mauvais sens !

DE L'ART ET LA MANIÈRE DE CHOISIR SON ÉCHANTILLON

La question est entendue pour le cinéma et pour le son. Mais au-delà de ces applications, le repliement de spectre s'applique à tous types de signaux. La théorie du signal est née des préoccupations du mathématicien, physicien et homme politique français Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), qui cherchait à comprendre comment se répartissait la chaleur dans un matériau chauffé. En 2018, qui fait l'objet d'une commémoration nationale, nous célébrons l'«année Fourier» selon les termes de la Société mathématique de France.

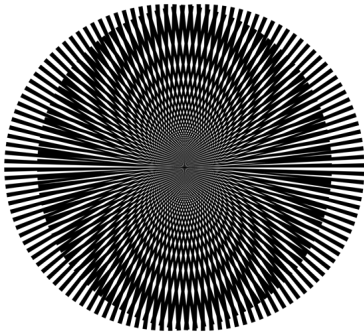
Le repliement de spectre est un phénomène qui introduit, dans un signal échantillonné, des fréquences qui ne devraient pas s'y trouver, lorsque la fréquence d'échantillonnage est inférieure à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Cette distorsion se produit car tous les signaux dont l'écart de fréquence avec la fréquence d'échantillonnage est identique se représentent par les mêmes échantillons (voir sur le schéma). Lorsque l'on reconstitue le signal d'origine, il est impossible de distinguer ces composantes, dont la représentation est identique. Les points de capture, effectués tous les 0,1 s (en noir), sont présents sur les deux courbes, mais le système de traitement logiciel ne saura reconstituer que la courbe bleue. Pour lui, les deux signaux (rouge et bleu) apparaissent de la même façon, et il ne garde par défaut que celle de plus basse fréquence, même si c'est la «mauvaise».



Avec cette fréquence d'échantillonnage, les signaux en bleu et en rouge, une fois échantillonnés, sont représentés par les mêmes échantillons. © Moxfyre

Pour un signal sonore, le son aigu apparaît donc plus grave : ce phénomène est à l'audio ce que la roue tournant en sens inversé est à l'image. C'est cette transformation que l'on appelle le *repliement du spectre* : les fréquences trop hautes sont divisées (repliées) et deviennent des fréquences plus basses. On met à profit ce phénomène dans l'observation stroboscopique : en ajustant la fréquence du stroboscope, on observe un mouvement périodique au ralenti. On observe aussi le repliement de spectre dans les images ; il prend alors la forme de moirés.

Tous ces effets proviennent du choix de la discrétisation temporelle du signal et du théorème de Shannon–Nyquist, auquel tout processus de numérisation est soumis.



Un phénomène de moiré : cette image ne contient que des segments de droites, et en particulier aucune ligne courbe. © SharkD

Le repliement de spectre peut apparaître chaque fois que le critère de Shannon et Nyquist n'est pas respecté, d'abord pour un signal sinusoïdal, puis pour un signal plus sophistiqué. L'utilisation d'un filtre anti-repliement permet néanmoins souvent de réduire les effets du repliement de spectre. Mais attention : le filtrage préalable du signal à l'aide d'un filtre anti-re-

pliement (pour supprimer toute composante supérieure à la fréquence de Shannon–Nyquist) évite certes l'apparition de ces fréquences « fantômes », mais ce filtrage n'est pas toujours possible... voire désirable. En effet, au cinéma, notre hélice d'hélicoptère apparaîtrait fixe (plutôt que de tourner à l'envers), mais ses trois pales seraient floues ! Cela, visuellement, serait évidemment encore pire...

M.C. & É.T.

LE MOUVEMENT EST COMME RIEN

ROLAND LEHOUCQ

CEA Paris-Saclay, Département d'astrophysique

En 1632, Galilée publie son *Dialogue* concernant les deux plus grands systèmes du monde, dans lequel on trouve le merveilleux passage suivant : « Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. »

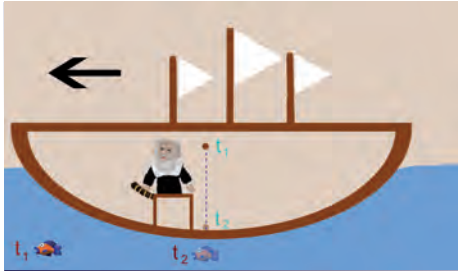
Portrait de Galileo Galilei
(1564-1642)
par Justus Sustermans.
© National Maritime Museum,
Londres



UNE EXPÉRIENCE DE PENSÉE HISTORIQUE ET FONDAMENTALE

« Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour au-

tant que la vitesse soit uniforme et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt [...], les papillons et les mouches continueront à voler indifféremment dans toutes les directions. Et on ne les verra jamais s'accumuler du côté de la cloison qui fait face à la poupe; ce qui ne manquerait pas d'arriver s'ils devaient s'épuiser à suivre le navire dans sa course rapide. »



Le bateau de Galilée vogue à vitesse constante vers la gauche. Une balle lâchée par l'expérimentateur à l'instant t_1 touche le fond de cale à t_2 , rigoureusement à la verticale (pour l'expérimentateur !) du point d'où elle a été lâchée. La position du poisson, immobile dans le référentiel terrestre, est indiquée à ces deux dates.

© The Unemployed Philosophers Guild, 2018, Londres

De cette expérience de pensée, sans doute l'une des plus importantes de l'histoire de la physique, Galilée déduit que « *le mouvement est comme rien* », traduisant ainsi l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement de translation à vitesse constante d'un mobile par une expérience réalisée à l'intérieur de celui-ci, sans observer le monde extérieur. Cette constatation fonde ce que nous nommons désormais *principe de relativité du mouvement* et se traduit par une illusion commune : assis dans un train, nous pensons démarrer en voyant le train juste voisin se déplacer par rapport à nous ! L'illusion dure le temps que l'absence de sensation d'accélération nous prouve que, en réalité, c'est bien l'autre train qui quitte la gare. Si les référentiels en translation rectiligne à vitesse constante sont équivalents entre eux, ce n'est pas le cas d'un référentiel accéléré : dans une voiture qui freine, les passagers sont propulsés vers l'avant. De même, le mouvement de rotation de la Terre est trahi par le mouvement d'un pendule ou d'un gyroscope.

DES ÉQUATIONS QUI DOIVENT RESTER INVARIANTES

L'équivalence entre référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres, aussi appelés *référentiels inertiels*, peut sembler anodine à première vue. Pourtant, cette proposition a des conséquences profondes.

Puisqu'aucune expérience ne peut détecter le mouvement de translation uniforme, les équations de la mécanique doivent s'écrire de la même façon dans tous les référentiels inertiels : c'est là la traduction pratique du principe de relativité. En langage mathématique, cela implique que la façon dont s'écrivent les équations de la mécanique ne doit pas changer quand on leur applique des transformations, dites *galiléennes*, réalisant le passage d'un référentiel inertiel à un autre. Ces transformations sont les translations d'espace et de temps, les rotations d'espace indépendantes du temps, et les translations à vitesse constante. Mais la physique ne se réduit pas à la mécanique, il faut aussi composer avec la lumière...

Le principe de relativité faillit être abandonné à la fin du XIX^e siècle lorsque l'on découvrit que les équations de l'électromagnétisme écrites par James Clerk Maxwell (1831–1879) en 1868 ne sont pas invariantes par les transformations galiléennes. Les physiciens du XIX^e siècle, se représentant l'espace de la physique comme une coquille vide, imaginaient que la lumière ne pouvait s'y propager que s'il était rempli d'un milieu particulier, nommé *éther*, adapté à cette propagation. Ils considéraient aussi que les ondes lumineuses se propageaient dans l'éther à la façon du son dans l'air. Comme la vitesse d'une onde sonore mesurée par un observateur dépend de la vitesse à laquelle celui-ci se déplace dans l'air, les physiciens pensaient donc qu'il en allait de même pour la lumière.

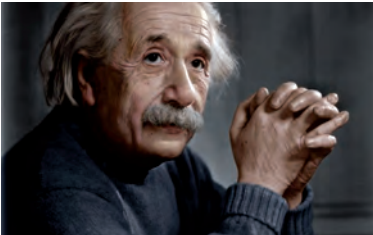
S'ils avaient eu raison, cela aurait permis de réaliser des expériences capables de mettre en évidence la translation rectiligne uniforme d'un référentiel par rapport à l'éther, supposé immobile, mettant ainsi à bas le principe de relativité galiléenne ! En 1887, les physiciens américains Albert Abraham Michelson (1852–1931) et Edward Williams Morley (1838–1923) montrèrent, grâce à une expérience restée célèbre, que la vitesse de la lumière, qui vaut à peu près trois cent mille kilomètres par seconde, prend la même valeur quelle que soit la direction selon laquelle elle est mesurée à la surface de la Terre, en mouvement autour du Soleil. Ce résultat étonnant invalida la théorie de l'éther et imposa l'idée que la lumière pouvait se propager dans le vide, sans support matériel. Il plongea aussi la communauté scientifique dans la perplexité...

ALBERT EINSTEIN POSE DEUX POSTULATS RÉVOLUTIONNAIRES

En 1905, Albert Einstein publie un article fondé sur deux postulats révolutionnaires. Le premier est une extension à l'électromagnétisme du principe de relativité, introduit par Galilée en mécanique : « *Dans tous les systèmes de coordonnées où les équations de la mécanique sont valables, ce sont également les mêmes lois de l'optique et de l'électrodynamique qui sont valables.* » Cela signifie que le déroulement d'une expérience de physique ne peut pas en elle-même dévoiler le mouvement d'un système en translation à vitesse constante par rapport à un autre.

Le second postulat, « *qui n'est qu'apparemment incompatible avec le précédent* », stipule que « *la lumière se propage dans l'espace vide avec une vitesse c bien déterminée, indépendante de l'état de mouvement du corps émetteur* ». L'incompatibilité qu'évoque Einstein est que cette invariance viole *a priori* la loi de composition classique des vitesses, selon laquelle il faut additionner la vitesse de la source à la vitesse de la lumière relativement à celle-ci pour déterminer la vitesse de la lumière par rapport à un observateur au repos (c'était le présupposé que l'expérience de Michelson et Morley mit en défaut). Or, la loi de composition des vitesses est intimement liée à la façon dont on conçoit l'espace et le temps.

Einstein se pose la question de savoir ce que veut dire qu'un évènement a eu lieu à tel moment, à tel endroit. Comme Galilée, il utilise une expérience de pensée et imagine que des horloges identiques, fixes les unes par rapport aux autres, se trouvent en tout point de l'espace : repérer un évènement dans le temps, c'est par exemple dire que « *le passage de la petite aiguille de mon horloge sur le 7 et l'arrivée du train sont des évènements simultanés* » à l'endroit où l'on se trouve.



Albert Einstein (1879-1955).
© Arthur Sasse, 1951

Pour que cette définition ait un sens, il faut que les horloges aient préalablement été synchronisées, c'est-à-dire possèdent une origine des temps commune. Pour cela, Einstein propose que les horloges communiquent entre elles avec des signaux lumineux. Imaginons par exemple que l'horloge A émette à 12 h un signal vers l'horloge B. Dès réception, l'horloge B renvoie un signal vers A

en lui indiquant son heure. Si A le reçoit à 14 h, elle en déduit que B se trouve à une heure-lumière d'elle. Elle attribuera à l'évènement «réception en B» une étiquette temporelle égale à la moyenne de ses instants d'émission et de réception. Si B indique que son heure de réception est 13 h 10, A jugera qu'elle est en retard de dix minutes par simple comparaison avec sa propre estimation.

Cette procédure a conservé toute son actualité car c'est sur elle que se fondent les systèmes de positionnement par satellites. Einstein affirme alors que *« le temps d'un évènement est l'indication, simultanée à cet évènement, d'une horloge au repos, située à l'endroit de l'évènement et qui, pour toutes les déterminations de temps, bat de façon synchrone avec une horloge au repos donnée »*. Avec cette définition, dire que deux évènements sont simultanés signifie que les instants de leurs avènements coïncident. Einstein se demande alors comment sont vus ces évènements à partir d'un autre ensemble d'horloges se déplaçant à vitesse constante par rapport au premier...



L'expérience de pensée proposée
par Einstein est vertigineuse.
© Wolfwomanways.

UNE CORRECTION SURPRENANTE DE LA FORMULE CLASSIQUE

Einstein démontre préalablement que l'invariance de la vitesse de la lumière fait perdre *« le droit d'attribuer une signification absolue au concept de simultanéité, et que deux évènements qui, du point de vue d'un système de coordonnées, sont simultanés, ne peuvent plus être considérés comme des évènements simultanés lorsqu'ils sont vus d'un autre système de coordonnées en mouvement relativement au premier »*. Ce résultat est suivi d'un paragraphe plus technique où Einstein trouve l'expression des transformations qui permettent de passer d'un référentiel inertiel à un autre et dont les transformations de Galilée sont un cas limite.

Einstein déduit deux conséquences spectaculaires de ces lois. La première est que *« si deux horloges synchrones se trouvent en A et que l'on déplace l'une d'entre elles à vitesse constante le long d'une courbe fermée*

jusqu'à ce qu'elle soit revenue en A [...], cette horloge, à son arrivée en A, retarde [...] sur l'horloge qui n'a pas bougé». C'est ce que l'on appelle la *dilatation des durées*. Si l'effet est imperceptible aux vitesses habituelles, très faibles par rapport à celle de la lumière, cette étonnante prédiction a néanmoins été amplement vérifiée en utilisant des particules élémentaires qui se déplacent à des vitesses proches de celle de la lumière, notée c .

La deuxième conséquence concerne la composition des vitesses. Dans la conception classique, galiléenne, la composition de vitesses parallèles se fait par sommation, algébriquement. Einstein démontre que si un corps se meut à la vitesse u par rapport à un premier référentiel et que ce référentiel se déplace lui-même à la vitesse uniforme v par rapport à un second, alors la vitesse du corps par rapport à ce dernier référentiel est égale à $(u+v)/(1+uv/c^2)$.

On voit donc apparaître une correction à la formule classique $(u+v)$ sous la forme d'un dénominateur, qui devient d'autant plus important que la vitesse u (ou v) est proche de celle de la lumière. En particulier, si la vitesse u est égale à c , alors la composition donne toujours c : la vitesse de la lumière est bien invariante par changement de référentiel, confirmant la compatibilité des postulats d'Einstein.

L'AUDACE D'UN ESPACE-TEMPS À QUATRE DIMENSIONS

Les physiciens des particules élémentaires ont donné une brillante confirmation expérimentale de l'invariance de la vitesse de la lumière en étudiant la désintégration du pion neutre (une particule de la famille des mésons) en deux photons de haute énergie. Dans les accélérateurs, on obtient des pions qui se meuvent à des vitesses proches de c . On s'attendrait à ce qu'un photon émis vers l'avant après une désintégration ait la vitesse $2c$. Il n'en est rien : en mesurant le temps de vol de ces photons entre deux compteurs, on a bien démontré que leur vitesse restait égale à c .

L'expérience de pensée pionnière de Galilée retravaillée par Einstein modifia si spectaculairement nos conceptions de l'espace et du temps que le mathématicien et physicien allemand Hermann Minkowski (1864–1909) proposa en 1908 de fusionner l'espace à trois dimensions et le temps unidimensionnel pour former une nouvelle entité physique : bienvenu dans l'espace-temps à quatre dimensions !

R.L.

JEAN-PHILIPPE UZAN

INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE PARIS, UMR 7095 DU CNRS

Tout mouvement est relatif et sa description nécessite de définir un cadre de référence. Alors comment savoir si notre univers se déforme, comme la relativité générale et la cosmologie l'affirment ? Comment mettre en évidence la dilatation cosmique et les frissons des ondes gravitationnelles qui le parcourent ?

LE MOUVEMENT, RÉVÉLATEUR DE L'ESPACE ET DU TEMPS

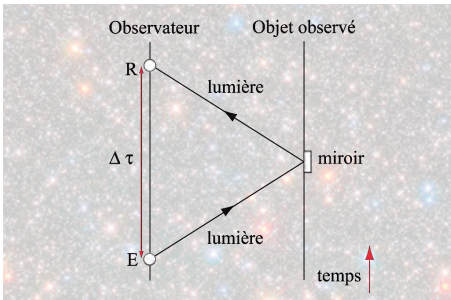
La description du mouvement et de ses causes a nécessité d'identifier les concepts de trajectoire, de vitesse et d'accélération, et de les mathématiser. La cinématique (description du mouvement) et la *dynamique* (étude de ses causes) sont les chapitres introductifs de la mécanique qui nous mènent de la relativité galiléenne à la relativité d'Einstein (voir le précédent article).

Dans un référentiel galiléen (ou *référentiel inertiel*), tout corps sur lequel n'agit aucune force est animé d'un mouvement rectiligne à vitesse constante. Les autres référentiels, accélérés ou en rotation, se distinguent par l'apparition de forces d'inertie, comme les forces centrifuge ou de Coriolis. On construit alors un référentiel galiléen par approximations successives : le laboratoire, le référentiel terrestre, le référentiel du système solaire... Cette étape visant à choisir un système de référence et justifier sa nature galiléenne est l'un des cauchemars de tout étudiant en physique. C'est ensuite Einstein qui comprend que l'invariance de la vitesse de la lumière implique l'abandon des notions newtoniennes d'espace et de temps absolus, à remplacer par un espace-temps à quatre dimensions. Ce dernier est pour autant tout aussi inaccessible que l'espace de Newton. Les référentiels inertiels restent au cœur de la cinématique, mais sont toujours des fantômes...

DES LOIS DE LA NATURE INDÉPENDANTES DU RÉFÉRENTIEL

En novembre 1915, après huit années de travail solitaire, Einstein expose sa théorie de la relativité générale. Elle trouve l'origine de la gravitation dans la géométrie de l'espace-temps. Le principe de relativité y est renforcé car les lois de la nature prennent alors la même forme dans tous les référentiels : ils sont tous «aussi bons les uns que les autres», ce qui permet de résoudre la question embarrassante des référentiels galiléens. En conséquence, les forces d'inerties, souvent appelées fictives, qui apparaissaient dans les référentiels non galiléens disparaissent de la description. Cela change radicalement la façon de penser le mouvement !

Déjà, le principe d'inertie est modifié : on ne peut pas s'abstraire à la gravitation. L'état de mouvement naturel est celui de la chute libre. Ensuite, les règles ne sont plus rigides car déformées par la géométrie de l'univers, qui n'a aucune raison de correspondre avec la géométrie euclidienne. Quant aux montres et horloges, les durées qu'elles mesurent dépendent de leur état de mouvement et du champ de gravitation dans lequel elles se trouvent. La seule chose à laquelle un observateur peut accéder est le temps mesuré à sa montre, ce que l'on appelle le *temps propre*.



La vitesse de la lumière étant finie, un observateur n'a accès qu'à des événements passés. On peut par exemple définir la distance d'un objet à partir du temps aller-retour mis par la lumière, $d = \Delta \tau / 2c$.

Il ne peut d'autre part mesurer que le temps écoulé entre deux événements, et non la distance d'un objet avec une règle, qu'il ne peut pas prouver être rigide.

© H. Lehning

L'UNIVERS QUI VOULAIT SE FAIRE PLUS GROS QUE L'UNIVERS

La théorie de la relativité offrait un cadre pour penser l'espace et le temps. Toute solution de cette théorie est un espace-temps avec sa géométrie. Dès 1917, Einstein tente de trouver «la» solution qui décrirait notre univers. Il en exhibe une dans laquelle l'espace est statique et immuable, un peu comme chez Newton, mais ayant la géométrie d'une sphère à trois dimensions...

Dans les années 1920, Alexandre Friedmann et Georges Lemaître démontrent indépendamment que, sous les mêmes hypothèses qu'Einstein, l'espace est génériquement en expansion et non statique. La relativité fournissait une prédiction inattendue sur la nature de l'espace aux échelles cosmiques. Comment la vérifier ?

Les éléments de réponse sont fournis par Lemaître en 1927. D'une part, la longueur d'onde de toute lumière se dilate de façon identique à l'univers. Ainsi, une galaxie rayonnant à une longueur d'onde de 350 nm (violet/ultra-violet) est observée à 700 nm (rouge/infrarouge) si l'univers s'est dilaté d'un facteur 2 entre l'instant de l'émission de la lumière et sa réception aujourd'hui. Ce décalage spectral vers le rouge est observable. D'autre part, si l'univers se dilate, les galaxies doivent s'éloigner les unes des autres, et ceci d'autant plus vite que les galaxies sont distantes. Lemaître proposait ainsi une méthode pour tester la dilatation de l'univers, en mesurant simultanément la distance et le décalage vers le rouge de galaxies lointaines. Cette loi reliant vitesses et distances des galaxies fut établie observationnellement par Edwin Hubble en 1929. L'univers se dilate donc ! Le taux d'expansion, qui change au cours du temps, est aujourd'hui tel qu'une galaxie située à 3,26 millions d'années-lumière s'éloigne de nous à une vitesse de 70 km/s.

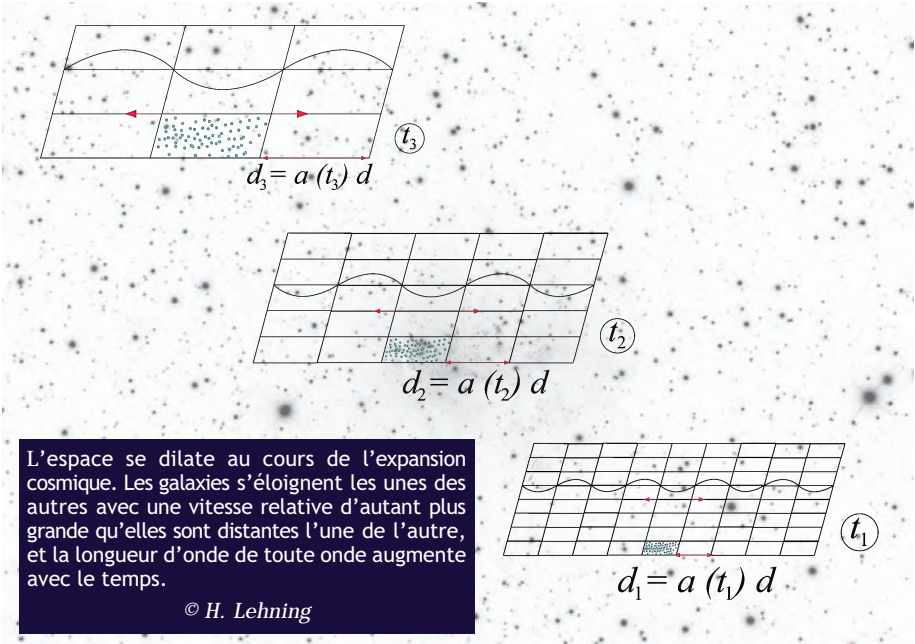
La mise en évidence de cette déformation de l'espace au cours du temps nécessite de faire des observations non locales et de les relier en comprenant la façon dont la lumière se propage et dont ses propriétés sont affectées par l'expansion cosmique.

DES VAGUES DE GÉOMÉTRIE

Autre prédiction de la relativité : il doit exister des ondes de géométrie qui se propagent à la vitesse de la lumière. Elles déforment les objets en modifiant la géométrie au cours de leur propagation.

Évaluons l'amplitude de cette déformation de l'espace-temps. Plus un corps est massif, plus il le courbe. Cette courbure modifie les mouvements de tous les autres corps. C'est la gravitation. Cependant, l'espace-temps est très rigide. Notre soleil ne le courbe que de quelques dix-millièmes de pourcent

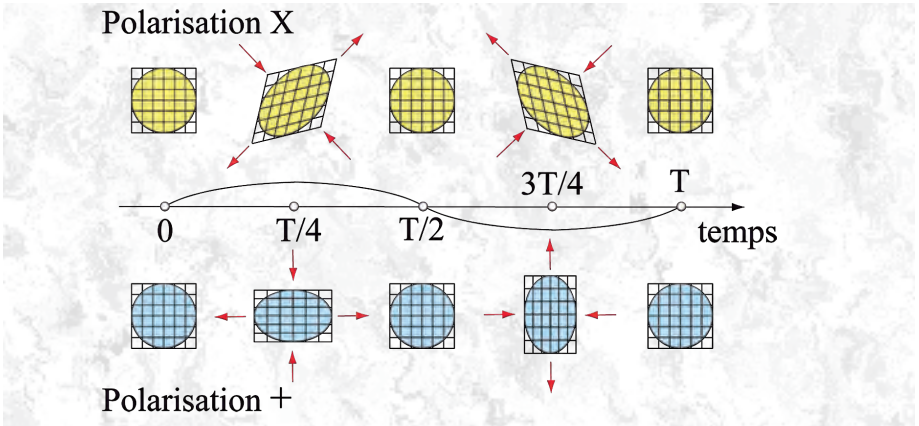
à sa surface ! Seuls des astres très massifs et des phénomènes astrophysiques violents peuvent émettre des ondes gravitationnelles détectables.



De telles ondes ont justement été détectées pour la première fois le 14 septembre 2015. Aujourd'hui, cinq évènements ont été observés, ce qui marque le début d'une nouvelle ère de l'astronomie. La détection de 2015 correspond au rayonnement gravitationnel d'un système constitué de deux trous noirs de vingt-neuf et trente-six masses solaires, qui ont fusionné pour former un trou noir de soixante-deux masses solaires. Mais... $29 + 36$ n'est pas égal à 62 ! C'est que, dans ce processus de fusion, l'équivalent de trois soleils a été transformé en onde gravitationnelle rayonnée dans tout l'espace.

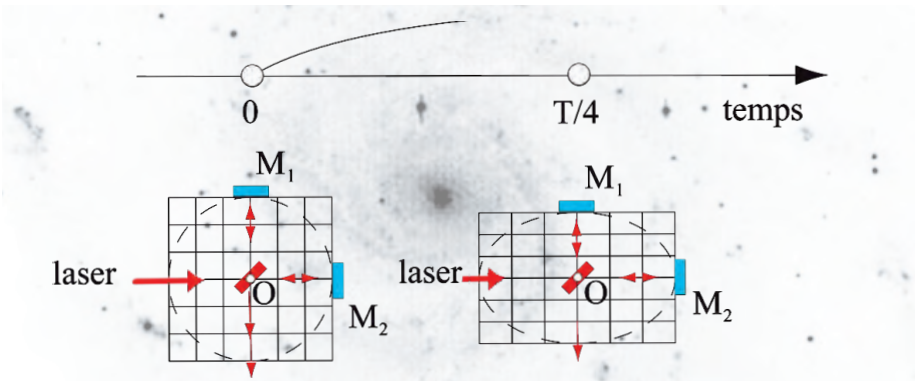
Voilà ce qu'il a fallu pour créer une onde gravitationnelle qui, après un milliard trois cent millions d'années-lumière de voyage, a déformé notre espace-temps d'environ un cent-millionième de la taille d'un atome.

Comment détecter une telle onde ? La petitesse de l'effet n'est qu'une première difficulté. En effet, d'après le principe d'équivalence, un observateur en chute libre ne peut pas savoir s'il est dans un champ de gravitation. Cette dernière n'a cependant pas disparu et seules les forces de marées, responsables de la déformation des objets, ne peuvent être annulées.



Déformation d'un anneau de matière au passage d'une onde gravitationnelle sinusoïdale en fonction du temps pendant une période. L'onde se propage perpendiculairement au plan de l'anneau et déforme l'espace : les points de l'anneau restent immobiles par rapport à la grille de coordonnées.
 © H. Lehning

Considérons un anneau de particules en chute libre perpendiculaire à la direction de la propagation de l'onde gravitationnelle. L'espace-temps se déforme périodiquement, si bien que l'anneau oscille mais la grille de coordonnées est aussi altérée : quiconque essaie de mesurer la déformation avec une règle ne détectera rien, la règle est elle aussi déformée. Les détecteurs d'ondes gravitationnelles sont des interféromètres.



Le passage d'une onde gravitationnelle dans une direction perpendiculaire à l'interféromètre modifie périodiquement la longueur de ses bras OM_1 et OM_2 , ce qui induit un changement de la différence de marche et donc de la figure d'interférence.
 © H. Lehning

C'est un peu comme si l'on avait placé deux miroirs sur l'anneau, ce qui permet de mettre en évidence une différence entre les longueurs de deux diamètres perpendiculaires, différence qui influe sur la figure d'interférence.

Le passage d'une onde gravitationnelle dans une direction perpendiculaire à l'interféromètre modifie périodiquement la longueur de ses bras OM_1 et OM_2 , ce qui induit un changement de la différence de marche et donc de la figure d'interférence. La relativité repose sur un espace quadri-dimensionnel, dont les équations permettent de déterminer la géométrie. Les déformations de l'espace en fonction du temps sous-entendent que l'on a effectué une foliation de l'espace-temps en espace à différents instants afin de pouvoir parler de son évolution.

Ces deux descriptions sont en fait complémentaires ! Un même espace-temps peut avoir des descriptions « intérieures » différentes suivant le choix d'une classe d'observateurs définissant une foliation particulière : on connaît des espaces-temps qui peuvent apparaître statiques pour un observateur et en expansion pour un autre. La relativité nous oblige à systématiquement expliciter qui observe, et comment. C'est le prix à payer pour abandonner toute référence à un espace absolu et à un référentiel privilégié.

J.P. U.

Pour en savoir (un peu) plus :

Les ondes gravitationnelles. Nathalie Deruelle et Jean-Pierre Lasota, Odile Jacob, 2018.

Théories de la relativité. Nathalie Deruelle et Jean-Philippe Uzan, Belin, 2015.

Maths Lumière Express. Collectif, Comité international des jeux mathématiques, 2015.

Big bang. Jean-Philippe Uzan, Flammarion, 2018.

LES POINTS DE LAGRANGE : UN TICKET GRATUIT VERS LES ÉTOILES ?

EMMANUEL TRÉLAT

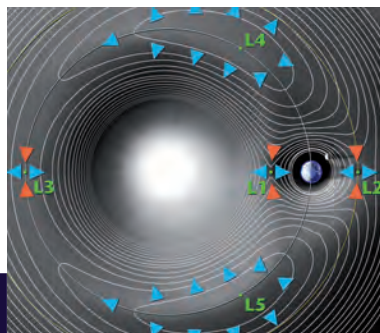
Sorbonne Université, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Un fameux problème en mécanique céleste s'appelle le *problème des trois corps restreint*. Trois objets sont en présence, dont deux très massifs (comme le Soleil et la Terre) par rapport au troisième (une poussière, un astéroïde, un engin spatial...). Dans un repère tournant où les deux corps massifs sont fixes, les lois de Newton permettent de décrire l'évolution en temps du troisième objet par un système d'équations différentielles : ce dernier est soumis aux forces d'attraction des deux premiers, et à la force centrifuge puisque l'on est dans un repère tournant. Il s'avère que cette dynamique admet exactement cinq points d'équilibre, que l'on appelle les *points de Lagrange* L1, L2, L3, L4 et L5, en lesquels les trois forces se compensent exactement.

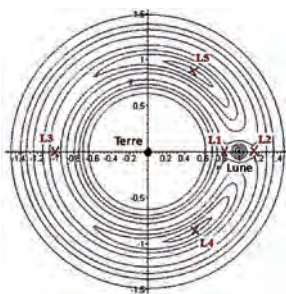
Historiquement, L1, L2 et L3 ont été découverts par Leonhard Euler (1707–1783), et on les appelle parfois les *points d'Euler*. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) a découvert les deux derniers (que l'on appelle aussi les *points équilatéraux*, cf. figure) et a ainsi emporté le morceau : on appelle tous ces lieux les « points de Lagrange » !

POINTS DE LAGRANGE : QUAND J'Y SUIS, J'Y RESTE !

La propriété d'être un point d'équilibre offre la possibilité d'avoir une configuration fixe relativement à deux corps célestes et permet donc de concevoir des sites d'observation spatiale : en effet, si l'on place un objet exactement en un point de Lagrange, alors (en théorie) il y reste.



Les cinq points de Lagrange dans le système Soleil-Terre. © NASA / WMAP Science Team



Les cinq points de Lagrange dans le système Terre–Lune.
© NASA / WMAP Science Team

Sur les figures sont représentées des orbites (les trajectoires possibles d’une pierre). Les points L1, L2 et L3 sont naturellement instables alors que les points L4 et L5 sont stables. Au premier abord, cette stabilité semble être une bonne nouvelle : si l’on place un engin spatial au voisinage de L4 (ou L5), alors il va y rester. Mais en fait, cette stabilité implique que, au voisinage de L4 comme de L5, on a un puits de potentiel qui, comme une cuvette, au fur et à mesure des hasards astronomiques, a piégé quantité de poussières, de pierres et d’astéroïdes, rendant ainsi impossible la présence d’un engin spatial dans cette zone à cause des inévitables chocs qui l’abîmeraient rapidement !

L’instabilité des points L1, L2 et L3 est donc finalement une bonne nouvelle : ce sont des sites « naturellement propres » ! Toutefois, si un objet est placé « juste à côté » d’un tel point, alors il ne va pas y rester. Il y a donc un léger prix à payer : pour garder l’objet au voisinage du point de Lagrange (instable), il faut faire appel à la théorie mathématique du contrôle, et en particulier de la stabilisation. Considérons l’exercice du maintien d’un bâton en équilibre vertical au creux de sa main. Si le bâton est exactement vertical, en l’absence complète de perturbations il reste vertical, mais cet équilibre est instable : à la moindre perturbation, ou si le bâton n’est pas exactement vertical, alors il va tomber. La stabilisation consiste alors à faire bouger légèrement sa main (on fait du contrôle) de manière à compenser de faibles variations autour de l’équilibre, et ainsi maintenir le bâton autour de son équilibre instable. Dans le cas d’un engin spatial, l’idée est qu’une légère propulsion (fournie par exemple par des panneaux solaires) suffit à maintenir l’engin au voisinage d’un point instable.

De plus, la théorie mathématique des systèmes dynamiques permet de démontrer qu’il existe, au voisinage de chacun des points de Lagrange, une multitude d’orbites périodiques et quasi périodiques, les plus connues étant les *orbites de halo* (qui sont des déformations de cercles), mais on y trouve aussi toutes les orbites possibles de Lissajous : des orbites *en huit*, en *triple huit*... Ces propriétés surprenantes sont dues à la complexité du champ gravitationnel dans le problème à plusieurs corps. Sans l’utilisation de

mathématiques assez avancées, on serait incapable de détecter de telles orbites périodiques ! Elles ouvrent des possibilités excitantes pour les missions spatiales.

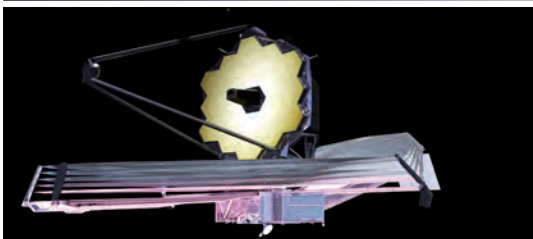
TRENTE MILLIONS DE KILOMÈTRES PRESQUE SANS ÉNERGIE

Les points de Lagrange L1 et L2 du système Soleil–Terre sont utilisés depuis longtemps par les agences spatiales, qui y placent leurs engins. Ainsi, autour du point L1 (qui se situe à environ 1,5 million de kilomètres de la Terre dans la direction du Soleil) gravite depuis 1996 le satellite SOHO, dont la mission est d’observer la surface de notre astre. En réalité, l’engin spatial ne peut pas être placé « trop proche » du point L1, car alors l’alignement Soleil–L1–Terre engendrerait un intense bruit de fond solaire qui dégraderait les communications. Pour éviter cette zone d’interférences, l’engin est en fait placé sur une orbite de halo ; il s’agit d’une orbite périodique autour de L1 ayant une période d’environ six mois. Comme elle est instable sur le long terme, de temps en temps (environ tous les trois mois) de petites manœuvres, peu coûteuses énergétiquement, sont nécessaires pour recalibrer Soho sur son orbite.

Autour du point L2 sera lancé (en principe en 2020) le successeur du télescope Hubble, appelé JWST (James Webb Space Telescope), dont la position sera idéale puisqu’il ne sera pas gêné par la lumière solaire. Le point L3 n’est pas utilisé actuellement ; il se situe à l’opposé de la Terre par rapport à notre étoile, et nous est donc totalement invisible.



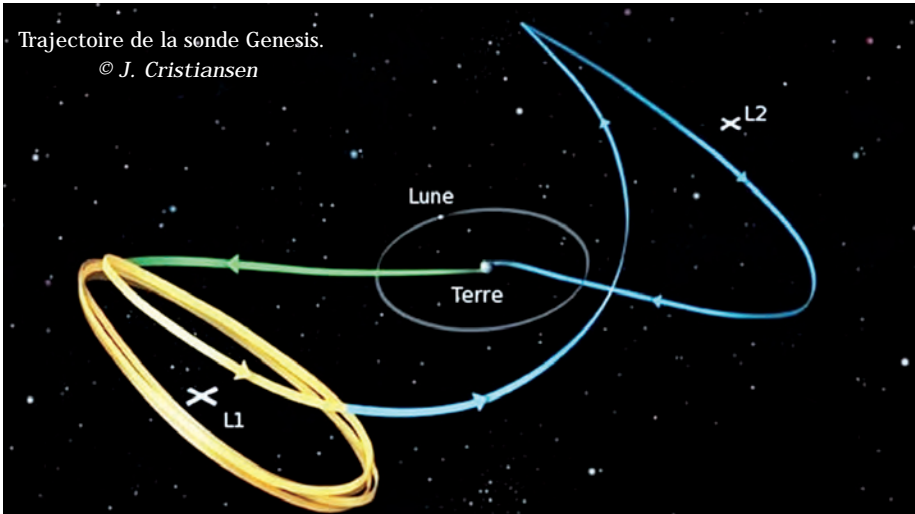
Le satellite Soho.
© ESA



James Webb Space Telescope
(représentation artistique).
© ESA

Les orbites périodiques au voisinage des points de Lagrange permettent à un engin spatial de se déplacer de manière gratuite, sans consommer de carburant. Il est alors possible d'élaborer des lois de guidage globales à moindre coût : on peut fort bien utiliser partiellement de telles trajectoires et ainsi économiser du carburant.

Les concepteurs de la mission Genesis ont utilisé ces propriétés pour propulser la sonde vers sa destination, et cela en utilisant un minimum de carburant : la sonde Genesis, lancée en 2001, avait pour objectif de collecter des particules de vent solaire. Elle a d'abord parcouru 1,5 million de kilomètres (en vert sur la figure suivante), puis a été placée sur une orbite de halo (en jaune) autour du point de Lagrange L1 du système Terre–Soleil afin d'y collecter des particules de vent solaire pendant deux ans et demi. Elle est revenue sur Terre en septembre 2004 en transitant par le point de Lagrange L2 (trajectoire en bleu), empruntant au passage ce que les dynamiciens appellent une *orbite hétérocline*, effectuant ainsi, en tout, environ 30 millions de kilomètres avec une infime consommation énergétique.



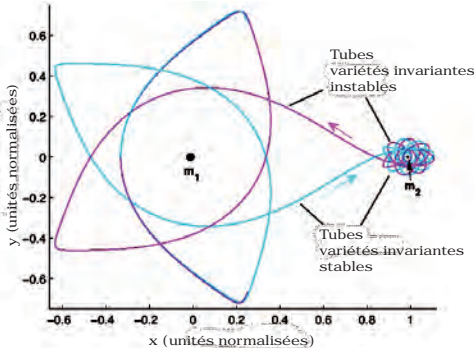
Plus fascinant, peut-être...Toujours en utilisant des mathématiques assez profondes (géométrie différentielle et théorie des systèmes dynamiques), on découvre que, autour de chaque point de Lagrange, chacune

des orbites périodiques engendre des *variétés invariantes* (variétés stables et instables) : ce sont des genres de « tubes », engendrés par chacune des trajectoires périodiques, ayant la propriété que, si l'on y place un caillou, alors ce caillou reste dans le tube et y dérive selon un courant orienté, comme dans un tuyau de plomberie.

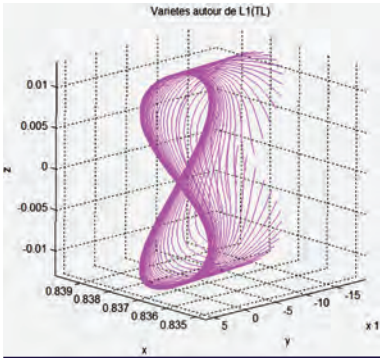
Ces « courants de gravité » sont similaires aux courants marins : ils existent naturellement et on peut choisir de les utiliser (à condition de ne pas être pressé...) pour économiser du carburant. Par exemple, si l'on place une coquille de noix le long du Gulf Stream, à l'ouest de l'Afrique, on va la retrouver quelques mois plus tard à l'ouest des côtes françaises. La même chose a lieu dans l'espace, de manière d'ailleurs bien mieux prédictible puisqu'on est dans le vide.

Il existe ainsi dans notre système solaire tout un réseau de tubes invariants, de courants de gravité que, grâce à des calculs mathématiques, on est parfaitement capable de cartographier, obtenant ainsi une véritable « carte de métro » du système solaire.

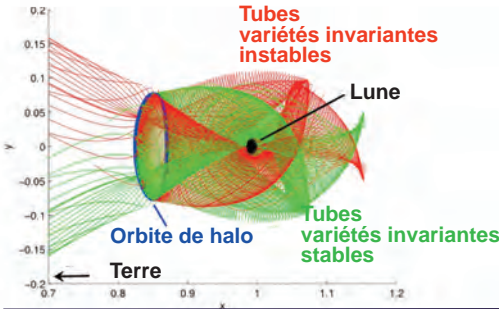
Toutefois, bien que ce métro soit totalement gratuit, il est lent ! L'exploitation de tels courants est donc plutôt adaptée à des missions robotisées, ou alors il faut combiner leur effet d'entraînement à l'utilisation d'un moteur. Par exemple, en utilisant les points de Lagrange L1 et L2 du système Terre–Lune et les courants de gravité qu'ils engendrent, on sait aller de la Terre à la Lune de manière presque gratuite, à ceci près qu'il faut bien sûr au préalable s'arracher de l'attraction terrestre. Mais une fois l'engin placé dans un tube invariant, on sait l'emmener très près de la surface de la Lune en trois à quatre mois, sans aucune dépense de carburant ! Bien sûr, on sait aller vers la Lune en trois jours, mais cela se fait au prix d'une grande consommation énergétique.



Orbites en 8 et leurs tubes, dans le système Terre (m_1)-Lune (m_2). © E. Trélat



Orbites en forme de huit et leurs tubes en huit (variétés invariantes qui conservent leur structure en temps long).
© E. Trélat



Orbites de halo et leurs tubes (variétés invariantes qui deviennent rapidement chaotiques).
© E. Trélat

La conception de missions cargos vers la Lune (consistant à envoyer, avec l'assistance de robots, beaucoup de matériel pour construire une base lunaire) a été l'objectif de la thèse de Maxime Chupin, en partenariat avec ArianeGroup. Nous avons utilisé les tubes invariants en forme de 8 qui sont engendrés par des orbites de Lissajous* en huit autour du point L1 du système Terre–Lune. Ces tubes ont en effet la propriété remarquable de conserver cette structure en temps long, contrairement à ceux engendrés par les orbites de halo, qui deviennent rapidement chaotiques, et donc inutilisables en temps long.

Résumons : les orbites de halo engendrent des « tubes » dont la section est un cercle, qui deviennent rapidement « chaotiques » : ils s'évasent, en forme de trompette, à tel point qu'ils en deviennent inexploitable. Au contraire, les orbites de Lissajous en huit engendrent des « tubes » étonnants dont la section est un 8, qui

conservent en temps long cette structure. Cette propriété serait fort intéressante pour des missions spatiales. De même, outre qu'ils suivent une jolie courbe autour de la Terre (m_1) et autour de la Lune (m_2 , voir en page précédente), ils oscillent comme une pelote de laine autour de la Lune et passent tout près de sa surface : idéal pour joindre de manière gratuite un point très proche de la surface lunaire !

Dans un avenir proche, la communauté internationale pourrait s'accorder pour construire une telle base lunaire (sans doute au pôle Nord de la Lune), qui servirait de point intermédiaire en vue de missions vers Mars...

E.T.

*Jules-Antoine Lissajous, 1822–1880, mathématicien et physicien français spécialiste de l'étude des oscillations. Son nom est associé à la courbe évoquée ci-dessus.

FABRICE NEYRET*

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
(CNRS, UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, INRIA)

Vous êtes au bout de la jetée, regardant la mer. Éternelle mais jamais la même, permanente mais toujours en mouvement. Des vagues entrent par trains. Mais qu'est-ce que ce mouvement entrant qui ne change rien, puisque le port ne se remplit pas ? Comme bien des questions scientifiques, celle-ci est en fait ambiguë, et il faut d'abord définir précisément de quoi l'on parle, ce qui amènera des réponses... très différentes.

LES MOUVEMENTS DE LA MER

Une vague n'est pas un objet, c'est une onde qui se déplace dans un substrat (ici, la surface de l'eau). Dans l'air, le son est une onde de pression qui se propage de proche en proche dans le volume, comme pour un ressort, alors que le vent est un authentique déplacement d'air. À la surface d'un substrat, le mouvement, plus libre, peut se faire verticalement : une « parcelle » de matière tourne en rond autour de sa position au repos (c'est le *modèle de Gerstner*, valide en eau profonde), selon un rayon correspondant à l'amplitude A de la vague (sa demi-hauteur), et avec une période T donnée, et donc à une vitesse tangentielle $2\pi A / T$. Les parcelles amont et aval sont en avance ou en retard par rapport à elle sur leur propre cycle : c'est ce qui forme les vagues, et fait qu'une crête, correspondant à une parcelle au sommet de son cercle, semble se propager (voir encadré). La vitesse de la vague et la vitesse de l'eau n'ont donc rien à voir entre elles ! De plus, la première se propage tandis que la seconde s'agite sur place. En sus, il peut aussi y avoir un déplacement global d'eau, indépendamment, par exemple si la marée monte.

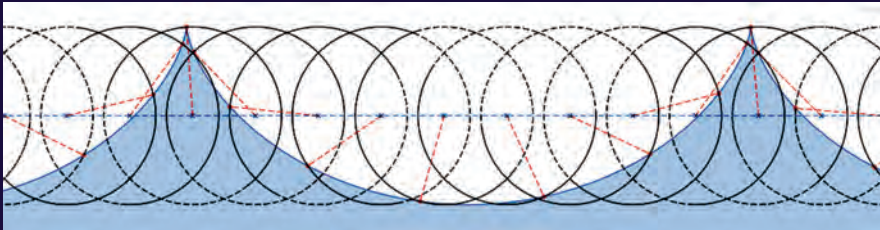
*Sauf indication contraire explicite, tous les schémas ont été réalisés par l'auteur.

Le mouvement des vagues

La distance telle que le décalage de cycle (dit aussi de *phase*) revient à zéro est la longueur d'onde L de la vague. L'équation de la position d'une parcelle d'eau est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \end{pmatrix} \quad \text{dans le plan de propagation.}$$

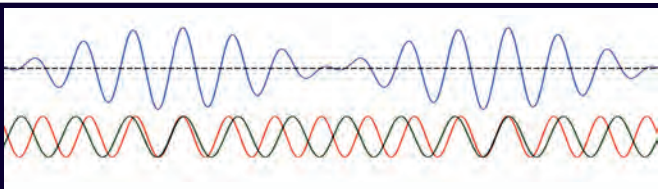
À x fixé, elle reproduit bien le mouvement circulaire d'une parcelle. À t fixé, elle reproduit la forme du train de vagues. La phase peut se factoriser $(2\pi/L)(x - tL/T)$, ce qui correspond bien à une équation de propagation : quand t augmente, le motif se retrouve à l'identique L/T fois plus loin – pour retrouver une même valeur de phase, par exemple la crête –, et la vitesse de la vague est donc L/T ... qui diffère selon la longueur des vagues. Et qui, comme on l'a vu, diffère aussi de la vitesse de l'eau !



Mouvement de l'eau au passage d'une vague (modèle trochoïdal de Gerstner).
DesmosGraph interactif : <https://www.desmos.com/calculator/gzka4avuuq>

Puis un bateau est entré au port, entraînant un train de vagues derrière lui. Ce paquet de vagues traîne encore près de nous, alors que l'on se serait attendu à le voir deux fois plus loin. Effectivement, à bien y regarder, il semble se déplacer deux fois moins vite que les vagues qu'il contient, celles-ci naissant à l'arrière et mourant à l'avant ! Comment cela est-il possible ? En fait, les ondes sont rarement pures, et la surface liquide subit la superposition de tout un ensemble d'ondes : le bateau a excité le milieu liquide dans toute une gamme de longueurs d'onde voisines de sa taille, et ces ondes interfèrent entre elles. Ainsi, si deux ondes ont pour nombre d'onde $k + \varepsilon$ et $k - \varepsilon$, avec $k = 2\pi / L$, leur somme $\sin((k+\varepsilon)x) + \sin((k-\varepsilon)x)$ donne $2 \sin(kx) \cos(\varepsilon x)$: le train d'onde moyen $\sin(kx)$ est modulé par une large enveloppe $2 \cos(\varepsilon x)$ formant le paquet. Pour une infinité d'ondes, et avec la relation de dispersion liant L et T , on trouve que la vitesse d'un paquet (dite *vitesse de groupe*) est la moitié de la vitesse des ondes (dite *vitesse de phase*) en situation d'eau profonde.

Les interférences entre ondes similaires engendrent des paquets se propageant à leur propre vitesse.

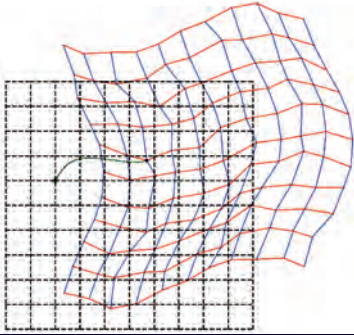


DesmosGraph interactif : <https://www.desmos.com/calculator/a6bq1kxc9l>

Nous voici donc avec quatre vitesses différentes : la parcelle d'eau, la crête de vague, le groupe de vagues, et le courant global éventuel. Ça fait beaucoup. Est-ce tout ? Eh bien non. On a mentionné une « parcelle d'eau », mais à quoi cela correspond-il ? Pas aux molécules, en tout cas : aux conditions ambiantes, celles-ci se déplacent à des vitesses de l'ordre de la vitesse du son (dans les 1 000 km/h !), dans toutes les directions, et rebondissent en tous sens, ce qui en moyenne, « vu de loin », s'annule. Enfin, ne s'annule pas exactement : la résultante est ce qui donne le mouvement de la parcelle. La vitesse de l'eau n'est pas la vitesse de ses molécules, et les deux n'ont rien à voir entre elles. Ce qu'il se passe avec les molécules dans une petite parcelle se passe aussi avec les petites parcelles vis-à-vis des grandes : les fluides ont tendance à être turbulents (agités en tous sens, à toutes les échelles). À l'intérieur d'une grande parcelle de fluide, les fluctuations des petites parcelles se compensent vu de l'échelle supérieure, et la résultante peut être faible par rapport à l'agitation des petites parcelles... ou pas. Ce phénomène se reproduit à toutes les échelles tant qu'il s'y trouve de la turbulence. Bref, la vitesse de l'eau dépend de l'échelle à laquelle on la regarde.

Vous savez maintenant presque tout sur les différents mouvements qui se superposent dans l'eau : le piège de la question *mal posée* était qu'il n'y a pas qu'un mouvement de l'eau, et que « eau » est de surcroît une désignation très imprécise. *A contrario*, nous allons maintenant faire le tour des nombreuses facettes sous lesquelles les scientifiques et ingénieurs peuvent regarder un champ de mouvement donné.

La première façon d'étudier un champ de mouvement est de regarder le déplacement parcouru, soit en visualisant sur une carte initiale où sont partis ses points (schéma suivant à gauche), soit en visualisant sur une carte actuelle d'où ils sont venus, ceci pouvant se faire en advectant une texture



Visualisation des nouvelles positions par rapport aux anciennes.
DesmosGraph interactif :
<https://www.desmos.com/calculator/5qn5kcrszu>

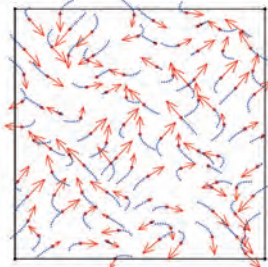


Visualisation des anciennes positions par rapport aux nouvelles par advection de texture.

– ici, un damier – posée sur le fluide au départ (schéma ci-dessus à droite). Pour des déplacements modestes et cohérents, comme dans le cas des solides déformables, c’est lisible, mais pour nos fluides turbulents c’est vite un sac de nœuds.

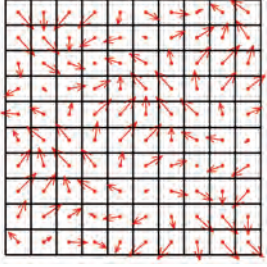
Pour un fluide, il est plus intéressant d’étudier le champ de vitesses, c’est-à-dire le déplacement depuis l’instant d’avant. Soit on suit les parcelles, comme on le ferait en mécanique du point, et on mesure la vitesse de celles-ci au cours du temps (approche *lagrangienne*, ci-dessous à gauche), soit on considère des cases d’espace fixes, et on s’intéresse à la vitesse au centre de celles-ci (approche *eulérienne*, à droite). La taille de la parcelle définissant la mesure des vitesses découle soit de la sensibilité du dispositif de mesure de fluide réel, soit de la résolution de la simulation numérique.

Bien qu’il s’agisse du même écoulement, les deux approches voient des choses très différentes : pour des ondes, la première suivrait l’évolution des crêtes, tandis que la seconde regarderait ce qu’il se passe aux bouées.



Représentation lagrangienne des vitesses.

Cependant, on a vu précédemment que la notion de vitesse de fluide se décline selon l’échelle (d’une part parce que s’y superposent des phénomènes



Représentation eulérienne des vitesses.

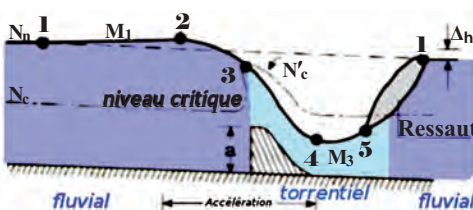
différents, turbulences, vagues, courant... , d'autre part parce que par nature la turbulence engendre de l'agitation locale à toutes les échelles). Fixer une échelle de mesure des vitesses nous rend aveugle aux autres échelles ! Aussi, il est intéressant de décomposer les vitesses, ou tout autre quantité, selon l'échelle : on se retrouve avec une pyramide de cartes (détaillées pour les très petites agitations, grossières pour les grandes échelles).

L'information multi-échelle peut aussi se présenter sous une forme complètement différente, donnant des statistiques d'échelle plus lisibles : on décide que chaque case représente une longueur d'onde (ou plutôt son inverse, une fréquence spatiale) et sa direction ; le centre de la carte matérialise la fréquence nulle ; les bords représentent les fréquences élevées ; et dans chaque case on reporte la quantité moyenne mesurée pour cette échelle et cette direction. Ce *spectre* des valeurs est obtenu par la transformée de Fourier, la même qui vous livre sur votre chaîne hi-fi le petit diagramme évolutif décomposant le signal musical écouté sous forme de quantités fréquentielles, des graves aux aigus selon l'échelle des longueurs d'onde sonore (ici dans une version 1D puisqu'elle opère sur le temps et non sur l'espace). Sous certaines conditions techniques (spectre complet avec les phases), cette représentation est duale : on peut retrouver les quantités spatiales à partir d'un spectre *via* la transformée de Fourier inverse.

DES GRANDEURS ALTERNATIVES À LA VITESSE

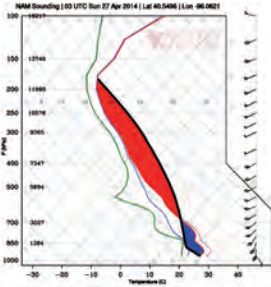
La vitesse peut encore se représenter d'autres façons, par exemple comme énergie cinétique $E_c = (1/2)m|v|^2$ ou l'une de ses variantes, la *charge* (cf. le théorème de Bernoulli). Comme l'énergie est directement concernée par diverses lois de conservation ($E_c + E_p + E_t = \text{constante}$), les physiciens apprécient cette forme car il est alors possible d'analyser graphiquement, voire de résoudre, des problèmes juste en mesurant des lignes ou surfaces d'énergie, le franchissement de seuils critiques, *etc.*

Enfin, les tourbillons jouent un grand rôle dans les écoulements, qu'il s'agisse de grands vortex ou de remous turbulents (où les tourbillons



Au niveau d'un ressaut hydraulique, le régime bascule de fluvial à torrentiel (l'équivalent fluide de « supersonique ») quand la ligne de courant franchit une valeur critique, puis rebasculé à fluvial avec déferlement (le ressaut).

© *Hydraulique générale*, Armando Lencastre, Eyrolles, 1999

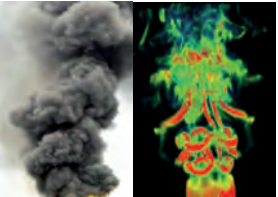


Le graphe d'un sondage atmosphérique (mesurant température et humidité à toutes les altitudes) permet de prévoir si la convection nuageuse démarrera, et à quelle hauteur l'énergie disponible fera monter les nuages.
 © twisterdata.com, 2014

s'étirent en torsades qui se brisent en tourbillons plus petits). Non seulement les vortex sont des structures persistantes, mais leurs formes sont éclairantes : verticaux (tornades, vidanges de lavabo...), en anneau (ronds de fumée, champignons atomiques, zones de remontée à la surface des fleuves...) ou en «paquet de nouilles» (turbulence sauvage). On peut mesurer cette tendance rotatoire en tout point: la *vorticité*, double de la vitesse angulaire locale, s'obtient par $\left(-\frac{\partial V_x}{\partial y} \quad \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$ en 2D (ou plus généralement $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$, avec $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)$ le pseudo-vecteur des dérivées partielles du champ de vitesse selon les directions x, y et z).

Une carte de la vorticité est particulièrement lisible : seule l'âme des tourbillons a une valeur non nulle (ci-dessous en couleurs vives), l'écoulement qui suit passivement autour peut donc être figuré en noir ou en transparent (car il tourne autour de l'axe des vortex mais pas sur lui-même). Plus étonnant : sous certaines conditions, la vorticité est également duale de la vélocité; elle contient autant d'information. On peut donc directement écrire et simuler les équations des fluides en vorticité, et retrouver ensuite le champ de vitesse correspondant, par l'équation de Biot et Savart.

Un écoulement à fort cisaillement (comme un panache de fumée) déclenche des instabilités dynamiques qui engendrent des anneaux de vorticité (en couleur). Ces filaments se propagent, interagissent et se déforment en cascade d'échelles jusqu'à dégénérer en «paquet de nouilles» puis en dissipation thermique, caractéristique de la turbulence. © Droits réservés



Toutes ces facettes sont indépendantes et peuvent se combiner : la vorticité peut se suivre en lagrangien ou en eulérien, en spatial ou en spectral, et on peut en mesurer l'énergie cinétique de rotation, qui peut elle-même se regarder en espace ou en spectral... Les mouvements des fluides sont riches, et les questions qu'on leur pose sont multiples : tous ces outils d'exploration permettent de se faire une meilleure idée d'un phénomène, en regardant une même chose – son mouvement – sous toutes les facettes conceptuelles.

F.N.

QUAND LES ONDES DESSINENT DES MOTIFS GÉOMÉTRIQUES

LAURE SAINT-RAYMOND

Professeur à l'École normale supérieure de Lyon

THIERRY DAUXOIS

Directeur de recherche CNRS à l'École normale supérieure de Lyon

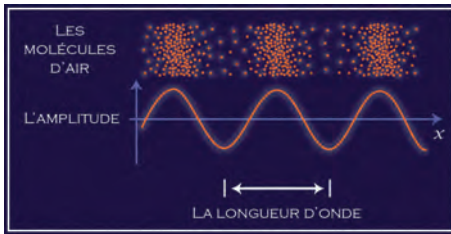
La découverte des phénomènes ondulatoires remonte à l'Antiquité, avec les travaux de Pythagore sur les cordes vibrantes, mais il existe une telle diversité d'ondes et de modes de propagation que leur étude reste encore aujourd'hui un immense champ de recherches pour les physiciens... et les mathématiciens. C'est un domaine riche et encore plein de surprises.

UNE ONDE PARMIS LES PLUS CONNUES : LE SON

Le son est sans doute le phénomène ondulatoire le mieux connu de tous, et pourtant sa réalité physique est difficile à appréhender. Des expériences simples peuvent permettre de voir comment il est émis : vibration d'une corde ou d'une plaque, de la peau d'un tambour... mais il est plus délicat de comprendre comment il se propage.

Les ondes sonores (ou *ondes acoustiques*), contrairement aux ondes électromagnétiques qui génèrent la lumière, n'existent pas dans le vide. Elles ont besoin d'un support matériel comme de l'air ou de l'eau. C'est pourquoi les explosions sonores dans le vide intersidéral des films de science fiction ne sont pas crédibles. Plus précisément, le signal correspond à de petites variations locales de la pression : en certains points, les particules se concentrent et la pression est plus élevée, alors qu'en d'autres points voisins le gaz ou le liquide se dilate et la pression diminue. Concrètement, les particules font de tout petits déplacements, et leur vitesse est assez faible. Mais le signal, lui, peut se déplacer très loin et très vite. Il y a donc une certaine indépendance entre le mouvement de la matière et la propagation de l'onde.

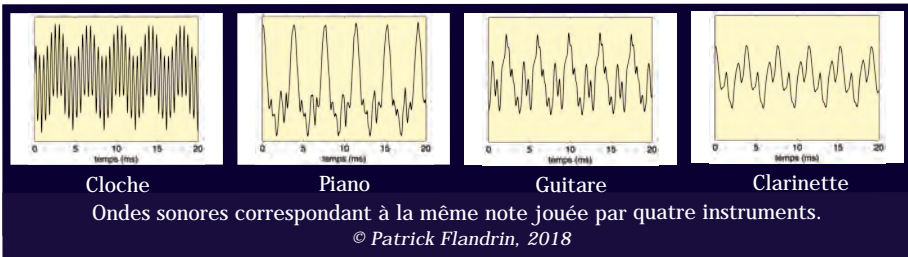
Si l'on mesure les fluctuations de pression, on peut « visualiser » le son. Un son qui semble invariable dans le temps, comme une longue note tenue,



Le signal sonore : des oscillations de la pression. © CB CIJM

correspond en fait à une oscillation régulière de la pression en espace et en temps. On parle de *longueur d'onde* pour désigner la distance entre deux crêtes, et de *période* pour désigner le temps (en secondes) séparant le passage au niveau de deux crêtes successives.

La fréquence, exprimée en hertz (Hz), est l'inverse de la période. Pour les ondes sonores, la longueur d'onde et la période de l'onde sont directement liées, et même proportionnelles. De façon simplifiée, le son propage en fait quatre types d'information : une *durée*, une *hauteur*, une *intensité* et un *timbre*. La hauteur est directement liée à la fréquence. L'intensité dépend de l'amplitude des variations de pression, c'est-à-dire de l'énergie qui est transportée par l'onde. Et le timbre dépend du profil élémentaire du signal.



PROPAGATION DU SON : COMME UN ÉCHO ÉTRANGE...

Les équations de la physique (celles qui régissent l'écoulement d'un gaz ou d'un fluide) permettent de prédire la propagation du son, c'est-à-dire sa vitesse et la direction dans laquelle il se propage. Dans un milieu homogène, aucune direction n'est privilégiée. La vitesse du son ne dépend pas non plus de la fréquence du signal. Elle dépend en revanche du milieu dans lequel l'onde se propage, typiquement de sa température (qui correspond à la vitesse d'agitation des particules) si c'est un gaz. Quand l'onde change de milieu, elle est partiellement réfléchiée et partiellement réfractée. L'étude géométrique de la propagation est très similaire à celle des rayons lumineux. La réflexion frontale sur un bord solide entraîne notamment le phénomène bien connu d'écho : le signal revient, presque identique à lui-même, à l'exception en général de l'intensité, qui est moins forte à cause de la réflexion non parfaite

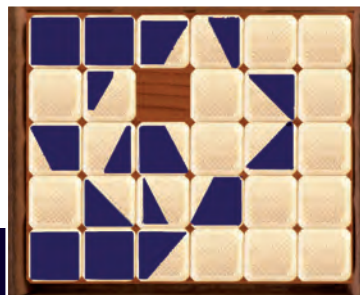
et d'un léger retard dû à la vitesse de propagation. Et si l'onde arrive de façon oblique par rapport au bord, elle se propage suivant la même trajectoire que le ferait une boule de billard.



Propagation du son dans une salle de concert. Il faut absorber les ondes sur les parois pour limiter le phénomène d'écho pour l'auditeur. © CB CIJM

Certaines ondes ont un comportement très différent des ondes sonores, bien que leurs supports physiques présentent de grandes ressemblances. Regardons, en deux dimensions pour simplifier, la stratification verticale d'un signal dans un fluide comme l'eau de mer, dont la densité

est stratifiée (elle dépend de la profondeur) : le liquide dense (plus salé) se trouve en dessous du liquide moins dense. Cette propriété rompt l'isotropie du système, il y aura donc des directions privilégiées. Cette configuration est stable, et on ne considère que de petites fluctuations autour de l'état d'équilibre, lesquelles modifient la densité du fluide et génèrent de petits mouvements des particules. Mais ici, on suppose que l'écoulement est *incompressible*, c'est-à-dire que la seule façon d'augmenter ou de réduire la densité en un point est d'y transporter un petit volume de fluide dont la densité est plus ou moins grande. Le mouvement est donc beaucoup plus contraint, un peu comme dans un jeu de taquin. La



Chaque élément de fluide a une densité fixée, représentée par la proportion de bleu et de blanc sur chaque case. On peut répartir différemment la densité (et retrouver l'image du ballon de foot) en faisant coulisser les pièces, mais on ne peut ni les retirer, ni les superposer. © PA CIJM

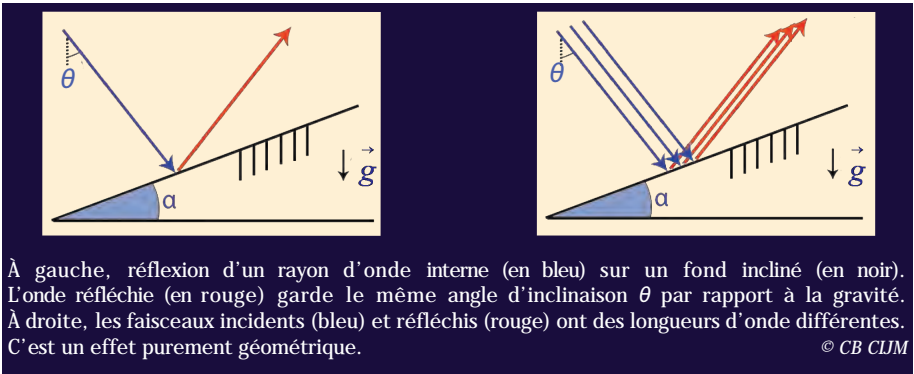
contrainte d'incompressibilité est non locale car le mouvement de chaque petit volume de fluide est conditionné par l'ensemble du fluide.

LONGUEUR D'ONDE ET PÉRIODE NE SONT PAS LIÉES

Les ondes, dites *internes* (par opposition aux ondes de surfaces comme les vagues, qui sont *externes*), ne sont pas contraintes, mais leur mode de propagation est complètement modifié. Les équations des fluides incompressibles permettent de prédire cette propagation. Mais elle est très contre-intuitive car on a l'habitude de travailler avec les lois de l'optique ou de l'acoustique.

Le son se propage dans toutes les directions. Une caractéristique des ondes internes est que leur direction de propagation est déterminée par leur fréquence. Autrement dit, une fois qu'on a fixé la fréquence d'une onde, elle ne peut se propager que dans quatre directions, qui forment toutes le même angle θ par rapport à la verticale (la gravité). Les règles de réflexion sur les bords solides sont par conséquent complètement modifiées. Comme il n'y a pas de liberté (ou très peu) sur la direction de l'onde réfléchi, la seule façon possible de préserver l'énergie du système est de réémettre une onde dont la structure spatiale est différente. Le signal est déformé, et amplifié dans certaines configurations du bord. L'onde renvoyée par l'écho ne ressemble plus à l'onde initiale !

Une seconde caractéristique étonnante de ces ondes est que longueur d'onde et période (ou fréquence) ne sont pas liées. L'angle par rapport à la verticale est inchangé, mais la longueur d'onde peut être fortement modifiée.

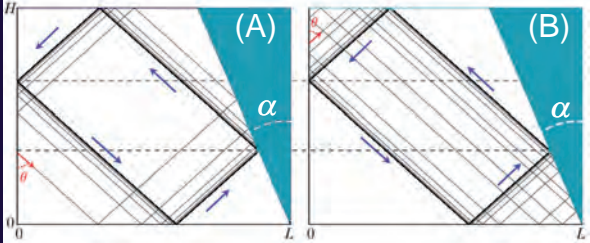


LES TRAJECTOIRES : DES MATHÉMATIQUES RICHES

Des expériences menées (entre autres) au laboratoire de physique de l'École normale supérieure de Lyon montrent que, dans une cavité fermée, cet écho étrange, qui se répète au fur et à mesure des rebonds de l'onde sur les bords, peut produire des motifs géométriques particuliers. Ainsi, dans la figure en haut de la page ci-contre, deux rayons sont émis (du bord gauche d'un domaine trapézoïdal de longueur L , de hauteur H , et de pente inclinée d'un angle α) et se propagent avec un angle constant θ .

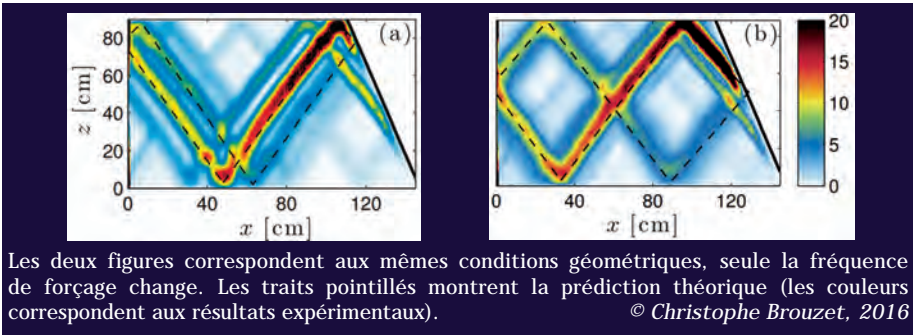
Dans les deux cas, les rayons semblent attirés par une trajectoire piège (un *attracteur*, représenté en noir sur la figure). Elle ne dépend que de la fréquence des ondes, et pas du profil du signal ou de la position où l'on injecte l'onde.

A gauche, le rayon, démarré de la flèche rouge, se propage d'abord vers le bas et tourne dans le sens trigonométrique. À droite, le rayon se propage d'abord vers le haut et suit un sens horaire, avant de tourner dans le sens trigonométrique.
 © Christophe Brouzet, 2016



En faisant cette construction géométrique sur un ordinateur, on découvre différents motifs géométriques. La figure ci-dessus correspond à $H/L = 2/3$ et $\alpha = 27^\circ$, pour un angle $\theta = 53^\circ$. Mais avec $\theta = 32^\circ, 74,8^\circ, 15^\circ$ ou 69° , on obtient des motifs différents, et pas moins intéressants... À vos ordinateurs !

Les trajectoires des ondes internes ressemblent donc à celles sur un billard dont on aurait modifié la loi de réflexion. Cette prédiction géométrique est conforme aux mesures expérimentales reproduites ci-dessous. Une cuve d'eau salée stratifiée est soumise à un forçage à fréquence constante sur le bord gauche, à l'aide d'un batteur. En suivant à l'aide d'un appareil photo la position de petites particules dispersées dans le fluide, on peut déterminer le champ de vitesse en tout point du fluide grâce à un traitement du signal approprié.



Le fait qu'il existe un attracteur est très intrigant. Cela semble contredire la possibilité pour l'onde de prendre le chemin inverse (propriété de renversement temporel). Les physiciens ont proposé des modèles simplifiés pour expliquer ce phénomène, et parviennent à le reproduire parfaitement grâce à des simulations numériques ou des expériences. Mais certains points restent mal compris, ce qui ouvre un formidable terrain de jeu pour les mathématiciens !

Le but du jeu est simple à : comprendre l'apparition de ces motifs géométriques sans faire d'hypothèse simplificatrice sur la dynamique du fluide. Une première difficulté vient du fait que les ondes ne se «promènent pas toutes seules». Même si l'on excite une fréquence donnée, il se développe des paquets d'ondes à toutes les fréquences voisines. Il est alors délicat d'isoler une seule onde, encore plus d'identifier son écho. Le signal est brouillé, il ne ressemble plus à une oscillation périodique, il faut donc trouver un moyen de le décomposer en des structures plus simples à analyser.

Une deuxième difficulté est liée à l'incompressibilité du fluide, qui induit une contrainte fortement non locale sur la dynamique. En d'autres termes, il n'est pas possible d'étudier le comportement près de l'attracteur indépendamment de ce qui se passe ailleurs dans la cavité (et en particulier près des bords) car tout est intriqué.

Finalement, le problème est beaucoup trop complexe pour espérer avoir des représentations explicites de sa solution. Mais en combinant de la géométrie, de la dynamique et des outils fins de la théorie des opérateurs, on parvient (dans certains cas simples) à caractériser précisément les singularités de la solution, c'est-à-dire la façon dont l'énergie s'accumule au fur et à mesure du temps au voisinage de l'attracteur.

Comprendre de façon fine les ondes et prédire leur comportement reste un défi très actuel pour les océanographes, les physiciens et les mathématiciens. Les systèmes naturels sont plus complexes que les expériences de laboratoire. En trois dimensions, peut-on encore mettre en évidence l'apparition de motifs géométriques? et les prédire théoriquement? Ces motifs sont liés à la géométrie du bassin et à la fréquence d'excitation. Cela appelle une exploration plus systématique des propriétés mathématiques, appelées *propriétés spectrales*, de ces systèmes.

Par ailleurs, le modèle utilisé pour étudier ces phénomènes repose sur l'hypothèse que les fluctuations de densité restent «petites». Mais il prédit une concentration de l'énergie sur les attracteurs, ce qui signifie qu'à ces endroits l'amplitude des variations de densité devient «grande». Il est donc important de comprendre quand la théorie cesse d'être valide et comment on peut en repousser les limites!

L.S.—R. & T.D.

COMMENT DÉGUSTER UN BON BROWNIE

ROGER MANSUY

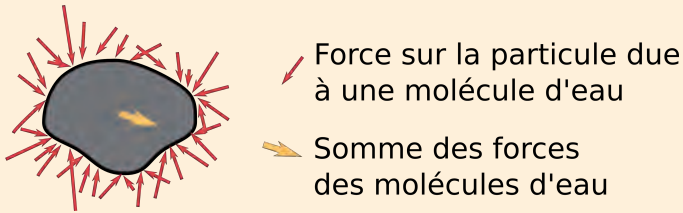
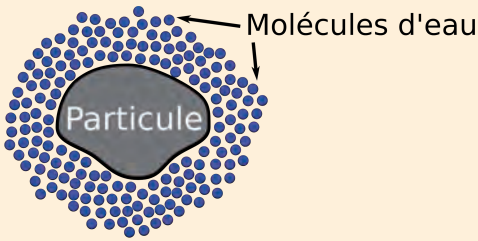
Enseignant

Quiconque fait des études scientifiques déguste un jour des brownies et croise, à un moment donné, le mouvement brownien. Morceau de choix pour tous les futurs mathématiciens, il apparaît aussi sur la table des apprentis physiciens, des biologistes en herbe et dans bien d'autres cursus. Mais lorsqu'il s'agit de définir un « bon » mouvement brownien, il y a autant de discussions que sur la recette d'un cassoulet traditionnel. Pour faire avancer le débat, observons comment le brownien a pu être mis à toutes les sauces.

DES BOTANISTES, DES PLANTES ET DES GRAINS DE POLLEN

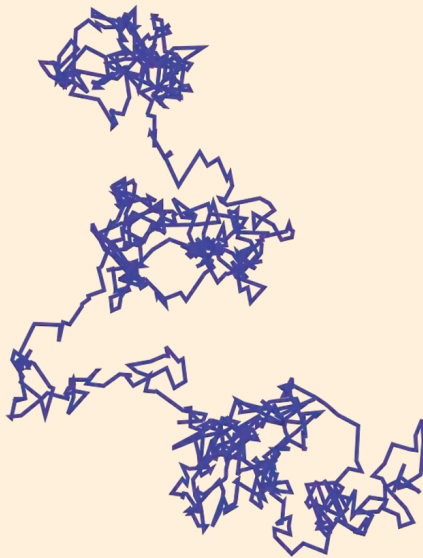
Dans la quête de l'authentique, il faut souvent remonter à des sources lointaines et se référer à des personnalités qui font autorité. Celles qui peuvent légitimement se prévaloir du canal historique sont des spécialistes... des plantes. Le mouvement brownien porte d'ailleurs le nom d'un botaniste britannique, Robert Brown (1773–1858), qui, selon la légende, est le premier à observer et étudier, en 1827, le mouvement de petites « particules oblongues » à l'intérieur des grains du pollen d'une espèce ramenée d'une lointaine expédition. Si les hypothèses émises sur la nature de ces objets et la raison de leur mouvement peuvent sembler douteuses de nos jours, il n'en reste pas moins que c'est grâce à un microscope que l'on observe et étudie pour la première fois le mouvement devenu désormais « brownien ».

Soyons honnête : le mouvement existait déjà bien avant Brown ! La postérité aurait pu retenir d'autres découvreurs, comme le Français Adolphe Brongniart (1801–1876), également botaniste (et petit-fils de l'architecte de la bourse de Paris), qui l'avait observé dès 1826. On consolera notre déception patriotique en remarquant qu'il est plus facile de prononcer « mouvement brownien » que « mouvement brongnien ».



Les molécules en agitation autour de la particule (par exemple plongée dans l'eau) appliquent des forces aléatoires, dont la somme se traduit par un déplacement de la particule.

© Nicolas Bruot, 2017



Trajectoire d'une particule soumise à un mouvement Brownien

© PAR, 2010

À la fin du XIX^e siècle, on dispose d'une description du mouvement : grâce aux naturalistes, le phénomène sort de la phase de pure observation ; on peut commencer à faire des modèles pour l'expliquer. Comme il s'agit d'un mouvement, on convoque les spécialistes de la mécanique : habitués à expliquer les billes qui tombent et les lunes qui tournent, les physiciens ne peuvent qu'être excités par ce mouvement très irrégulier, voire complètement erratique.

Albert Einstein (1879–1955) est l’auteur en 1905 du premier modèle de ce mouvement. Il l’obtient en partant de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur dans les fluides (autrement dit, la vision macroscopique de la thermodynamique), donc des chocs. Chacun de ces petits chocs réoriente la particule que l’on observe et, comme ils sont nombreux, la trajectoire observée change sans arrêt de direction.

D’autres scientifiques arrivent simultanément au même modèle, comme le Polonais Marian von Smoluchowski (1872–1917), ou proposent une description différente mais équivalente, comme le Français Paul Langevin (1872–1946). Ce dernier, plutôt que de partir du concept de chaleur, écrit le bilan des forces auxquelles est soumise une particule (le fameux principe fondamental de la dynamique).

Bref, avec les physiciens, on dispose désormais d’un modèle théorique précis. Il n’est plus question d’observer le mouvement au microscope. Enfin, presque : le modèle prédisant des valeurs pour certaines mesures, comme la distance moyenne parcourue en fonction du temps, il y aura des projets pour corroborer les hypothèses ! Jean Perrin (1870–1942) parviendra notamment à effectuer les mesures expérimentales délicates qui confirmeront l’existence d’atomes et permettront le calcul précis du nombre d’Avogadro. Pour cela, il recevra le prix Nobel de physique en 1926.

LES MATHÉMATIENS INTRODUISENT LES BONS OUTILS...

Bons derniers à apparaître dans notre panorama historique, les mathématiciens vont se rattraper à partir des années 1920. Car l’objet d’étude des biologistes et des physiciens conserve une limitation physique : si l’on regarde de très près, la trajectoire de la particule devient régulière sur des temps très courts (en effet, si elles sont très fréquentes, les collisions moléculaires ne sont pas permanentes). À de très petites échelles, le mouvement devient « plus lisse ».

Une description mathématique devrait pouvoir permettre de s’affranchir de ce phénomène et de garder l’irrégularité, même en « zoomant ». C’est à partir de cette idée que l’Américain Norbert Wiener (1894–1964) va introduire mathématiquement le mouvement brownien comme le « tirage au sort » d’une trajectoire « acceptable ». Plus précisément, cette fonction aléatoire

fondamentale est choisie sur l'ensemble des fonctions continues (physiquement, la particule ne se téléporte pas) mais nulle part dérivables (intuitivement, la trajectoire s'avère irrégulière à toute échelle), selon ce que l'on appelle la *mesure de Wiener*.

De notre côté de l'Atlantique, Paul Lévy (1886–1971), alors professeur à l'École polytechnique, remarque en 1933 que ce processus vérifie la *propriété de martingale*. Issue de la théorie des jeux, cette dernière indique que si l'on doit prédire la position de la particule au temps futur t sachant tout ce qui s'est passé jusqu'au temps présent $s < t$, on ne peut dire mieux que de conserver la position actuelle.



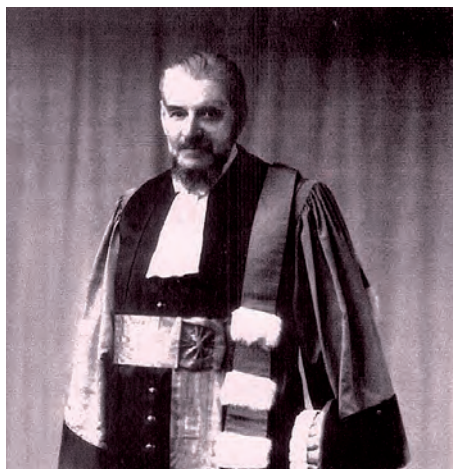
Kiyoshi Ito (1915–2008).
© Eugene Dynkin, 1985

Cette propriété qui ne paie pas de mine va s'avérer déterminante : elle servira au Japonais Kiyoshi Ito pour définir pendant les années 1940 et 1950 une nouvelle intégrale, désormais appelée en sa mémoire *intégrale d'Ito*, puis à faire de nombreux calculs sur ce mouvement (et sur de nombreux autres processus de diffusion qui en découlent).

... QUE LES FINANCIERS PRENNENT POUR ARGENT COMPTANT

Pourquoi vouloir faire tant de calculs sur le mouvement brownien et pas se contenter d'apprécier sa majestueuse danse ? C'est le moment de ressortir un acteur jusqu'ici oublié : Louis Bachelier, élève d'Henri Poincaré et auteur au début du XX^e siècle d'une thèse intitulée *Théorie de la spéculation*. Ce mémoire indique comment le mouvement brownien peut servir à modéliser des données financières. Si le travail n'a pas été apprécié

à sa juste valeur à l'époque, il est le point de départ de nombreuses modélisations plus récentes. Par exemple, le fameux modèle Black–Scholes utilise ces idées afin de calculer des prix raisonnables pour certains contrats financiers, et de répondre à des questions d'assurance ou de finance quantitative (comme «*combien dois-je payer pour m'assurer de pouvoir vendre mon action à tel prix l'an prochain ?* »).



Louis Bachelier (1870–1946).
© Presses universitaires
franc-comtoises, 2002

Il y a quelques années, le grand spécialiste du monde brownien Marc Yor et son étudiant David Baker ont discuté de la pertinence de ces modèles. Leur conclusion est que l'hypothèse brownienne permet de faire des calculs, mais ne colle pas parfaitement à la réalité des flux boursiers ! Il faut donc être prudent sur cet usage.

Si certains mathématiciens ont construit et manipulé le mouvement brownien à la suite de Wiener, Lévy et Ito, d'autres ont retrouvé cet objet dans un contexte différent, celui des marches aléatoires. Repartons d'une particule et imaginons cette fois-ci qu'à chaque instant elle se déplace d'un « pas » au hasard dans l'une des directions (haut, bas, gauche, droite, devant, derrière). Une trajectoire pourrait ainsi commencer par haut, haut, bas, bas, gauche, droite, gauche, droite (on est revenu au point de départ)... et chaque nouveau pas est choisi indépendamment des précédents.



Marc Yor (1949–2014).
© Murad Taqqu, 2009

HoloMath et la réalité augmentée

En tant que béotien, on peut toujours rêver devant le grain de poussière dans un rayon de lumière ou, beaucoup plus ambitieux, essayer de refaire par soi-même l'expérience de Robert Brown, minutieusement reproduite par Brian Ford en 1992.

Une autre possibilité arrivera bientôt avec le développement d'une activité de réalité augmentée appelée HoloMath par l'Institut Henri-Poincaré et ses partenaires pour la future Maison des mathématiques : des hologrammes tridimensionnels permettront en effet de jouer avec ces trajectoires, offrant à coup sûr un nouveau moyen de goûter au brownien !

On obtient ainsi un mouvement aléatoire avec des « petits » déplacements perpendiculaires les uns aux autres, alors que le mouvement qu'observaient botanistes et physiciens semblait partir dans toutes les directions. Le théorème amusant, appelé *théorème de Donsker* après Monroe Donsker (1925–1991), est que si l'on redimensionne judicieusement cette trajectoire en diminuant la durée des instants et la taille des pas de manière coordonnée, alors la marche aléatoire se rapproche du mouvement brownien authentique !

S'il y a bien un unique objet appelé « mouvement brownien », les moyens de l'appréhender sont variés et l'incessant aller-retour historique entre théorie et expérience montre la richesse du sujet. Selon que l'on colle à une description du réel ou que l'on cherche à effectuer des calculs, on n'utilise pas les mêmes propriétés. Cela a beau être le même gâteau, des convives différents vont y trouver des choses différentes : l'un s'intéresse davantage au moelleux de la texture, un autre à la présence d'une note de noisette... Peu importe le couteau, pourvu qu'on ait du gâteau !

R.M.

Pour en savoir (un peu) plus :

Le mouvement brownien, divers et ondoyant. Bertrand Duplantier, séminaire Bourbaphy, 2005, disponible en ligne.

Louis Bachelier. Laurent Carraro et Pierre Crépel, Images des mathématiques, 2006, disponible en ligne.

Le mouvement brownien : quelques développements de 1950 à 1995. Marc Yor, in *Development of Mathematics 1950–2000*, Jean-Paul Pier (éditeur), Birkhäuser Verlag 2000.

LA « DATA VIZ » : DONNEZ VIE À VOS DONNÉES !

ARNAUD SALLABERRY

Maître de conférences à l'Université Paul Valéry,
Montpellier 3

PASCAL PONCELET

Professeur à l'Université de Montpellier

De la carte thématique teintée, hachurée ou coloriée d'un livre de géographie (on parle de carte *choroplèthe*) à l'infographie d'un journal d'information, du plan de métro au diagramme statistique, la visualisation de données, appelée aussi la *data visualisation* ou *dataviz* en anglais, a envahi notre quotidien. Son objectif ? Améliorer la lecture de données numériques, textuelles ou topologiques de façon à en tirer rapidement de l'information. Comme nous le dit en effet l'expression, « *a picture is worth ten thousand words* » (une image vaut mieux que dix mille mots)...

L'ÉMERGENCE DES CARTES, DÉJÀ AVANT NOTRE ÈRE

Bien que l'on puisse faire remonter la naissance de la représentation graphique aux peintures préhistoriques ou aux premiers systèmes d'écritures basés sur des pictogrammes (comme les hiéroglyphes), c'est au cinquième siècle avant notre ère que l'on voit apparaître les premières visualisations de données, en l'occurrence de données géographiques. Certes, des cartes locales avaient déjà été produites, mais c'est durant ce siècle que des cartes dont l'objectif n'est plus simplement de se déplacer mais de transmettre des informations globales sont réalisées. La carte d'Anaximandre, décrite par Marcel Conche dans son livre *Anaximandre : Fragments et témoignages* (Presses universitaires de France, 1991), est à cet égard un exemple frappant. Un autre spécimen bien connu de cette époque est la carte de Babylone, conservée au British Museum.



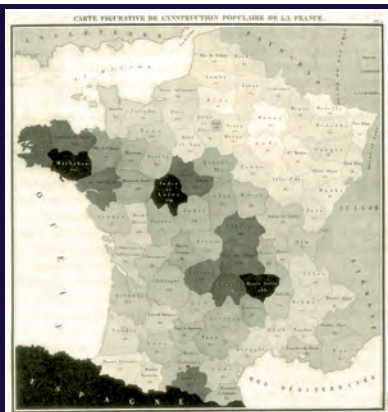
Carte babylonienne du monde.
© British Museum 92687

La représentation de données géographiques va ensuite se développer jusqu'à nos jours, comme l'illustre l'impressionnante carte topographique réalisée par la famille Cassini au XVIII^e siècle. La première carte choroplèthe est quant à elle produite en 1826 par le mathématicien, ingénieur et homme politique français Charles Dupin. Elle montre la distribution et l'intensité de l'illettrisme en France. Pour la première fois, des données numériques géo-localisées sont représentées sur une visualisation.



La carte des Cassini.

© *Connaissance des temps*, 1763, BNF



L'illettrisme en France.

© Charles Dupin, 1826

LES ARBRES, DIAGRAMMES ET AUTRES GRAPHIQUES

Le Moyen Âge voit l'apparition des premières visualisations de données non géographiques. C'est le cas par exemple des *diagrammes en arcs*, dans lesquels des relations entre éléments sont représentées à l'aide d'arcs qui les relient. C'est le cas aussi des *arbres* (voir des exemples à l'adresse <http://treevis.net>), qui connaîtront un énorme succès pour la représentation des généalogies et des hiérarchies (pensez à l'organigramme d'une société). Les *lignes de temps* (voir sur <https://vcg.informatik.uni-rostock.de/~ct/timeviz/timeviz.html>) font également leur apparition pour la représentation de données chronologiques. Elles sont maintenant déclinées en *frises historiques*, en *diagrammes de Gantt*, en *séries chronologiques*...

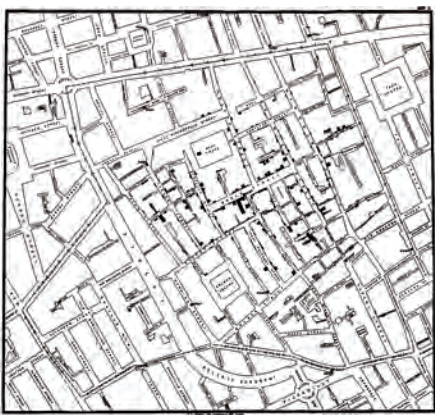
Un pas décisif dans la visualisation de données statistiques est réalisé par William Playfair à la fin du XVIII^e siècle. Il introduit trois grands types de diagrammes : la série chronologique, l'histogramme et le *diagramme circulaire*, aussi appelé *camembert*.

Extrait de la carte figurative dressée par Monsieur Minard en 1869, des pertes successives en hommes de l'armée française dans la campagne de Russie 1812-1813



L'exemple le plus emblématique de visualisation est sans doute la carte de la campagne de Russie de Napoléon réalisée par Charles Joseph Minard au XIX^e siècle. Il faut la voir en grand format ! Pas moins de six types de données y sont représentées en une carte concise et facilement mémorisable : le fond représente les données géographiques, une bande représente le chemin pris par la grande armée, son épaisseur représente l'importance de l'armée en nombre d'hommes, sa couleur représente la direction, une ligne en pointillés représente les températures lors de la retraite.
 © Charles Joseph Minard, 1869

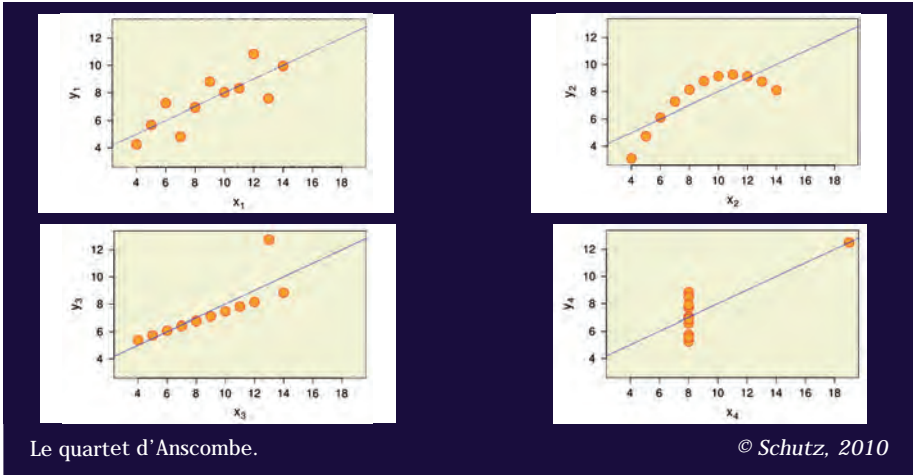
Un autre exemple marquant de la visualisation a été réalisé par le médecin britannique John Snow en 1855. Il s'agit d'une carte de Londres sur laquelle ont été placés des points noirs symbolisant les personnes mortes lors d'un épisode de choléra. En observant la densité de points, il est facile de trouver le puits infecté qui est à l'origine de l'épidémie. La visualisation montre ici sa capacité à non seulement permettre d'accéder à des données (« tant de morts à telle adresse ») mais aussi à en extraire de nouvelles informations (« le puits infecté se trouve à tel endroit »).



Morts lors d'une épidémie de choléra à Londres en 1854.
 © John Snow, 1854

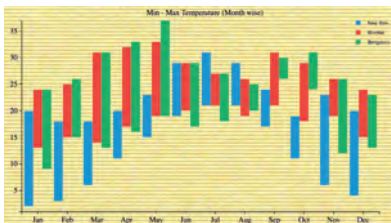
Cette potentialité qu'ont les graphiques à nous montrer de l'information initialement cachée rappelle les objectifs des approches statistiques. La complémentarité des deux domaines a très bien été illustrée par le statisticien britannique Francis Anscombe en 1973 avec son célèbre *quartet*. Celui-ci est composé de quatre séries de valeurs *x* et *y* ayant des propriétés statistiques « très proches » (moyennes, variances, coefficients de corrélation...).

Or, si l'on positionne les éléments dans le plan, on observe que les quatre séries sont très différentes ! Cet exemple célèbre démontre que la visualisation est un outil complémentaire à la statistique dans la mesure où elle peut aider à découvrir des informations que l'on ne sait pas forcément calculer.



AVEC LE XX^E SIÈCLE, LA SÉMIOLOGIE GRAPHIQUE

Malgré les nombreuses visualisations proposées jusqu'alors, on ne peut pas encore parler au début du XX^e siècle de « langage graphique », c'est-à-dire de système cohérent comportant des signes définis et des règles syntaxiques pour les combiner. C'est en 1967 que Jacques Bertin révolutionne le monde de la visualisation dans son célèbre ouvrage *Sémiologie graphique* (Mouton et Gauthier-Villars) en posant les fondements d'un tel système. Selon lui, une visualisation se compose d'objets graphiques caractérisés par leur *type d'implantation* : ponctuelle (comme une ville sur une carte), linéaire (par exemple une route entre deux villes) ou zonale (un pays).



Températures annuelles de trois villes (la couleur des barres représente les villes, leur longueur la différence entre les températures minimale et maximale).

© Mike Bostock, 2011, <https://d3js.org>

d'implantation : ponctuelle (comme une ville sur une carte), linéaire (par exemple une route entre deux villes) ou zonale (un pays).

Ces éléments sont disposés sur un plan selon un *type d'imposition* défini par la nature des données à représenter : les diagrammes (camemberts, diagrammes en barres, courbes...) permettent de représenter

des données tabulaires, les graphes permettent de représenter des réseaux, les cartes permettent de représenter des données géographiques.



Enfin, les objets graphiques prennent différents aspects (forme, couleur, taille, orientation...), appelés *variables visuelles*, qui reflètent des valeurs contenues dans les données initiales.

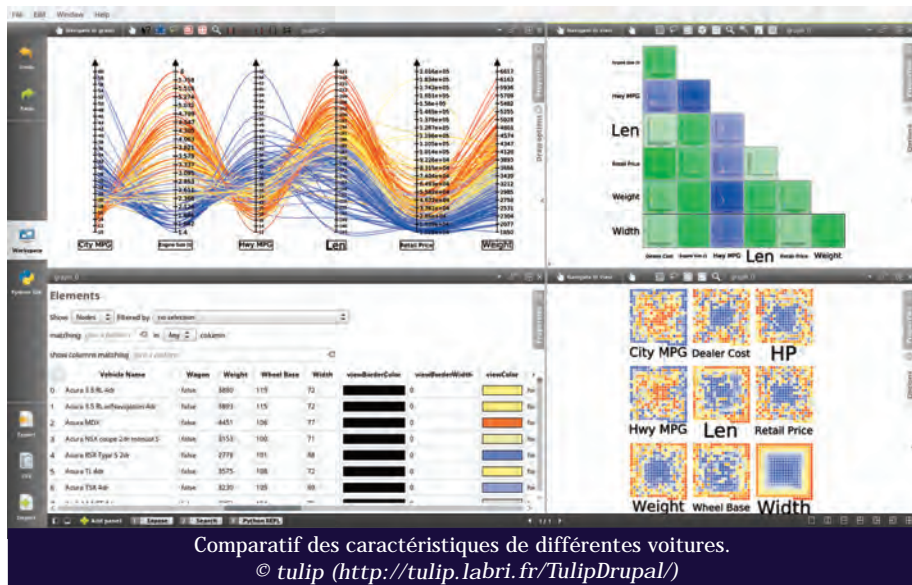
En définissant ainsi les fondations d'une véritable science, Jacques Bertin a posé les bases formelles qui ont alimenté les recherches en cartographie et en visualisation tout au long du XX^e siècle.

AU CENTRE DU PROCESSUS : L'UTILISATEUR

L'avènement de l'informatique, et son utilisation en visualisation à partir des années 1990, marquent une étape cruciale du domaine. Les ordinateurs présentent deux atouts majeurs qui permettent cette révolution : une quantité de données prodigieuse à la portée de tous, en particulier grâce à l'émergence d'Internet, et une capacité de calcul et de rendu permettant de traiter ces gros volumes de données et de générer automatiquement des représentations graphiques interactives. Des types de graphiques innovants et de nouvelles variables visuelles font leur apparition. Ils sont complétés par des techniques d'interaction ouvrant la voie à de véritables outils d'exploration de larges volumes de données.

Parallèlement, l'utilisateur est replacé au centre du processus de conception. Une visualisation correcte des données n'est plus considérée comme intéressante si elle ne lui permet pas d'en tirer des informations.

Dans ce contexte, les sciences cognitives jouent un rôle primordial en explicitant les règles régissant notre système perceptif. Des expérimentations se multiplient afin de définir l'efficacité des différentes variables visuelles. Par exemple, on est capable de dire si la longueur d'une barre d'un diagramme est deux fois plus importante que la longueur d'une autre barre, alors que ce type de comparaison est très approximatif quand il s'agit d'aires. Pour représenter des données numériques, mieux vaut utiliser des longueurs que des aires !



Le concepteur est amené à se poser trois questions. *Quoi ?* (Quels sont les types de données à visualiser : graphes, textes, données géographiques ?) *Pourquoi ?* (Quelles sont les tâches que l'utilisateur aura à accomplir avec la visualisation ? Pour un même jeu de données mais des tâches différentes, une seule visualisation n'est pas forcément adaptée.) *Comment ?* (Il existe une multitude d'encodages visuels et de techniques d'interaction.) Selon les réponses, le concepteur doit sélectionner les approches les plus appropriées. Le livre *Visualization Analysis and Design* de Tamara Munzner (A.K. Peters et CRC Press, 2014) recense les principaux types de données, de tâches, de représentations et de systèmes d'interaction utilisés à ce jour, et constitue donc une excellente introduction aux outils mis à la disposition des concepteurs de visualisations...

ou des curieux intéressés par le domaine !

A.S. & P.P.

DANSER LES MATHS : LA CHORÉGRAPHIE, DE LA SYMÉTRIE AUX ALGORITHMES

GAËL OCTAVIA

Fondation Sciences Mathématiques de Paris

Danses de cour écossaises sur les rayons d'un cercle, rondes des sardanes catalanes, quadrille corse... L'omniprésence, dans les danses folkloriques, de figures géométriques élémentaires comme le cercle ou le carré ne fait aucun doute. « *Sur l'idée du cercle, c'est toutes les danses traditionnelles qui sont conçues* », rappelle Véronique Defranoux, ancienne danseuse et assistante du chorégraphe Philippe Découflé. Elle ajoute que « *le carré est venu briser l'évidence du cercle* ».

Festival de sardane à Céret
en 2017.

© Droits réservés



LE BALLET CLASSIQUE : AU ROYAUME DE LA SYMÉTRIE

Héritier de ces traditions populaires et des divertissements de cours italiens de la Renaissance (le balletto), le ballet classique acquiert en France ses lettres de noblesse sous Louis XIV – en même temps que le jardin à la française –, où Pierre Beauchamp, premier directeur de la danse de l'Académie d'opéra (l'ancêtre de l'Opéra national de Paris), commence à en établir la codification. Il est incontestablement le royaume de la symétrie. Cela va de la disposition du groupe de danseurs sur le plateau à l'exécution du mouvement – à l'identique ou en miroir, avec des effets de décalage

(ou canon) que l'on peut facilement ramener à des transformations géométriques bien connues. La hiérarchisation des danseurs, avec les solistes en avant et le corps de ballet en toile de fond, contribue à créer un effet de profondeur de champ, de perspective.



Représentation du Lac des cygnes en 2007.
© Paata Vardanashvili

Le rôle des mathématiques dans la danse classique (et dans la danse moderne, qui conserve beaucoup de ses fondamentaux) n'est pas qu'esthétique, elle est aussi pratique, puisque l'exécution de certains mouvements – un grand jeté, par exemple, où le centre de gravité du corps décrit une parabole – exige également que le danseur, d'une certaine manière, «*fasse des maths sans le savoir*»

pour être optimal. Véronique Defranoux résume les choses ainsi : «*Les danseurs ont un imaginaire rempli d'images géométriques, qui va nourrir leur phrasé corporel.*»

AU XX^E SIÈCLE, LA RÉVOLUTION MERCE CUNNINGHAM

La danse contemporaine vient remettre en question ces codes classiques. La symétrie peut être rompue. L'effet de perspective, cassé. Sur le plateau, les danseurs ne forment plus nécessairement un corps exécutant à peu près les mêmes mouvements en arrière plan d'une étoile qui serait le centre de la figure, mais semblent plutôt autant de solistes dessinant une figure éclatée, au centre démultiplié.

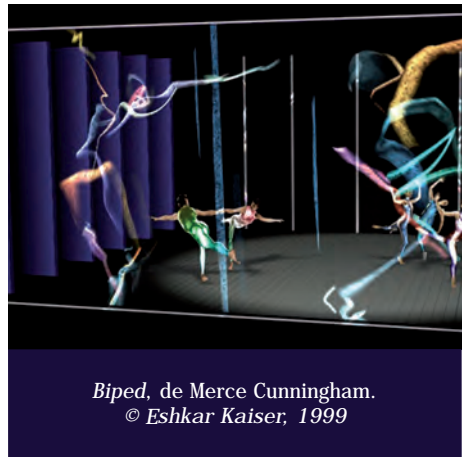
La danse contemporaine sonne-t-elle pour autant le glas du compagnonnage entre danse et mathématiques ? Rien n'est moins sûr, comme on le voit par exemple avec le travail de Merce Cunningham.

Parfois surnommé l'Einstein de la danse, l'Américain Merce Cunningham (1919–2009) développe à partir des années cinquante une recherche chorégraphique considérée comme révolutionnaire. Il est l'un des premiers à casser les codes de la frontalité, du danseur centre de l'univers chorégraphique, de la soumission de la danse à la musique ou encore de la hiérarchie dans le corps aussi bien que dans l'espace (ainsi, chaque partie du corps est

importante et tous les points de l'espace ont la même valeur). Merce Cunningham sera également l'un des premiers chorégraphes à faire usage de la vidéo, ouvrant la voie à une intrusion de la technologie de manière plus large dans la danse.

L'un des aspects les plus remarquables de la révolution Cunningham est l'utilisation du hasard. Compagnon du musicien John Cage, il mène pour la danse une expérimentation similaire à celle de ce dernier en musique. Il inaugure cette idée dès 1951 avec sa chorégraphie intitulée *16 danses pour soliste et compagnie de trois*, où l'ordre des parties dansées est déterminé par un jeté de pièces. Il réitérera ce procédé dans d'autres œuvres où l'ordre des séquences sera tiré au sort, l'aléatoire étant, d'une certaine façon, également chorégraphe, exigeant du danseur une disponibilité mentale et une adaptabilité considérables. Moins émotionnelle que la danse classique ou moderne, la danse de Merce Cunningham est vue comme plus cérébrale et abstraite... Des qualificatifs que les mathématiques ne renieraient pas ! C'est, pour le danseur comme pour le spectateur, un véritable exercice intellectuel.

La dernière expression du tempérament novateur de Merce Cunningham fut sa collaboration avec des chercheurs en informatique de l'université canadienne Simon-Fraser pour créer un logiciel d'écriture et de création chorégraphique intitulé LifeForms. Il l'utilisera notamment en 1999 pour sa création *Biped*.



WILLIAM FORSYTHE : **LES MATHS CRÉATRICES DE MOUVEMENT**

Si William Forsythe, de la génération d'après Cunningham (il est né en 1949), peut à première vue sembler moins avant-gardiste (on peut qualifier son style de « néoclassique »), il développe sur son art une réflexion riche et originale, nourrie de ses nombreux autres centres d'intérêts, comme les sciences ou la philosophie. Dans un entretien accordé en 1998 à l'artiste multimédia Paul Kaiser, il explique comment il se sert des mathématiques

dans sa recherche chorégraphique. Le point de départ de sa démarche est présenté comme avant tout pratique, avec pour objectif de faciliter, d'optimiser la création de nouveaux mouvements, compte tenu des contraintes de temps de l'artiste. Le chorégraphe travaillait alors essentiellement avec des danseurs de formation classique, donc imprégnés de géométrie. « *J'ai analysé quelle était leur connaissance de l'espace et de leur propre corps* » a-t-il confié à Paul Kaiser. « *J'ai réalisé qu'on leur avait essentiellement appris à suivre des lignes et des formes dans l'espace.* » Ce sont donc des points, des lignes, des surfaces, des volumes, des formes géométriques que William Forsythe va dessiner dans l'espace et que le danseur devra visualiser à son tour pour les suivre, les relier, les tracer ou au contraire les éviter, les contourner et ainsi exécuter le mouvement attendu. Le corps du danseur constitue lui-même un jeu de points (coude, poignet, épaule, cheville, par exemple) ou de lignes (avant-bras, cuisse) qu'il va s'astreindre à mouvoir suivant un certain nombre de contraintes de symétrie – comme, finalement, dans le ballet classique, admet le chorégraphe, mais avec une démultiplication des possibilités. Ainsi, de simples lignes ou formes pliées, dépliées, courbées, transformées à l'aide de rotations, de translations, de réfractions... permettront de générer une foule de nouveaux mouvements.

Pour Forsythe, il s'agit d'une source quasiment inépuisable, dont il

affirme le caractère quasi automatique en faisant une analogie entre sa méthode et la programmation informatique, le danseur pouvant être vu comme un logiciel exécutant un algorithme (la suite d'instructions chorégraphiques) dont le chorégraphe est le programmeur. Une série de vidéos intitulées *Improvisation Technologies* et disponibles sur Internet permet, grâce à des dessins en incrustation, de visualiser cette méthode de création.

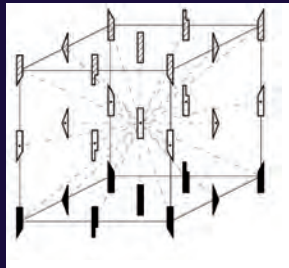


Improvisation Technologies,
William Forsythe.
© Angela Sterling

La jeune compagnie Adrien M & Claire B, fondée par l'informaticien et artiste Adrien Mondot et par la danseuse Claire Bardainne, poursuit cette démarche grâce à l'outil de création numérique eMotion, dédié à l'écriture du mouvement.

Transcrire le mouvement

Si tout le monde a déjà vu une partition de musique une fois dans sa vie, on sait moins comment se transcrit la chorégraphie. Il existe en réalité plusieurs systèmes de notation du mouvement. Le plus célèbre est peut-être la *cinétopographie Laban*, inventée par le danseur, chorégraphe et théoricien de la danse hongrois Rudolf Laban (1879-1958) et publiée en 1928. On peut la résumer avec cette figure où les signes de direction - des petits polygones dont la forme indique la direction du mouvement : en avant, en arrière, à gauche, à droite, en place..., complétée par la couleur hachurée, blanche ou noire pour haut, niveau moyen ou bas - sont disposés sur un cube.

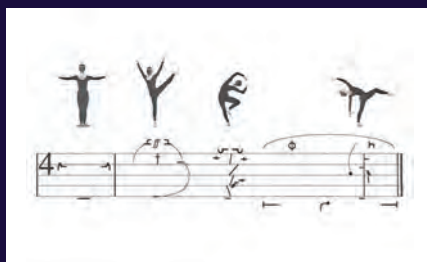


Les vingt-sept signes de la cinétopographie Laban.

© Raphaël Cottin

La *notation Benesh* ou *choréologie*, quant à elle, a l'originalité d'avoir été inventée par... un mathématicien, le Britannique Rudolf Benesh (1916-1975), dont l'épouse était danseuse au Sadler's Wells Theatre ! C'est sous son impulsion qu'il inventa son système de notation, publié en 1956. Celui-ci utilise des portées, comme en musique (Benesh avait également reçu une solide formation musicale). Chaque ligne représente un niveau du corps du danseur. Sur les lignes s'inscrivent des pictogrammes désignant les parties du corps, permettant de schématiser le danseur, sa position et donc son mouvement de manière minimaliste. Ce système de notation est utilisé par des chorégraphes de tout premier plan comme le Français Angelin Preljocaj ou l'Américain John Neumeier.

Au-delà de la danse, il a vocation à s'appliquer dans tout domaine intéressé au mouvement humain, y compris l'ergonomie ou la médecine.



La notation Benesh.

© Royal Academy of Dance, London

QUESTIONNER LE RAPPORT HOMME/MACHINE

Jean-Marc Matos est un chorégraphe atypique. Ingénieur diplômé de l'Institut national des sciences appliquées de Toulouse, il se tourne d'abord vers l'enseignement des mathématiques et de la physique, notamment au Venezuela. C'est à Caracas que sa route croise pour la première fois celle de la troupe de Merce Cunningham. Le travail du chorégraphe américain le

bouleverse : « *Il me semblait qu'il proposait une incarnation de données très scientifiques comme des équations, des calculs...* » C'est ainsi que Jean-Marc Matos découvre que « *la chorégraphie est porteuse d'un imaginaire scientifique* ». Il participe à divers ateliers dispensés par la troupe, puis s'envole pour les États-Unis. À New York, il continue à enseigner l'informatique tout en suivant en parallèle une formation aux techniques post-modernes auprès de Cunningham. « *C'était une époque où l'influence de la Judson Church était encore palpable* » explique-t-il, évoquant ce mouvement formé dans les années soixante, rassemblant des chorégraphes comme Lucinda Childs ou Trisha Brown – mais aussi des musiciens comme Philip Corner ou des plasticiens comme Yoko Ono – pour proposer une danse expérimentale, basée sur l'improvisation et réunissant parfois art et technologie.

En 1983, Jean-Marc Matos quitte New York et fonde à Toulouse sa propre compagnie, K. Danse, dont le nom est à la fois un jeu avec le mot « cadence » et une allusion au symbole K servant à nommer le corps en algèbre. La mise en parallèle de l'univers scientifique et technologique avec la danse est le cœur de sa création. Son écriture chorégraphique emprunte à des modèles, concepts, théories mathématiques ou physiques. Ainsi, une de ses créations s'inspire de la théorie des nœuds. Une autre, des chemins hamiltoniens. Sa réflexion ne concerne pas que la forme, « *l'architecture invisible de la chorégraphie* » comme il dit. C'est aussi un questionnement philosophique sur notre rapport à la science et aux technologies (comme notre récente dépendance au Smartphone).

La compagnie K. Danse dialogue régulièrement avec des scientifiques, comme les chercheurs de l'équipe Vortex de l'Institut de recherche en informatique de Toulouse. Il travaille également actuellement avec InfoMus, laboratoire italien basé à Gênes, sur une approche logicielle de capture et d'analyse du mouvement, « *avec pour objectif de pouvoir réaliser une analyse fine des qualités d'un mouvement, comme sa fragilité, ses moments de perte d'équilibre, etc.* », dans l'idée d'une interaction entre la machine et le danseur pour créer des moments chorégraphiques. « *Quel degré de poésie peut-on inventer avec des outils techniques ?* » interroge sans cesse Jean-Marc Matos à travers ses chorégraphies, qui redéfinissent aussi la fragile frontière entre l'homme et la machine.

ÉLISABETH BUSSER

Mathématicienne, rédactrice pour le magazine *Tangente*

Vibrations de l'air produisant le son, doigts courant sur un clavier, gammes ascendantes ou descendantes, arpèges, tessitures du plus bas au plus haut, tout en musique évoque le mouvement. Les mathématiques sont là pour le quantifier.

Le mot « mouvement » en musique évoque soit le *tempo*, c'est-à-dire la vitesse d'exécution d'une œuvre, soit les différentes parties d'une composition musicale. Symphonie et sonates ont par exemple trois ou quatre « mouvements » : rapide–lent–rapide, et parfois menuet. Le terme « mouvement » est donc bien ancré dans le vocabulaire musical, mais c'est plus dans le sens de « mobilité » que sont développés ici les aspects liés à la musique.

Un métronome mécanique.
© Wittner, modèle 811M



QUANTIFIER LE MOUVEMENT : LE RÔLE DU BALANCIER

Prenons le mouvement dans son sens premier : la vitesse d'exécution n'étant pas une constante universelle, il a bien fallu lui fixer des normes. Comment jouer une œuvre avec le « bon » tempo ? C'est par un mouvement de balancier que l'on a résolu ce problème du mouvement d'une l'œuvre. C'est le musicien et théoricien de la musique Étienne Loulié qui, en 1696, inventa le premier métronome gradué, le *chronomètre de Loulié*. Haut de deux mètres, composé d'un fil lesté qui se balance par mouvements tous de même durée, cette dernière ne dépendant pas de l'amplitude du battement

mais de la longueur du fil, ce premier « métronome » était muet : il fallait le surveiller pour connaître le tempo.

Le mécanisme s'est perfectionné par la suite, avec le métronome à battements sonores inventé par l'horloger néerlandais Dietrich Nikolaus Winkel en 1812 et breveté en 1816 par l'ingénieur bavarois Johann Nepomuk Mälzel. Il s'agit là d'un mouvement d'horlogerie à échappement, que l'on doit donc « remonter », muni d'un balancier gradué dont un contrepoids mobile permet de fixer la vitesse de battement. Les graduations indiquent la durée d'une noire : faire battre l'instrument à 120 signifie que la noire doit « tenir » en $1/120^e$ de minute, donc une demi-seconde. C'est devenu une habitude pour les compositeurs d'indiquer en début de partition généralement la durée d'une noire : les mouvements lents (*largo*, *lento*, *andante*, jusqu'à *moderato*) correspondent aux graduations du métronome allant de 40 à 120, les mouvements plus rapides (*allegro*, *presto*) vont jusqu'à 208. Des instruments électroniques miniaturisés, ou des métronomes sur ordinateur, ont aujourd'hui remplacé le métronome de Mälzel, mais le résultat est le même : ils battent la mesure et définissent donc la rapidité du mouvement de l'œuvre.

LA MARCHÉ DU CRABE ET LE CANON À L'ÉCREVISSE

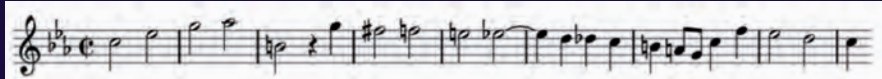
On doit à Jean-Sébastien Bach un bel exemple de mouvement musical « à contre-sens » dans le premier canon de l'*Offrande musicale* (BWV 1079, 1747). Le titre officiel de cette œuvre est canon à *cancrizans*, c'est-à-dire, en latin, en marche arrière, mais on l'appelle aussi, de manière plus imagée, le *canon du crabe*, ou parfois *canon à l'écrevisse*. La particularité de ces deux crustacés étant de se déplacer de guingois, c'est exactement le mouvement qu'évoque le mode de composition de cette œuvre musicale. L'histoire de ses origines permet de décoder la composition de cette œuvre « palindromique ».



La partition du canon à *cancrizans* de Jean-Sébastien Bach.

© Musikwissenschaftliche Studienbibliothek Peters, 1977

En 1747, invité à Postdam par Frédéric II de Prusse, entre autres flûtiste amateur, Jean-Sébastien Bach est prié d'improviser une fugue à trois voix sur un thème proposé par le roi.



Le thème royal.

© Benjamin Esham, 2007

Insatiable de musique, le roi demande au musicien de poursuivre sur une fugue à six voix, mais Bach demande quelques temps de réflexion. De retour à Leipzig, il développe le « thème royal » en une série de canons et de fugues, qu'il fait parvenir au souverain sous le nom d'*Offrande musicale*. Dans cette pièce, la partition écrite par Bach du canon 1, à deux voix, est codifiée par ses soins, selon une écriture dite *énigmatique*, et porte, sous la première voix, l'indication que la seconde voix doit être exactement la symétrique de la première. C'est dire que les exécutants avancent dans leur lecture, l'un du début à la fin, l'autre de la fin au début, en lisant les notes dans l'ordre inverse.

L'artiste géomètre Jos Leys en donne une interprétation toute dynamique : il plie la bande selon son axe médian horizontal et en fait un ruban de Möbius. Les musiciens n'auront plus qu'à suivre la partition en cheminant le long du ruban, l'un à l'endroit, l'autre à l'envers. La progression de cette lecture musicale (visible sur [youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU](https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU)) fait magnifiquement apparaître les deux mouvements contraires, qui contribuent, au-delà de l'aspect ludique de l'exécution, à la richesse de l'œuvre.

Le canon 1 de *Offrande musicale* de Bach sur un ruban de Möbius.

© *Mathematical Imagery*, Jos Leys
(www.josleys.com), 2014



PARCOURS MUSICAL : SAUTER D'UNE NOTE À L'AUTRE

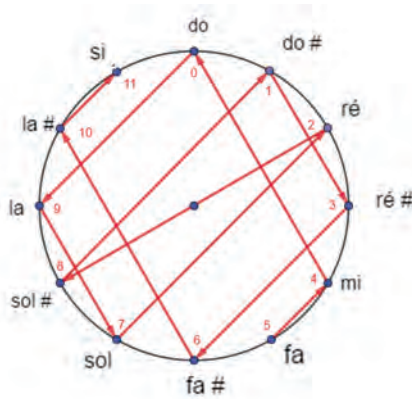
Se déplacer sur une partition musicale se fait bien sûr au gré des notes du compositeur, mais ce dernier suit parfois des règles cachées, qui vont régir notre mouvement. Ainsi, pour cette série musicale extraite de la *Suite lyrique* du compositeur autrichien Alban Berg, composée entre 1925 et 1926 et jouée pour la première fois en public en 1927, non seulement le compositeur

utilise une série dodécaphonique (elle comporte une fois et une seule les douze notes de la gamme chromatique), mais encore il en fait une série *tous-intervalles* (on y trouve chacun des douze intervalles de la gamme chromatique) : double qualification !



Cette promenade musicale tout au long de ce thème peut se traduire en un parcours géométrique. Désignons les douze notes par les nombres de 0 à 11, figurant chaque demi-ton entre les deux *do* à l'octave l'un de l'autre (0 pour *do*, 1 pour *do #*, 2 pour *ré*, 3 pour *ré #*, 4 pour *mi*, 5 pour *fa*, 6 pour *fa #*, 7 pour *sol*, 8 pour *sol #*, 9 pour *la*, 10 pour *la #*, 11 pour *si*). On les

représente traditionnellement autour d'un cercle. Le parcours musical sera, lui, représenté par les flèches rouges et s'énoncera, chiffré : **5-4-0-9-7-2-8-1-3-6-10-11**. Elles auront pour longueurs (on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre) : **11-8-9-10-7-6-5-2-3-4-1**.



Déplacement sur le thème d'Alban Berg.
© É. Busser, 2018

C'est ainsi que l'on aura parcouru les douze étapes non seulement sans rater une marche, mais aussi par sauts de toutes les longueurs possibles, de 1 à 11.

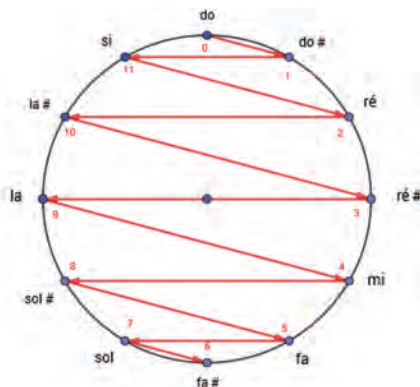
Alban Berg n'est pas l'inventeur d'une telle progression : en 1921 déjà, le compositeur Fritz Heinrich Klein, élève d'Arnold Schönberg, puis de Berg, avait déjà écrit une œuvre, *la Machine opus 1*, où il utilisait des séries tous-intervalles. Le compositeur italien contemporain Luigi Nono, dans *Il canto Sospeso*, l'Américain Milton Babbitt, spécialiste de musique électronique, dans *Three compositions* pour piano, ont eux aussi utilisé cette forme de composition.

Comment construire une série tous-intervalles ? Rien de plus simple si le nombre de notes est pair. On peut en effet toujours trouver de telles séries pour une gamme de $2n$ notes, puisque la somme totale des longueurs des intervalles, de 1 à $2n - 1$, est $n \times (2n - 1)$. C'est comme si l'on avait parcouru $2n - 1$ intervalles de longueur n . En partant de 0, on arrivera donc à n .

Par contre, si le nombre de notes est impair, la dernière note de la série pourrait être la même que la première. Pour une série de douze notes par exemple, il suffira de partir de 0 et d'ajouter successivement les intervalles 1, -2, 3, -4, 5... selon le schéma ci-dessous. On obtient ainsi la série des notes **0-1-11-2-10-7-9-4-8-5-7-6** correspondant aux intervalles de longueur **1-10-3-8-5-6-7-4-9-2-11**.

Cette dernière série possède même une particularité, celle d'être symétrique, dans le sens que les intervalles de rang p et $12 - p$ ont pour somme... précisément 12. On retrouve un exemple d'une telle symétrie en 1961 chez le compositeur autrichien Hanns Jelinek, avec la série suivante.

Ce sont là des cas très particuliers, mais une question demeure : si l'on vient d'exhiber plusieurs séries tous-intervalles différentes sur une gamme de douze tons, combien y en a-t-il en tout ? À partir de 1936, plusieurs compositeurs se sont intéressés à la question. Ce sont les travaux de l'Austro-Américain Ernst Krenek (1900-1991) puis du Français André Riotte (1928-2011) qui ont permis d'en faire le décompte précis et d'établir la structure algébrique de ces séries musicales singulières définissant sur douze notes des mouvements très précis. Il existe ainsi trois



Une série tous-intervalles symétrique.
© É. Busser, 2018

mille huit cent cinquante-six telles séries, dont cent soixante-seize sont symétriques. Un catalogue complet en a été dressé. Il offre en particulier

L'exemple symétrique de Hanns Jelinek. © Universal Edition, 1961

la possibilité de prendre conscience de la structure de l'ensemble de ces séries, que l'on peut obtenir à partir d'un nombre limité d'entre elles par huit opérations élémentaires dont l'ensemble est doté d'une structure algébrique de groupe.

Pour mieux comprendre quels sont les mouvements en jeu, prenons un exemple.

- **0-1-3-7-2-5-11-10-8-4-9-6** est la séquence (S) de notes de départ, la suite tous-intervalles associée (T) étant **1-2-4-7-3-6-11-10-8-5-9**.
- On peut évidemment construire une autre série tous-intervalles en renversant (T) en **9-5-8-10-11-6-3-7-4-2-1**, ce qui produit les notes **0-9-2-10-8-7-1-4-11-3-5-6**. On retrouve pour les intervalles la «marche du crabe»! Les mouvements sur les notes, représentés comme précédemment sur un cercle, sont, eux, symétriques par rapport à un diamètre (voir le schéma).
- On peut aussi remplacer chaque intervalle par son complément à 12, soit **11-10-8-5-9-6-1-2-4-7-3**, d'où, pour les notes, **0-11-9-5-10-7-1-2-4-8-3-6**.
- On renversera ensuite la série précédente des intervalles en **3-7-4-2-1-6-9-5-8-10-11**, pour obtenir les notes **0-3-10-2-4-5-11-8-1-9-7-6**.
- On peut également multiplier chaque intervalle de (S) par 5 et considérer le reste dans la division par 12 de cette opération, c'est-à-dire calculer «modulo 12». On obtient alors **5-10-8-11-3-6-7-2-4-1-9**, d'où les notes **0-5-3-11-10-1-7-2-4-8-9-6**.
- Nouveau renversement des intervalles : **9-1-4-2-7-6-3-11-8-10-5**, avec pour notes **0-9-10-2-4-11-5-8-7-3-1-6**.
- On peut encore multiplier chaque intervalle de (S) par 7 et considérer le reste dans la division par 12 de cette opération : **7-2-4-1-9-6-5-10-8-11-3**, d'où les notes **0-7-9-1-2-11-5-10-8-4-3-6**.
- Dernière transformation, renverser la série précédente : **3-11-8-10-5-6-9-1-4-2-7**, ce qui donne les notes **0-3-2-10-8-1-7-4-5-9-11-6**.

La boucle musicologique est bouclée grâce à un zeste de combinatoire et d'un soupçon d'algèbre! Ce ne sont cependant là que quelques aspects des liens séculaires connectant musique et mouvement.

Balancements rythmés, danse et chorégraphie, choix d'une musique associée aux mouvements dans un film, musique de mise en scène de mouvements acrobatiques sont autant de thèmes qui restent encore à explorer...

É.B.

LA REPRÉSENTATION DU MOUVEMENT DANS L'ART

DENISE DEMARET-PRANVILLE

Mathématicienne et artiste plasticienne

En peinture comme en sculpture, des artistes ont su introduire le mouvement dans leurs œuvres. Les peintres l'ont figuré en 2D, certains sculpteurs l'ont représenté de façon statique, d'autres l'ont réellement mis en scène avec des sculptures mobiles. L'art cinétique, lui, joue avec l'illusion du mouvement.

Chez les Grecs, on trouve une statuaire fixe mais qui tente d'illustrer le mouvement. Idem du côté des peintres, comme Théodore Géricault (1791–1824) avec ses courses de chevaux. Mais à la fin du XIX^e siècle, la chronophotographie mise en place par Étienne-Jules Marey permet de décomposer les mouvements et offre aux artistes la possibilité de faire une représentation plus réaliste, de Marcel Duchamp (1887–1926) à Jean-Claude Meynard (né en 1951). Au XX^e siècle naît l'*art cinétique*, dont le nom même évoque explicitement le mouvement. Après la sculpture statique apparaît également la sculpture mobile. Que ce soit Alexander Calder (1898–1976) et ses « *mobiles* », Anthony Howe (né en 1954) ou encore le sculpteur Ulysse Lacoste (né en 1981) et ses modules à animer, tous ont su mettre, chacun à leur manière, le mouvement au cœur de leur travail. De fait, les mathématiques et la physique ne sont pas bien loin !

LA CHRONOPHOTOGRAPHIE, DE MUYBRIDGE À MAREY

Au XIX^e siècle, Étienne-Jules Marey (1830–1904), médecin français, se passionne pour l'étude des modes de déplacement dans le monde animal et chez l'homme. Il profite de l'apparition de la photographie pour développer ses expériences et, en 1882, il invente la *chronophotographie*. Il met ainsi en place la prise de vues en rafale, qui lui permet de visualiser toutes les étapes

d'un mouvement animal ou humain, de le décomposer, et de voir ce que l'œil humain ne réussit pas à percevoir. *« Cette connaissance ne pouvait être acquise par l'observation simple, car l'attention la plus soutenue, concentrée sur l'action d'un seul muscle, a grand'peine à en saisir les phases d'activité et de repos, même dans l'allure la plus lente. Comment alors pourrait-on espérer saisir à la fois l'action de tous les muscles des membres à toutes les phases d'une allure rapide ? »*

Marey laisse un important travail photographique, qui est avant tout le produit de recherches scientifiques. Il émet l'hypothèse que les peintres ont souvent mal interprété le galop d'un cheval, la position des pattes n'étant pas correcte. C'est le photographe britannique Eadweard Muybridge (1830–1904) qui va vérifier cette théorie. Pour cela, il met en place un procédé, un peu différent de la chronophotographie, qui utilise plusieurs appareils photos qui se déclenchent les uns après les autres. Avec les résultats obtenus, il met en évidence les erreurs dans la représentation des chevaux au galop de Géricault. En effet, les pattes du cheval quittent le sol seulement dans les images 2, 3, et 4, au moment du regroupement. En phase d'extension, un sabot est toujours au contact du sol.



Sallie Gardner au galop.
Eadweard Muybridge, 1887.
© Library of Congress



Le Derby.
Théodore Géricault, 1821.
© Musée du Louvre

VERS L'ART OPTIQUE ET L'ART CINÉTIQUE

En 1912, Marcel Duchamp peint la transposition artistique de la décomposition du mouvement d'un personnage descendant un escalier. Il traite le thème d'une manière abstraite, le personnage s'effaçant derrière

le mouvement, sujet principal du tableau. Il est inspiré par les travaux de Muybridge, qui filme une femme nue descendant un escalier en 1887, et affirme: « *Cette version définitive, peinte en janvier 1912, fut la convergence dans mon esprit de divers intérêts, dont le cinéma, encore en enfance, et*

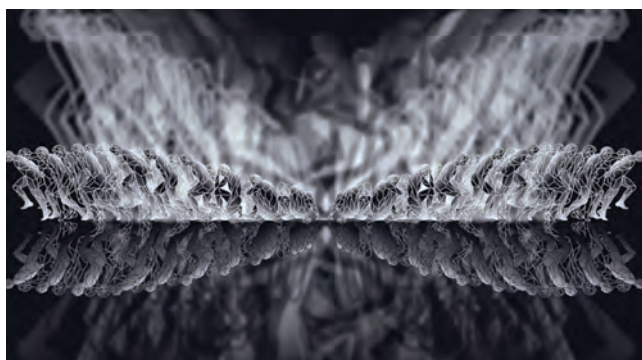


Nu descendant l'escalier.
Marcel Duchamp, 1912.
© Library of Congress

la séparation des positions statiques dans les chronophotographies de Marey en France, d'Eakins et Muybridge en Amérique. Peint, comme il l'est, en sévères couleurs bois, le nu anatomique n'existe pas [...] car je renonçai complètement à l'apparence naturaliste d'un nu, ne conservant que ces quelque vingt différentes positions statiques dans l'acte successif de la descente. »

Ce n'est pas seulement dans sa peinture que Duchamp introduit le mouvement. Sa roue de bicyclette (1913) et surtout son œuvre *Rotative* (1920) annoncent l'art optique et l'art cinétique.

Jean-Claude Meynard est un artiste qui appartient au groupe Les Fractalistes, art et complexité, créé en 1997. Entre 1992 et 2012, il réalise une série intitulée « L'homme fractal », dont certaines œuvres donnent une interprétation fractale du mouvement. Le personnage qu'il représente est démultiplié à



Babel.
Jean-Claude Meynard, 2009.
© Jean-Claude Meynard, jeanclaudemeynard.com

différentes échelles, ce qui confère une dimension fractale à l'œuvre, mais aussi avec des positions légèrement différentes, comme aurait pu le faire la chronophotographie.

UNE OBSESSION MÊME DANS LA SCULPTURE STATIQUE

La statuaire grecque est statique mais certaines œuvres évoquent le mouvement. Le *Discobole* en est un bon exemple. Plus près de nous, on retrouve la même obsession chez Auguste Rodin (1840–1917) ou Alberto Giacometti (1901–1966).



Le Discobole.
Attribué à Myron, vers -450.
© Musée national romain,
palais Massimo alle Terme

Le mouvement de danse.
Auguste Rodin, 1910.
© Musée Rodin, Paris

L'homme qui marche.
Alberto Giacometti, 1960.
© Alberto Giacometti-Stiftung
Foundation (Zürich, Suisse)

Au XX^e siècle, les artistes ne peuvent plus se contenter de représenter le mouvement, ils doivent le mettre en scène, animer leurs œuvres. Les premières tentatives sont attribuées à Duchamp. Son intérêt pour le cinéma naissant le pousse à passer de la représentation du mouvement à un déplacement physique.

En 1913, il installe une roue de bicyclette dans son atelier. La rotation de l'objet a un caractère hallucinatoire, ce qui va lui donner l'idée de ses œuvres «optiques». Il crée ainsi *Rotative*, en 1920, œuvre hybride entre mouvement et illusion optique, puis ses *Rotoreliefs* en 1935, qui sont réellement les prémices de l'art cinétique.

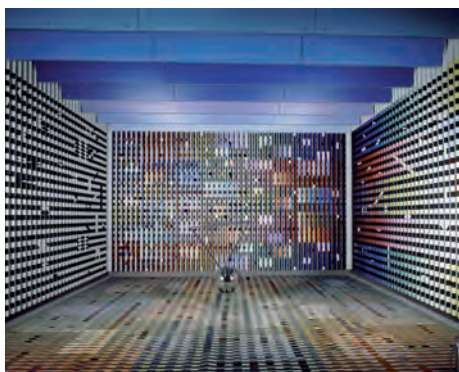


Rotative.
Marcel Duchamp, 1920.
© New Haven, Yale University Art Gallery

LES FORMES GÉOMÉTRIQUES, ABSTRAITES S'IMPOSENT

L'art cinétique, ou art du mouvement, naît dans les années 1950. L'expression est employée pour la première fois en 1960 par une institution muséale de Zürich. Une première exposition, baptisée *Mouvement*, est organisée en 1955 par Victor Vasarely (1906–1997) à la galerie Denise-René à Paris. Elle réunit les principaux artistes de ce courant ; on peut y admirer les sculptures mobiles de Marcel Duchamp, plusieurs installations d'Alexander Calder ou les machines animées de Jean Tinguely (1925–1991).

Mais l'art cinétique ne se résume pas aux sculptures ! D'autres artistes font intervenir des illusions d'optique ; on parle alors d'*art optique*. Victor Vasarely, Jesus-Rafael Soto (1923–2005) ou Yaacov Agam (né en 1928) en sont les principaux représentants. Le mouvement est visuel et implique le spectateur, les œuvres sont construites de manière à être perçues différemment selon l'angle sous lequel on les observe. Les compositions abstraites et les formes géométriques s'imposent.



Salon Agam pour le Palais de l'Élysée.
Yaacov Agam, 1971.
© ADAGP, Paris



Maripose.
Alexander Calder, 1960.
© Collection privée

Alexander Calder présente ses premières sculptures mobiles en 1932. Elles sont motorisées, contrairement aux sculptures qui suivront. Ces mobiles sont des formes abstraites, suspendues par des fils à une structure équilibrée. L'équilibre est obtenu par la recherche du centre de gravité, un cas particulier de la notion de barycentre utilisée par les mathématiciens dans des situations plus abstraites où les masses peuvent être négatives. Les mouvements des mobiles sont simplement dus à l'action de l'air.

Jean Tinguely, quant à lui, conçoit des objets-machines animés par des mécanismes. Il utilise des matériaux de récupération pour créer de gigantesques sculptures, comme la fontaine Stravinsky, œuvre de Jean Tinguely et Niki de Saint Phalle (1930–2002) que l'on peut voir place Igor-Stravinsky à Paris à côté du centre Beaubourg.



Azlon.
Anthony Howe, 2017.
© Anthony Howe, www.howeart.net

Anthony Howe (né en 1954) est un sculpteur cinétique américain qui crée des sculptures mobiles monumentales qui bougent avec le vent. Les rendus et les effets sont spectaculaires. *« Les sculptures revêtent une élégance linéaire et dépouillée lorsque les conditions sont calmes, se muant en une animation bruyante quand le vent se lève. Des formes à plusieurs axes, finement équilibrées, à la fois symétriques et asymétriques, conspirent pour créer une harmonie tridimensionnelle visuellement satisfaisante »* détaille-t-il avec poésie.

Ulysse Lacoste imagine des formes qui, *a priori*, n'ont pas de lien particulier avec les mathématiques. Il les dessine, les affine, fait des patrons, les imagine en mouvement, et peu à peu il est amené à penser géométriquement en volume. Les mathématiques sont alors



Grand Rampant.
Ulysse Lacoste, 2013.
© Ulysse Lacoste, www.ulysselacoste.com

nécessaires pour atteindre un objectif de simplification et d'épuration. Il réalise d'abord ses sculptures en petit format, puis les reproduit à grande échelle afin de pouvoir les faire rouler en faisant intervenir des acteurs du cirque, qui font corps avec ces formes. Le mouvement se trouve ainsi... incarné !

D. D.-P.

• • DYNAMORIGAMI : LA DYNAMIQUE DES PLIS

VINCENT FLODERER

Avec les contributions de

STÉPHANE REYROLLE ET GWENAËL PROST

Centre de recherche internationale de modélisation par le pli (Crimp)



« **L**e pli est une transformation géométrique qui s'inscrit nécessairement dans le mouvement. Le papier emmagasine l'énergie des gestes. Il est à la fois dynamique et résultat, le mouvement et sa trace. » (Crimp)

Dans le panthéon de la tradition origamique, les modèles animés constituent une grande famille dont les origines se confondent avec l'invention du papier et donc de l'art du pliage lui-même. Cette quête d'animation semble être l'un des cœurs battant de la discipline.

Si la maîtrise de modèles cultes reste un passage obligé pour le néophyte, indispensable pour progresser dans sa pratique et prétendre un jour atteindre les sommets de l'art, on pourrait penser limitée cette approche du pliage par le mouvement. Elle est en fait devenue une authentique spécialité pour certains créateurs comme Jeremy Schaeffer.

LE PAPIER, MÉMOIRE DE LA SOMME DES MOUVEMENTS

Des résonances fortes existent entre les jeux de pliage et les processus à l'œuvre dans la nature et la matière, également animées par ces forces du mouvement. À regarder de plus près les gestes du plieur au fil de la réalisation d'un modèle et les transformations qui en résultent sur le plan de la feuille font penser à une véritable chorégraphie, exécutée par les mains et le papier. Dès lors, tous les modèles imaginables peuvent être vus comme une mémoire de la somme de ces mouvements.

Les premiers exemples (modèles mis en mouvement par la force des doigts) sont issus de la tradition. *L'oiseau qui bat des ailes* et *l'oiseau à la fontaine*, tous deux dérivés de la grue millénaire, sont des exemples qui illustrent parfaitement cet esprit. Dans ce registre du bestiaire, on trouve

aussi des *grenouilles qui sautent*, des *becs animés* et d'autres jouets poétiques. Le *multiforme*, comme son nom l'indique, contient à lui seul toute une famille de modèles, dont la célèbre *cocotte* et la *salière* connues à travers le monde sous d'innombrables appellations. *L'éventail magique*, un modèle manipulé par les magiciens depuis des siècles, produit plus de deux cent cinquante transformations.



La salière.
© Chocolat et Scoubidou,
2012

Il existe aussi des modèles animés par les forces de l'air et des mouvements de mains, comme les *avions*, *hélicoptères*, *hélices*, *moulins* et autres objets volants. Le *soufflet à farine*, pratiqué dans des temps révolus par les étudiants et moins connu aujourd'hui, est l'un des premiers exemples de modèle mettant en œuvre une mécanique efficace à partir de plis. Le très répandu *pétard traditionnel* en papier relève de la même famille. On peut aussi imaginer des modèles utilisant l'air et l'eau. Pensez aux bateaux qui flottent sur l'eau ! La *bombe à eau* et ses dérivés sont des modèles étanches qui ont généré une autre famille nombreuse de pliages, les *gonflables*.



Le porte-monnaie
marocain.
© www.senbazuru.fr

Et puis, on trouve la catégorie des modèles actionnés par effet mémoire. Dans la série des modèles fonctionnels, le *porte-monnaie marocain*, à l'origine un simple cube ouvert fait de cuir cousu, dont les quatre faces latérales sont marquées d'un pli en diagonale, est un modèle à fermeture automatique. Avec les anciennes *blagues à tabac*, c'est un ancêtre qui met en œuvre un principe fondamental, celui des *réseaux de plis vissés* (voir plus loin). Tout aussi fondamentaux et utiles, les *motifs en chevrons*, utilisés de longue date dans les plissés textiles, dans la fabrication des cartes routières (qui se replient toutes seules) ou des pales des satellites, présentent des propriétés mécaniques remarquables.



Feuille Chevron.
Ce modèle présente une grande
résistance à la pression
associée à une propriété
de repliement parfait.
© Création : 2005 ; modèle : 2016
(V. Floderer) ; image : V. Floderer-Crimp



À côté de ces classes bien définies, d'autres modèles utilisent la tension propre du papier, l'air chaud et même le feu, les propriétés de déploiement du papier ou des principes radicalement nouveaux.

AÉRODYNAMIQUE DU PLI : LE RÊVE D'ICARE REVISITÉ

À la suite des exemples historiques et pionniers, notre époque voit éclore, depuis la seconde moitié du XX^e siècle, une myriade de modèles originaux, issus de concepts inventifs, qui irriguent aujourd'hui des pans entiers de la recherche fondamentale et appliquée, particulièrement dans les domaines mécaniques, les systèmes déployables, les nanotechnologies ou dans la robotique. Le documentaire *le Code Origami, un monde en plis* (librement disponible en ligne) proposait en 2015 un tour d'horizon planétaire des expériences et réflexions en cours.

Le domaine émergent du froissage, spécialité développée et en évolution constante par l'équipe du Crimp (www.le-crimp.org) depuis les années 2000, est en correspondance avec les lois du mouvement. Les effets « mémoire de forme » y jouent un rôle prépondérant et ouvrent de nouveaux horizons pour imaginer des modèles animés à des niveaux extrêmes.

Les fameux avions fascinent toujours aujourd'hui enfants, adultes et... ingénieurs. De Léonard de Vinci, qui déjà avait utilisé le papier parchemin pour la maquette des ailes de son Ornithoptère, aux frères Wright avec leur planeur à moteur, ou encore de Clément Ader, qui s'inspira des ailes de la chauve-souris, jusqu'aux déploiements actuels par les agences spatiales des voiles solaires qui équiperont demain les vaisseaux d'exploration de l'espace profond, d'innombrables exemples rendent, chacun à leur manière, hommage aux pouvoirs aérodynamiques du pli. Il n'est d'ailleurs pas si évident d'imprimer un mouvement contrôlé et un élan prolongé à une simple feuille de papier ! Des règles bien précises doivent être respectées, en résonance avec les lois de l'aéronautique : portance, canal d'air, bords d'attaque, impulsions précises... doivent être prises en compte, en symbiose avec une bonne maîtrise du « pilote », qui se soumettra à un entraînement rigoureux et prolongé pour éviter les crashes répétés.

Les pliages dits *vissés* (cf. le porte-monnaie marocain) mettent le plan de la feuille en mouvement de façon très efficace pour former tantôt des solides très... solides, tantôt des objets animés par de véritables petites mécaniques constituées des seuls réseaux de plis. Ils utilisent un principe d'une très grande simplicité : sur des motifs de pavages du plan, tels que

des carrés ou des rectangles, mais aussi sur des réseaux bien plus sophistiqués, on marque une diagonale sur chaque polygone en respectant des alternances pli vallée, pli montagne. Cette règle élémentaire produit déjà d'étonnants modèles par effet d'enroulement des facettes !

Ce principe basique optimise l'encombrement des couches et permet même, dans certaines configurations, de s'affranchir de la contrainte de l'épaisseur, qui limite si drastiquement les possibilités de réalisation de modèles complexes.

Cette mécanique magique du pliage vissé est observable dans la nature, par exemple dans l'agencement des couches de pétales dans les boutons de nombreuses fleurs ; cela favorise leur déploiement et parfois leur repliement. Les origamistes ont d'ailleurs très tôt pressenti et utilisé cette propriété : les roses vissées de Toshikazu Kawasaki et plus récemment celles de Naomiki Sato proposent de très astucieuses solutions pour créer des modèles convaincants.

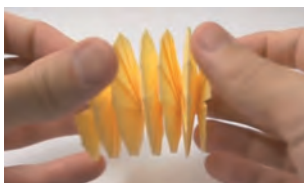
Trois exemples magistraux illustrent les propriétés extraordinaires de cette technique : le *cube vissé* de Shuzo Fujimoto (modèle constitué d'un réseau de plis simples, qui produit un cube quasiment instantanément sous l'effet d'une manipulation élémentaire mais subtile) ; la molécule d'ADN de Thoky Yenn (qui réussit le tour de force de générer la célèbre double hélice à partir d'un réseau de plis relativement élémentaire, uniquement constitué de segments de droites) ; et le ressort en action de Jeff Beynon (un chef-d'œuvre du genre, qui peut être vu comme un véritable actionneur).



Le cube vissé
de Shuzo Fujimoto.
© <http://incompetech.com>



Modèle de Thoky Yenn, 1989 (plié par Emmanuel Mazaud, Crimp)
© Image : Théo Philippot-Crimp

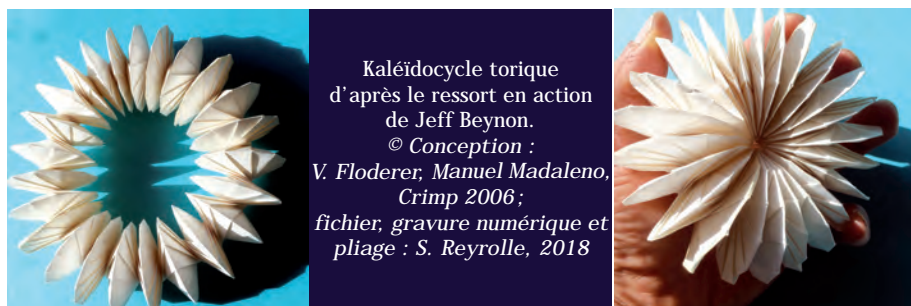


Le ressort de Jeff Beynon.
© Jo Nakashima

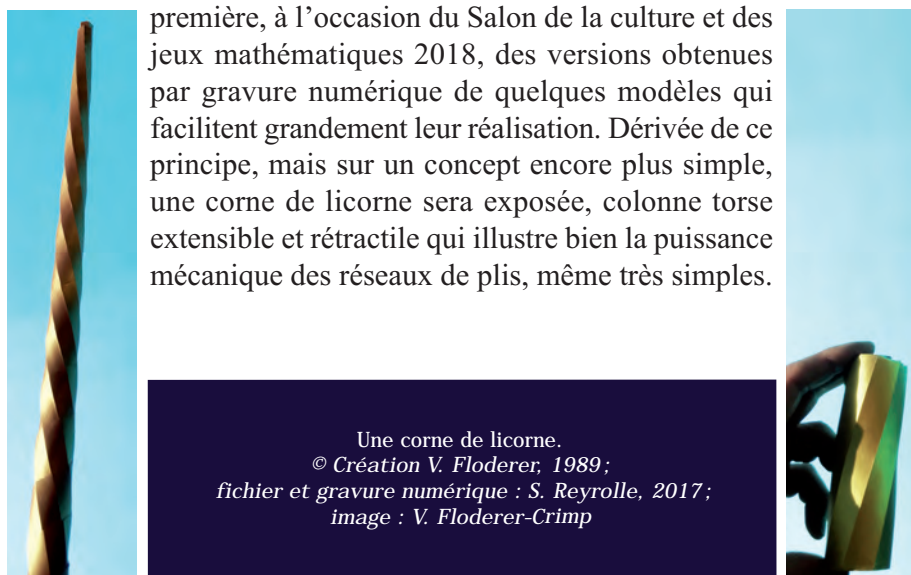


MATHÉMATIQUES

L'équipe du Crimp étudie le modèle de la molécule d'ADN depuis de nombreuses années et a développé une extension qui génère un « kaléidocycle torique ». La propriété de rotation à l'infini des segments articulés qui composent cet anneau se vérifie dans les deux directions. Ces mouvements peuvent de plus s'accompagner de dynamiques de contraction et d'expansion de leur diamètre. Ce type d'objets géométriques, encore bien mystérieux, interrogent les limites de nos esprits et appellent encore les analyses mathématiques qui en décriront toute la complexité et la subtilité.



Certains modèles sont souvent difficiles à réussir pour les débutants. En partenariat avec la société Plifaltec SAS, le Crimp présente en avant-



Sous l'angle du mouvement, le lecteur percevra déjà la possibilité d'ouvrir un vaste champ de recherche. Cette dynamique est déjà en marche, comme en témoignent les études – très diversifiées – qui se multiplient dans de nombreux domaines de la recherche. La conférence Origami Science Maths and Education qui a lieu tous les quatre ans (et dont la septième édition se tiendra cet automne à Oxford, Grande-Bretagne) témoigne de la vitalité de ces approches. Les lecteurs de tous horizons sont invités à prendre le pli pour rejoindre... le mouvement !

V.F., S.R. & G.P.



Crabe, oursin et coquille par Eric Joisel
© É. Thomas, 2017

UNE COURSE DÉMONIAQUE

NICOLAS K. BLANCHARD*

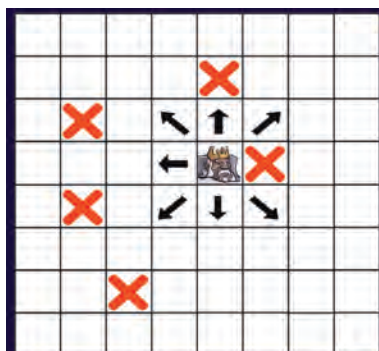
Institut de recherche en informatique fondamentale

Prenez un échiquier, et mettez un roi sur une case proche du centre. Avec une amie, jouez au jeu suivant : à chaque tour, elle peut poser un obstacle sur l'échiquier, et vous pouvez déplacer le roi vers une case adjacente (diagonales comprises), à condition qu'elle ne contienne pas d'obstacle. Pouvez-vous atteindre le bord du plateau ?

Se déplacer en diagonale suffit pour s'échapper d'un plateau d'échec standard, mais qu'en est-il d'un plateau plus grand, par exemple un de taille $(2n+1) \times (2n+1)$ avec n un entier au moins égal à 4 ? Encercler complètement le roi nécessite $8n$ coups alors que ce dernier n'a besoin que de n coups pour arriver au bord. Mais il semble possible de mettre des obstacles sur ce bord, et d'en ajouter, au fur et à mesure que le roi se déplace, pour finir par l'emmurer tel Antigone.

En effet, une stratégie existe et elle est même assez élémentaire. Elle consiste à bloquer les coins d'un grand carré, comme sur l'illustration qui suit. Ensuite, il suffit de condamner les cases du mur duquel se rapproche le roi au fur et à mesure.

Il faut cinq obstacles pour chacun des quatre coins, plus quelques coups supplémentaires pour commencer à bloquer les cases du mur dont le roi s'est approché. Le temps de faire cela, le roi aura pu se déplacer de vingt-quatre cases en partant du milieu. Un plateau de 49 par 49 cases suffit



Les déplacements autorisés pour le roi. Les croix marquent la présence d'un obstacle, rendant la case inaccessible.

*Sauf indication contraire explicite, tous les schémas ont été réalisés par Loïc Michel.

donc pour emprisonner le roi. En réalité, de meilleures stratégies existent, réduisant la taille du plateau jusqu'à 32 par 33 (charge à vous de les trouver, voire de faire mieux !).



La question naturelle est alors de savoir ce qu'il se passe quand on rend le roi «un peu plus fort». C'est ce que demanda en 1982 John Horton Conway (qui, en plus d'être un mathématicien de renom, est aussi le créateur du fameux jeu de la vie). Le problème formel, connu sous le nom de *jeu de l'ange*, reste élémentaire à énoncer :

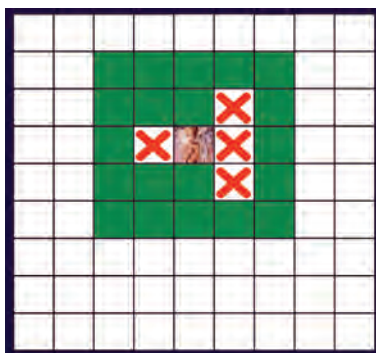
- ◆ Les deux joueurs, l'ange et le démon, jouent à tour de rôle sur un plateau infini (représenté par le réseau \mathbb{Z}^2 des couples d'entiers relatifs) ;
- ◆ À chacun de ses tours, le démon construit un mur sur une case ;
- ◆ À chacun de ses tours, l'ange se déplace depuis sa case actuelle vers n'importe quelle case vide se trouvant à une distance inférieure à une constante p ;
- ◆ Le démon gagne s'il a une stratégie lui permettant d'emprisonner l'ange en un nombre fini de tours, quelle que soit la stratégie de ce dernier. L'ange gagne s'il a une stratégie lui permettant toujours de s'échapper.

DE LA PUISSANCE (AU MOINS MATHÉMATIQUE) DES ANGES

La distance p s'appelle *puissance de l'ange*, et définit une distance un peu particulière. Quand $p = 1$, l'ange se déplace comme un roi aux échecs. Lorsque $p = 2$, l'ange se déplace presque comme un roi jouant deux fois d'affilée. Cependant, contrairement au roi jouant deux fois, l'ange peut «voler» au-dessus d'un mur de cases occupées, tant qu'il arrive sur une case vide.

La question que posa Conway était donc de savoir s'il existait un entier p tel que l'ange de puissance p ait une stratégie gagnante.

Le problème peut paraître simple à première vue : si un ange de puissance 1 se déplace à la même vitesse que le démon maçon, il semble normal qu'il finisse emmuré. Mais dès la puissance 2, l'ange, pouvant aller plus vite que son ennemi ne peut construire d'obstacles et pouvant même sauter par-dessus ceux-ci, semble avoir la belle vie... Notez que l'une des cases (au centre derrière le «mur» constitué des trois obstacles verticaux) ne serait pas accessible à un roi qui aurait deux coups d'affilée à jouer.

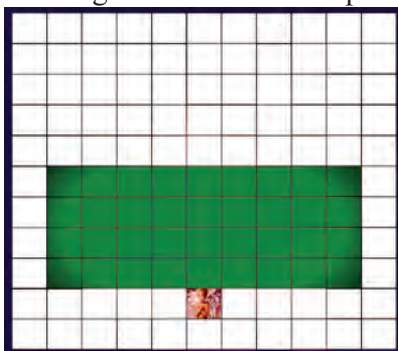


Les déplacements possibles pour un ange de puissance $p = 2$ en un seul mouvement (en vert).

PAS SI SIMPLE, LE DÉPLACEMENT SIMPLISTE DU SIMPLET

Cependant, la réalité est un peu plus complexe. Prenons par exemple un cas d'ange un peu particulier, nommé le simplet. Ce dernier, pour se simplifier la vie, augmente à chaque tour sa coordonnée verticale (il va «vers le Nord»). Selon la théorie darwinienne, il ne doit plus rester grand nombre de simplets au paradis, car le démon peut les capturer, et ce quelle que soit leur puissance ! Prouvons-le.

Prenons donc un simplet de puissance p , obligé d'aller vers le Nord d'au moins une case à chaque tour, mais pouvant se déplacer librement d'Est en Ouest (parmi les cases à distance p). La zone entière vers laquelle il pourra se déplacer au cours de son existence ressemble à un triangle, et chaque tour



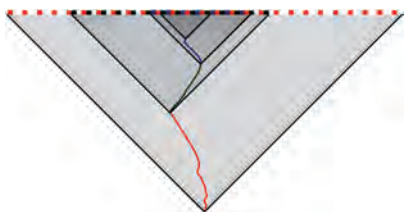
Le déplacement d'un simplet de puissance 4.

le restreint à un triangle, légèrement plus petit (mais contenant tout de même un nombre infini de cases). L'idée du démon va être de construire progressivement des murs à trous, puis de combler les trous là où il en aura besoin.

Par simplicité, considérons que le simplet est pressé et va toujours au Nord à la vitesse maximale, pouvant par contre aller librement à l'Est ou à l'Ouest. Le démon commence à une distance D au nord du simplet, où le cône a une largeur de $2Dp$ (l'ange pouvant se déplacer de p cases vers l'Ouest ou l'Est pendant chacun de ses D coups). Le démon va remplir une case toutes les $4p$ horizontalement d'un bout d'un triangle à l'autre, jusqu'à obtenir un mur (qui a certes plus de trous que de mur). Entre temps, le simplet s'est rapproché d'au plus $D/2$ cases.

Le démon regarde le nouveau triangle correspondant à la position du simplet, et se rend compte qu'à la place d'avoir un mur de longueur $2Dp$ à construire, le nouveau triangle est deux fois plus petit. Il remplit donc progressivement les trous de son mur-gruyère pendant $D/4$ coups. En continuant ainsi avec des murs de plus en plus petits mais de plus en plus solides, on peut arriver à construire un mur complet avant l'arrivée du simplet, tant que l'entier D est choisi suffisamment grand au départ.

Hélas (pour le démon), le simplet reste un ange et peut voler, il passera donc directement au-dessus du mur construit. Il faut donc un mur très épais (d'épaisseur p pour être exact). Heureusement, on peut altérer la stratégie légèrement : à la place de remplir une case toutes les $4p$, le démon en remplit



toutes les $4p^2$. Avec un entier D suffisamment grand, il aura le temps de construire non pas un mur, mais une muraille d'épaisseur p . Et en faisant un peu attention dans les calculs, on peut même capturer ainsi les simplets qui ne sont pas pressés...

La stratégie du démon face au simplet de puissance p .
(c) Leila Gabasova

DES FUYARDS ET DES QUESTIONS MISES À PRIX

Au-delà du simplet, dont le déplacement ne peut lui éviter d'être emmuré, de nombreuses stratégies similaires échouent, ayant souvent des noms farfelus. Par exemple, on peut citer la perte assurée de l'ange *laxiste* (terme d'origine), qui n'est pas obligé d'aller strictement vers le Nord à chaque coup, mais ne peut toujours pas aller vers le Sud, et de l'ange *relax*, qui a le droit de faire des petites excursions au Sud sans jamais descendre

« trop loin ». Un peu plus sophistiqué, l'ange *fuyard* cherche à s'éloigner à chaque pas de son point de départ sans aller dans une direction en particulier ; il perd lui aussi, ce qui se montre en faisant un pliage du plan en huit zones triangulaires et en simulant un démon par zone. Enfin, l'ange *intoxiqué* (qui se déplace au hasard) se fait capturer, et l'ange *en manque* (qui se déplace au hasard en allant de plus en plus vite) peut gagner ou perdre selon les conditions.

En posant le problème en 1982 et en montrant que les stratégies simples échouaient, John Conway promit une récompense à quiconque arriverait à exhiber ou bien une stratégie gagnante pour un ange d'une certaine puissance (100 \$ à la clé) ou bien une stratégie gagnante pour le démon contre les anges de toutes puissances (1 000 \$ à gagner).

Dans une belle coïncidence historique, quatre solutions utilisant des méthodes différentes apparurent en moins d'un an, entre 2006 et 2007 (l'histoire ne dit pas ce qu'il advint des 100 \$). Celles-ci montrèrent non seulement que l'ange de puissance 2 gagnait, mais aussi que les anges de *puissances fractionnaires* (qui jouent certains coups à puissance 2 et d'autres à puissance 1) perdaient pour toute puissance p strictement comprise entre 1 et 2. La preuve la plus élégante est probablement celle d'András Máthé, dont on peut présenter l'idée générale.

Considérons un démon très gentil, qui promet de ne jamais construire un mur là où un ange est passé. Ce démon ne peut naturellement pas gagner avec les règles initiales, donc on considère qu'il gagne s'il arrive à emprisonner l'ange dans une zone bornée du plan. Máthé montre alors que si le démon a une stratégie pour capturer un ange de puissance p , alors le gentil démon a aussi une stratégie contre l'ange de puissance p .

Il définit ensuite un ange très particulier, appelé le *coureur*. Ce dernier vit dans un monde où le gentil démon a déjà construit des murs sur la moitié Ouest du plan. Il longe le mur avec un pinceau dans la main gauche en peignant le mur et en allant aussi vite que possible. Quand le gentil démon construit des murs sur son chemin, il les contourne en les longeant eux aussi. On peut alors montrer une propriété importante : s'il arrive au coureur de peindre le même mur deux fois, il commence par peindre deux fois le mur de la case de départ. Une fois ce point acquis, un coureur de puissance

suffisamment grande (11 suffit) se déplace vers le Nord plus vite que le démon ne peut le forcer à aller vers le Sud. Il ne revient jamais sur ses pas et il n'est donc jamais bloqué par le gentil démon ! Or, si l'on arrivait à capturer l'ange, on arriverait à capturer le coureur. On ne peut donc pas capturer l'ange de puissance 11. Les calculs pour le faire avec un ange de puissance 2 sont similaires mais légèrement plus sophistiqués. Surprise mathématique supplémentaire : la preuve de Máthé n'utilise jamais le fait que l'ange a la capacité de survoler un mur...

UNE HISTOIRE DE PIÉTONS ET DE CHAUFFARDS

Un jeu relié au problème de l'ange est celui du conducteur meurtrier. Ce dernier oppose une joueuse habile mais lente (se déplaçant d'une case à chaque fois) à un adversaire rapide mais moins manœuvrable (ne pouvant par exemple pas tourner à gauche, ou ne pouvant pas tourner deux fois d'affilée). Le but est le même : la piétonne peut-elle éviter le chauffard ? Ou est-elle condamnée à se faire aplatir ?

Depuis sa création en 1951, ce problème a reçu énormément d'attention, dans sa version discrète (sur le réseau \mathbb{Z}^2) mais surtout dans une version continue (où le rayon de braquage de l'automobiliste fou est « grand » par rapport à celui de sa cible). Cependant, aucun mystère derrière cet intérêt scientifique et industriel : ce problème historique (presque) innocent était une manière dissimulée de parler de guidages pour des missiles, sans enfreindre le secret militaire...

N.K.B.

Pour en savoir (un peu) plus :

The angel of power 2 wins. András Máthé, *Combinatorics, Probability and Computing* 16, 2007.

The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots. Martin Kutz, thèse de doctorat, Berlin, 2004.

The King and the Consumer. Elwyn Berlekamp, John Conway et Richard Guy, chapitre 19 dans *Winning Ways for your Mathematical Plays, Volume 2 : Games in Particular*, Academic Press, 1982.

Homicidal Chauffeur Game : History and Modern Studies. Valerii Patsko et Varvara Turova, chapitre dans *Advances in Dynamic Games*, 2011.

Le problème de l'ange probabiliste. Nicolas K. Blanchard, disponible en ligne sur www.koliaza.com.

ANATOLE DAHAN

École normale supérieure de Paris

La notion de déplacement est récurrente dans l'univers des jeux, qu'ils soient anciens ou récents, du Cube de Rubik aux dames en passant par les petits chevaux ou le renard et les poules. Cependant, les déplacements en œuvre peuvent varier grandement d'un jeu à l'autre : pensez aux rotations d'un casse-tête ou aux mouvements de pièces régis par le hasard.

Il semble alors naturel que ces différentes variétés de mouvement se modélisent différemment mathématiquement ; la démarche est qu'une pratique issue d'un jeu donné va être encodée à l'aide d'un formalisme approprié. Dans un premier temps, penchons-nous sur l'approche de la théorie des graphes, qui se montre pertinente pour des jeux de plateau déterministes, comme les échecs, pour ensuite aborder le jeu du taquin, qui admet unemodélisation mathématique des plus élégantes.



Variantes autour du Cube de Rubik,
créées par Tom van der Zanden.
© É. Thomas, 2017

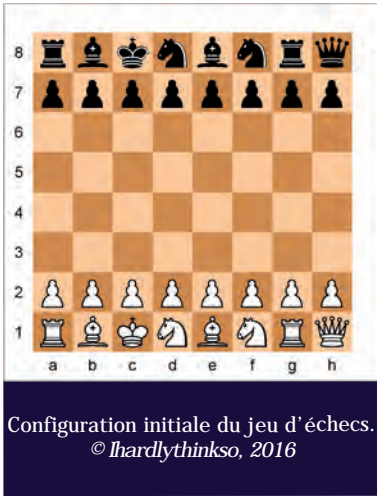


Casse-tête de désengagement.
© É. Thomas, 2017

LA THÉORIE DES GRAPHES POUR LE JEU D'ÉCHECS

Les échecs sont l'un des plus anciens jeux encore joués aujourd'hui, et si les ordinateurs ont aujourd'hui dépassé l'humain, on n'en a pas encore élucidé tous les mystères. Par exemple, existe-t-il une stratégie gagnante

pour l'un des deux joueurs ? Nous allons ici prouver qu'il existe au moins une stratégie non perdante pour Blanc ou pour Noir.



Le jeu d'échecs se joue sur un plateau de soixante-quatre cases, l'échiquier. Chaque joueur a à sa disposition un roi, une reine, deux fous, deux cavaliers, deux tours et huit pions, qui peuvent se déplacer différemment. En commençant par les Blancs, les joueurs déplacent leurs pièces à tour de rôle avec pour objectif de capturer le roi adverse (le joueur vaincu est alors *échec et mat*). Une dernière règle d'importance ici est la règle de *soixante-quinze coups* : il y a égalité si soixante-quinze coups sont joués à la suite sans qu'un pion soit avancé, ou qu'une pièce soit prise.

Afin de modéliser le jeu d'échecs, utilisons une structure mathématique bien connue. Un *graphe* est la donnée d'un ensemble de sommets, et d'un ensemble d'arêtes entre ces sommets. On considère le graphe suivant :

- ◆ Un sommet par état de la partie, c'est-à-dire deux sommets par positionnement de toutes les pièces sur l'échiquier : un où Blanc joue, et un où Noir joue. Un sommet est dit *gagnant* si au moins un roi (blanc ou noir) y est absent ;
- ◆ Une arête d'un sommet à un autre s'il s'agit d'un changement légal de configuration, c'est-à-dire que l'on passe d'un état non gagnant où c'est à Blanc (respectivement Noir) de jouer à un état où c'est à Noir (respectivement Blanc) de jouer, et que le changement de positionnement entre les deux sommets est un coup légal pour Blanc (respectivement Noir).

Ainsi, une partie complète est un chemin dans ce graphe, partant du sommet correspondant à l'état initial, et arrivant à un état gagnant, ou bien arrivant à un pat (situation d'égalité), ou bien parcourant soixante-quinze sommets à la suite sans réduction du nombre de pièces, ni avancée de pions. On dénote par $W^B(c)$ le fait que c soit une configuration gagnante pour B, et $E(x, y)$ le fait que l'on passe de la configuration x à la configuration y en un coup légal.

Une suite de formules de récurrence $W_n^B(c)$ permet de représenter le fait que les Blancs peuvent gagner à coup sûr dans la configuration c ; il suffit simplement d'exprimer que Blanc peut gagner en $n + 1$ coups si c est déjà gagnée en un maximum de n coups (!), ou s'il existe un coup pour Blanc tel que, quel que soit le coup de Noir, Blanc peut gagner en n coups. Ainsi, $W_1^B(c)$ représente exactement l'existence d'un mat en un coup pour Blanc.

La règle des soixante-quinze coups implique que le nombre de coups d'une partie est borné. En effet, chaque pion peut avancer sept fois, il y a seize pions, et soixante-deux cases contenant potentiellement une pièce à capturer. Pour maximiser le nombre de tours d'une partie, on espace chaque capture ou avancée de pion de soixante-quatorze coups. On obtient donc $(7 \times 16 + 62) \times 75 = 13\ 050$ coups.

Ainsi, l'existence d'une stratégie gagnante aux échecs pour les Blancs est exprimée par $W_{13\ 050}^B(I)$, où I est la configuration initiale. Or, si les Blancs ne peuvent gagner à coup sûr en partant d'une configuration c donnée, c'est donc que c n'est pas gagnante ; aussi, pour tout coup de Blanc, Noir a une réponse qui mène à une situation où Blanc n'est pas gagnant en n coups. On a donc montré le résultat escompté : soit Blanc a une stratégie gagnante aux échecs, soit Noir a une stratégie non perdante. Donc au moins un joueur a une stratégie non perdante ! Mais notre formalisme ne nous permet pas d'en dire plus.

LE JEU DU TAQUIN ET LE GROUPE SYMÉTRIQUE

Le jeu du taquin est un casse-tête créé au XIX^e siècle. Quinze pièces carrées numérotées de 1 à 15 sont placées dans un carré de la taille de seize petits carrés. Le but du jeu est d'ordonner les carrés selon l'ordre de numérotation, en les faisant coulisser un par un. Voyons d'abord les outils mathématiques que nous allons utiliser, puis traçons ensuite le lien avec le problème.



À gauche, la configuration originale du taquin. À droite, la configuration dans laquelle les cases 14 et 15 ont été interverties. Est-il possible de passer de l'une à l'autre ?

© A. Dahan



Un *groupe* (G, \bullet) est la donnée d'un ensemble G et d'une loi $\bullet : G \times G \rightarrow G$, qui à deux éléments associe un autre élément, tels que :

- ♦ La loi soit associative : $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$;
- ♦ La loi admette un élément neutre e , tel que pour tout x ,
 $x \bullet e = e \bullet x = x$;
- ♦ Tout élément x de G admette un inverse x^{-1} , tel que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.

On rencontre beaucoup de groupes en mathématiques : les entiers relatifs avec l'addition (amusez-vous à le vérifier!), les rationnels (sans 0) et la multiplication, ou encore $\{1, -1\}$ muni de la multiplication. Ce dernier nous sera utile tout à l'heure! Mais pour le moment, intéressons-nous à quelques groupes particuliers.

Soit E un ensemble. On appelle *groupe symétrique* de E , et l'on note $S(E)$, l'ensemble des fonctions bijectives de E dans E muni de la loi de composition \circ , qui, deux bijections étant données, revient simplement à appliquer d'abord la seconde, puis la première.

C'est bien un groupe : la composition est associative ; l'élément neutre pour la composition est la fonction identité Id_E (qui à tout x associe x) ; et, les fonctions étant bijectives, tout élément f du groupe symétrique admet une fonction réciproque f^{-1} , qui par définition vérifie $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

Étudions en particulier le cas où E est un ensemble fini de la forme $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Dans ce cas, on note le groupe symétrique S_n , dont les éléments sont appelés des *permutations*. Par exemple, en le représentant par un tableau, l'élément s suivant de S_4 :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est la permutation qui échange 1 et 2 d'une part (s transforme 1 en 2 et 2 en 1), et 3 et 4 d'autre part (s envoie 3 sur 4 et 4 sur 3).

Un cas particulier de permutation est constitué par les *transpositions*, qui échangent exactement deux éléments. Le lien avec le taquin commence à se faire jour... On représente la transposition qui échange les entiers distincts i et j par la notation (ij) . Or, toute permutation peut être représentée comme produit de transpositions (voir en encadré).

Un peu d'algèbre, ça sert !

Prouvons que toute permutation s peut être représentée comme produit de transpositions. Déjà, si $s = \text{Id}_{\{1, 2, \dots, n\}}$, alors s est le produit de zéro transposition (!) ; le résultat est donc vrai dans ce cas.

Sinon, il existe un plus petit entier k compris entre 1 et n tel que $s(k)$ est différent de k . On a alors $s = (k \ s(k)) \circ t$, où t est définie à partir de s de la manière suivante : $t(x) = s(k)$ si $x = s(k)$, $t(k) = k$, et $t(x) = s(x)$ sinon.

Remarquez que, pour l'entier k , on a $s(k) > k$, sans quoi l'entier $s(k)$ contredirait le caractère de minimal de k .

On applique alors le même procédé sur la permutation t , en remarquant que le plus petit entier k_0 (s'il existe !) tel que $t(k_0)$ est différent de k_0 est strictement supérieur à k , car t prend les mêmes valeurs que s sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, k-1\}$.

S'il n'existe pas de tel entier k_0 , on a gagné car alors t est l'identité de $\{1, 2, \dots, n\}$ et on a bien écrit s comme la transposition $(k \ s(k))$.

Ainsi, en itérant le procédé au plus n fois, on obtient bien que s peut se décomposer en produit de transpositions.

Il ne nous manque maintenant qu'une seule notion pour pouvoir philosopher sur le taquin : celle de signature. Une *inversion* pour la permutation s est un ensemble de deux entiers distincts i et j de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que : $i < j$ et $s(j) < s(i)$.

La *signature* est la fonction $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ définie par $\text{sgn}(s) = +1$ si la permutation s possède un nombre pair d'inversions, et $\text{sgn}(s) = -1$ si s possède un nombre impair d'inversions. Ainsi, la signature de l'identité est égale à 1, et la signature d'une transposition est égale à -1 . De même, la signature de la composée de deux permutations est le produit des signatures des deux transpositions.

DE L'INTÉRÊT D'UNE MODÉLISATION IMPECCABLE

En numérotant les cases du taquin de 1 à 16, on peut représenter une configuration s du jeu comme la permutation qui à i associe le numéro du carré placé dans la case i , et 16 à la case vide. C'est bien un élément de S_{16} .

Un mouvement au jeu du taquin correspond à l'échange de la case vide avec une case adjacente, c'est-à-dire à la composition à gauche par la transposition $(16 \ i)$, où i est une case adjacente, soit encore à $s^{-1}(16)$ plus ou moins 1 ou 4, selon que l'on déplace la case vide à droite ($s^{-1}(16) + 1$), à gauche ($s^{-1}(16) - 1$), en bas ($s^{-1}(16) + 4$) ou en haut ($s^{-1}(16) - 4$). Enfin, la position gagnante I correspond à la permutation identité $\text{Id}_{\{1, 2, \dots, 16\}}$.

Nous disposons maintenant d'une modélisation irréprochable du taquin ! Qui aurait imaginé que ce serait aussi laborieux ? En fait, c'est assez naturel si l'on réfléchit au fonctionnement du jeu, et le formalisme introduit est puissant. Servons-nous-en pour prouver le fait suivant : on ne peut pas gagner en commençant dans la position initiale

$$P = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{array} \right)$$

où les cases 14 et 15 ont été interverties.

Pour cela, on combine deux arguments de parité, en supposant qu'il soit effectivement possible de gagner en partant de la configuration P. C'est ce qui fait l'élégance et la simplicité du raisonnement, que les aspects techniques de la modélisation ne doivent pas nous faire oublier.

Le premier provient de la signature : en effet, $\text{sgn}(P) = -1$.

Maintenant, à chaque coup joué, on compose P avec une transposition de type $(16\ i)$, et la signature change donc de signe. Or, on veut arriver à la configuration I, de signature 1. On en déduit donc qu'il faudra un nombre de coups impair pour gagner.

De même, en supposant le tableau coloré en damier, avec la case en bas à droite noire, on observe que : à la position initiale P, la case vide est noire ; à chaque coup, la couleur de la case vide change ; au dernier coup, la case vide sera noire. On déduit donc qu'il faudra un nombre pair de coups pour gagner.

C'est impossible, aucun nombre n'est à la fois pair et impair, on aboutit à une contradiction évidente ! La configuration P est donc insoluble.

Qu'il y ait ou non des déplacements, les jeux de stratégie, de logique et même de hasard se prêtent ainsi à une modélisation mathématique, qui peut faire intervenir combinatoire, algèbre, probabilité, théorie des graphes, mathématiques discrètes... C'est le domaine, qui reste encore largement à explorer et qui trouve d'innombrables applications (en économie...), de la *théorie des jeux*. Enfin, derrière une modélisation parfois rebutante par ses aspects techniques se trouvent souvent quelques idées fortes et élégantes : il ne faut pas se fier aux apparences !

A.D.

.. BIBLIOGRAPHIE « MATHS ET MOUVEMENT »

Le Comité international des jeux mathématiques est une association indépendante. Nous avons sélectionné les références suivantes, parfois consultables en ligne, pour les lecteurs de *Maths Mouvement Express* qui souhaitent interroger plus avant les liens qu'entretiennent les mathématiques et le mouvement.

ARTS, MATHÉMATIQUES ET MOUVEMENT :

L'œuvre de Marcel Duchamp :

<http://mediation.centrepompidou.fr/education/ressources/ENS-Duchamp/ENS-duchamp.htm>

L'art cinétique :

<http://mediation.centrepompidou.fr/education/ressources/ENS-cinetique/ENS-cinetique.html>

Les sculptures cinétiques d'Anthony Howe :

<http://www.laboiteverte.fr/les-sculptures-kinetiques-de-anthony-howe/>

DANSE, MATHÉMATIQUES ET MOUVEMENT :

Les algorithmes chorégraphiés d'AlgoRythmics :

www.youtube.com/user/AlgoRythmics

Des algorithmes de tri de données visualisés avec des danses folkloriques :

www.laboiteverte.fr/algorithmes-tri-visualises-danses-folkloriques/

Representations of the Braid Groups. Nancy Scherich, 2017, chorégraphie :

insidehighered.com/quicktakes/2017/11/06/math-student-wins-%E2%80%98dance-your-phd%E2%80%99-contest

JONGLAGE, MATHÉMATIQUES ET MOUVEMENT :

Jongler avec les nombres. Vincent Mineo-Kleiner, Les 5 minutes Lebesgue, 2016 :

http://www.youtube.com/watch?v=r_OyB3RQKEg

Le siteswap :

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Siteswap>

The mathematics of juggling. Burkard Polster, Springer, 2003.

Juggling drops and descents. Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham et Colin Wright :

http://ultramatos.online.fr/paper/Ron-Graham_Joe-Buhler_Colin-Wright_David-Eisenbud_Juggling-Drops-and-Descents.small.pdf

Juggling and application to q-analogue. Richard Ehrenborg et Margaret Readdy, *Discrete Mathematics* 157, 1996.

MATHÉMATIQUES, MOUVEMENT ET MUSIQUE :

Milton Babbitt et le « système dodécaphonique ». Stéphan Schaub, dans *Théories de la composition musicale au XX^e siècle*, Nicolas Donin et Laurent Feneyrou, Symétrie, 2014.

HISTOIRE DU MOUVEMENT ET MATHÉMATIQUES :

Les ondes gravitationnelles. Nathalie Deruelle et Jean-Pierre Lasota, Odile Jacob, 2018.

Big bang. Jean-Philippe Uzan, Flammarion, 2018.

Théories de la relativité. Nathalie Deruelle et Jean-Philippe Uzan, Belin, 2015.

MATHÉMATIQUES, MOUVEMENT ET PLIAGE DE PAPIER :

Origami : le cube de Shuzo Fujimoto :

http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Vulgarisation/Origami/origami_cube.html

Galerie des modèles de Thoki Yenn :

<http://erikdemaine.org/thok/>

La chaîne de Jeremy Schaeffer :

<https://www.youtube.com/user/jeremyschaferorigami>

Le documentaire le Code Origami, un monde en plis (2015) :

<http://www.cie-taxibrousse.com/fr/film/the-origami-code/>

Animation de rose vissée par Toshikazu Kawasaki :

https://www.youtube.com/watch?src_vid=pLubZ94jy1E&v=sSwiHZWjuZM

Animation de rose pentagonale par Naomiki Sato :

<https://www.youtube.com/watch?v=tAHQ54Hz8Fk>

Animation du ressort en action, par Jeff Beynon :

<https://www.youtube.com/watch?v=aul0SzPVsls>

MATHÉMATIQUES, MÉCANISMES, MOUVEMENT ET VISUALISATION DES DONNÉES :

Mathematical Models. Henry Martyn Cundy et Arthur Percy Rollett, Tarquin, 1981.

The Visual Display of Quantitative Information. Edward Rolf Tufte, Graphics Press, 2001.

Mobinet, une plateforme de programmation libre pour appliquer les mathématiques et la physique afin de réaliser des petits jeux, des simulations, des graphiques, des objets mobiles en réseau : <http://mobinet.imag.fr>

**LA BANQUE
DU MONDE
DE L'ÉDUCATION**



Crédit photos : Gettyimages - Fotolia.



MA BANQUE EST DIFFÉRENTE, CEUX QUI LA GÈRENT SONT COMME MOI.

UNE BANQUE CRÉÉE PAR DES COLLÈGUES, ÇA CHANGE TOUT.

Le Crédit Mutuel Enseignant est la bancassurance dédiée au monde de l'éducation dans sa définition la plus large. A ce titre, elle est ouverte à tous les personnels de l'éducation nationale, de la recherche et de la culture. Elle vous propose une offre adaptée à vos besoins, à chaque étape de votre vie.

Crédit  Mutuel
Enseignant

Crédit Mutuel Enseignant Île-de-France

Antony • Aubergenville • Bobigny • Cergy • Créteil
Evry-Courcouronnes • Melun • Paris Quartier Latin • Paris Haussmann
Paris La Défense • Serris • Versailles

LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE SE PREND AU JEU

Avec les laboratoires de mathématiques du CNRS et des universités
Caen Normandie, Paris Diderot et Sorbonne Université,
la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris,
l'Institut Henri Poincaré (CNRS/Sorbonne Université), l'IREM de Paris
et la Maison des Mathématiques et de l'Informatique
(Labex MILYON/Univ. de Lyon/Investissements d'avenir)



CARNETS DE SCIENCE

La revue du CNRS #4



Entrez dans les coulisses
de la recherche

#4 en vente en librairie
et Relay le 3 mai

200 pages / 12,50 €



www.carnetsdescience-larevue.fr



CNRS EDITIONS

tangente vous souhaite un beau salon

l'aventure mathématique

30 ans au service des mathématiques !



Tangente, le magazine de la culture mathématique, est heureux d'accompagner ce salon dont il est partenaire depuis le début. **Nous vous attendons sur notre stand.**

Le seul magazine au monde de culture mathématique a fêté récemment son trentième anniversaire.

Si vous souhaitez, comme tous les amateurs de mathématiques, qu'il se perpétue encore de nombreuses années, **abonnez-vous !**

• • • **Recevez un cadeau de 10 € en vous abonnant sur notre stand**

Remise valable sur tout achat fait sur le stand POLE Tangente après avoir remis un abonnement (papier / numérique).

• • • • • **Tangente est maintenant disponible en ligne sur www.tangente-mag.com**



L'abonnement numérique est inclus si vous vous abonnez à la version papier !
Testez gratuitement le n° 167 en ligne.
Et suivez-nous sur Facebook/TangenteMag

• • • • • **Notre nouvelle librairie en ligne vous attend sur www.infinimath.com/librairie**

• • • • • **Bibliothèque Tangente**
La plus belle librairie mathématique au monde vient de publier son 63^{ème} livre.
Découvrez ses trésors sur notre stand.



Centre de recherche Inria de Paris en bref



600
personnes dont
520 scientifiques
36 équipes
de recherche

➔ **22** bourses ERC
depuis 2009

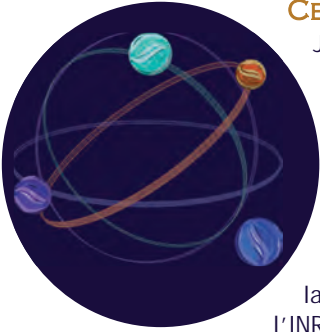
➔ **1 à 2** nouvelles
start-up par an



En partenariat avec :

le CNRS, l'EHESS, l'ENPC, l'ENS, EPHE, Inserm, Paris Dauphine, Paris Diderot, Sorbonne Université, Mines ParisTech, Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

Membre de :



CETTE BROCHURE PLACÉE SOUS LE PARRAINAGE DE
Jean-Philippe Uzan

A ÉTÉ RÉALISÉE PAR LE
Comité International des Jeux Mathématiques

SOUS LA DIRECTION DE
Marie José Pestel et Édouard Thomas

IMPRIMÉE GRÂCE À
la Mairie de Paris, la Région Île-de-France,
l'INRIA, le CNRS, le Crédit Mutuel Enseignant
et les Éditions POLE

ELLE RÉUNIT LES SIGNATURES DE

Nicolas K. Blanchard
Élisabeth Busser
Michel Criton
Anatole Dahan
Denise Demaret-Pranville
Jean-Jacques Dupas
Vincent Floderer, Stéphane Reyrolle et Gwenaël Prost
Hervé Lehning
Roland Lehoucq
Roger Mansuy
Fabrice Neyret
Gaël Octavia
Jérôme Perez
Laure Saint-Raymond et Thierry Dauxois
Arnaud Sallaberry et Pascal Poncelet
Emmanuel Trélat
Jean-Philippe Uzan

Que tous ces auteurs soient ici remerciés pour leur enthousiasme,
leur patience et leur gentillesse.
Grâce à eux, le lecteur découvre les relations qui lient
le mouvement aux mathématiques et à la société.

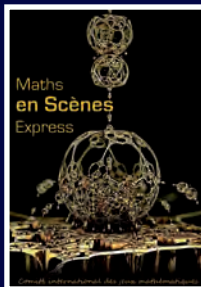
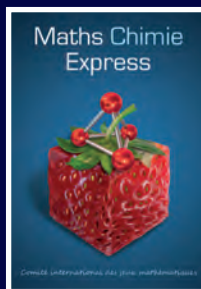
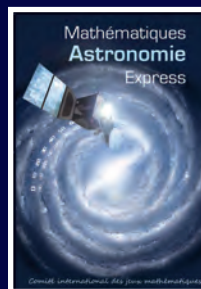
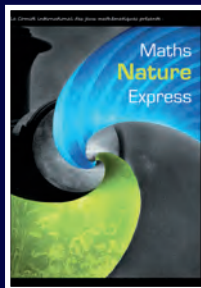
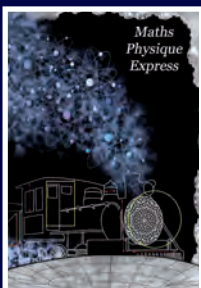
MAQUETTE GÉNÉRALE, COUVERTURE ET BANDEAU
Chloé Bouchaour

RÉALISATION
Patrick Arrivet

IMPRIMÉE SUR LES PRESSES DE
CIA GRAPHIC – 03 86 90 96 10

Maths Express

une collection CIJM - www.cijm.org





MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

MAIRIE DE PARIS



Île de France

informatics mathématiques
Inria



COMITÉ INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES
11 RUE PIERRE ET MARIE CURIE
75231 PARIS CEDEX 05



CIJM.ORG/SALON



@JEUXMATHS