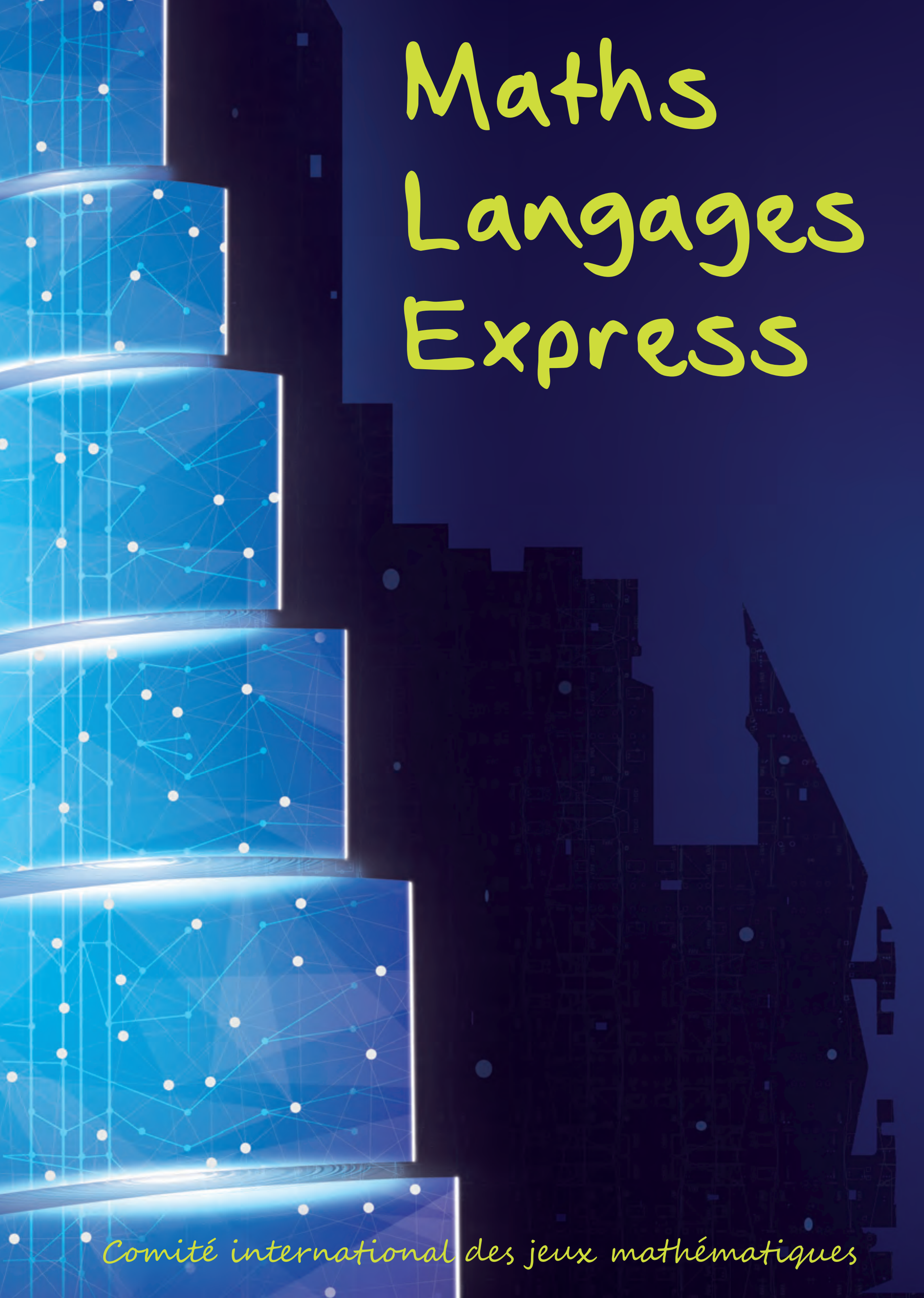


Maths Langages Express

Comité international des jeux mathématiques

Sommaire

Introduction

Stanislas Dehaene

Professeur au Collège de France
Directeur de l'Unité de Neuro–Imagerie Cognitive, INSERM,
et du Centre NeuroSpin, CEA, Université Paris–Saclay

« Le livre de l'univers est écrit en langue mathématique », affirme Galilée – mais de quelle langue s'agit-il, et comment apprendre à la parler couramment ? Ce numéro exceptionnel est entièrement consacré aux relations complexes et ambiguës qu'entretiennent la langue, les langues, la faculté de langage, les langages informatiques… et les mathématiques.

Si les mathématiques sont bien un langage, celui-ci, comme le note Galilée, n'est pas, comme les autres, constitué de mots ou de lettres, mais *« ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il serait humainement impossible d'en comprendre un mot »*. La langue mathématique ne serait donc pas une langue naturelle ? L'analyse de Galilée rejoint ici l'intuition d'Einstein, qui avoue ne pas penser en mots, mais à l'aide *« de signes ou d'images plus ou moins claires »*. Écoutons encore Bertrand Russell, pour qui *« la langue ordinaire est absolument inapte à exprimer ce que la physique énonce vraiment, car les mots de la vie de tous les jours ne sont pas suffisamment abstraits. Seules les mathématiques et la logique mathématique arrivent à dire précisément aussi peu que le physicien ne le souhaite »*.

Récemment la recherche en sciences cognitives a mis à l'épreuve les réflexions de Galilée, Einstein et Russell. Comme l'explique Marie Amalric dans ce numéro, l'imagerie cérébrale confirme que les circuits cérébraux du langage et des mathématiques sont disjoints Lorsque nous comprenons une phrase, ce sont presque exclusivement des régions de l'hémisphère gauche qui s'activent. Elles forment un réseau restreint et spécialisé, confiné au lobe temporal et à la région frontale inférieure (aire « de Broca »). Par contre, lorsqu'une personne réfléchit à un énoncé mathématique, l'activité est distribuée dans les deux hémisphères, dans des aires précises et reproductibles des lobes pariétaux, frontaux, et de la région temporale inférieure, qui n'ont rien de commun avec les aires du langage.

Le mathématicien professionnel, lorsqu'il jongle avec les faisceaux, les catégories, les fibrés ou les topos, ne se contente donc pas de manipuler ces mots dans un sens nouveau – son cerveau s'évade hors du champ du langage, dans les sphères d'une langue vraiment nouvelle. Et pourtant, les circuits corticaux qu'il met en œuvre, nous les possédons tous ! En effet, les mathématiques de haut niveau recyclent des régions du cerveau qui, chez tout un chacun, servent déjà à calculer 2 + 2, à estimer une distance, ou à évaluer la taille d'un objet. Ces concepts composent une langue à part.

Langage mathématique et langue naturelle sont dissociables. Un accident vasculaire peut rendre une personne aphasique tout en laissant intactes ses capacités de calcul et d'algèbre. Inversement, certaines maladies génétiques affectent sélectivement le sens des nombres et de l'espace sans toucher à la syntaxe de la langue.

Mathématiques et langage ont-ils seulement évolué en parallèle au cours de l'hominisation ? On peut en douter lorsque l'on jette un regard sur les rares traces qui nous restent de notre Préhistoire. Comme le montre Oliver Keller dans les pages qui suivent, les œuvres originelles que nos ancêtres nous ont léguées sont d'essence mathématique. Les premiers hommes n'ont pas seulement créé de magnifiques peintures et gravures sur les parois des grottes ornées – indice probable de l'existence, dès le Paléolithique supérieur, d'un langage articulé. Bien avant cette période, les plus anciennes créations culturelles de l'humanité sont des figures géométriques qui évoquent une proto-mathématique d'origine extraordinairement précoce : –77 000 ans pour les ocres gravés de la grotte de Blombos, –1,6 million d'années pour les premiers bifaces à double symétrie orthogonale, et jusqu'à –2 millions d'années pour les « sphéroïdes », ces pierres taillées en forme de sphère presque parfaite. L'espèce humaine était-elle donc matheuse avant d'être loquace ?

Il semble bien, en tous cas, que dans le domaine mathématique, l'intuition des concepts précède de beaucoup les mots pour les dire. Mes propres recherches chez les Indiens d'Amazonie, menées en collaboration avec le linguiste Pierre Pica, le suggèrent : même en l'absence d'éducation et de vocabulaire mathématique, ces hommes et ces femmes comprennent les concepts de nombre, d'arithmétique, de mesure, de ligne droite, de parallèle, d'angle droit.

Avant même de savoir les exprimer en mots, jouons, donc, dès le plus jeune âge, avec les objets mathématiques. Casse-tête, puzzles, paradoxes, constructions, origamis, pliages sont de merveilleuses machines à stimuler, de façon informelle et ludique, l'esprit de géométrie qui sommeille en chacun de nous. C'est dans ce sens que je parraine, avec enthousiasme, en 2017, le dix-huitième Salon Culture et Jeux Mathématiques.

S. D.

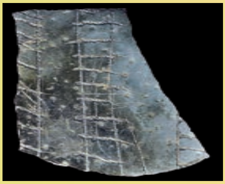
Codes géométriques dans le graphisme préhistorique

Olivier Keller

Historien des mathématiques

L'homme, devenu *sapiens* il y a quelques deux cent mille ans, se mettra à dessiner, peindre ou graver. Quelques traces pourraient faire penser à une activité graphique bien antérieure, mais le phénomène n'est incontestable et massif qu'avec l'homme moderne *sapiens*. Révolution considérable, probable fruit d'une longue maturation, puisque les premières traces ne sont repérées dans l'état actuel des connaissances que vers −77 000 (gravures sur ocre, grotte de Blombos, Afrique du Sud) et vers −60 000 (bandes hachurées sur coquilles d'œuf d'autruche, abri de Diepkloof, Afrique du Sud).

Ocre gravé, grotte de Blombos, Afrique du Sud, vers – 77 000.



Fragment de coquille d'œuf d'autruche gravé, abri rocheux de Diepkloof, Afrique du Sud, vers – 60 000.

Plus anciens graphismes connus.

© Proceedings Of The National Academy Of Sciences 107 (14), 2010.

L'énigme des premiers graphismes

Que nous disent ces deux documents ? La gravure sur ocre est-elle un message, ou bien un signe personnel, propre à l'utilisateur de ce bâton d'ocre ? S'agit-il d'une représentation stylisée, ou d'un élément purement décoratif ? S'agit-il de l'effet d'un jeu, comme ce fut peut-être le cas des « macaronis » très nombreux dans les grottes ornées ?

Puisque leur sens, s'il y en a un, nous échappe nécessairement, on peut vouloir se contenter d'une simple description de ces artefacts. Si l'on décrit la gravure du bâton d'ocre de Blombos comme une frise de losanges, et celles de Diepkloof comme des quadrillages, il est certain que

« Macaronis »
(grotte de Rouffignac,
vers −11 000).

© www.hominides.com
Photo : Jean Plassard

Biface, avec ses deux plans de symétrie perpendiculaires. Les bifaces apparaissent en Afrique à partir de – 1,6 million d'années, et en Europe à partir de – 600 000.

© La France préhistorique d'après les sépultures et les monuments, Émile Cartailhac, Félix Alcan, 1889

le lecteur contemporain nous comprendra. Mais cette description aurait-elle eu un sens pour nos ancêtres d'il y a soixante mille ans ?

Un quadrillage suppose en effet des lignes (des *« longueurs sans largeur »*, suivant la définition d'Euclide), qui plus est des lignes à angles droits ; un losange est une figure (une portion de surface que des lignes limitent d'une manière bien déterminée). Notre description utilise donc les concepts très subtils de ligne, d'angle, de figure, certainement familiers de nos jours au moins dans leur usage, mais pas nécessairement élaborés par nos ancêtres en ces temps (et en tout cas inutiles pour eux si ces graphismes n'étaient que des marques spontanées ou des jeux). Parler à leur sujet de « frises de losanges » ou de « quadrillages » pourrait bien être aussi abusif et anachronique que de décrire certains « macaronis » comme des trapèzes ou des sinusoïdes.

On dispose tout de même d'un élément incontestable : vers −77 000, dans l'état actuel des connaissances, débute l'activité graphique, c'est-à-dire l'exploration d'un nouveau support − la surface −, espace de travail de dimension deux, alors que les espèces pré-*sapiens*, en sculptant leurs outils de pierre, avaient certainement inventé des symétries et des régularités de forme, mais dans un espace de travail de dimension trois. Et si l'outil de pierre est « évident », dans la mesure où il n'a pas besoin d'être interprété, le graphisme au contraire a besoin de codes, qu'il soit simple signe ou représentation. S'il est *signe* seulement, cela va de soi ; s'il est *représentation*, le graphisme change les objets de l'espace « réel », qui est en longueur, largeur et profondeur, en objets d'un espace « artificiel » qui est seulement en longueur et largeur, d'où le besoin d'un codage reconnu par tous.

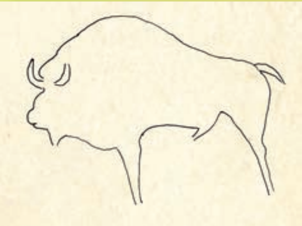
La surface comme lieu de constructions

Pour commencer, comment être sûr qu'avec le nouveau support apparaît réellement l'idée de *« ce qui a seulement longueur et largeur »*, comme le dit Euclide ? On peut déjà invoquer des témoignages ethnographiques attestant de la conception de la paroi rocheuse comme lieu de contact et de passage entre le monde réel et le monde surnaturel. Or, en tant que lieu de *contact*, la paroi ne peut avoir d'épaisseur. Ensuite, si le relief naturel de la paroi est souvent utilisé, ce n'est pas la règle générale ; la conscience d'un support spécifique se traduit en effet par d'authentiques *constructions*. Ce peut être une simple *section*, donnant un « profil absolu », ou une *projection*, et dans ce cas on obtient un trompe-l'œil avec l'illusion d'un premier plan et d'un second plan.

Mais la construction vraiment spécifique du nouveau support consiste dans le *rabattement* des éléments jugés indispensables, comme les cornes ou les dessous de sabots, ce que l'abbé Henri Breuil (1877 − 1961) appelait la *« perspective tordue »*. Dans les périodes tardives, on peut même avoir une « perspective étalée », sorte de dessin industriel avant la lettre. En pratique, les divers modes de construction coexistent.

Deux « perspectives ».

© Aux origines de la géométrie. Le Paléolithique et le monde des chasseurs-cueilleurs, Olivier Keller, Vuibert, 2004



Contour gravé avec « perspective tordue » des cornes, grotte de La Grèze, Dordogne, vers – 18 000.

Char en « perspective étalée », gravure rupestre, Mongolie intérieure, Néolithique final.

Enfin, l'idée de surface structurée suivant ses deux dimensions affleure nettement dans le décor mobilier sur os, sur bois de cervidé ou sur ivoire. Ce décor est en effet constitué de *frises*, c'est-à-dire d'un motif en translation dans la « longueur » du support, avec des symétries possibles « en largeur » (par rapport à la direction perpendiculaire).

Deux types de frises à Laugerie - Basse, Périgord, vers – 13 000.

Bois de cervidé gravé.

© Reliquæ Aquitanicæ, Édouard Lartet et Henri Christy, 1865–1875

Bois de renne gravé.

© La France préhishorique d'après les sépultures et les monuments, Émile Cartailhac, Félix Alcan, 1889

On démontre mathématiquement qu'il n'existe que sept types de frises, et on peut tous les apercevoir dans le décor mobilier préhistorique.

Tels sont les éléments en faveur de l'existence de l'idée de surface ; non pas comme abstraction vide, mais comme source et synthèse de constructions déterminées : section, projection, rabattement, frises. Supprimons encore une dimension de l'espace ; nous voici face au problème de la ligne.

La ligne comme contour, frontière pour délimiter les surfaces

Prenons une figure aisément reconnaissable, comme la représentation d'un bison ; si elle est complète, elle structure la paroi en deux parties adjacentes, l'*intérieur* et l'*extérieu*r, et détermine une frontière entre les deux, une *ligne*. Lorsque l'animal est entièrement peint, c'est comme avec l'ombre d'un objet : on croit voir une ligne, mais l'on ne voit en réalité que deux domaines en contact. C'est aussi le cas avec les « mains négatives », obtenues en appliquant la main sur la paroi et en recrachant sur celle-ci une mixture colorante : on les trouve dans de nombreux lieux de Préhistoire partout dans le monde, avec parfois, lorsqu'il s'agit de chasseurs - cueilleurs contemporains, la preuve qu'il s'agit bien d'un geste de contact avec le monde des êtres ancestraux.

En revanche, lorsque la représentation se réduit à un contour, celui-ci, objectivement, est un *signe spécifique de ligne*, en tant que marque de frontière entre deux surfaces adjacentes. Si l'on peut prétendre qu'une représentation entièrement peinte avec d'habiles nuances de couleurs et un minimum de trompe - l'œil est une copie talentueuse de l'impression visuelle spontanée, rien de tel n'est possible avec la représentation par le contour seul. Personne ne « voit » jamais un contour, lequel ne peut être par conséquent qu'un code de lecture, un signe artificiel de frontière inventé par nos ancêtres. Il faut donc leur attribuer non seulement l'invention de la surface, mais aussi celle de la ligne.

Le point comme « élément » de la ligne

En supprimant encore une dimension, on parvient au néant–existant géométrique, le *point*. Les alignements de points sont fréquents dans les grottes ornées. On parle d'alignements parce qu'en les suivant de l'œil on parcourt des lignes : mais le mot « ligne » est-il approprié ? On parle de points parce qu'il s'agit de petites taches de peinture faites au tampon ou avec le bout du doigt : le mot « point » est il approprié ?

Puisque le contour en trait plein d'une figure reconnaissable est un signe de ligne, un contour en pointillé de cette même figure a pour fonction de suggérer cette ligne par une série de ses « constituants ». Or ces « constituants » sont le produit d'un *contact* avec la paroi, au tampon ou au doigt, et non d'un *tracé* sur celle-ci, auquel cas nous aurions affaire à des fragments de ligne, des tirets. Tout porte donc à considérer les « constituants » du contour comme des signes de l'idée de point : encore une invention que l'on peut porter à l'actif des artistes des âges glaciaires.

Les bouquetins affrontés, en pointillés, à droite. Grotte de Lascaux, vers –15 000.

© Photo : Norbert Aujoulat

Les *sapiens* inventent donc un nouveau type d'expression avec un support spécifique (la surface), des signes spécifiques (les lignes et les points) et des constructions spécifiques (projections, rabattements). Si l'on peut reconnaître et discuter ce codage, c'est uniquement parce que nous reconnaissons certaines *figurations*. Parce que nous identifions un bison dans tel contour, on attribue à bon droit à celui-ci la qualité de ligne. Mais, revenant à nos interrogations initiales au sujet des très anciens graphismes de Blombos et de Diepkloof, qu'en est-il lorsque nous ne sommes en présence que de signes non reconnaissables ?

La symétrie comme aide naturelle à la conception de figures

L'existence des frises sur os ou sur bois animal peut nous aider à trancher. Toujours, les frises organisent la surface en suivant deux directions perpendiculaires. Elles sont parfois faites de successions de figures reconnaissables (animaux), et très souvent de successions de signes.

Frise de rectangles (os gravé, La Roche Lalinde, Périgord, vers – 11 000 ?).

© Don's Maps, www.donsmap.com

Ci-contre : rectangles colorés (grotte de Lascaux).

© www.lascaux.culture.fr

Ces derniers, bien isolés les uns des autres et identiques les uns aux autres, peuvent être donc qualifiés de *figures* au même titre que les premières. Le bois de renne gravé de La Roche de Lalinde fait penser à une frise de rectangles. Dans la grotte de Lascaux, un quadrillage gravé détermine des rectangles bien individualisés au moyen de couleurs distinctes. Ces rectangles, comme d'autres motifs de frises, témoignent en faveur de la capacité de nos ancêtres à tracer des figures abstraites. Mais, s'agit-il bien de figures au sens propre, de tracés avec des propriétés bien déterminées ? La dénomination de « rectangle » n'est-elle pas abusive ?

Faute d'une véritable idée de symétrie orthogonale, il aurait été impossible à nos ancêtres *erectus* de fabriquer des bifaces. Les frises sur os, ivoire ou bois de cervidés réalisées par nos ancêtres *sapiens* sont des produits de cette même idée, avec en plus la structuration de la surface décorée suivant deux directions perpendiculaires. En ayant en outre à l'esprit que la symétrie se vérifie à l'œil en imaginant un pliage, tous les éléments sont réunis pour créer de véritables rectangles. Comment ? Pensez à la façon dont on peut créer un rectangle par des pliages successifs d'une feuille de papier de forme quelconque : partant d'un point, deux pliages convenables suffisent pour obtenir les quatre sommets ; ou bien, avec quatre pliages convenables, les axes de pliage donnent les quatre côtés. Tout ceci, sans aucune théorie, sans aucune définition. Seule la pratique de la symétrie est requise. Est-il impensable que les hommes préhistoriques soient parvenus mentalement à cette construction ?

Le bilan d'ensemble est impressionnant. Il s'agit de rien de moins que l'invention d'un support, de signes et de combinaisons de signes qui deviendront des concepts fondamentaux en géométrie. *« Qui deviendront »* : on est encore loin en effet du moment où surface, ligne, point… non seulement seront des idées détachées de toute matière, mais surtout deviendront des concepts définis et directement reliés les uns aux autres dans une axiomatique, sans référence à quelque processus technique que ce soit.

O. K.

Pour en savoir (un peu) plus :

Aux origines de la géométrie. Le Paléolithique et le monde des chasseurs-cueilleurs. Olivier Keller, Vuibert, 2004, téléchargeable sur academia.edu .

Archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations. Olivier Keller, Vuibert, 2006, téléchargeable sur academia.edu .

Jeux de frises. André Deledicq, ACL–Éditions du kangourou, 2012.

Les malices du Kangourou, spécial « Le monde des frises ». Collectif, ACL–Éditions du kangourou, 2002.

« Le monde des frises », animation sur le site Mathématiques magiques de Thérèse Éveilleau (***http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/***).

De la Renaissance au cubisme : les langages picturaux et la géométrie

Emmanuel Claisse

*Professeur agrégé
à l'École nationale supérieure d'architecture de Nancy*

Les artistes ne se sont pas toujours pliés aux canons de leur époque. On peut néanmoins tenter de regrouper les différents langages picturaux dans des courants. Commençons notre voyage à l'ère gothique (1200–1400). Les supports de cette période sont variés : livres d'heures, retables et fresques.

Caractéristique du gothique, la *Foire du Lendit* montre bien que le réalisme des objets ou des personnages n'est pas l'objectif de l'artiste ! La taille du personnage principal est disproportionnée et dépend essentiellement de son importance sociale ou spirituelle. Les maisons disposées au premier plan sont de taille inférieure à celles situées plus en arrière. De plus, les visages sont identiques : l'Église considère comme signe de vanité et d'orgueil la ressemblance à un individu particulier. L'absence d'ombres et d'éclairage supprime toute vision de relief, comme si la scène se déroulait dans un plan à deux dimensions. À cette époque, les scènes représentées sont imaginaires ; on observe souvent, sur un même tableau, différents lieux et époques.

Bénédiction de la foire du Lendit.
Anonyme, XVe siècle.

La Renaissance, époque de la maîtrise de la perspective

Pour montrer l'évolution géométrique entre l'époque gothique et la Renaissance, analysons trois représentations de l'Annonciation à différentes

Avant la Renaissance : manuscrit du XII^{e} siècle.

© Bibliothèque de Verdun

***L'Annonciation.* Ambrogio Lorenzetti, 1344.**

© Pinacothèque nationale, Sienne

***L'Annonciation du Cestello.* Sandro Botticelli, 1490.**

© Uffizi Gallery

périodes : XII^{e} siècle, XIV^{e} siècle et, en pleine Renaissance, XV^{e} siècle. Cette scène biblique répond à une organisation géométrique codifiée : elle figure le moment où le divin s'incarne en homme. L'archange Gabriel annonce à la Vierge Marie son nouveau statut de mère du Fils de Dieu. S'insèrent entre les deux un faisceau de lumière dorée qui symbolise l'Esprit saint venant féconder la Vierge. L'ange et la Vierge sont généralement séparés par un phylactère (petite banderole) ou une colonne qui symbolisent une frontière entre l'immortel et le mortel.

Avec la représentation de Lorenzetti datant de 1344, on assiste au début de l'utilisation du point de fuite dans la peinture. En effet, le point de fuite principal (point de concours des lignes du carrelage perpendiculaires au plan de projection) se situe sur le fond doré, l'or symbolisant l'espace divin, l'immortel, l'infini. De même, la colonne séparant les deux personnages a sa base dans l'espace fini mais se termine confondue dans le fond doré.

La perspective est encore mal maîtrisée : si l'on trace les diagonales des carrelages, celles-ci ne forment pas des droites.

On retrouve ensuite, à la Renaissance, de nombreuses *Annonciations*, en particulier une des sept peintes par Botticelli : la colonne a disparu, remplacée par le montant droit de la fenêtre à travers laquelle on aperçoit un paysage idéalisé, le Paradis perdu. Le point de fuite est situé à l'extérieur, sur la ligne d'horizon – symbole de l'infini – séparant le ciel et le jardin.

La perspective est alors parfaitement maîtrisée. L'utilisation de la lumière et des ombres permet de renforcer l'impression de relief. Les peintres de la Renaissance ont en effet le souci du détail ; ici, les plis des tissus et l'expression des visages tendent à rendre les personnages réels.

La découverte de la perspective à point de fuite (perspective centrale) à la Renaissance va ainsi révolutionner la composition picturale et devenir un canon pendant presque cinq cents ans.

Une révolution picturale, mais aussi géométrique, architecturale…

La représentation de la Cène est souvent fantaisiste avant la Renaissance, comme celle de Syrie où le peintre l'a représentée vue du dessus et les apôtres, pour pouvoir être « sur la photo », sont représentés allongés.

La Cène.
Anonyme, Syrie,
XIIe siècle.

Source : Jesus and the Eyewitnesses. Richard Bauckham, William Eerdmans Publishing, 2008

Quant à *La Cène* de Léonard de Vinci, la perspective est parfaite, le point de fuite est situé sur le Christ, orientant ainsi le regard.

La Cène.
Léonard de Vinci,
1497.

© Convent of Santa Maria delle Grazie, Milan

La comparaison des Flagellations du Christ peintes avant et pendant la Renaissance sont tout aussi significatives de la révolution picturale. Dans la représentation de Cimabue, le Christ a une taille considérable par rapport aux mortels. Dans celle de della Francesca, la perspective organise la composition picturale : le Christ, dans l'arrière-plan, est le plus petit personnage représenté ! Le point de fuite principal n'est pas situé sur lui. Cette révolution picturale accompagne ainsi la philosophie humaniste émergeant à la Renaissance, plaçant l'homme au centre des préoccupations, montrant ainsi un recul du pouvoir absolu du christianisme sur l'Occident.

La Flagellation.
Giovanni Cimabue, 1280.

© The Frick Collection

La Flagellation.
Piero della Francesca, 1455.

© Galleria nazionale delle Marche, Urbino

Incunable de 1493, la *Chronique de Nuremberg* montre des représentations imaginaires de villes réelles avant la Renaissance. La perspective n'organise pas la représentation, seul le symbolisme compte : l'église y est représentée démesurée !

Chronique de Nuremberg.
Hartmann Schedel, 1493.

© Bibliothèque de Verdun

Pendant la Renaissance, des artistes imaginent des Cités idéales, comme celle de Baltimore (voir ci-contre). Lorsque les architectes les découvrent, leur première volonté est de construire des villes offrant d'aussi belles perspectives : un nouveau langage architectural apparaît.

L'utilisation généralisée du point de fuite va inspirer des géomètres comme Girard Desargues (1591–1661), qui sera le premier à introduire des points à l'infini en géométrie et à utiliser l'espace pour démontrer des résultats dans le plan, jetant ainsi les bases d'un nouveau langage géométrique : la géométrie projective.

La cité idéale de Baltimore.
Anonyme, 1490.

© Walters Art Gallery, Baltimore

Après la Renaissance, la perspective à point de fuite reste le modèle unique jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle et la géométrie des différentes périodes post-Renaissance (baroque, classique, rococo, romantique, réaliste, impressionniste) diffère peu. La distinction entre ces périodes s'effectue plutôt dans les scènes, les personnages représentés ou encore dans les jeux de lumière.

La période cubiste : invention d'une nouvelle géométrie picturale

Deux évènements majeurs préparent l'arrivée du cubisme : le travail de Paul Cézanne et la découverte des sculptures africaines. Cézanne, avec sa volonté de ne plus simplement imiter le réel, incarne le début de la révolution cubiste, écrivant même en 1904 : *« Permettez-moi de vous répéter ce que je vous disais ici : traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône. »* En 1908, Henri Matisse taxe avec humour un paysage peint par Georges Braque de *« petits cubes »* ; un critique s'empare de cette expression pour inventer le mot *« cubisme »*.

Ainsi, la comparaison du tableau impressionniste de Frieseke avec le cubisme de Metzinger, datés de 1911, est frappante : ce dernier utilise des lignes polygonales afin de représenter des courbes et il multiplie les points anguleux, donnant ainsi une sensation d'enchevêtrement de cubes ou de polyèdres, accentuant la sensation de relief. Autre caractéristique de la période cubiste, on passe d'une perspective classique avec un unique point de vue à une perspective dotée de multiples points de vue (vues de face et de profil pour le visage, de profil ou du dessus pour la tasse), comme si le peintre avait imaginé tourner autour de chaque sujet afin de représenter tout ce qui le caractérise, renforçant ainsi la sensation de profondeur. La perspective est dorénavant pleinement mentale. Enfin, les cubistes ont la volonté d'intégrer la figure au fond, le personnage ou les objets à leur environnement, grâce aux lignes polygonales et à l'utilisation de tons proches, avec des dégradés, donnant une impression de lumière tamisée.

Breakfast In The Garden. Frederick Carl Frieseke, 1911.

© Terra Foundation For Amercian Art

Le goûter. Jean Metzinger, 1911.

© Philadelphia Museum Of Art

Peu après la naissance du cubisme survient la Grande Guerre. Le nouveau langage pictural aura un impact non négligeable sur l'art de la guerre. En effet, en peignant le matériel, en déconstruisant les objets, en brisant leurs contours, en disloquant leur volume homogène, en ayant des couleurs proches de leur environnement et en leur donnant plusieurs points de vue, les peintres vont réussir à fusionner les routes, les canons, les arbres, les véhicules, les soldats… L'art du camouflage est né avec l'aide du cubisme !

Le soldat jouant aux cartes. Fernand Léger, 1917.

© Musée Kröller-Müller, Otterlo (Pays-Bas)

Inversement, la peinture cubiste convient idéalement à des artistes comme Fernand Léger, brancardier en premières lignes de 1914 à 1917, pour représenter les champs de bataille dévastés, les hommes démembrés, les perspectives sans point de fuite : *« Il n'y a pas plus cubiste qu'une guerre comme celle-là qui te divise plus ou moins proprement un bonhomme en plusieurs morceaux et qui l'envoie aux quatre points cardinaux. »*

En 1902, Henri Poincaré écrivait dans *la Science et l'Hypothèse* : *« De même qu'un monde non euclidien, on peut se représenter un monde à quatre dimensions. »* Grâce à son talent de vulgarisateur, ses idées vont se répandre dans tous les domaines, en particulier dans le monde artistique. Marcel Duchamp est certainement le plus conquis : *« J'explore les façons de créer un effet quatrième dimension en étudiant le traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions de Poincaré. »* L'art et la géométrie sont bien indissociables, et comme le disait Aristote, *« rien n'est dans l'esprit qui ne fut d'abord dans les sens »* !

E. C.

N.B. Toutes les photographies ont été réalisées par l'auteur.

L'Oumupo, entre musique et mathématiques

Moreno Andreatta, Martin Granger, Tom Johnson, Valentin Villenave

Chercheurs, musiciens, compositeurs, membres de l'Oumupo

Et si la musique n'était, au fond, qu'une façon accessible, ludique et expressive, de faire des mathématiques ? Telle est l'une des pistes que proposent d'explorer les musiciens et théoriciens du collectif Oumupo (Ouvroir de musique potentielle).

En 1960, François Le Lionnais et Raymond Queneau fondent un collectif entièrement tourné vers le renouveau des formes littéraires : ce sera l'Oulipo (Ouvroir de littérature potentielle). Il a donné lieu à des œuvres audacieuses et inattendues telles que *Cent mille milliards de poèmes* de Queneau (Gallimard, 1961) ou *la Disparition* de Georges Perec (Gallimard, 1969). Cependant, dès le début, Le Lionnais envisage d'étendre cette démarche à toutes les autres formes d'expression. Il fonde ainsi de nombreux Ou*x*po (Ouvroirs de *x* potentiel) : Oupeinpo pour la peinture, Oumathpo pour les mathématiques, Oucinépo pour le cinéma… De cette époque datent également les premières expériences en matière d'Oumupo : plusieurs collectifs informels coexisteront pendant plusieurs décennies. C'est en 2011 qu'un Ouvroir de musique potentielle se formalise véritablement en tant que tel ; il est encore aujourd'hui en plein développement.

Quand la contrainte libère la créativité et incite à l'originalité

Les Ou*x*po cherchent à inventer des structures et des formes nouvelles. Leurs expériences les conduisent aussi parfois à renouveler le langage lui-même. Par exemple, un écrivain qui s'interdit d'utiliser certaines lettres, ou succession de lettres, est forcé de s'exprimer au sein d'un sous-ensemble restreint de la langue française, d'utiliser des mots et tournures peu courants, qui surprennent et intriguent dans leur *signifiant* (l'apparence extérieure des mots et des phrases), avant même d'accéder au *signifié* (le sens de ce qui est dit).

Dans le cas de l'Oumupo, il s'agit non seulement de réévaluer les langages purement musicaux (harmonie, rythme, mélodie, timbre), mais aussi de chercher des passerelles avec des langages issus d'autres domaines : textes (dans différentes langues), graphismes, géométrie et nombres. La musique est d'ailleurs souvent un excellent moyen de représenter des notions abstraites, d'appréhender des problèmes mathématiques parfois profonds. Réciproquement, les mathématiques sont une source d'inspiration pour concevoir de nouveaux procédés musicaux.

Codage et traduction. La musique est, en elle-même, un langage mathématique ; les nombres y sont omniprésents et s'expriment sous forme :

- de rythmes : cela inclut les durées des notes et des silences, mais aussi le nombre de répétitions d'une note ou d'un groupe de notes, et même la quantité d'évènements par unité structurelle (comme le nombre de notes par mesure) ;
- de hauteurs absolues : les degrés de la gamme diatonique sont couramment numérotés (en chiffres romains) ou désignés par des lettres de l'alphabet ; depuis le XXe siècle, il est même possible de désigner une hauteur par sa fréquence, mesurée en hertz ;
- de hauteurs relatives (on mesure l'intervalle avec une autre hauteur, précédente ou simultanée). En comptant les demi-tons entre deux notes, il est possible d'entrer dans le détail des accords et des harmonies ; le Tonnetz (voir plus loin) constitue à ce titre un autre outil original et intéressant.

La traduction d'un nombre ou d'une opération mathématique en éléments musicaux oblige parfois à se poser la question de la base de numération utilisée. En effet, alors que nous sommes tous habitués à manipuler les nombres en base 10 (décimale), la musique s'organise d'une toute autre façon. Ainsi, les temps et les mesures sont fréquemment comptés en puissances de 2 et, de ce fait, en base 4 (les *carrures* des musiciens) ou 8 (les *huit temps* des danseurs et danseuses). Par ailleurs, le choix de l'échelle de hauteurs peut obliger à compter en base 7 (pour la gamme diatonique, c'est-à-dire les touches blanches du clavier), en base 5 (les gammes pentatoniques orientales), en base 12 (la gamme chromatique, connue depuis les pythagoriciens)… Des subterfuges permettent malgré tout d'utiliser la base 10 : par exemple en partant d'une série de douze notes dans laquelle deux notes resteront fixes.

Combinatoire, géométrie… toutes les mathématiques mobilisées !

Transformations mélodiques. Des formes telles que le canon existent depuis des siècles ; des compositeurs tels que Jean-Sébastien Bach ont même prouvé qu'une même mélodie, jouée simultanément à des tempos différents, pouvait servir de contrepoint à elle-même. Il est donc possible d'explorer de nouvelles structures mélodiques et polyphoniques. Ainsi, les mélodies *auto-similaires* sont des mélodies qui se reproduisent elles-mêmes à des échelles différentes (tout comme les fractales en mathématiques) : en ne jouant qu'une note sur n, on retrouve la mélodie de départ.

Procédés combinatoires. Tout comme les écrivains de l'Oulipo explorent souvent les différentes anagrammes d'un mot en recombinant ses lettres, on peut combiner les notes et les accords. Mais comme la notion de sens est très différente en musique, plutôt que de se limiter à un lexique existant, on préfère faire entendre toutes les combinaisons possibles d'un matériau donné plutôt que de choisir arbitrairement celles qui plaisent le plus au compositeur, au musicien ou à l'auditeur.

Mots possibles	Mélodies possibles	
MODE	Do – Ré – Mi – Fa	Avantage de la musique sur les lettres !
DOME	Do – Ré – Fa – Mi	
DÉMO	Do – Mi – Ré – Fa	
~~DOBM~~	Do – Mi – Fa – Ré	
~~DEOM~~	Do – Fa – Ré – Mi	
~~MOED~~	Do – Fa – Mi – Ré	
~~MEDO~~	Ré – Do – Mi – Fa	
~~MEOD~~	Ré – Do – Fa – Mi	
…	…	

D'autres objets mathématiques permettent d'écrire de la musique : les carrés magiques, le triangle de Pascal, la courbe du dragon (voir plus loin), les attracteurs, la symétrie, le crible d'Ératosthène, les nombres premiers, les processus stochastiques…

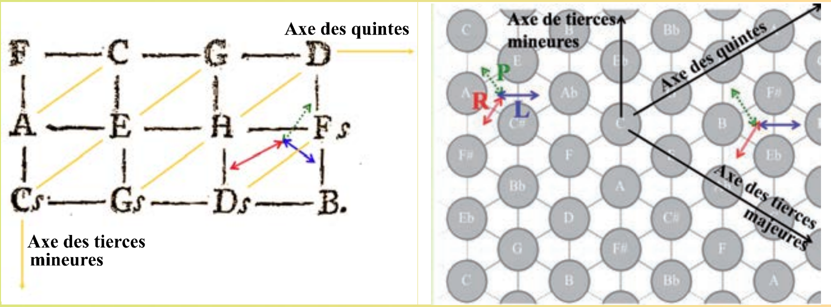
Le *Tonnetz* : de Leonhard Euler au nid d'abeilles

Le *Tonnetz* (« maillage de hauteurs ») est une structure géométrique introduite à l'origine par le mathématicien Leonhard Euler (1707 – 1783). Sous l'intitulé *Speculum Musicum* (« miroir de la musique »), il propose de représenter les hauteurs dans un espace en deux dimensions, à partir de deux axes correspondant respectivement à la quinte juste (l'intervalle ascendant *do – sol*) et à la tierce majeure (*do – mi*).

Le *Tonnetz* utilisé de nos jours pave le plan bi-dimensionnel en triangles, qui correspondent aux accords parfaits majeurs et mineurs (constitués de trois notes chacun) : en partant du barycentre d'un triangle (correspondant par exemple à *do – mi – sol*), il est possible d’opérer trois types de symétrie élémentaire, qui conduisent donc vers trois autres accords possibles, en ne changeant qu’une seule des trois notes :

- l’accord *relatif* (nommé R) : *do–mi–la* dans notre exemple,
- l’accord *homonyme* (nommé P pour *parallel*) : *do–mi♭–sol*,
- l’accord sensible (nommé L pour *leading tone*) : *si–mi–sol*.

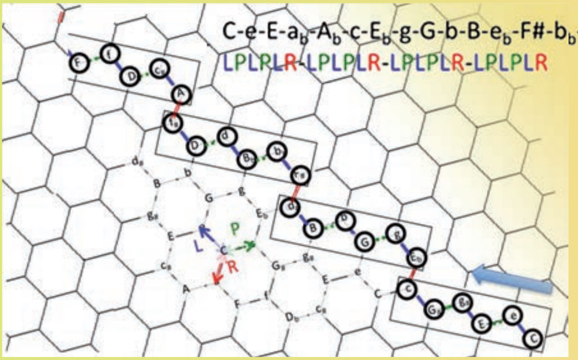
L’accord parfait majeur (ici, un accord de *do* majeur) ne conduit que vers des accords mineurs (*la* mineur, *do* mineur et *mi* mineur), et réciproquement.



Le *Tonnetz* et ses symétries : trois transformations d’un accord de *si* majeur (*si–ré#–fa#*, ou, en notation allemande, H–Ds–Fs), à gauche dans la représentation d’Euler et à droite dans celle utilisée aujourd’hui en analyse musicale.

À partir de cette triangulation du plan, on obtient un maillage hexagonal (en « nid d’abeilles »), où chaque note se trouve au centre d’un hexagone, entourée de six sommets (six notes pouvant former avec elle des accords parfaits). Au moyen des trois opérateurs R, P et L, on peut ainsi tracer dans ce maillage un parcours qui correspondra à une progression harmonique enchaînant plusieurs accords successifs. Il est même possible de trouver des parcours *hamiltoniens*, qui passent une fois et une seule par chacun des vingt-quatre accords majeurs et mineurs, et peuvent éventuellement terminer à leur point de départ. Il n’existe que cent vingt-quatre de ces « cycles hamiltoniens » ; on peut les classer selon leurs symétries internes, des plus simples (le *zig-zag*, où l’on alterne seulement deux transformations, par exemple L et R) aux moins périodiques (allant jusqu’à vingt-quatre transformations sans séquence répétée).

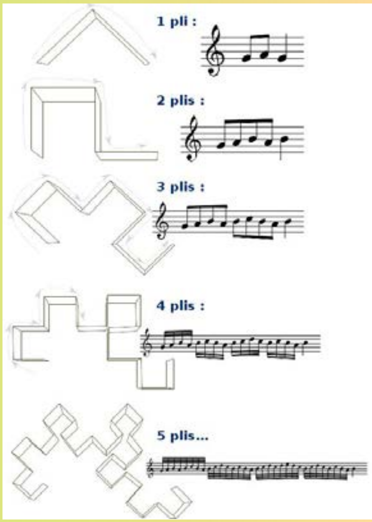
Ce catalogue de progressions d’accords ouvre des perspectives dans l’étude de l’organisation harmonique en musique, et permet de nouvelles formes d’écriture : les « chansons hamiltoniennes » font l’objet de concerts et d’ateliers ! Des élèves de Paris Sciences et Lettres ont ainsi construit une *Ballade-Marabout* avec un cycle hamiltonien périodique.



Un cycle hamiltonien créé en atelier d'écriture par des étudiants de Paris Sciences et Lettres. Saurez-vous identifier sa périodicité ?

Intermède : un petit jeu musical

Décrite par Martin Gardner en 1967, la courbe du dragon est un objet mathématique aussi simple que fascinant. Qui aurait songé à en faire… une partition musicale ? Tout commence avec le petit jeu qui consiste à plier successivement une bandelette de papier *n* fois, dans le même sens, puis à la déplier pour voir quelle forme a été obtenue. D'une complexité croissante selon le nombre de pliages, la courbe du dragon possède de nombreuses propriétés intéressantes (caractère fractal, auto-similaire, symétrique mais non-périodique…). Elle peut également être lue comme une suite de mouvements mélodiques :



0. Choisir une gamme (par exemple *do – ré ♯– mi – sol – la♭ – si*) ;
1. Plier une bandelette de papier deux fois dans le même sens, puis la déplier et la poser à plat ;
2. Jouer la note de départ, puis pour chaque « bosse » du papier, monter d'une note ; à chaque creux, descendre d'une note (en suivant la gamme choisie) ;
3. Reprendre la bande de papier, ajouter une pliure supplémentaire, puis rejouer la nouvelle mélodie ainsi obtenue.

La mélodie devient de plus en plus sophistiquée, mais aussi de plus en plus labyrinthique et mystérieuse. Cette beauté envoûtante et hypnotique vous conduira peut-être à « entendre » les constructions mathématiques d'une façon nouvelle !

Les chutes du Niagara : compression du son et perte d'information

Toute l'histoire de la compression des données tend vers un seul but : gagner de la place pour stocker un maximum d'information. Mais quel est l'intérêt de pouvoir stocker plus de dix ans de musique sur un seul disque dur ? Personne, aujourd'hui, n'a autant de temps à consacrer à une activité aussi improductive : l'Oumupo se devait de trouver des solutions novatrices !

L'*accélération* d'une musique enregistrée est une méthode aussi ancienne que le phonographe. En jouant à 45 tours / mn un disque prévu pour être joué à 33 tours / mn, on gagne 36 % de temps d'exécution (et 136 % à 78 tours / mn). Seul inconvénient : toutes les fréquences sont transposées vers l'aigu. Mais quelques œuvres spécifiques peuvent s'y prêter (comme la troisième *Gymnopédie* d'Erik Satie, 1888, sous-titrée « lent et grave »).

Les méthodes d'*élimination des séquences redondantes* sont assez efficaces et ne provoquent aucune perte d'information. En effet, de nombreux compositeurs – sûrement par paresse intellectuelle – s'« autoplagient » en réemployant des passages entiers (signes de reprise, mesures qui se répètent, motifs joués en boucle…), qu'il est donc facile de supprimer. Par exemple, un algorithme efficace permettrait de réécrire le fameux *Prélude en* ut de Bach en supprimant toutes les notes rejouées (et donc inutiles) : cinq notes par mesure au lieu de seize, soit un gain temporel de 69 % !

Plus complexe, la *méthode de superposition* consiste à rechercher les passages similaires dans une ou plusieurs œuvres, et à les jouer simultanément. Enfin, la *superposition aléatoire* est la méthode qui permet les gains les plus importants. Ainsi dans sa *Battalia à 10* (1673), Heinrich Ignaz Franz von Biber superpose huit mélodies populaires ; dans *Folk Music* (1972), Zygmunt Krauze en superpose vingt. Poussée à l'extrême, cette logique doit nous conduire à écouter enfin toute la musique possible… en même temps. On touche alors aux limites de la compression temporelle, la quantité d'information tendant ici vers zéro.

À l'oreille, ça ressemble assez au bruit des chutes du Niagara.

MA, MG, TJ & VV

Pour en savoir (un peu) plus :

Le site de l'Oumupo : ***oumupo.org*** .

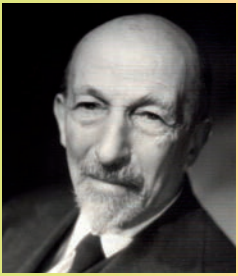
Les sites des auteurs : ***repmus.ircam.fr/moreno, martingranger.net, editions75.com, valentin.villenave.net***

Langages et mathématiques, un dialogue au cœur du cerveau humain

Marie Amalric

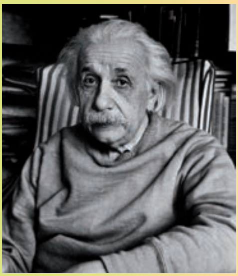
Doctorante au centre de neuroimagerie cérébrale NeuroSpin

La pensée mathématique peut-elle exister sans langage ? Voici une question séculaire qui intrigue bien des philosophes et des scientifiques. L'activité mathématique et les compétences pour le langage parlé reposent pour certains sur les mêmes mécanismes d'abstraction. Le linguiste américain Noam Chomsky prétend même que l'activité mathématique a émergé chez l'homme comme conséquence de ses capacités de langage ! Pourtant, la plupart des mathématiciens et physiciens ne perçoivent pas l'influence du langage dans leur réflexion. C'est ce qu'évoque notamment le mathématicien français Jacques Hadamard en 1945, dans un ouvrage analysant les processus à l'œuvre dans l'invention mathématique. En particulier, il y rapporte sa correspondance avec nombre de ses collègues, dont Albert Einstein, qui lui écrit : « *Les mots ou le langage, écrit ou parlé, ne semblent pas jouer le moindre rôle dans le mécanisme de ma pensée. Les entités psychiques qui servent d'éléments à la pensée sont certains signes ou des images plus ou moins claires [...] qui sont, dans mon cas, de type visuel et parfois moteur. Les mots [...] n'ont à être cherchés avec peine qu'à un stade secondaire* »



Jacques S. Hadamard (1865–1963).

© Bibliothèque centrale de l'École polytechnique (photo : studio Harcourt, Paris, 1950)



Albert Einstein (1879–1955).

© Bibliothèque centrale de l'École polytechnique (photo : studio Harcourt, Paris, 1950)

Noam Chomsky (né en 1928).

© Fotostory (via Shutterstock)

La fameuse «bosse des maths» revisitée

L'imagerie cérébrale permet aujourd'hui de poser cette question en laboratoire. En particulier, la technique d'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), en observant l'afflux sanguin fournissant l'oxygène nécessaire au fonctionnement des neurones, permet d'en localiser l'activité.

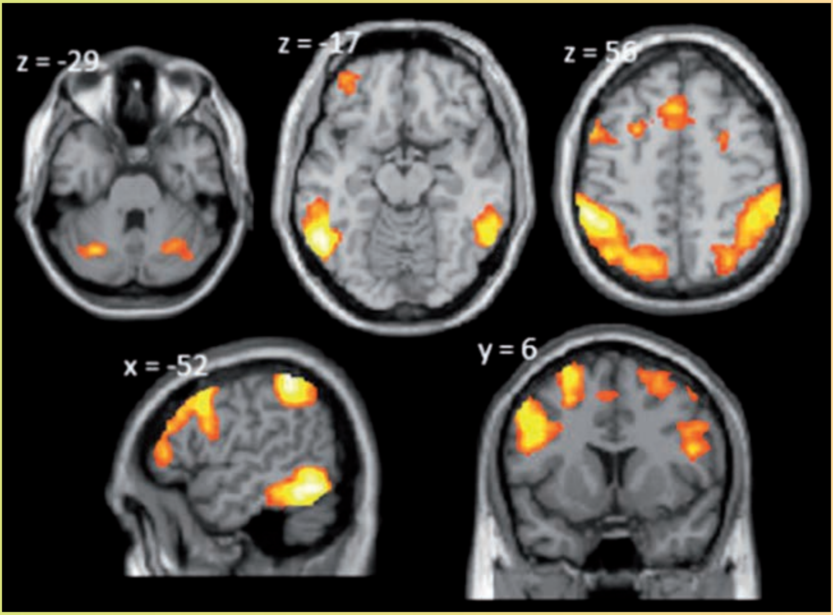
Appareil d'imagerie
par résonance magnétique
IRM à 3 Tesla – 128 canaux.

© Service de Neuro-Imagerie de l'Hôpital des Quinze-Vingts

Alors que les études passées s'intéressaient principalement à l'arithmétique élémentaire, notre laboratoire au sein du centre de neuroimagerie cérébrale NeuroSpin a, pour la première fois, pu mettre en place une série d'expériences permettant de déterminer quelles aires cérébrales sont impliquées dans la réflexion mathématique de niveau avancé. Une trentaine de mathématiciens professionnels se sont prêtés au jeu. Allongés dans l'IRM, ils ont écouté des affirmations mathématiques et non mathématiques de niveau avancé et ont dû déterminer en une poignée de secondes si chacune d'elles étaient vraies ou fausses.

Ces expériences ont permis de mettre au jour un ensemble d'aires cérébrales (en orange sur la figure en page ci-contre) impliquées dans toutes les activités mathématiques, quelle qu'en soient la difficulté ou la nature. En effet, que les mathématiciens vérifient la véracité d'une identité remarquable, réfléchissent aux propriétés du cercle trigonométrique, se confrontent à un problème géométrique, raisonnent sur des matrices ou réfléchissent à n'importe quel problème d'analyse, d'algèbre ou de topologie, le même réseau d'aires cérébrales s'active. Et nul besoin d'avoir la médaille Fields pour utiliser ces régions du cerveau : celles-ci s'activent aussi lorsque nous faisons des calculs arithmétiques, et même à la simple vue de nombres !

D'autres études d'imagerie cérébrale ont récemment suggéré que ce réseau est déjà impliqué chez les jeunes enfants non encore scolarisés lorsqu'ils mobilisent des intuitions mathématiques reliées au nombre et à l'espace, intuitions dont nous disposons tous à la naissance et que nous partageons avec de nombreuses autres espèces animales.



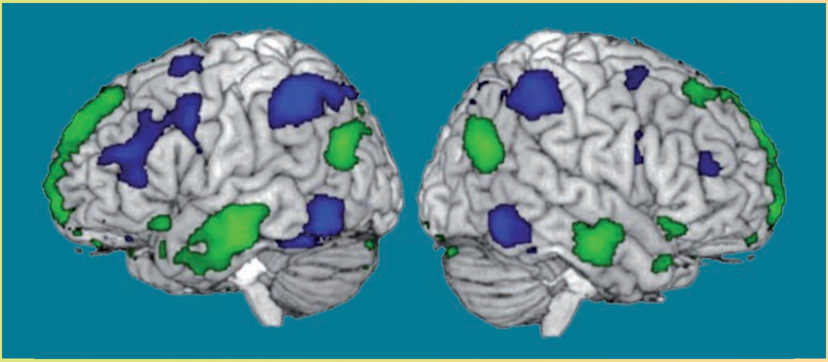
Coupes du cerveau

© Marie Amalric et Stanislas Dehaene,
Origins Of The Brain Networks For Advanced Mathematics In Expert Mathematicians, Proceedings Of The National Academy Of Sciences 113 (18), 2016

Ces observations coïncident avec la *théorie du recyclage neuronal*, développée par Stanislas Dehaene, qui stipule que les activités culturelles de haut niveau, telles que les mathématiques, recyclent des fondations cérébrales très anciennes dans l'évolution, comme le sens du nombre, de l'espace ou du temps.

Mathématiques et langage sont bien distincts dans le cerveau

Nos expériences ont également montré que, bien que les affirmations mathématiques prennent la forme de phrases, les aires cérébrales activées par les mathématiques (en bleu sur la figure qui suit) ne présentent aucun recouvrement avec les aires du langage. À l'inverse, lorsque la réflexion des mathématiciens porte sur des problèmes d'histoire ou de géographie, le réseau d'aires cérébrales qui s'active (en vert) est complètement différent des régions mathématiques et implique certaines aires du langage.



Cartes du cerveau entier.

© Marie Amalric et Stanislas Dehaene,
Origins Of The Brain Networks For Advanced Mathematics In Expert Mathematicians, Proceedings Of The National Academy Of Sciences 113 (18), 2016

On observe donc une séparation complète entre le traitement cérébral de la sémantique mathématique et celui de la sémantique générale. Cette dissociation se vérifie également lorsque l'on gomme toutes les différences syntaxiques, ou grammaticales, entre affirmations mathématiques et non mathématiques (par exemple : «l*'ensemble des entiers est dénombrable*» *versus* «*l'eau des lagons est turquoise*»).

Ce résultat concorde avec d'autres observations. Notamment, disposer d'un vocabulaire mathématique ne se révèle pas être absolument nécessaire à la compréhension de notions mathématiques. En effet, une étude a montré que des bébés âgés de seulement quelques heures (qui ne savent bien sûr pas encore parler) possèdent déjà des notions numériques abstraites. De plus, des recherches menées en Amazonie auprès des indiens Mundurukus, qui disposent d'un vocabulaire numérique et géométrique très pauvre et d'un accès limité à l'éducation, ont révélé qu'ils sont tout à fait capables de réaliser des opérations arithmétiques avancées, ou d'identifier des propriétés géométriques du plan et de l'espace. Par ailleurs, certains patients aphasiques (qui présentent des troubles de la compréhension ou de la production du langage) peuvent encore faire du calcul et de l'algèbre.

Jeune fille munduruku (Missão Cururu, État de Para, Brésil, 2006).

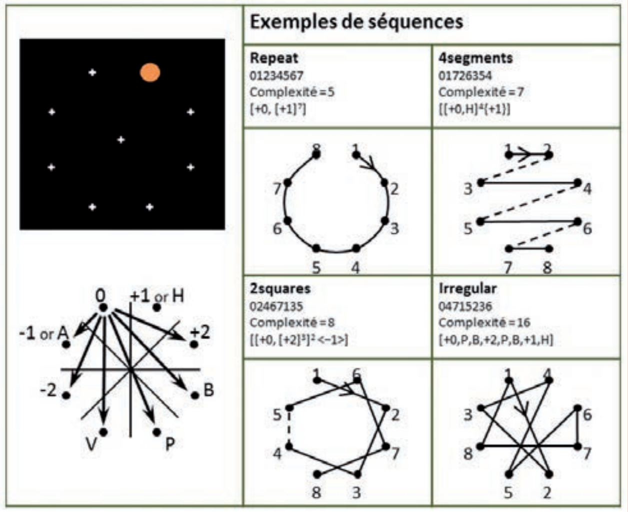
© Pierre Pica / CNRS

Ces études révèlent ainsi l'existence de primitives des mathématiques en l'absence de langage. On peut ne pas savoir nommer un carré, et pourtant posséder le concept de carré. La question qui se pose alors est de savoir s'il existe également un langage mathématique élémentaire, même lorsque l'on n'a pas été éduqué, même lorsque l'on n'a pas de mots pour le dire.

Dans notre laboratoire à NeuroSpin, nous avons conçu une situation suffisamment simple pour être présentée à de jeunes enfants ou à des Indiens Mundurukus, mais qui requiert une sorte de langage de l'esprit, en l'occurrence un « langage de la géométrie ». Cette situation demande de regarder une séquence spatiale présentant plusieurs positions successives, d'en prédire la suite, et d'en mémoriser l'ensemble. La prédiction s'appuie sur la détection de régularités géométriques dans la séquence : symétries, rotations, formes… La présence de régularités facilite également la mémorisation.

Le langage requis pour décrire les séquences observées contient à la fois des primitives géométriques (déplacement, symétrie) et la capacité de combiner ces primitives sous forme de règles de répétition. Dans ce langage formel, chaque séquence possède une certaine complexité, associée à la longueur de sa description. Notre langage géométrique et les complexités des séquences prédisent efficacement les erreurs commises par les participants dans les tâches de prédiction et de mémorisation des séquences. Ces résultats semblent indiquer d'une part que le cerveau humain possède une forme de langage de la pensée géométrique indépendant de tout langage parlé naturel, et d'autre part que le cerveau cherche dans ce langage l'expression la plus courte possible qui permet de rendre compte de ce qui a été observé.

Ces résultats semblent donner raison à l'introspection d'Albert Einstein, selon laquelle les mots n'interviennent pas dans la réflexion mathématique. A-t-il également raison de penser que les images mentales constituent le support privilégié du traitement du contenu mathématique ? Alors que l'expérience visuelle n'est pas requise pour développer des concepts mathématiques avancés, puisque des sujets aveugles sont tout à fait capables de faire des mathématiques, on observe que des aires cérébrales de traitement visuel s'activent lorsque les notions mathématiques abordées dans nos expériences d'IRM impliquent une certaine visualisation de la solution (sur le cercle trigonométrique ou dans le plan complexe par exemple), et ce aussi bien chez des mathématiciens voyants que non voyants. La nature de cette imagerie mentale n'est cependant pas connue et mérite encore d'être étudiée.



Exemples de séquences géométriques.

© Marie Amalric, Liping Wang, Pierre Pica, Santiago Figueira,
Mariano Sigman et Stanislas Dehaene, 2016,
Fast Comprehension of Embedded Geometrical Primitives And Rules In Human Adults And Preschoolers, PLOS Computational Biology

Le langage dans l'apprentissage des mathématiques

Les mathématiciens ayant participé à nos études d'imagerie cérébrale avaient tous bénéficié de nombreuses années d'étude préalables des mathématiques. On ne peut donc que conclure que l'utilisation et le traitement de notions mathématiques bien connues se passent du langage parlé naturel. Toutefois, si l'on peut supposer qu'une fois acquis, les concepts mathématiques sont encodés de manière abstraite, symbolique, et ne font plus appel au langage, celui-ci pourrait au contraire jouer un rôle important dans leur apprentissage. C'est donc vers l'étude des relations entre mathématiques et langage, dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques à l'école, qu'une partie des études en neurosciences cognitives se tournent désormais.

M.A.

Le sanskrit et les mathématiques

Gérard Huet

Directeur de recherche émérite Inria
Membre de l'Académie des sciences

Le sanskrit est la langue savante de la civilisation indienne. Ses plus anciens textes sacrés, constituant le Veda (ou littérature révélée), ont été transmis par une tradition orale remontant au deuxième millénaire avant notre ère. Cette transmission, très exacte, a été assurée par des procédés de récitation de formes combinatoires redondantes de ses hymnes. Les mètres très sophistiqués de ces poèmes montrent une maîtrise de l'analyse combinatoire sous la forme de la prosodie (*chandas*), érigée comme discipline de connaissance. La découverte du sanskrit par les orientalistes de la fin du XVIIIe siècle a été le point de départ de la linguistique comparative au XIXe siècle, qui a engendré à son tour la linguistique générale occidentale, notamment grâce à la découverte des grammairiens antiques de l'Inde.

Des analogies avec les structures de données informatiques

Bien que transmis très fidèlement, le sanskrit védique est une langue archaïque complexe, et la compréhension des hymnes antiques est affaire de spécialistes. Par contre, le sanskrit classique est une langue essentiellement figée par la grammaire de Pāṇini, au IVe siècle avant l'ère commune. Cette grammaire est un monument majeur parmi les œuvres intellectuelles de l'humanité, comme l'a déclaré le linguiste américain Leonard Bloomfield. Elle décrit avec une précision sans égale dans aucune autre langue les conditions sémantiques d'utilisation des procédés phonologiques, morphologiques, et structurels du langage pour obtenir des énonciations grammatica-

Pāṇini (timbre indien émis en 2004).
© www.delcampe.net

lement correctes et signifiantes. De fait, elle n'a jamais été surpassée. Un commentaire magistral dû à Patañjali (II^e^ siècle avant l'ère commune) donne des éclaircissements et quelques compléments, et une refonte au XVII^e^ siècle réorganisa l'ordre des instructions sans en changer la teneur (*Siddhānta Kaumudī*).

Ce n'est que récemment que la grammaire de Pāṇini a été comprise à sa juste valeur. Ce texte, compréhensible seulement après un entraînement spécialisé, liste quatre mille formules très concises appelées *sūtras*.

Ce formulaire peut être compris comme le texte d'un programme informatique non déterministe permettant d'élaborer une énonciation à partir de l'intention de communication du locuteur. Le texte présuppose des connaissances phonétiques telles que la classification des phonèmes du sanskrit selon les traits phonétiques de position d'articulation, de distinction sourd–sonore, de présence ou absence de souffle, de nasalisation. La phonétique était reconnue de haute antiquité comme discipline de connaissance. La grammaire utilise certains phonèmes de la langue comme marqueurs métalinguistiques, anticipant de deux mille cinq cents ans les non-terminaux des grammaires de Chomsky ! Les phonèmes sont listés au début de la grammaire, entrelacés avec des marqueurs, afin de définir les sous-ensembles de phonèmes qui y interviennent. Ce codage est en fait une structure de données très concise pour dénoter ces sous-ensembles. Fait remarquable, il a été montré que ce codage est optimal. De fait, la concision de la grammaire fait appel à toutes sortes de techniques de partage et d'abréviation, ce qui lui permet d'être complètement mémorisable.

La grammaire de Pāṇini est le fondement d'une tradition de spéculation linguistique et sémiotique indienne, existant des siècles avant l'avènement, avec Ferdinand de Saussure au XIX^e^ siècle, de la discipline en Occident. Ce fait est bien reconnu par les linguistes, qui ont puisé largement à cette tradition, et une initiation au sanskrit est toujours de rigueur pour les étudiants en linguistique. En effet, la grammaire de Pānini définit les bases des calculs morpho-phonétiques modernes à base d'automates d'états finis, ainsi que celles de la syntaxe structurale à la Tesnière, qui a donné lieu aux développements récents des grammaires de dépendance, fondées sur des notions de rôles sémantiques d'agents du discours. D'autres disciplines intellectuelles de l'Inde antique, comme l'herméneutique (*mīmāṃsā*), ont discuté de notions d'économie, de cohérence et de pragmatique de la communication, qui n'ont été dégagées en Occident que dans les années 1960 avec la *théorie des actes de langage* de John Langshaw Austin et John Rogers Searle.

Il est maintenant reconnu que Pāṇini ne fut pas seulement un linguiste de génie, mais il fut un informaticien avant la lettre. En effet, sa grammaire, vue comme un programme informatique, repose sur des abstractions algorithmiques remarquables. En plus des structures de partage et de compression déjà mentionnées, on trouve en effet une méthodologie de réécriture algébrique sur les mots qui ne sera exposée en Occident qu'avec les systèmes de Post–Thue dans les années 1940. L'application d'une règle de réécriture dans un contexte utilise un codage d'enregistrements à l'aide de formules utilisant le paramètre morphologique de cas pour distinguer les champs, anticipant les spécifications de règles de transductions rationnelles mises au point en linguistique computationnelle dans les années 1980. De plus, les règles de la grammaire sont munies d'une notion de portée hiérarchique (*anuvṛtti*) qui anticipe la structure de contrôle d'appel par filtrage dans les langages de programmation modernes. Enfin, les méta-règles d'arbitrage du non-déterminisme définissent une structure de contrôle sophistiquée, anticipant la programmation orientée objet. On peut donc dire sans exagération que Pāṇini a posé les bases d'une méthode universelle de calcul relationnel bien avant les spéculations occidentales sur la notion de calculabilité au sein de la logique mathématique.

Une langue technique, idéale pour toutes les sciences

L'importance du sanskrit comme langue semi formalisée par l'existence d'une grammaire générative complète, dont le statut évolua de grammaire descriptive à celle de grammaire prescriptive, fit que cette langue standardisée et munie d'une sémantique rigoureuse joua dans une certaine mesure en Inde le rôle que jouèrent les mathématiques en Grèce comme support de l'argumentation rationnelle. La scholastique traditionnelle, utilisant le sanskrit muni d'une ontologie de notions lexicalisée, effectua un tournant méthodologique avec l'œuvre magistrale *Tattvacintāmaṇi* (« Joyau de la vérité ») du logicien Gaṅgeśa, fondateur de l'école de Mithilā de Nouvelle Logique (*Navyanyāya*) au XIVe siècle. Cette école de sémiotique dialectique mit au point un calcul relationnel de notions formalisées en mots composés. Ces derniers (qui peuvent atteindre des dizaines de composantes) expriment de manière précise les relations entre objets du discours en explicitant leurs rôles sémantiques au sens de la grammaire du sanskrit et en levant les ambiguïtés possibles de la langue.

L'utilisation de ce langage formel (une sorte de méta-sanskrit) fut alors adoptée pour l'ensemble des sciences indiennes (*śāstra*). Cette langue technique, enseignée jusqu'à nos jours dans les établissements traditionnels d'enseignement, est indispensable pour comprendre tous les traités de la connaissance élaborés en Inde à partir du XIVe siècle. Seulement connue en Occident d'une poignée de spécialistes, sa position

Représentation supposée de Piṅgala.

[https://bindass.org/aryabhata-is-not-zero-but-the-inventor-is-pingala/]

précise par rapport aux formalismes mathématico-logiques modernes n'a pas encore été rigoureusement établie.

Les mathématiques ont connu un développement important dans l'Inde antique. L'analyse combinatoire fut développée pour rendre compte de la prosodie, dès l'ouvrage fondateur *Chandaḥśāstra* de Piṅgala (antérieur à –400). Les considérations de métrique menèrent les théoriciens de la poésie aux premières investigations de la suite de Fibonacci et des cycles de de Bruijn. Une autre source de spéculations mathématiques était le problème de construire des autels de sacrifice obéissant à des conditions géométriques. Ainsi, Baudhāyana (IV^{e} siècle avant notre ère) donna l'approximation 577 / 408 (soit 1,414215…) de la racine de 2, et énonça le théorème de Pythagore.

Dès les premiers siècles de notre ère, la notation décimale et le 0 étaient connus. L'astronomie développa pour ses besoins l'algèbre et la trigonométrie. Āryabhaṭa, astronome du Kerala (vers 500), évalua π à 3,1416 et l'année solaire à 365,3586805 jours; il proposa une théorie héliocentrique du système solaire, avec une Terre sphérique tournant sur son axe. Bhāskarācārya, qui dirigeait l'observatoire d'Ujjayinī, publia vers 1150 le *Siddhāntaśiromaṇi* («Couronnement de science»), somme de connaissances mathématiques et astronomiques en quatre chapitres: *Līlāvatī* (calcul arithmétique), *Bījagaṇita* (algèbre), *Grahagaṇitādhyāya* (calcul des planètes) et *Golādhyāya* (trigonométrie sphérique appliquée

Āryabhaṭa.

[http://vedicsciences.net/artiles/history-of-numbers-part-2.html]

Bhāskarācārya.

[http://economictimes.indiatimes.com/slideshows/people/indian-maths-wizards-and-their-ideas/bhaskara-ii-1114-1185/slideshow/40354408.cms]

aux globes terrestre et céleste). Cette œuvre étonnante, rédigée en vers et pleine d'humour, présente le matériau mathématique sous une forme divertissante et donc facile à mémoriser. Il est émaillé d'applications calculatoires concrètes, tout en spéculant sur des objets abstraits comme les irrationnels et les limites. Le souci de la preuve est laissé aux commentateurs. Cette mathématique débridée est dans l'esprit artistique général de la littérature sanskrite, où les considérations esthétiques sont essentielles.

Des jeux de langues d'une richesse et d'une profondeur inouïes

Le drame sanskrit fut codifié de haute antiquité, et à sa suite la poésie fut l'objet de nombreuses spéculations esthétiques, développées dans un mouvement de critique littéraire impliquant des philosophes de premier plan comme Abhinavagupta. Les procédés rhétoriques, aussi bien phonétiques (assonance) que sémantiques (sens suggérés, sous-entendus), furent classifiés et critiqués. L'ambiguïté inhérente à la représentation continue des énonciations (*sandhi)* fut exploitée pour élaborer des récits se prêtant à un sens caché (*śleṣa*), ce qui donna naissance à un genre littéraire en soi, où un texte se prête à de multiples narrations simultanées. Ces jeux de langue, superposant par exemple à un panégyrique royal superlatif un sens caché injurieux, et où l'humour et l'érotisme voisinent avec le sacré, ont fait l'objet d'une poésie de cour extravagante auprès de laquelle les irrévérences du mouvement Oulipo paraissent des jeux d'enfant. On composa des poèmes se lisant comme l'histoire de Kṛṣṇa dans un sens, et l'histoire de Rāma en sens inverse (en lisant le poème à l'envers syllabe par syllabe). Un poème pouvait avoir jusqu'à sept interprétations différentes, en variant sa segmentation en mots. Ces jeux formels avec la langue présentent un continu avec la combinatoire mathématique, et ont forgé une tradition intellectuelle originale propre à la littérature sanskrite.

Le traitement informatique de la langue sanskrite a été entrepris depuis une quinzaine d'années. La grammaire de Pāṇini est progressivement traduite en termes de calculs effectifs, permettant de simuler la production d'énonciations conformes aux règles de la grammaire. Le problème inverse, visant à comprendre un texte sanskrit, est l'objet de recherches très actives. La compilation des règles morpho-phonétiques de Pāṇini en transducteurs rationnels inversibles a mené à la réalisation d'analyseurs lexicaux et étiqueteurs morphologiques utilisant des outils mathématiques intéressants, comme les *machines d'Eilenberg*, qui généralisent les automates d'états finis. L'utilisation d'algorithmes de résolution de contraintes sur des graphes de dépendance permet d'espérer disposer d'ici peu d'analyseurs syntaxiques, utilisables pour annoter sémantiquement le corpus sanskrit, au moins pour la prose. Ceci ouvrira la voie à la manipulation par ordinateur du corpus de textes sanskrits, qui est considérable. Lorsqu'une quantité suffisante de textes auront été annotés par des linguistes et philologues avec l'aide de ces logiciels, on peut espérer que les techniques d'apprentissage profond permettront de mieux automatiser ces traitements, et d'avoir ainsi accès aux trésors de savoir de la langue sanskrite.

G. H.

Pour en savoir (un peu) plus :

Some features of the technical language of Navya-Nyāya. Sibajiban Bhattacharyya. *Philosophy East and West* 40 (2), 1990.

Extreme Poetry. Yigal Bronner, Columbia University Press, 2010.

Pāṇini – A survey of research. George Cardona, Mouton, 1976.

Towards a formal regimentation of the Navya-Nyāya technical language. Jonardon Ganeri, in *Logic, Navya-Nyāya and Applications*, College Publications, 2008.

A Functional Toolkit for Morphological and Phonological Processing, Application to a Sanskrit Tagger. Gérard Huet, *Journal of Functional Programming* 15 (4), 2005.

Sanskrit signs and Pāṇinian scripts. Gérard Huet, in *Sanskrit and Computational Linguistics,* D.K. Publishers, 2016.

Materials for the study of Navyanyāya logic. Daniel Ingalls, Harvard University Press, 1951.

Śābdabodha and the problem of knowledge-representation in Sanskrit. Bimal Krishna Matilal, *Journal of Indian Philosophy* 16, 1988.

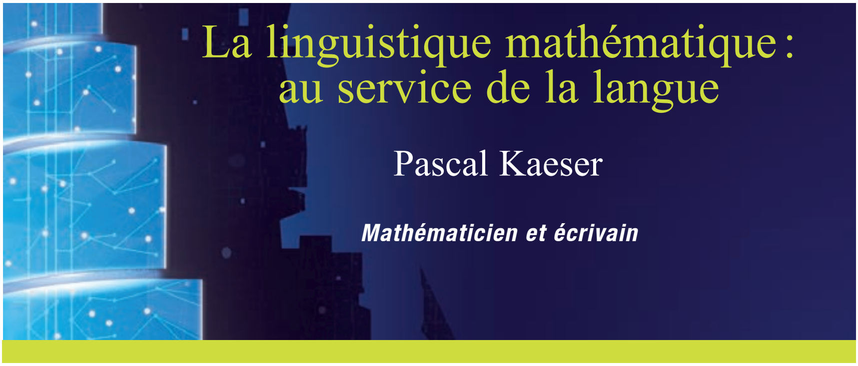
***A Mathematical Analysis of Pāṇini's* Śivasūtras.** Wiebke Petersen, *Journal of Logic, Language and Information* 13 (4), 2004.

La grammaire de Pāṇini. Louis Renou, École Française d'Extrême-Orient, 1966.

Materials for the study of Navyanyāya logic. Daniel Ingalls, Harvard University Press, 1951.

Euclid and Pāṇini. Frits Staal, *Philosophy East and West* 15 (2), 1965.

The Aṣṭādhyāyī of Pāṇini. Rama Nath Sharma, Munshiram Manoharlal Publishers (six volumes), 1987–2003.



La linguistique mathématique : au service de la langue

Pascal Kaeser

Mathématicien et écrivain

Les mathématiques peuvent nous aider à étudier la langue. La première idée, naïve, consiste simplement à compter les mots : un texte est plus difficile à lire quand le nombre moyen de mots par phrase et le nombre moyen de syllabes par mot sont élevés… Essayons cependant de mettre en évidence, sous la forme d'un dialogue imaginaire, des liens plus profonds !

L'odyssée du nombre : des probabilités à la statistique

« L'idée de compter les mots d'un texte n'est après tout pas si mauvaise. Y a-t-il un domaine qui s'y intéresse sérieusement ?

– Oui, la *lexicométrie* consiste à appliquer la statistique à des textes. Au niveau le plus bas, on cherche à déterminer la richesse d'un vocabulaire, la fréquence d'un mot, d'une fonction grammaticale… À un niveau plus élevé, on se risque à définir des types de distance intertextuelle. Les unes se focalisent sur les mots, d'autres sur les fonctions grammaticales, d'autres encore sur les phonèmes, la ponctuation, *etc*. L'interprétation soulève des problèmes. Une distance peut rendre deux textes "suffisamment proches" pour justifier le soupçon qu'ils aient le même auteur, tandis qu'une autre distance tendrait plutôt à invalider pareille hypothèse.

– Alors, est-ce Molière ou Corneille qui écrivit le *Misanthrope* ?

– C'est un génie, peu m'importe son nom !

– Où nous entraîne encore l'odyssée du nombre sur les flots du *logos* ?

– À l'*Ulysse* de James Joyce. En classant par ordre décroissant les fréquences f_1, f_2… des mots présents dans cette œuvre, le statisticien et linguiste américain George Zipf découvrit une loi curieuse, qui sera publiée en 1949 : f_n vaut environ f_1/n. C'est la fameuse *loi de Zipf* :

George Kingsley Zipf
(1902–1950)
à l'âge de 15 ans.

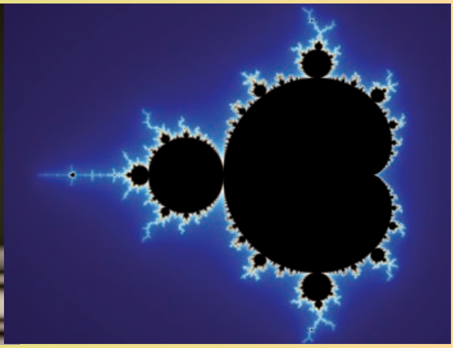
© Freeport High School, Freeport (Illinois, États-Unis)

la fréquence d'occurrence d'un mot dans un texte est inversement proportionnelle à son rang dans l'ordre des fréquences.

– C'est donc une observation, une loi empirique. A-t-elle un fondement ?

– Il semble : dans les années 1950, Benoît Mandelbrot démontre, grâce à la théorie de l'information de Shannon, que la loi de Zipf est en fait un cas particulier d'une loi plus générale, où le choix des paramètres permet de mieux coller à la réalité. Il utilise pour ce faire la *loi statique de Shannon*, qui énonce que le coût de représentation d'une information augmente comme le logarithme du nombre des informations à considérer, et la *loi dynamique de Shannon*, selon laquelle les symboles les moins coûteux sont à exploiter en priorité. Tu sais, comme dans le code Morse : la lettre "e", la plus fréquente, est matérialisée par un simple point alors que le "x", plus rare, est codé par "trait point point trait".

– Une créature littéraire accouche de théorèmes mathématiques. C'est beau…
– Connais-tu l'*Eugène Onéguine* de Pouchkine ?



Le mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot (1924–2010) est le père des fractales.

© Rama, 14 mars 2007 *© Wolfgang Beyer, 2006*

– Oui, je l'ai lu dans une prodigieuse traduction en octosyllabes, due à André Markowicz.

– Amusante proximité ! Je veux en effet te parler d'Andreï Markov. En 1913, ce mathématicien russe dégagea une notion, nommée plus tard *chaîne de Markov*, d'une étude statistique portant sur les vingt mille premières lettres d'*Eugène Onéguine*, en ne retenant que l'aspect voyelle–consonne. Il compta les paires de voyelles adjacentes, les paires de consonnes adjacentes, et les autres paires, de manière à pouvoir évaluer par exemple la probabilité qu'une voyelle succède à une voyelle.

– Cette idée a-t-elle débouché sur un outil mathématique nouveau et efficace ?

– Au-delà de ce que tu peux imaginer : les chaînes de Markov sont omniprésentes en sciences et incontournables pour nombre d'ingénieurs ! »

Andreï Andreïevitch Markov (1856–1922) fut le premier à décrire les processus stochastiques.

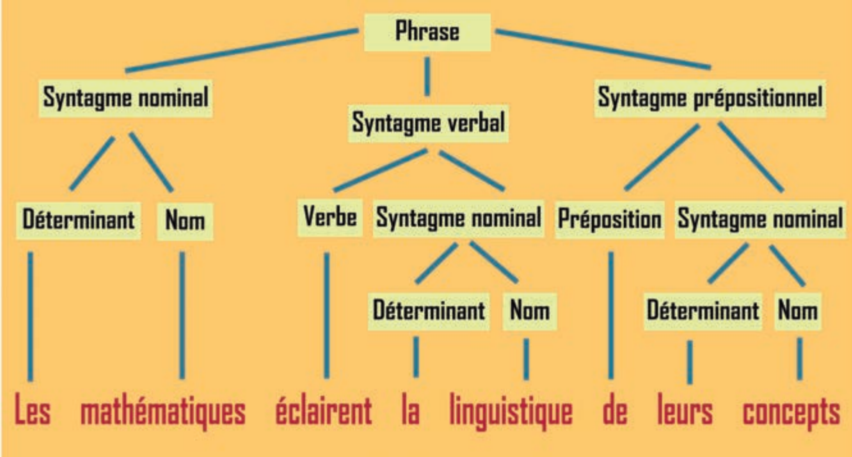
Le choix des termes : dites-le avec des mots… imagés

« Selon le philosophe allemand Arthur Schopenhauer, le monde doit être considéré comme volonté et comme représentation. Quelles figures me proposes-tu pour représenter le verbe ?

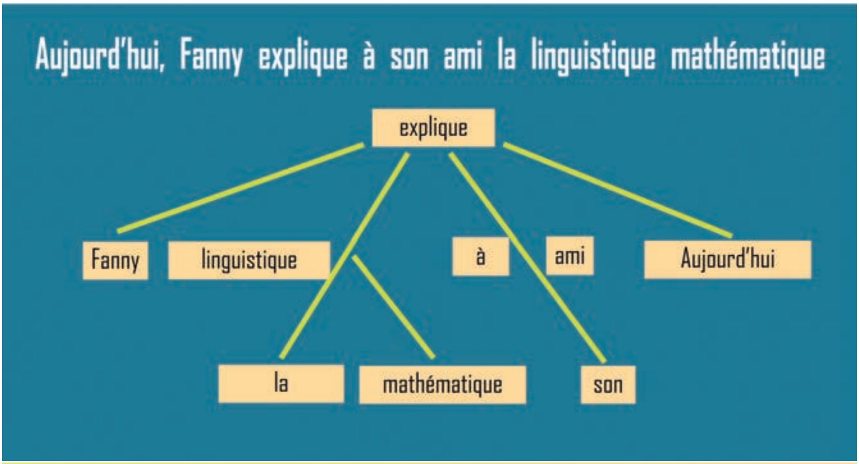
– Dans le jardin des mathématiques, l'homme a planté plusieurs arbres de la connaissance. L'*arbre syntagmatique* de Noam Chomsky (1957) décompose une phrase en groupes, puis les groupes en sous-groupes, *etc.*, jusqu'à obtenir au bout de chaque branche un mot de la phrase. L'*arbre de dépendance* de Lucien Tesnière (1959) hiérarchise les mots selon des relations de subordination : dans une phrase, à part le verbe, chaque mot est le dépendant d'un autre. L'*arbre à bulles* de Sylvain Kahane (1997) s'en inspire pour étudier plus finement les phrases complexes.

– Le choix des termes semble très suggestif et visuel…

– Un petit dessin vaut souvent mieux qu'un long discours !



Un arbre syntagmatique.



Un arbre de dépendances.

Un autre outil graphique est la clique. En 1998, Sabine Ploux et Bernard Victorri ont mené une étude sur la polysémie de “sec”. Ils ont construit un graphe dont les soixante-trois sommets sont le mot “sec” et ses synonymes trouvés dans sept dictionnaires. Chaque fois que deux de ces soixante-trois mots sont synonymes, une arête les relie. Ce graphe n’est pas *complet* : en effet, les synonymes de “sec” ne sont pas tous synonymes entre eux (par exemple, “brusque” et “maigre” ne sont pas synonymes), et donc il existe des paires de sommets non reliés. Une *clique* est un ensemble maximal de sommets tous reliés deux à deux. Le graphe des synonymes de “sec” comporte quatre-vingt-quatorze cliques, comme {sec ; fauché ; pauvre}. Une méthode classique permet d’associer à chaque clique un point dans un espace à soixante-trois dimensions. Avec des outils judicieux, on peut alors découper le nuage de points en plusieurs zones qui correspondent chacune à un sens de “sec”. Six acceptions principales se dégagent : qui manque d’eau ; maigre, décharné ; stérile, improductif ; qui manque de sensibilité ; bref, abrupt ; seul.

– Je serais probablement parvenu au même résultat en sondant ma mémoire…

– À l’ère de l’ordinateur, on justifie souvent la mathématisation d’une tâche de l’esprit par la possibilité d’automatisation qui en résulte.

– Est-ce une bonne chose ?

– Cette question nous entraînerait trop loin. Le rêve d’algébriser la grammaire, qui s’inscrit lui aussi dans le courant du traitement automatique des langues, a suivi plusieurs voies. Yehoshua Bar-Hillel propose dès 1953 des lois de simplification qui permettent de savoir si une phrase abstraite, c’est-à-dire une succession de fonctions grammaticales, appartient ou non à une catégorie donnée de grammaire formelle. Dans les années 1960, Chomsky remporte un grand succès, tant auprès des linguistes que des informaticiens, avec sa théorie des grammaires génératives. »

Des aventures dont certaines restent à imaginer

« Les grammaires génératives ? De quoi s’agit-il ?

– On part d’un symbole initial, ou d’une chaîne de symboles. Selon des règles fixées, on opère des substitutions successives jusqu’à la construction d’une phrase. Les règles qui définissent une grammaire générative sont de la forme suivante : telle chaîne C de symboles peut être remplacée par telle autre chaîne C’ de symboles ou tel symbole S peut être remplacé par tel mot M. Dans chaque cas, l’unicité n’est pas requise.

– Que de chemin parcouru depuis l’introduction d’une forme de structuralisme dans la linguistique par Ferdinand de Saussure au début du XX^{e} siècle ! Ou même depuis Leibniz, qui se demandait quel est le nombre d’énoncés, de taille variant de 1 à un entier fixé, que l’on peut formuler avec un alphabet de vingt-quatre lettres. Ces nouvelles perspectives ouvrent des horizons étonnants…

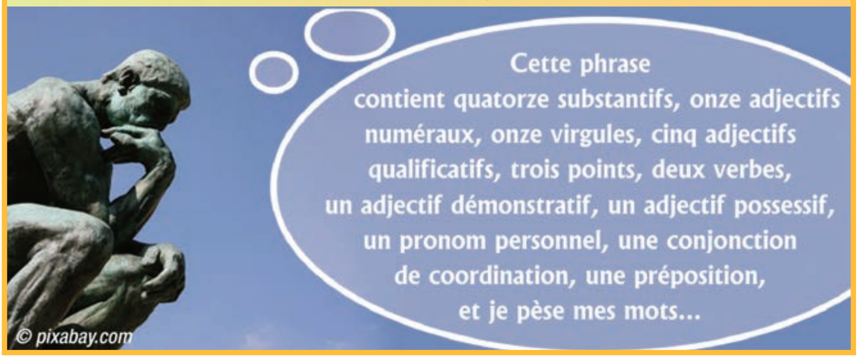
Portrait de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) peint par Christoph Bernhard Francke vers 1700.

– Eh oui, la langue nous permet d'accomplir de beaux voyages. Il y a ceux dont nous avons parlé, il y en a beaucoup d'autres. Traverser des espaces topologiques pour cueillir des fleurs de la sémantique, développer des méthodes combinatoires pour identifier des suites de lettres, ou engager monoïdes libres et demi-groupes pour mettre en concert la phonologie, combien d'aventures, dont certaines restent à imaginer, attendent l'amateur de mots !

Le pouvoir de la langue, c'est d'amener le poète, le philosophe, le mathématicien et le linguiste à s'embrasser. »

P. K.

Exercice de Style.



Pour en savoir (un peu) plus :

« Œuvres complexes. Rire, frémir, rêver, rimer, férir. »
Site Internet administré par Pascal Kaeser, ***www.pascalkaeser.ch*** .

« Fatrazie, jeux de l'esprit. »
Site Internet administré par Alain Zalmanski, ***www.fatrazie.com*** .

Des mots du quotidien aux concepts mathématiques

Emmanuel Sander

Professeur à l'Université Paris 8
Responsable de l'équipe Compréhension, raisonnement et acquisition de connaissances (CRAC)

En mathématiques, il existe des formules qu'un béotien serait bien en peine de décoder, qui font la joie des caricaturistes pour montrer que les mathématiciens vivent dans un univers abscons. Dans leurs versions les plus impénétrables, s'y mêlent du calcul intégral, des signes de sommations indicées, des dérivations partielles, des fonctions sinus, cosinus, exponentielle, logarithmique, quelques lettres grecques mathématiquement connotées, telles que $\pi, \Delta, \mu, \alpha, \theta, \omega$, des quantificateurs logiques comme $\exists$ ou $\forall$. Ces formules sont là pour dire au non-mathématicien qu'il existe un univers qui lui est étranger où tout est enchaînement de formules régies par des règles codifiées dans un monde parallèle à celui des concepts de la langue parlée, qui eux résistent à toute tentative d'une telle formalisation. Ainsi prend corps la vision d'un monde mathématique clos réservé aux privilégiés qui en ont les clés, indépendant des langues naturelles humaines, extérieur à elles, étanche à elle, et de ce fait transculturel, intemporel, universel.

Une page extraite du fameux « carnet perdu » du célèbre mathématicien indien Srinivasa Ramanujan.

La hantise d’une contradiction nichée dans l’édifice mathématique

Certes, les mathématiciens utilisent leur langue pour parler de notions traduisibles en formules absconses. Toutefois, si l’on suit la vision précédente, ce serait par nécessité communicative, car les concepts ont bien besoin de mots pour les désigner, et ce en respectant la loi de l’arbitraire du signe chère à une certaine tradition linguistique selon laquelle les « chiens » pourraient tout aussi bien s’être appelés « chats » et réciproquement. Autrement dit, même si le langage s’en mêle, les termes mathématiques seraient des labels verbaux arbitraires évoquant des idées mathématiques traduisibles en formules d’autant plus absconses que le niveau du mathématicien s’élève.

Or selon nous*, cette vision est un mythe. Elle n’est pas un mythe scientifique au sens où il existe des formalismes mathématiques où les objets mathématiques sont caractérisés par des propriétés et suivent des lois inscrites dans des théorèmes, l’ensemble étant régi par des lois logiques afin que l’édifice dans son entier soit une forteresse scientifique jamais prenable en défaut, car une contradiction nichée quelque part mettrait potentiellement en péril la construction toute entière. En revanche, il s’agit d’un mythe psychologique, qui ignore que les concepts mathématiques se développent dans des têtes humaines, débutantes comme de mathématiciens aguerris.

En effet, un être humain fait évoluer sa pensée en faisant évoluer ses concepts. Et aucun concept n’arrive tout constitué ; il se développe dynamiquement dans l’esprit d’une personne en fonction de ses expériences antérieures, appréhendées elles-mêmes en fonction des concepts dans leur état antérieur. Cela repose sur un mécanisme psychologique d’analogie cherchant à apparier ce qui survient à l’instant et ce qui est survenu par le passé, ce mécanisme adaptatif permettant de capitaliser sur l’expérience.

Ainsi, si lors d’un voyage exotique on se trouve face à face avec un animal qui ressemble furieusement à un lion va-t-on prendre ses jambes à son cou car l’analogie avec le lion est suffisamment forte pour nous faire craindre pour notre vie. La vie étant si pleine de nouveautés et de surprises – toute situation rencontrée comporte sa part de nouveauté – seule l’analogie avec le connu, et non l’identité, permet d’aborder l’inconnu. Ce phénomène analogique est tellement indispensable à nos existences, tellement consubstantiel à nos états de créatures mues par un instant de survie nourri par la capitalisation de l’expérience, qu’il est irrépressible.

* *Ces idées, développées dans l’ouvrage* l’Analogie, cœur de la pensée *(Odile Jacob, 2013), sont largement redevables de notre travail commun avec Douglas Hofstadter.*

Seule l'analogie avec le connu permet d'aborder l'inconnu

Il s'ensuit que dans un cerveau humain, une notion mathématique ne peut pas se greffer dans son format mathématique le plus pur. Elle est abordée par un individu par le biais de concepts préalablement construits. Les concepts mathématiques naissent dans des esprits humains, par analogie avec des concepts non mathématiques, ce qui laisse penser que même si le monde mathématique a une certaine existence platonicienne, il n'en est pas moins lié au monde non mathématique, qu'il s'agisse du monde matériel ou de celui des idées.

Si les phénomènes d'analogie et de porosité sémantique entre concepts quotidiens et notions mathématiques n'existaient pas, on ne comprendrait d'ailleurs pas pourquoi il n'est pas fait exclusivement usage en mathématiques de termes purement techniques propres à la discipline, afin d'éviter tout quiproquo et toute contamination du sens scientifique par le sens commun. En effet, lorsque l'on parle de concepts, le langage affleure. L'usage d'un mot d'une langue oriente vers un concept associé à ce mot et cette orientation n'est pas anodine car elle institue une première interprétation. Or de nombreuses notions mathématiques élémentaires sont désignées par des mots de la langue commune ; par exemple « addition », « soustraction », « multiplication », « division », « somme », « différence », « rapport », « produit », « égalité », « fraction », « droite », « figure », « point », « élément », « ensemble », « union », « intersection », « plan », « coordonnées », « surface », « implique », « équivaut », « et », « ou », « espace » *etc.* réfèrent tous à des mots pour lesquels des entrées existent dans les dictionnaires avec des significations non mathématiques.

Cette collusion terminologique entre vocabulaire quotidien et vocabulaire mathématique est loin de se restreindre aux notions les plus triviales : « vecteur », « fonction », « norme », « distance », « ordre », « continu », « dérivé », « intégral », « degré », « dimension », « convergence », « suite », « série », « fini », « infini », « groupe », « anneau », « corps », « adhérence », « intérieur », « densité », « complexe », « imaginaire », *etc.*


SOUS-TIROT. s. m. Anc. mar. Petit bateau dont il est fait mention dans l'ordonnance du sel.

SOUSTRACTIF, IVE. adj. Minér. Se dit d'une variété dans laquelle un des exposants est moindre d'une unité que la somme des autres.

SOUSTRACTION. s. f. (pr. *çou-strak-ci-on*). Action de soustraire. Soustraction de papiers et d'effets. Être accusé de soustraction d'effets. Il fut convaincu de soustraction de papiers, de soustraction frauduleuse. Les *soustractions* commises au préjudice des conjoints parents, ascendants ou descendants, ne donnent lieu, en général, qu'à des réparations civiles ; mais le Code pénal prononce des peines dans ces cas contre les recéleurs d'objets soustraits. (Chabr. Cham.) La loi prononce certaines peines contre les *soustractions* commises par les fonctionnaires, par les dépositaires, les comptables ou par les particuliers dans les dépôts publics. (Id.)

— Arithm. Opération qui a pour but, étant donnée la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre. Le résultat de la soustraction se nomme *reste, excès* ou *différence*. Faire une soustraction. Faites la soustraction.

— On voit, par la définition que nous avons donnée, que la soustraction est l'inverse de l'addition. Il en résulte que le procédé opératoire doit être pour la soustraction tout l'opposé de celui qu'on emploie dans l'addition. En effet, considérant l'un des nombres donné comme la somme de l'autre nombre donné et du nombre que l'on cherche, c'est-à-dire comme formé de la combinaison de leurs différentes parties, unités, dizaines, centaines, etc., il suit que si l'on retranche successivement les unités, les dizaines, etc., du plus petit nombre donné de celles du plus grand, il devra naturellement rester celles du nombre cherché. La soustraction, selon qu'elle a lieu sur des nombres entiers ou sur des nombres complexes, se divise en simple et en complexe.

— *Soustraction simple.* Celle qui a lieu sur des nombres entiers et même sur des nombres

Début de la définition du mot *soustraction* (dictionnaire Bescherelle,1861).

© Patrick Arrivetz

Cette relation entre langage et mathématique n’est pas anodine car le choix du mot a des répercussions directes, marquées et robustes sur la manière de concevoir la notion mathématique, et pas simplement pour un débutant.

Aller au-delà des conceptions véhiculées par le langage courant

Que vous soyez élève d’école primaire, professeur des écoles, étudiants à l’université ou en classe préparatoire scientifique, si l’on vous donne pour consigne d’« inventer un problème de soustraction qui se résout par l’opération 8 – 3 = 5 », dans la très grande majorité des cas, l’énoncé que vous proposerez aura la forme suivante : « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith...) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes...). Il/Elle en donne (perd, mange...) 3 à sa sœur (pendant la récréation...). Combien lui en reste-t- il ? » Autrement dit, un individu disposera d’une quantité de 8, puis un certain évènement surviendra qui la diminuera de 3, et la question portera sur la recherche d’un reste. Il est très rare de trouver l’énoncé « Pierre avait 3 billes. Il en gagne à la récréation et ensuite il en a 8. Combien en a-t-il gagnées ? », ou « Paul a 8 billes. Pierre a 3 billes. Combien Paul a-t-il de billes de plus que Pierre? », bien que la même opération de soustraction 8 – 3 = 5 s’applique tout autant.

Trésor de billes.

© Patrick Arrivetz

Ce phénomène tient au langage : parmi les synonymes de « soustraire », on trouve « enlever, ôter, retrancher, retirer », qui orientent vers l’idée d’une diminution, pourtant moins à même de couvrir les scénarios de soustraction susceptibles d’être rencontrés par les élèves que celles d’écart ou de différence. De même, il est contre-intuitif, et difficile pour un élève de début d’école primaire, de trouver que l’énoncé « Paul avait des billes avant la récréation. Il en perd 3. Maintenant il lui en reste 5. Combien Paul avait-il de billes avant la récréation ? » se résout par une addition, car ce scénario de perte semble contradictoire avec l’addition vue comme une opération d’ajout.

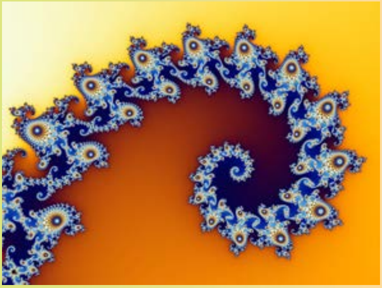
L’idée que la multiplication rend plus grand, dont découle la difficulté d’inventer un problème de multiplication pour lequel on a moins à la fin qu’au début, ou celle que la division rend plus petit, dont découle la difficulté d’inventer un problème de division pour lequel on a plus à la fin qu’au début, tiennent aussi aux significations extra mathématiques de ces termes. Ainsi, les trois quarts d'adultes étudiants en licence en sciences humaines échouent à construire un problème de division dans lequel le résultat est supérieur à la valeur initiale. Cela tient au fait que la division est conçue comme une opération de partage, exprimée dans des définitions comme « séparer quelque chose, le partager en plusieurs parties égales ou non », et par des synonymes tels que « partager, séparer, fragmenter, disjoindre, fractionner, découper, dissocier, scinder », qui orientent vers l'idée d'un tout scindé en parties ; cela exclut la possibilité d'une division qui rende plus grand. En revanche, la conception quotitive selon laquelle diviser A par B c'est chercher combien de fois on peut mettre B dans A demande d'aller au-delà de la conception véhiculée par le langage, mais permet de concevoir aisément des scénarios de divisions qui accroissent (« Dans 2 mètres de tissus combien puis-je découper de bandelettes de 0,15 m ? »).

Nous avons suggéré que si le choix conventionnel du terme pour désigner cette opération était plutôt « mesurage », la possibilité d'accroissement semblerait bien plus évidente dans la mesure où il suffirait d'envisager une unité de mesure inférieure à l'unité pour obtenir un résultat supérieur à la valeur initiale.

Psychologie des notions mathématiques

Les mathématiciens ne sont pas à l'abri de l'influence des conceptions véhiculées par la langue. Prenons le cas de la notion de continuité. Le continu se définit comme « ce qui n'est pas interrompu », d'où l'idée de courbes que l'on peut tracer sans lever le stylo. Selon cette conception de la continuité, la possibilité d'une fonction qui soit partout continue mais dérivable nulle part paraît absurde car on imagine que si l'on zoome sur le tracé de la fonction on devrait trouver la possibilité de tangentes à la courbe hors de rares points de cassure. D'ailleurs Adrien-Marie Ampère (1775–1836) pensait avoir démontré cela et ce n'est que tardivement que Bernard Bolzano, Bernhard Riemann ou Karl Weierstrass exhibèrent des fonctions continues partout et dérivables presque nulle part, non sans susciter des réactions vives qui montrent que l'axiomatique coexiste avec des idées beaucoup plus proches de celles véhiculées par la langue. Ainsi Charles Hermite de déclarer : *« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »*, et Henri Poincaré de renchérir : *« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées [...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos* *pères, et on n'en tirera jamais que cela.»* Pourtant ces fonctions sont denses dans l'ensemble des fonctions continues et elles sont maintenant parfaitement intégrées aux mathématiques, notamment à travers les objets fractals.

Ainsi, sans aborder la question très distincte de savoir si la pensée mathématique est de nature différente de la pensée non mathématique, qui ébaucherait le débat d'une possible différence de nature entre une pensée littéraire et une pensée scientifique, nous espérons avoir montré que la nature psychologique des concepts conduit à ce que les mots de la langue influencent la façon dont les notions mathématiques sont découvertes par les élèves puis continuent d'être pensées y compris après enseignement. La langue ouvre vers les concepts et les concepts permettent la pensée. C'est une nécessité que les notions mathématiques se fondent sur des concepts communs, vers lesquels les mots de la langue commune les orientent, car sans ces analogies, même imparfaites, trompeuses et approximatives, nul espoir que les germes n'aient jamais été plantés pour permettre l'émergence des déclinaisons formelles de ces notions; et même lorsque celles-ci existent, cela ne déconnecte pas le mathématicien de ses tendances analogistes et sémanticiennes mais lui donne des appuis plus solides pour aller au-delà des sens véhiculées par la langue commune, peut-être sans jamais totalement s'en extraire, pour certes être parfois piégé, mais parfois aussi pour y puiser des inspirations créatives.



Les fractales illustrent la notion contre-intuituve de courbes partout continues mais dérivables en aucun point.

E.S.

Pour en savoir (un peu) plus :

L'analogie : cœur de la pensée (chapitres 7 et 8). Douglas Hofstadter et Emmanuel Sander, Odile Jacob, 2013.

Les connaissances naïves en mathématiques. Emmanuel Sander, in *les Connaissances naïves*, Jacques Lautrey, Sylvianne Rémi-Giraud, Emmanuel Sander et Andrée Tiberghien (direction), Armand Colin, 2008.

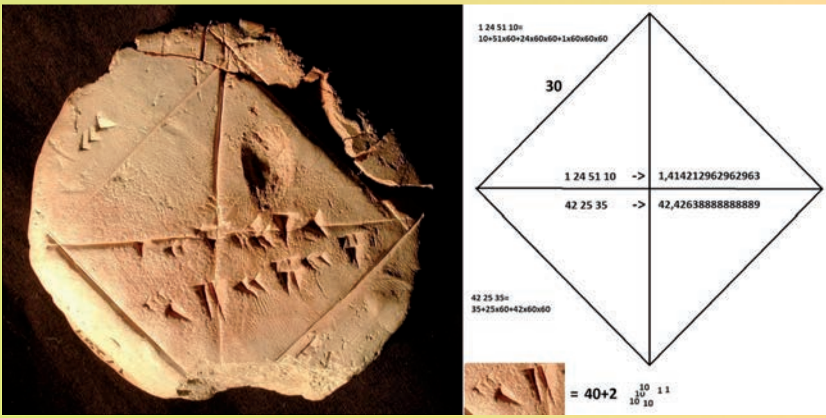
Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés ! Édouard Thomas, in *Maths Société Express*, CIJM, 2016.

Algorithmes et intelligence artificielle : l'information derrière les données

Cédric Villani

Directeur de l'Institut Henri Poincaré, lauréat de la médaille Fields

Les algorithmes mathématiques ont probablement plus de quatre mille ans d'âge, comme le suggèrent les tablettes qui nous sont parvenues de la Babylone antique. Ils ont grandi en sophistication et diversité en même temps que les théories mathématiques, mais c'est au milieu du XX^e^ siècle qu'ils ont pris une ampleur toute particulière. D'une part, pour la première fois sans doute dans l'histoire, le sort d'un évènement géopolitique majeur (la Seconde Guerre mondiale) dépendait de la mise au point d'algorithmes sophistiqués, en l'occurrence par les services secrets britanniques. D'autre part, dès les années 1950, les bases de l'informatique moderne furent posées, avec la découvertes des transistors et les travaux d'Alan Turing, Claude Shannon, John von Neumann, Norbert Wiener et d'autres.



L'un des plus anciens algorithmes connus, le calcul de la racine carrée de 2, représenté sur une tablette d'argile par un scribe il y a près de quatre mille ans.

© Yale Babylonian Collection, n^o^ 7289, université de Yale (États-Unis)

Depuis, les progrès algorithmiques ont été fulgurants, aboutissant au monde que nous connaissons, où des secteurs entiers de l'activité humaine ont été révolutionnés par l'algorithmique. Peut-être est-ce en finance que cette révolution est la plus vertigineuse, comme on peut le voir dans les ouvrages *6|5* d'Alexandre Laumonier (Zones Sensibles, 2014), avec des fortunes s'évaporant en une fraction de seconde et des opérations menées à un rythme surhumain par des algorithmes mystérieux qui s'affrontent comme dans un jeu de rôles. Impossible de savoir si cela s'étendra à l'ensemble des secteurs d'activité, mais il est certain que les algorithmes joueront un rôle de plus en plus important dans notre économie, nos sociétés et nos vies.

Les statisticiens n'ont jamais été autant demandés…

Un chapitre important dans la longue montée en puissance de l'algorithmique est l'émergence de l'intelligence artificielle. D'un côté, ce n'est qu'une partie de l'algorithmique ; mais elle vient avec tant de paramètres inconnus et de potentiel que certains n'hésitent pas à la nommer la *« quatrième révolution industrielle »*. Pourtant, c'est un domaine assez ancien, puisque l'intelligence artificielle (IA pour les intimes) naît dans les années 1950 avec les travaux d'Alan Turing et de Claude Shannon. De part et d'autre de l'Atlantique, les deux mathématiciens ont eu, de fait, des convergences d'intérêts assez remarquables.

Cependant l'intelligence artificielle a connu une alternance de périodes de progrès rapide et de stagnation désespérante. Les phases de progrès ont engendré de grands espoirs et de grandes peurs, comme dans *2001 : l'Odyssée de l'espace* de Stanley Kubrick (Warner Bros, 1968). Nous sommes actuellement dans une phase de progrès rapide, due à la convergence de plusieurs facteurs :

– l'augmentation des capacités et performances des ordinateurs a permis de franchir certains seuils importants, permettant une vraie différence qualitative dans l'efficacité des algorithmes ;

– la généralisation des communications et bases de données a permis l'émergence de quantités énormes de données et d'exemples à l'échelle mondiale ;

– les grandes données (Big Data) ont donné une nouvelle impulsion aux méthodes d'apprentissage automatique fonctionnant par exemples.

L'intelligence artificielle d'aujourd'hui accorde une place bien plus importante aux exemples, au détriment, pourrait-on dire, de la recherche de sens et de modèles.

Le domaine a récemment explosé dans la sphère des affaires, de l'innovation technologique ; les questions liées à l'intelligence artificielle et à l'apprentissage machine sont parmi les plus demandées pour la prospective et la stratégie. Il a aussi propulsé la statistique au sommet des compétences mathématiques les plus valorisées et les plus demandées, un renversement des rôles pour une discipline qui avait longtemps souffert d'être considérée avec une certaine condescendance.

De la difficulté de définir un système «intelligent»

Qu'est-ce qu'un système intelligent ? C'est d'abord un système qui recherche de «bonnes» solutions face à un problème ; le premier champ mathématique qui vient à l'esprit est donc celui de l'optimisation. De fait, les algorithmes d'IA empruntent énormément aux techniques d'optimisation. Une méthode générale consiste à partir d'une solution insatisfaisante et à la modifier de proche en proche pour l'améliorer. Un savant dosage d'outils déterministes et de méthodes aléatoires est nécessaire. Prenons une analogie simple : pour trouver le plus haut sommet dans un paysage, la première méthode qui vient en tête consiste à suivre la plus grande pente ; mais si l'on fait ainsi, on va vite se retrouver coincé au sommet d'une petite colline, plutôt que d'une haute montagne. Si l'on s'autorise parfois quelques déviations aléatoires, avant de remonter, on a plus de chances de parvenir au but.

Un système intelligent c'est aussi un système qui apprend, et qui s'adapte au contexte. Les environnements sont très variables, et on ne peut espérer avoir une méthode infaillible qui fonctionne dans tous les cas : il s'agit, avec des méthodes simples, de trouver une solution qui soit, probablement, presque optimale.

Claude Shannon en train de manipuler la souris «Thésée» dans son labyrinthe.

© Bell Labs, 1952

C’est ainsi que l’apprentissage automatique (ou *machine learning*) s’est imposé comme une composante clé de l’intelligence artificielle : la capacité d’un algorithme de passer en revue l’information disponible et d’en tirer une amélioration de son propre fonctionnement. Thésée, la souris mécanique de Shannon, qui apprenait à sortir d’un labyrinthe, est l’un des plus anciens exemples d’apprentissage machine.

Réseaux de neurones, apprentissage profond et données énormes

L’intelligence, c’est aussi apprendre à classer les situations et les objets, ou encore plus généralement à reproduire une fonction d’intérêt. Un phénomène se produit encore et encore, et vous voulez lui donner un nom, ou un sens, ou trouver une règle sous-jacente simple. Pour accomplir cette classification, les algorithmes d’apprentissage machine utilisent de nombreuses règles et méthodes. Au fur et à mesure des années, les méthodes vedettes changent : aujourd’hui ce sont, sans conteste, les *réseaux de neurones* qui tiennent le devant de la scène. Leur principe général consiste à reproduire une fonction observée en optimisant des réseaux de « neurones », reliés les uns aux autres, chacun collectant des signaux, les combinant en leur attribuant plus ou moins de poids, et transmettant un signal résultant. Le réseau de neurones reçoit un signal en entrée, et en fournit un en sortie ; il s’optimise lui-même de façon à être au plus proche d’une fonction observée et connue par des exemples.

Il y a encore dix ans, les réseaux de neurones étaient considérés avec le plus grand scepticisme par les meilleurs experts du sujet, mais la ténacité de scientifiques bricoleurs, comme Yann Le Cun, les a ramenés sur le devant de la scène. Les techniques en jeu font intervenir un nombre assez important de « couches » de neurones, ce qui justifie le nom d’*apprentissage profond* (ou *deep learning*) pour le sujet.

Dans tout ce sujet, on se retrouve face à des nombres gigantesques : par la quantité énorme de bases de données que l’on utilise pour calibrer les algorithmes, mais aussi par l’extrême complexité des phénomènes représentés, qui se traduit par de très grandes dimensions. Par exemple, dans une analyse du sens des mots, on utilise couramment des espaces de dimension 300 ou davantage !

Pourtant, un pari majeur de l’IA consiste à postuler que, derrière cette grande complexité, il suffit en pratique d’un nombre restreint de paramètres pour « extraire du sens ». Par exemple, le populaire modèle OCEAN (pour « ouverture, conscienciosité, extraversion, agréabilité, neuroticisme ») en psychologie utilise seulement cinq paramètres pour

En 1996, le champion d'échecs Garry Kasparov perd contre une intelligence artificielle.

© History.com, 1996

En 2016, le champion de go Lee Sedol s'incline lui aussi devant une intelligence artificielle.

© Lee Jin-man & Associated Press, 2016

représenter les personnalités humaines dans toute leur diversité ! C'est ainsi que des phénomènes complexes se retrouvent bien plus prédictibles qu'on ne l'aurait cru. Un autre pari consiste dans la foi de l'algorithme à identifier les paramètres pertinents.

Promesses et peurs : l'IA appliquée dans tous les secteurs

L'IA est maintenant utilisée régulièrement pour nombre d'activités : reconnaissance automatique de formes et d'images, prédiction (d'élections, de mouvements de foule, d'évolution de pathologies), diagnostic, classification, compositions artistiques par imitation… Dans le domaine de l'éducation, du perfectionnement de la relation humaine, de la gestion des environnements complexes, elle fait miroiter des possibilités considérables.

Une application emblématique est la détermination de préférences (allocation séquentielle de ressources, ou « problème de Netflix ») : en fonction de ce qu'un client a déjà acheté, que peut-on lui recommander maintenant ? Ce type d'algorithme a été utilisé jusqu'à la lie pour des fins commerciales.

Une autre application phare est la voiture automatique, qui apprend à conduire par l'exemple.

Enfin, on ne peut passer sous silence la traduction automatique, qui a fait des progrès inouïs grâce à l'exemple et aux grands corpus de traductions, bien plus que par une approche sémantique et grammaticale.

Certaines avancées scientifiques, en particulier dans le domaine de la biologie, ont pu être réalisées ainsi : classification des espèces, reconstitution de phylogénies… En même temps, l'IA pose des questions fort dérangeantes ! Laissons de côté le mythe de la création d'une IA surhumaine, qui s'occuperait de nous détruire : on ne voit pas ce rêve, ou ce cauchemar, se réaliser avant longtemps. Mais d'autres menaces sont bien présentes. En premier lieu, le *doute sur la fiabilité*. Déjà, les algorithmes d'apprentissage machine s'optimisent eux-mêmes : on ne peut donc jamais savoir avec certitude ce qu'ils feront ! Comment certifier légalement un dispositif ainsi obtenu, s'il est d'importance vitale ? Par ailleurs, personne ne comprend vraiment ce qui fait qu'une méthode comme le réseau de neurones fonctionne si efficacement, pourquoi elle semble si robuste… Une autre menace est la *difficulté de communication avec l'humain*. On a du mal à faire confiance aux algorithmes si l'on ne comprend pas la raison de leurs choix (c'est le cas en santé, mais aussi dans les choix économiques). Faire en sorte que les algorithmes puissent présenter et exposer leurs choix est un enjeu vital.

Il faut aussi ne pas perdre de vue la *possibilité d'usage non pertinent*. L'ouvrage de Cathy O'Neil *Weapons of Math Destruction : How Big Data Increases Inequality And Threatens Democracy* (Crown, 2016) présente de nombreux exemples où les algorithmes d'IA sont utilisées de façon défectueuse, non rigoureuse, ou non éthique, avec des conséquences désastreuses, soit parce que l'algorithme est mal maîtrisé et qu'on lui fait trop confiance, soit parce qu'il est très efficace mais employé à des fins maléfiques.

Cela conduit en outre à différents questionnements épistémologiques : quand on résout un problème d'IA de façon inductive par une collection d'exemples, est-ce que l'on peut dire qu'on le comprend ? Ne trahissons-nous pas ainsi l'idéal scientifique en nous contentant d'une « boîte noire », si efficace soit-elle ?

Enfin, il ne faut pas sous-estimer le *risque économique* : l'efficacité des systèmes d'IA pour accomplir nombre de tâches des humains laisse penser à un possible danger de crise économique majeure par augmentation du chômage. Cette possibilité est prise très au sérieux par divers groupes de réflexion.

L'intelligence artificielle est un domaine chaud, au cœur de l'actualité scientifique et de notre société. Elle remet en question bien des certitudes, apporte promesses et dangers tout à la fois. Sans tomber dans les écueils que sont la confiance aveugle, la terreur ou le rejet, il faut voir qu'elle fournit des domaines d'étude passionnants et que la meilleure connaissance de ses ressorts et de ses implications sera un enjeu majeur de la société à venir. Pour cela, on aura besoin des mathématiciens.

C.V.

La prospérité des langages informatiques

Jean-Jacques Dupas

Ingénieur–chercheur au Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives et président de l'association Playmaths

Programmer un ordinateur, c'est lui donner une suite d'instructions qu'il sera capable d'exécuter. Au commencement, on introduisait directement des mots binaires, qui étaient exécutés par le processeur. À ce niveau, on parle de *langage machine*, car on communique avec la machine dans sa propre langue. Ce langage se limite au jeu d'instructions du processeur et est spécifique pour chaque processeur. Dans ces conditions, programmer une opération même élémentaire est un travail long et fastidieux : la productivité en langage machine est très faible. Le premier progrès est l'utilisation du *langage assembleur* dès 1954. Dans ce langage, les mots de commandes binaires sont remplacés par des mnémoniques, qui sont plus compréhensibles par l'humain. Par exemple, « stocker le mot binaire 00 dans le registre A du processeur » pourrait être représenté par « STOREA 00 ». Bien que l'assembleur soit un grand progrès, le développement en assembleur reste laborieux… mais très efficace.

Le compilateur et l'interpréteur pour prendre un peu de hauteur

La montée en abstraction suivante est l'invention du *langage de haut niveau*. L'idée est de disposer d'un langage indépendant du jeu d'instructions du processeur et fournissant des opérations de plus haut niveau. Ainsi, une opération aussi courante que l'affectation d'une valeur à une variable nommée VAR va se traduire, en assembleur, par le chargement de cette valeur dans un registre du processeur, puis du déversement de ce registre dans une case mémoire. Il faut ainsi gérer l'utilisation des registres du processeur et l'utilisation de la mémoire. Dans le langage de haut niveau, cette gestion est transparente pour l'utilisateur. Cependant, un programme reste nécessaire pour transformer le langage de haut niveau en langage machine. Il existe au moins deux stratégies : le compilateur et l'interpréteur.

L'informaticienne
et vice-amirale américaine
Grace Hopper (1906–1992).

© United States Navy

Le premier compilateur fut réalisé par Grace Hopper en 1952. Un *compilateur* est un programme Comp qui vérifie que le *programme source* S (écrit dans le langage de haut niveau) respecte bien la grammaire de Comp, puis transforme S en un programme exécutable par la machine cible. Un même programme source pourra, s'il n'utilise pas de ressources spécifiques, être compilé pour plusieurs machines. Il existe même des compilateurs *croisés*, c'est-à-dire que l'on compile un programme sur une machine pour une autre machine. L'avantage de la compilation est la vérification statique du code source. En outre, le code généré est optimisé par le compilateur, ce qui produit un exécutable efficace.

L'*interpréteur*, quant à lui, interprète (!) chaque ligne du programme S, vérifie sa grammaire, la traduit, puis l'exécute. L'intérêt de l'interpréteur est qu'il est plus facile à mettre en œuvre, mais l'exécution de S est en général moins performante. Avec le progrès des processeurs, les langages interprétés comme Python (Python Software Foundation, 1990) ou Ruby (Yukihiro Matsumoto, 1995) sont cependant revenus en force…

John Warner Backus (1924–2007).

© Purchased from the 4th Earl of Lytton via Leggatt Bros, June 1953

Peter Naur (1928–2016).

© Eriktj

Un métalangage «paradoxal», qui peut se décrire lui-même !

Un langage de haut niveau doit donc respecter une grammaire. Assez tôt, on a pensé à utiliser un langage pour décrire la grammaire et la syntaxe des langages de programmation. On parle de *métalangage*, et le BNF (pour *forme de Backus–Naur*) en est un exemple. Un paradoxe apparent est que ce langage, introduit au début des années 1960 par John Backus et Peter Naur … peut se décrire lui-même !

```
syntax      ::=  { rule }
rule        ::=  identifier  "::="  expression
expression ::=  term { "|" term }
term        ::=  factor { factor }
factor      ::=  identifier |
                  quoted_symbol |
                  "("  expression  ")" |
                  "["  expression  "]" |
                  "{"  expression  "}"
identifier ::=  letter { letter | digit }
quoted_symbol ::= """ { any_character } """
```

La syntaxe BNF exprimée en BNF.

Les langages de haut niveau, apparus dans les années 1950, guident le programmeur ; parfois même, ils le contraignent. On peut les classer suivant les *paradigmes* (ou styles fondamentaux) qu'ils permettent d'utiliser. Le *style impératif* est proche de la structure des processeurs et de son architecture von Neumann, les instructions sont exécutées les unes après les autres. La plupart des anciens langages sont impératif : C (Dennis Ritchie et Bell Labs, 1972), Pascal (Niklaus Wirth, 1970), Fortran (John Backus et IBM, 1954), Cobol (Short Range Committee, 1969)… Dans le *paradigme objet*, le programme est découpé en classes qui interagissent entre elles (on parle de langages *orientés objet*). Les grands représentants sont C++ (Bjarne Stroustrup, 1983), Java (Sun Microsystems, 1995), Python, Ruby. Avec le *paradigme fonctionnel*, tout est fonction (au sens mathématique du terme) ; c'est le cas de Lisp (John McCarthy, 1958), Haskell (Le comité Haskell, 1990), OCaml (Inria, 1996). En Python, les fonctions elles-mêmes sont des objets, permettant donc une approche fonctionnelle.

On peut également classer les langages informatiques par la façon dont les types de données sont traités. On distingue les langages à *typage fort*, comme Ada (CII Honeywell Bull, 1980), dans lesquels une variable ou un paramètre d'une fonction doivent obligatoirement avoir le type présent lors de la déclaration, sous peine de générer une erreur à la compilation. Les langages à typage fort sont robustes, mais nécessitent de réécrire en permanence le même algorithme avec des types différents. À l'opposé se trouvent des langages comme Python pour lesquels le typage est *dynamique* (on décide au dernier moment du type d'une variable, on ne déclare d'ailleurs pas le type des variables ni des paramètres…).

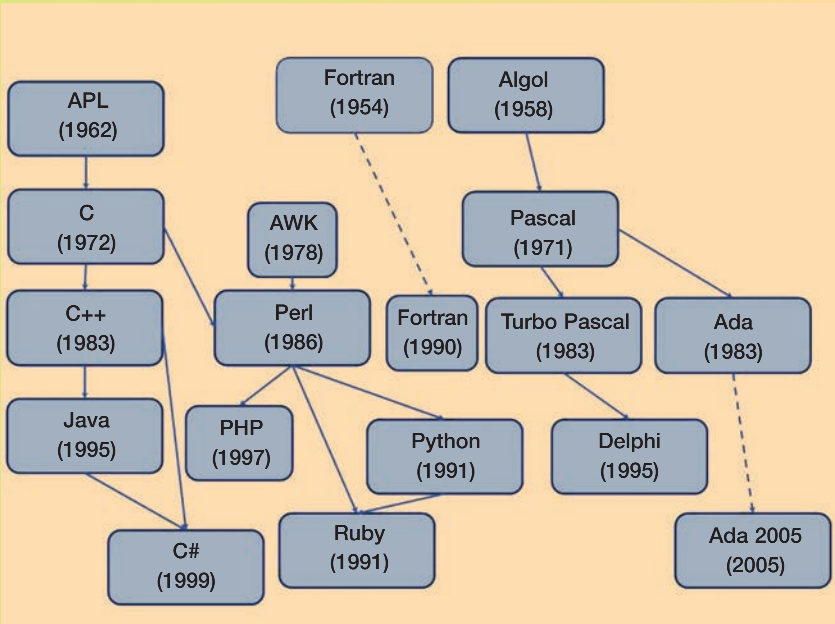
Années 1990 : la «vague objet» emporte tout sur son passage

À la fin des années 1970, le nombre de langages informatique ne cesse de croître. Cette babélisation coûte très cher : on passe son temps à porter les applications d'un langage à l'autre, il faut former du personnel aux nouveaux langages… Aussi, le département de la Défense des États-Unis lance un appel d'offre pour un nouveau langage, universel, qui aurait dû être l'ultime langage. C'est l'équipe de Jean Ichbiah qui gagne le marché, avec le langage Ada 83 (la mathématicienne Ada Lovelace a écrit l'un des tout premiers programmes de l'histoire, bien avant l'invention de l'ordinateur !). Tous les programmes de la Défense américaine devront être écrits en Ada 83. Malheureusement, ce langage n'implémente aucun paradigme objet (Ada 95, la première révision de la norme, corrigera ce manque), les outils sont peu performants, les concepts les plus innovants (comme la généricité) posent des problèmes aux compilateurs, qui de fait génèrent du code peu performant. Après une dizaine d'années d'utilisation, et malgré des réussites industrielles exceptionnelles, Ada est oublié, au profit de la vague objet (C++ puis Java), qui emporte tout sur son passage.

Portrait d'Augusta Ada King, comtesse de Lovelace (1815–1852), par Margaret Sarah Carpenter.

Avec le temps, les applications se complexifient et nécessitent des équipes de développeurs de plus en plus nombreuses. L'artisanat a vécu. Advient l'ère industrielle du développement. Des méthodes nouvelles sont introduites.

Après la babélisation des langages, on assiste au foisonnement des méthodes et des notations. Par réaction, les « trois *amigos* » Grady Booch (né en 1955), James Rumbaugh (né en 1947) et Ivar Jacobson (né en 1939) sont à l'origine du langage de modélisation unifié, UML (*unified modeling language*). Normalisé par l'Object Management Group (www.omg.org), UML est un langage de modélisation graphique. La norme définit diagrammes et concepts afin de décrire tous les aspects d'un logiciel. UML est lui-même décrit… en UML, il est indépendant du langage utilisé pour écrire le code source, même s'il est orienté objet, et il permet une montée en abstraction. Un avatar d'UML, SysML (*system modeling language*, ou langage de modélisation système), permet de décrire les systèmes… qu'il contiennent ou non des logiciels ! Aujourd'hui, jugé trop abstrait, trop centré objet et trop complexe par nombre de développeurs, UML est en perte de vitesse.



Généalogie simplifiée de quelques langages de programmation.

Des langages adaptés à tous vos besoins mathématiques

Dans les années 1990, avec la montée en puissance des processeurs, les langages de script (dits multi-paradigmes et interprétés) comme Python et Ruby prennent le pouvoir. La babélisation est toujours plus forte ; on assiste même dans les années 2010 à une mode des langages à la demande. Vous avez un problème particulier? Les outils modernes vous permettent de créer votre propre langage!

Et pour les besoins en mathématiques, où en est-on? Si l'antique Fortran (abréviation de *Formula translator*, «traducteur de formules») est encore très utilisé dans le calcul scientifique de par la présence de nombreuses bibliothèques validées et optimisées, les langages fonctionnels semblent mieux adaptés aux mathématiques. Le calcul formel, lui, utilise généralement des langages spécifiques, comme Mathematica (Wolfram Research, 1988), Maple (Maplesoft, 1982)… Il existe des bibliothèques de calcul formel Python, comme Sympy. Le langage R (Ross Ihaka et Robert Gentleman, 1993) est très répandu dans le domaine des statistiques et du traitement des données. Matlab (MathWorks, 1984) est pour sa part fort utilisé pour le calcul numérique.

Si les langages humains naissent, évoluent, meurent, les langages informatiques suivent le même processus… mais à une vitesse incroyable!

Il existe des milliers de langages, pour toutes les machines, pour tous les niveaux d'abstraction, pour tous les âges (il existe des langages pour les enfants, comme Scratch, https://scratch.mit.edu, où les blocs fonctionnels sont très colorés), alors que l'informatique n'a pas 100 ans. Il y en a pour toutes les applications, pour décrire les architectures... pour décrire les langages! On assiste à une montée en abstraction: les langages permettent, en peu de lignes, de définir des concepts de plus en plus abstraits et ce avec une plus grande facilité d'utilisation.

Difficile de dire quels langages émergeront dans les années à venir… Nul doute cependant que la fiabilité de ces derniers devienne une préoccupation majeure de leurs utilisateurs dans le monde de la recherche et de l'industrie, comme l'illustre l'article qui suit.

J. – J. D.

Démonstrations mathématiques assistées par ordinateur

Assia Mahboubi

Chercheuse
Inria, Université Paris–Saclay

Les mathématiciens sont souvent représentés comme des espèces de sorciers, qui couvrent des feuillets ou des tableaux noirs de formules cabalistiques, illustrées par de mystérieuses figures. Et cette langue semble bien impénétrable à qui n'est pas mathématicien.

En fait, on apprend à l'école les rudiments de la langue des mathématiques : écrire des nombres, poser des équations simples qui permettent de résoudre des problèmes passionnants de trains qui se croisent et de baignoires qui se vident... Sans le savoir, les écoliers utilisent en fait déjà une langue mathématique très moderne, qui aurait sans doute semblé bien incompréhensible à un mathématicien de génie comme Euclide.

D'Euclide à Bourbaki : une longue maturation de la langue

Euclide est l'auteur des *Éléments*, texte fondateur des mathématiques, dont l'influence sur la pensée scientifique occidentale est immense. Vivant en Grèce probablement vers 300 avant notre ère, il représente les nombres en utilisant un système additif, c'est-à-dire sur le même principe que le système des chiffres romains, et sans zéro. En utilisant les chiffres romains, la multiplication 9×17 s'écrit IX fois XVII : rapidement, il devient difficile d'effectuer une telle opération sans l'aide d'un instrument mécanique de calcul !

Par ailleurs, la mise en équation d'un problème, et en particulier l'usage d'un symbole pour représenter et raisonner sur une quantité inconnue, est probablement tout à fait étrangère à Euclide. En effet, cette idée révolutionnaire est attribuée à Diophante d'Alexandrie, un mathématicien de langue grecque, qui a probablement vécu vers le II^{e} siècle de notre ère.

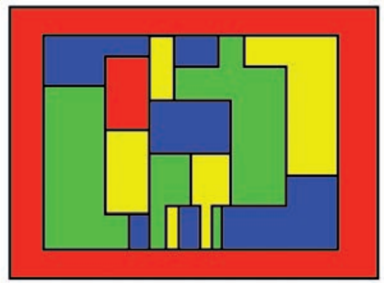
Portrait d'Euclide par Juste de Gand peint vers 1474.

La langue des mathématiques, ses symboles, ses codes, évoluent au cours des âges et varient selon les lieux. Ils s'adaptent également à la branche spécialisée qu'elle doit servir, par l'usage de notations spécifiques adaptées. Ces notations sont là pour condenser le propos et le rendre intelligible, en le débarrassant des informations techniques sans contenu pertinent. Par exemple, l'expression $u + v$ aura un sens, que u et v soient des entiers, des nombres complexes, des vecteurs ou même des fonctions à valeurs réelles. Le lecteur reconnaît de lui-même quelle est l'opération sous-jacente, pourvu qu'il ait assez de culture mathématique et un contexte clair. Pour les chercheurs, qui inventent des concepts mathématiques nouveaux, trouver les « bonnes » notations, efficaces, lisibles et non ambiguës, peut être un sujet de réflexion en soi, qui va bien au-delà des considérations de goût. Le groupe de mathématiciens français connu sous le nom de Nicolas Bourbaki a ainsi marqué les mathématiques du XX^{e} siècle en proposant une série de traités couvrant les sujets enseignés dans les cursus universitaires. Ces traités rationalisent les présentations très disparates de l'époque et s'accompagnent d'une réflexion historique et méthodologique. La clarté de la terminologie et des notations qu'ils introduisent va de pair avec la recherche systématique des structures partagées par des objets mathématiques apparemment très différents.

Aujourd'hui, les étudiants du monde entier utilisent le même vocabulaire, les mêmes notations, les même symboles, à d'infimes variations près. Les textes d'enseignement et de recherche sont typographiés directement par leurs auteurs, en utilisant des logiciels de traitement de texte scientifique très puissants comme Latex ou des bibliothèques d'affichage de mathématiques pour les pages Web comme MathJax. Ces outils permettent de mettre en forme facilement des textes qui utilisent des symboles très variés et des formules arbitrairement sophistiquées. Il est de fait devenu très aisé d'écrire et d'échanger des textes mathématiques sous forme électronique.

Les processus classiques de validation trouvent leurs limites…

Néanmoins, un partie importante de la recherche en mathématique se transmet toujours par voie orale. Les chercheurs communiquent avec leurs semblables au moyen d'exposés, en utilisant le plus souvent le support d'un tableau pour compléter leur discours avec des formules, écrites au fil de l'exposé. Ils exposent ainsi leurs résultats et leurs preuves à la critique de l'audience, qui peut éventuellement détecter des failles. Résultats et démonstrations sont aussi le plus souvent consignés par écrit, dans des textes soumis à l'approbation de relecteurs anonymes, qui décident de l'opportunité de leur publication. Ce processus d'évaluation, aussi bien oral qu'écrit, transforme les conjectures en théorèmes par la validation de la preuve proposée par l'auteur. Comme tout processus humain et social, cette évaluation est faillible. De fameuses conjectures ont connu une histoire à rebondissements et fait l'objet de « preuves » fausses, dont certaines furent publiées dans les journaux les plus sérieux ! Ce fut le cas du *théorème des quatre couleurs*, un résultat de théorie des graphes finalement démontré par Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976, ou de la *conjecture jacobienne*, un problème de géométrie algébrique formulé en 1939 et toujours ouvert à ce jour.



Il est possible de colorier toute carte découpée en régions connexes en n'utilisant que quatre couleurs différentes de sorte que deux régions adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

Georges Gonthier (ci-dessus) et Benjamin Werner ont apporté en 2005 une démonstration formelle du théorème des quatre couleurs à l'aide de l'assistant de preuve Coq.

En théorie, il devrait être possible d'exposer les démonstrations candidates dans leurs moindres détails. En théorie toujours, il devrait être possible de vérifier ces démonstrations de façon parfaitement scrupuleuse. Mais ces suppositions ne sont pas réalistes. Comme déjà remarqué par Nicolas Bourbaki, une entreprise d'explicitation minutieuse des textes mathématiques n'apporterait rien à leur compréhension ; au contraire, elle ensevelirait très probablement les aspects essentiels sous un fatras de détails sans importance. Aucun lecteur humain ne pourrait rester suffisamment attentif pour suivre le fil d'un discours si verbeux et si long. Aucun lecteur humain… certes ; par contre, on peut envisager de s'aider d'un instrument mécanique (moderne) de calcul, à savoir un ordinateur.

Les *assistants de preuve* sont des logiciels qui permettent à leurs utilisateurs de décrire des énoncés mathématiques et leurs preuves, puis de les vérifier. Énoncés et preuves sont décrits en utilisant un langage logique simple et parfaitement codifié, de sorte que la *correction* des preuves (au sens de leur caractère correct) peut être vérifiée de façon automatique.

À côté de ce vérificateur, et pour mériter son nom, un assistant de preuve fournit également un ensemble d'outils pour aider son utilisateur à composer ses définitions, ses énoncés et ses démonstrations candidates. Ici, c'est la vérification des preuves qui est automatisée : leur écriture, elle, reste *a priori* manuelle. Pour mener à bien cette tâche de réécriture, il est possible – et nécessaire – de modéliser, avec l'assistant de preuve, les usages de la langue mathématique. Il s'agit en effet de permettre à la fois à l'utilisateur d'utiliser ses notations usuelles et à la machine d'inférer le contenu implicite des formules.

Quelques applications des méthodes formelles

Le *bug* du Pentium IV, identifié en 1994 par le mathématicien américain Thomas Nicely, est resté célèbre pour le coup qu'il a porté à l'image de l'entreprise Intel, qui commercialisait ces processeurs. Il s'agissait d'une erreur (mathématique) dans l'algorithme de division des nombres flottants implanté dans ce processeur. Depuis, l'entreprise américaine emploie des chercheurs experts en preuves formelles pour travailler à la validation des algorithmes mis en œuvre sur les processeurs.

Le *bug* qui a provoqué l'explosion en vol de la fusée Ariane 5 reste probablement le plus cher de l'histoire de l'informatique. Il était dû *in fine* à une subtile erreur de choix dans la représentation en mémoire de la valeur de l'accélération de la fusée. Depuis, les méthodes formelles ont gagné leurs lettres de noblesse, typiquement dans le domaine de l'avionique (comme chez Airbus) ou dans celui des véhicules sans conducteurs (la ligne 14 du métro parisien utilise du code formellement vérifié).

Des outils enfin disponibles pour certains contextes industriels

Les premiers assistants de preuve ont vu le jour dans les années 1960 et n'ont pas cessé d'évoluer depuis. Ils ont d'abord été utilisés pour étudier les propriétés de programmes informatiques, ou pour la vérification de résultats d'informatique théorique. En effet, il est très difficile d'être certain qu'un programme informatique réalise bien ce que l'on attend de lui ; les sources d'erreurs potentielles sont multiples : erreur mathématique dans la conception de l'algorithme, *bug* dans la transcription de cet algorithme dans un langage de programmation, subtilités dans les caractéristiques techniques du matériel électronique dont est constitué l'ordinateur…

Le moyen le plus sûr de garantir le comportement attendu d'un programme est d'écrire un énoncé mathématique qui exprime sa correction – et surtout de le démontrer ! Hélas, de telles démonstrations sont très difficiles à obtenir et à vérifier, car elles sont terriblement longues et fastidieuses à lire pour un être humain. On est bien loin ici du corpus mathématique des traités de Nicolas Bourbaki : de telles preuves enchaînent typiquement des analyses par cas prolifiques et des combinaisons gigantesques de trivialités arithmétiques.

Néanmoins, avec l'aide d'outils informatiques, il est possible de remplacer avantageusement les tests par des preuves vérifiées par ordinateur. Les parties trop fastidieuses des preuves peuvent être générées automatiquement, ne laissant à l'utilisateur que des parties de la preuve significatives d'un point de vue mathématique.

La vérification des preuves peut certes être totalement automatisée, mais le coût en temps et en expertise d'une telle validation formelle reste élevé. Heureusement, il existe maintenant des techniques et des outils suffisamment matures pour avoir été adoptés dans des contextes industriels, pour des applications où la fiabilité des programmes est critique.

Confidentialité des données : les méthodes formelles à la rescousse

L'actualité récente a jeté à plusieurs occasions une lumière crue sur l'importance prise par les protocoles cryptographiques dans la vie quotidienne et la préservation des données sensibles. En 2014, on découvre qu'une faille dans la bibliothèque de cryptographie OpenSSL rend vulnérables d'innombrables programmes, logiciels et sites Web qui en dépendent. L'impact de ce *bug*, surnommé Heartbleed, est considérable. Il a exposé pendant de longues semaines à qui en avait connaissance de nombreuses informations confidentielles, sans que leur consultation indue ne laisse de traces. Ainsi, le site de l'Agence du revenu du Canada (équivalent canadien du Trésor public) a été ainsi fracturé, permettant la collecte frauduleuse des données personnelles relatives à plusieurs centaines de contribuables.

La recherche sur la sécurisation de ces protocoles grâce aux méthodes formelles est actuellement très active, en contact rapproché avec des acteurs gouvernementaux comme le NIST (Institut national des normes et de la technologie, États-Unis).

Aujourd'hui, les assistants de preuve sont suffisamment évolués pour que l'on puisse écrire des bibliothèques de mathématiques digitales représentant n'importe quel résultat (dont la preuve est évidemment supposée connue). Ils ont de fait été utilisés pour vérifier des résultats mathématiques récents et hautement sophistiqués comme la *conjecture*

En 1998, Thomas Callister Hales (ci-dessus), de l'université de Pittsburgh aux États-Unis, prouve la conjecture de Kepler, vieille de quatre siècles, sur la densité maximale d'un empilement de sphères. Il a ensuite consacré douze années à la vérifier, aidé d'une équipe internationale… et d'un assistant de preuve.

de Kepler ou le redoutable *théorème de Feit–Thompson* en théorie des groupes (par Georges Gonthier et son équipe). Incidemment, la réalisation de ces bibliothèques permet en retour d'étudier la correction de programmes reposant sur des mathématiques avancées, comme les primitives cryptographiques ou les algorithmes de l'analyse numérique.

Améliorer les assistants de preuves pour les rendre utilisables par des chercheurs ou étudiants non spécialistes pose néanmoins des problèmes, qui sont autant de sujets de recherche actifs. Cependant, ils seront peut-être demain les outils informatiques privilégiés pour l'enseignement et la recherche en mathématiques…

A. M.

Pour en savoir (un peu) plus :

Notices Of The American Mathematical Society 55 (11). Numéro spécial *« A Special Issue On Formal Proof »,* 2008, disponible en ligne (en anglais) : ***http://www.ams.org/notices/200811/***

Les leçons d'un algorithme délinquant*.* Jean-Michel Muller, *Interstices*, 2004, disponible en ligne : ***https://interstices.info/jcms/c_5737/les-lecons-d-un-algorithme-delinquant***

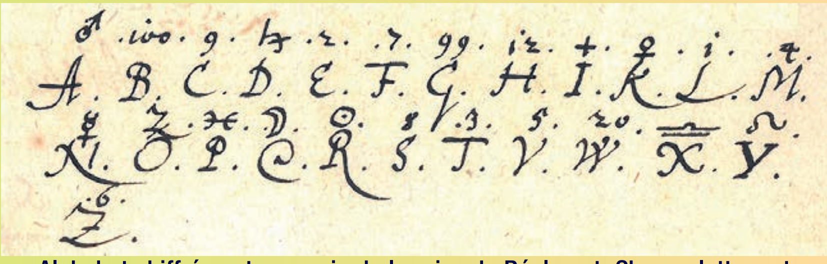
Comment faire confiance à un compilateur ? Xavier Leroy, *Interstices*, 2010, disponible en ligne : ***https://interstices.info/jcms/n_52365/comment-faire-confiance-a-un-compilateur?mediego_ruuid=9e796110-19fb-11e7-bdd1-51b6d0d02713***

Langages chiffrés : ce qu'en disent les mathématiques

Hervé Lehning

Agrégé de mathématiques, écrivain scientifique, membre de l'ARCSI et commandant de réserve

Dans certains domaines, comme la diplomatie ou l'armée mais aussi les relations commerciales, mieux vaut garder ses communications secrètes. Le décryptement d'un seul message peut décider du sort d'une bataille ou d'une négociation. Ce fut le cas en 1626 quand les troupes du prince de Condé assiégeant Réalmont interceptèrent un individu sortant de la ville, porteur d'un message incompréhensible. Condé fit venir un jeune professeur de mathématiques de la région, Antoine Rossignol des Roches, qui en trouva le sens. Le message annonçait que la ville était à cours de munition. Condé fit porter le message décrypté à la ville, qui se rendit.

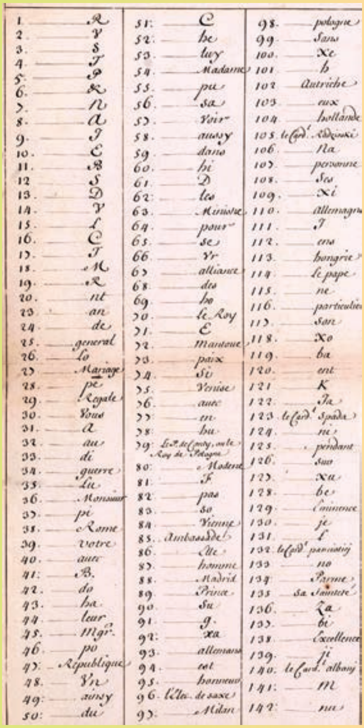


Alphabet chiffré contemporain de la prise de Réalmont. Chaque lettre est remplacée par un chiffre différent (I et J ainsi que U et V sont confondues).

Des méthodes encore trop sensibles à l'espionnage

Le décryptement des messages chiffrés ainsi repose à la fois sur les mathématiques et sur la linguistique. Côté mathématique, on utilise la *méthode des fréquences*. En français, le *e* est la lettre la plus fréquente ; ensuite viennent les lettres *sainturlo*, ce qui est facile à retenir en pensant que Urlo est le saint patron des cryptologues. Côté linguistique, il s'agit de la *méthode du mot probable*. Par exemple, dans un message sortant d'une place forte assiégée, il est logique de penser à la présence d'un mot comme *munition*. Il peut alors être cherché à travers les répétitions qu'il contient, soit ***xy***y***x* où *x* et *y* sont deux symboles distincts et les étoiles, d'autres symboles.

La faiblesse des alphabets chiffrés, même améliorés en chiffrant de plusieurs façons différentes les lettres fréquentes et en ajoutant des *nulles* (des symboles ne signifiant rien), amena Rossignol à créer des dictionnaires chiffrés, c'est-à-dire des dictionnaires bilingues dont l'une des langues est le français et la seconde, des nombres. Ainsi, on chiffre non seulement des lettres (et ce de plusieurs manières), comme auparavant, mais aussi des syllabes et des mots. La méthode des fréquences n'a alors plus aucun sens et celle du mot probable devient difficile à utiliser.



1.	R	51.	C	98.	pologne
2.	V	52.	be	99.	Sans
3.	S	53.	luy	100.	xe
4.	T	54.	Madame	101	b
5.	P	55.	pu	102	Autriche
6.	&	56.	sa	103	eux
7.	n	57.	Voir	104	hollande
8.	a	58.	aussy	105	le Card. Radzieuski
9.	J	59.	dans	106.	na
10.	E	60.	bi	107.	personne
11.	B	61.	D	108.	ses
12	S	62.	les	109.	xi
13.	D	63.	Ministre	110.	allemagne
14.	V	64.	pour	111.	J
15.	L	65.	se	112.	ens
16.	C	66.	Vr	113.	hongrie
17.	T	67.	alliance	114.	le pape
18.	M	68.	des	115.	ne
19.	R	69.	bo	116.	particulier
20.	nt	70.	le Roy	117.	son
23.	an	71.	E	118.	xo
24.	de	72.	Mantoue	119.	ba
25.	general	73.	paix	120.	ent
26.	lo	74.	si	121	K
27.	Mariage	75.	Venise	122.	Ja
28.	pe	76.	auec	123.	le Card. Spada
29.	Royale	77.	en	124.	ni
30.	Vous	78.	bu	125.	pendant
31.	a	79.	Le P. de Conty, ou le Roy de Pologne	126.	sur
32.	au	80.	Modene	127.	xu
33.	di	81.	F	128.	be
34.	guerre	82.	pas	129.	l'eminence
35.	lu	83.	so	130.	je
36.	Monsieur	84.	Vienne	131.	L
37.	pi	85.	Ambassade	132.	le Card. panciatig
38.	Rome	86.	Elle	133	no
39.	votre	87.	homme	134	Parme
40.	auec	88.	Madrid	135	Sa Sainteté
41.	B.	89.	Prince	136.	za
42.	do	90.	su	137.	bi
43.	ba	91.	g.	138.	Excellence
44.	leur	92.	xa	139.	ji
45.	Mgr.	93.	allemans	140.	le Card. albany
46.	po	94.	est	141.	m
47.	Republique	95.	honneur	142.	nu
48.	Vn	96.	l'Elec. de saxe		
49.	ainsy	97.	Milan		
50.	du				

Extrait de la partie déchiffrante d'un dictionnaire chiffré du XVII e siècle.

Leur inconvénient principal est leur sensibilité à l'espionnage ou aux hasards de la guerre. Pour cette raison, ce type de chiffrement n'était plus utilisé dans les armées de terre mais seulement dans la diplomatie et la marine dès la Première Guerre mondiale. Le chiffrement évolua donc vers des méthodes modifiables régulièrement grâce à des clefs selon le principe énoncé par Auguste Kerckhoffs en 1883 et résumé en 1949 par Claude Shannon : *« L'ennemi connaît le système. »* Dès la Renaissance, un diplomate, Blaise de Vigenère, avait conçu un système répondant à ce principe. Il consiste en une substitution alphabétique variant selon une clef. Par exemple, la clef ABC transforme « secret » en « sferfv », la première lettre étant conservée (A), la deuxième décalée d'un cran (B), la troisième de deux (C), *etc.* Une autre méthode consiste à permuter les lettres d'un message. Pour ce faire, on peut disposer le texte à chiffrer sur plusieurs colonnes, en ajoutant quelques lettres pour obtenir un rectangle :

```
ledecryptemen
tdunmessagech
iffrepartrans
positionestpl
usdelicatquec
eluidunmessag
echiffreparsu
bstitutionxxx
```

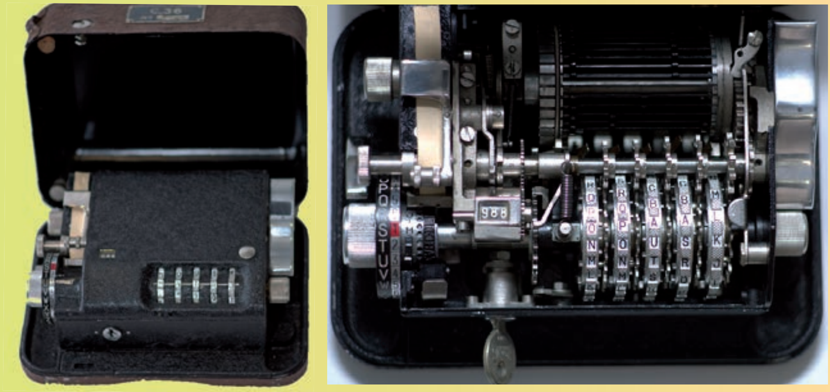
On modifie alors l'ordre des colonnes puis on écrit le texte obtenu par lignes. La clef de ce chiffrement est donc le nouvel ordre des colonnes. Par exemple, si l'on écrit d'abord les colonnes paires puis les impaires, on obtient « eerpeeldcytmndne […] tttoxx ». Le décryptement sans connaître la clef est délicat, mais loin d'être impossible : les mathématiques permettent de trouver le rectangle utilisé ; un raisonnement linguistique est ensuite nécessaire pour déterminer la transposition.

La Seconde Guerre mondiale écourtée… grâce aux maths

Les chiffres de l'armée allemande de la Première Guerre mondiale alliaient ainsi transpositions et substitutions. Ils furent cependant régulièrement décryptés par l'armée française. Ainsi, elle sut souvent à temps où allaient se situer les attaques allemandes, ce qui permettait de disposer les réserves aux bons endroits. Après guerre, le chiffre est progressivement dominé par les machines, dont la célèbre *Enigma*, qui, comme le chiffre de Vigenère, fabriquent des substitutions poly-alphabétiques. Le premier décryptement d'Enigma fut un succès conjoint de l'espionnage français et du génie de trois mathématiciens polonais, Marian Rejewski, Jerzy Rozycki et Henryck Zygalski. L'espionnage fournit les tables de chiffrement de l'armée allemande de 1931 à 1938. Les mathématiques permirent, grâce à ce renseignement, de reconstituer les câblages de la version militaire de l'Enigma et d'en fabriquer des répliques. Les messages furent alors régulièrement décryptés. Les mathématiciens polonais cherchèrent à pouvoir se passer des tables de chiffrement, ce qu'ils réussirent à faire, en créant une machine, la *bomba*. Elle permettait de trouver la clef du jour en quelques minutes. Après la défaite de la Pologne puis celle de la France, les résultats polonais furent transmis aux Britanniques. Alan Turing et son équipe de Bletchley Park reprirent avec succès le décryptement en l'améliorant et en l'adaptant aux complexifications successives d'Enigma.

La guerre en fut probablement écourtée de deux ans !

Au cours des années 1930, l'armée française s'équipa de machines comparables, une machine mécanique légère, la C-36, destinée aux communications des petites unités tactiques, et une machine électromécanique lourde, la B-211, destinée aux communications au niveau des grosses unités. La C-36 fut perfectionnée pour devenir la M-209 de l'armée américaine. Cette machine était assez solide pour son niveau d'utilisation. Cependant, dès 1943, les Allemands étaient capables de décrypter ses messages en quelques heures.



À gauche : la C-36 fermée. Les cinq lettres visibles sur le capot (MNTRJ) constituent une clef modifiable à chaque message. La machine est actionnée par le levier de droite. Les lettres à chiffrer sont choisies sur la roue de gauche, le chiffrement sort sur la bande de papier à gauche.

À droite : la C-36 ouverte. On voit les ergots des rotors, chacun étant poussé vers la droite ou la gauche, ce qui constitue la clef principale avec la position de l'élément rouge sur la roue de gauche (ici devant le S).

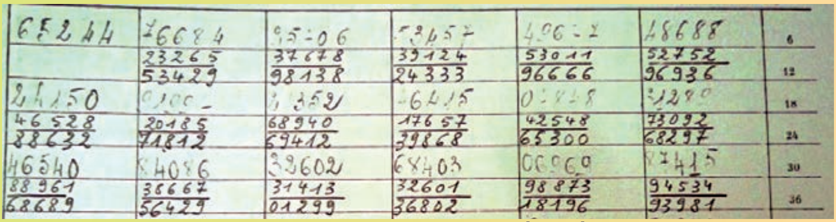
Photos : H. Lehning

Pendant ce temps, la méthode de Vigenère resta en usage, en particulier dans l'espionnage. Son décryptement est d'autant plus difficile que la clef est longue et choisie aléatoirement. L'idéal est qu'elle soit aussi longue que le message et qu'on ne l'utilise qu'une fois ; on parle alors de *masque jetable*. Claude Shannon a prouvé que, sous ces hypothèses, un message ainsi chiffré est indécryptable.

C'est le chiffre utilisé dans le fameux téléphone rouge, qui relie Washington et Moscou depuis 1963, et dans des matériels comme le Tarec en service dans l'armée française du milieu des années 1950 à la fin des années 1970. Le masque jetable est très probablement utilisé aussi dans les *stations de nombres*, des radios qui n'émettent que des suites de nombres, très courantes pendant la guerre froide et qui n'ont pas disparu depuis.

Le principe est simple. On chiffre d'abord le message en une suite de nombres (par exemple, A = 01, B = 02…) puis on ajoute au message obtenu un nombre aléatoire de même longueur sans effectuer de retenue. Ainsi, « secret » se traduit d'abord en « 19 05 03 18 05 20 ». Si l'on dispose de la suite de nombre aléatoires 90689 91275 03682, on obtient par ce procédé le chiffrement « 09639 22070 23 ».

Pour que le destinataire puisse déchiffrer le message, il faut qu'il dispose de la même suite de nombres aléatoires et qu'il fasse des soustractions. Cette méthode, qui fut utilisé par Che Guevara et des espions soviétiques comme Georges Beaufils, est toujours opérationnelle ; sa seule faiblesse reste l'échange des clefs.



Quand des soustractions servent de pièces à conviction.
Extrait du déchiffrement d'un message par Georges Beaufils, espion de l'URSS.

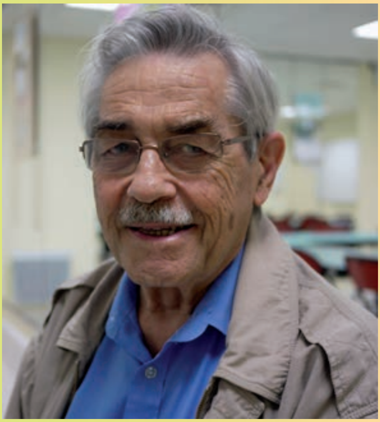
© Ministère de la Défense

Clef publique : la révolution des chiffres asymétriques

La connaissance de la clef de chiffrement semble suffire pour déchiffrer. Cependant, il existe des chiffres où savoir chiffrer n'implique pas que l'on sache déchiffrer ! Ces chiffres sont dits *asymétriques* (par opposition, les autres sont *symétriques*). La clef de chiffrement est dite *publique*, celle de déchiffrement, *privée* ou *secrète*. Le premier chiffre asymétrique est dû à trois mathématiciens, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui le proposèrent en 1977. Cette méthode, nommée RSA, est fondée sur la difficulté d'un problème mathématique : la factorisation en nombres premiers. Ainsi, la clef publique est un nombre, produit de deux grands nombres premiers, et la clef secrète ces deux nombres. Tout un chacun peut chiffrer, mais seul le détenteur de la clef secrète peut déchiffrer ! Ce système est assez lourd en calcul (il correspond à des élévations de grands nombres à une puissance élevée, alors que les systèmes symétriques correspondent à des additions). C'est pourquoi il est limité à l'authentification et à l'échange de clefs symétriques. Il est utilisé dans les cartes bancaires, les messages sur Internet, et dans le téléphone sécurisé Teorem de Thales, réservé aux hautes autorités de l'État.

La furtivité pour échapper aux surveillances de masse

Une autre méthode ancienne pour protéger ses communications est la *stéganographie*, où l'on cache l'existence même du message et non pas son seul contenu. On a pu utiliser les encres sympathiques, ou les micro-films. Aujourd'hui, on utilise les mathématiques… Par exemple, une image est une suite de *bits*. Si la résolution est bonne, changer quelques *bits* concernant la couleur ne modifiera pas énormément l'image. Une méthode possible consiste à convenir que les *bits* dont le numéro d'ordre est multiple de 50 contiennent le message caché. Ceci modifie légèrement l'image, mais personne ne semble actuellement capable de détecter une telle manipulation. Les mêmes principes sont applicables à la musique. De faibles variations, imperceptibles pour l'oreille, dans les basses fréquences, peuvent contenir beaucoup d'informations. Un grésillement infime peut cacher des secrets ! Il serait étonnant que ces méthodes difficilement détectables ne soient pas utilisées par toutes sortes de réseaux malveillants, mafias, pédophiles ou terroristes. On peut ainsi imaginer qu'un site de vente aux enchères ou votre site de partage de vidéos préféré serve à déposer des messages de toutes sortes. La faiblesse de ces méthodes reste l'importance du secret ; elles sont très sensibles à l'espionnage.



Louis Pouzin, l'un des inspirateurs d'Internet, président d'OpenRoot, une solution furtive pour communiquer sur Internet à l'abri des surveillances de masse.

Pour finir, une autre méthode pour protéger ses secrets est la furtivité, de ne pas apparaître sur les écrans radars de la surveillance. C'est ce que propose la société OpenRoot, créée par Louis Pouzin, l'un des inventeurs d'Internet. Avec un site sur OpenRoot, vous ne figurez pas sur les serveurs de DNS (Domain Name System) de Google, qui sont des dictionnaires traduisant les noms de domaines (comme cijm.org par exemple) en adresses IP, et échappez ainsi aux surveillances de masse !

H. L.

Un mot infini irrégulier et pourtant simple

Jean-Paul Delahaye

Professeur émérite à l'université de Lille–I,
Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal, UMR CNRS 9189)

Chaque matin, je prends du café ou du thé. Je trouve ennuyeux de prendre deux jours de suite la même chose, donc j'oscille : café, thé, café, thé, café, thé… Cette oscillation, trop régulière, m'ennuie aussi ! J'ai donc décidé de ne jamais faire deux fois de suite la même chose, et en particulier de ne jamais répéter deux fois de suite « café, thé ». Malheureusement c'est impossible : si je ne veux pas me répéter deux fois consécutivement, alors, après un jour avec café, je dois boire du thé, et après un jour avec thé, je doit boire du café, ce qui au bout de quatre jours conduit obligatoirement à une répétition : café, thé, café, thé. Puisque ne pas se répéter deux fois de suite est impossible, je me contenterai de ne jamais me répéter trois fois de suite. Ainsi, je me comporterai de la manière la plus désordonnée possible pour ce qui est de mon petit déjeuner.

Le b.a.-ba de la construction d'un mot infini

Est-ce faisable, et ai-je raison de croire que cela m'évitera l'ennui ? Autrement dit : existe-t-il des mots composés uniquement de *a* et de *b* ne comportant jamais trois fois consécutivement la même séquence ? Si oui, peut-on les considérer comme totalement désordonnés ?
La réponse – oui à la première question, non à la seconde – est connue depuis plusieurs décennies et est donnée par ce que l'on appelle le *mot infini de Prouhet–Thue–Morse*.
Voici comment on obtient cet extraordinaire mot infini. On commence par *ab*, puis on remplace chaque *a* par *ab* et chaque *b* par *ba*, ce qui donne *abba*. On recommence alors la même substitution, ce qui conduit ensuite à *abbabaab*,
puis à a*bbabaabbaababba*,
à *abbabaabbaababbabaababbaabbabaab* à l'étape suivante, *etc*.

**Une partition du compositeur franco-américain Tom Johnson utilisant le mot de Prouhet–Thue–Morse. La suite est écrite avec des 0 et des 1.
Les notes de la mélodie descendent quand il y a un 1 et montent quand il y a un 0.**

© Tom Johnson, membre de l'Oumupo (voir article en page 15)

Un autre procédé produit la même suite : on part de *a*, puis on le recopie à côté de lui-même (par *concaténation*) en échangeant les *a* en *b* et les *b* en *a* ; cela donne *ab*, on recommence la même opération pour obtenir *abba*, et ainsi de suite.

Vous constaterez que jamais on ne trouve trois fois de suite le même sous-mot dans le mot infini obtenu. N'est-ce pas merveilleux, vu la simplicité des procédés ? Le constater est bien, mais le démontrer est mieux, pour le salut de tous mes petits déjeuners à venir. Prenons donc le temps d'en proposer une démonstration.

Un raisonnement typique sur la combinatoire des mots

Pour montrer que le mot de Prouhet–Thue–Morse est *sans cube* (c'est-à-dire qu'il ne comporte jamais trois fois consécutivement le même sous-mot), il suffit de montrer que, pour tout mot infini M composé uniquement de *a* et de *b*, le fait que M est sans cube implique que $f(\mathrm{M})$ est sans cube, où f est l'opération qui change chaque *a* en *ab* et chaque *b* en *ba*.

Pour cela, supposons que M est sans cube et que $f(\mathrm{M})$ comporte un cube C. On peut alors écrire $f(\mathrm{M}) = \ldots\mathrm{CCC}\ldots$ Cherchons à obtenir une contradiction. Trois cas sont à distinguer.

Dans le premier cas, le mot C comporte un nombre pair de lettres et dans $f(\mathrm{M})$ le cube CCC commence à un emplacement de numéro impair (on numérote les lettres d'un mot en commençant par 1). Alors M comporte lui-même un cube, obtenu en remplaçant *ab* par *a* et *ba* par *b* dans C, ce qui contredit l'hypothèse. Faites une vérification avec, par exemple, $f(\mathrm{M}) = ababbaabbaabbabb$, où $\mathrm{C} = abba$; vous trouverez le cube *ababab* dans M.

Dans le deuxième cas, le mot M comporte un nombre pair de lettres et le cube CCC commence à un emplacement de numéro pair dans $f(\mathrm{M})$. Par construction de $f(\mathrm{M})$, la lettre numéro $2n + 1$ est a (respectivement b) si, et seulement si, celle de numéro $2n + 2$ est b (respectivement a). Donc, en enlevant la dernière lettre de C et en ajoutant devant C la lettre complémentaire (a si b et b si a) de la première lettre de C, on obtient un mot C′ ayant un nombre pair de lettres qui est répété trois fois dans $f(\mathrm{M})$, la répétition commençant un emplacement avant celle de M. On est donc ramené au cas précédent, et on conclut de la même manière.

Il reste un dernier cas : le mot M comporte un nombre impair de lettres. Il résulte de l'équivalence notée pour le deuxième cas que le mot M, qui apparaît à la fois en commençant à un rang pair dans $f(\mathrm{M})$ et en commençant à un rang impair, est nécessairement composé d'une alternance de a et de b (comme *ababa*, par exemple). Le mot M commence et finit donc par la même lettre. On en déduit que dans $f(\mathrm{M})$ il y aura deux lettres, de rangs $2n + 1$ et $2n + 2$, qui seront identiques (soit à la jonction entre le premier M et le deuxième M du cube, soit à la jonction entre le deuxième et le troisième). Mais cela est impossible, toujours à cause de l'équivalence notée dans le deuxième cas. Nous avons ainsi épuisé toutes les possibilités découlant de l'hypothèse que $f(\mathrm{M})$ comporte un cube, et avons à chaque fois abouti à une contradiction. Si M ne comporte pas de cube, alors $f(\mathrm{M})$ non plus.

De la musique aux échecs en passant par l'écriture en binaire

Dois-je être vraiment satisfait de ce mot qui ne se répète jamais trois fois consécutivement et qui me permet de prendre mon petit déjeuner de manière plus apaisée ? Le mot infini de Prouhet–Thue–Morse est-il vraiment désordonné ? Non, bien sûr ! La double définition qui en a été donnée montre que le mot infini de Prouhet–Thue–Morse n'est pas du tout désordonné. En voici d'ailleurs une troisième définition, qui n'utilise que quelques mots : la $n^{\text{ème}}$ lettre est un a si, et seulement si, le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n est pair.

D'où vient le nom de ce formidable mot infini ? Il se nomme « mot de Prouhet–Thue–Morse » car il a été présenté et étudié en 1906 par Axel Thue (1863–1922) dans un obscur journal norvégien. Cet objet combinatoire ne retint vraiment l'attention de la communauté mathématique que lorsque le mathématicien américain Harold Calvin Marston Morse (1892–1977) le redécouvrit quinze ans plus tard, en 1921. Il sera retrouvé encore une fois par le grand maître d'échecs

Machgielis (Max) Euwe (1901–1981, champion du monde de 1935 à 1937). Euwe démontra que la règle du jeu d'échecs qui impose de ne jamais jouer trois fois de suite la même séquence de coups autorisait des parties infinies. À chaque *a* du mot infini, on associe la séquence de coups suivante : g1–f3, g8–f6, f3–g1, f6–g8 (les blancs, puis les noirs, sortent leur cavalier gauche, puis le rentrent) ; à chaque *b* de la suite, on associe la séquence de coups b1–c3, b8–c6, c3–b1, c6–b8 (les blancs, puis les noirs, sortent leur cavalier droit, puis le rentrent). En suivant le mot de Prouhet–Thue–Morse, on ne rejouera jamais trois fois de suite les mêmes coups, et donc la partie durera indéfiniment.

Et Prouhet ? Le mot infini, à vrai dire, avait déjà été remarqué avant l'article de Thue pour une de ses autres propriétés extraordinaires. En effet, le mathématicien français Eugène Prouhet (1817–1867), dans un article antérieur (*Mémoire sur quelques relations entre puissances d'un nombre*, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, série I, 33, 1851), démontrait une jolie propriété arithmétique.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres;* par **M. E. Prouhet.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Sturm, Lamé, Binet.)

« n et m étant deux nombres entiers quelconques, il existe une infinité de suites de n^m nombres, susceptibles de se partager en n groupes de n^{m-1} termes chacun et tels que la somme des puissances k des termes soit la même pour tous les groupes, k étant un nombre entier inférieur à m.

» n^m nombres en progression arithmétique jouissent de la propriété précédente. Pour opérer le partage de ces nombres en groupes, on écrira en cercle les indices 0, 1, 2,..., $n-1$; on lira ces indices en suivant le cercle et en ayant soin d'en passer un à chaque tour ; deux, tous les n tours ; trois, tous les n^2 tours, et ainsi de suite. Ces indices, écrits à mesure qu'on les lit sous les termes de la progression, apprendront à quel groupe appartient chaque terme.

» Si l'on applique la règle et le théorème précédents aux 27 premiers nombres de la suite naturelle, on arrive aux identités suivantes :

$$1+6+8+12+14+16+20+22+27=2+4+9+10+15+17+21+23+25=3+5+7+11+13+18+19+24+26$$
$$1^2+6^2+8^2+\ldots\ldots=2^2+4^2+9^2+\ldots\ldots=3^2+5^2+7^2+\ldots\ldots$$

» Lorsque $n=10$ et que la progression commence à 0, tous les nombres dont la somme des chiffres, divisée par 10, laisse le même reste, appartiennent à la même classe. »

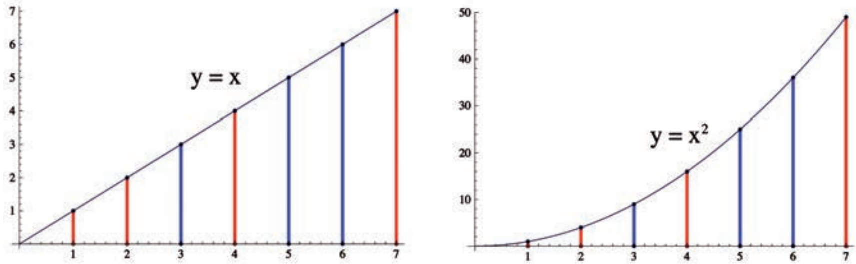
Le début de la publication de Prouhet.

Des applications arithmétiques élégantes et inattendues

Voici la propriété mise à jour par Prouhet. Si l'on place à droite d'une égalité les quatre entiers correspondant aux numéros des quatre premiers emplacements des *a* (ce sont les entiers 0, 3, 5, 6) et à gauche les quatre entiers correspondant aux quatre premiers emplacements des *b* (ce sont 1, 2, 4, 7), alors on obtient une série de deux égalités remarquables simultanées :

$$0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7,$$
$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2.$$

$$A = \{0, 3, 5, 6\} \qquad B = \{1, 2, 4, 7\}$$



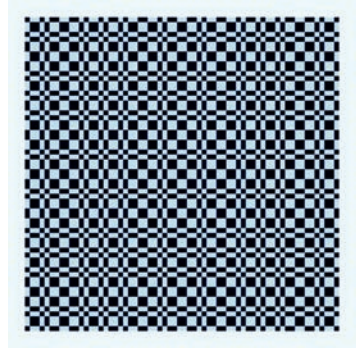
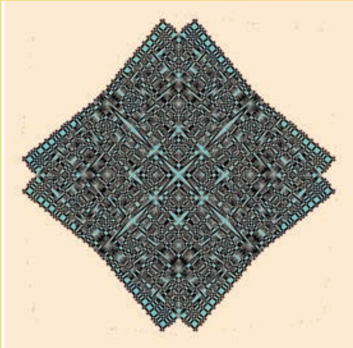
La somme des longueurs des segments en bleu et en rouge sont les mêmes.

© Dessin emprunté à Michel Rigo (voir bibliographie)

Il y a mieux encore. Si l'on met à droite d'une égalité les huit entiers correspondant aux numéros des huit premiers emplacements des *a* (ce sont les entiers 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15) et à gauche les huit entiers correspondant aux huit premiers emplacements des *b* (ce sont 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14), alors on obtient une série de trois égalités remarquables simultanées :

$$0 + 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 = 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14,$$
$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 + 15^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2,$$
$$0^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 + 15^3 = 1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 14^3.$$

En exploitant le mot de Prouhet–Thue–Morse, ces résultats se généralisent et produisent en fait quatre égalités entre deux paquets de seize nombres, cinq égalités entre deux paquets de trente-deux nombres, *etc*. Le mot de Prouhet–Thue–Morse conduit donc à l'affirmation très surprenante suivante : pour tout nombre *n*, on peut trouver deux ensembles de nombres entiers distincts A et B, tels que la somme des nombres de A est la même que la somme des nombres de B, de même pour les carrés, les cubes… et les puissances $n^{\text{èmes}}$ de ces mêmes nombres.

Un schéma tiré directement du mot de Prouhet–Thue–Morse (à gauche) et un dessin qui en est issu de manière moins directe (à droite).

Même la plus simple des questions sur la répétition des lettres d'un mot conduit à des découvertes mathématiques et oblige à des raisonnements intéressants ! Le mot de Prouhet–Thue–Morse est en fait immensément plus riche de propriétés, toutes plus élégantes les unes que les autres. De bien belles mathématiques en combinatoire des mots résultent de l'étude des mots infinis et des transformations (comme la fonction f) qui les changent les uns en les autres.

J. – P. D.

Pour en savoir (un peu) plus :

The Ubiquitous Prouhet–Thue–Morse Sequence. Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, in *Sequences And Their Applications*, Springer-Verlag, 1999.

Des mots magiques infinis. Jean-Paul Delahaye, in *Mathématiques pour le plaisir*, Belin–Pour La Science, 2010.

Automatic Sequences, Theory, Applications, Generalizations. Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, Cambridge University Press, 2003.

Le problème de Prouhet et la suite de Thue–Morse. Michel Rigo, exposé disponible en ligne (orbi.ulg.ac.be/bitstream/2268/129326/1/RigoSBPM.pdf).

Grâce à la modélisation, les mathématiques sont le langage de la nature

Gilbert Rogé

Ingénieur de recherche à Dassault Aviation, habilité à diriger les recherches (HDR de l'université Pierre et Marie Curie)

De même que le passage de la Préhistoire à l'histoire contemporaine est marqué par le début de la transmission écrite, il y a une physique d'avant et d'après l'apport des mathématiques.

La physique a trouvé son outil : les mathématiques

Un phénomène physique peut se décrire à l'aide des mots du langage courant, mais dès que l'on désire quantifier, les mathématiques deviennent incontournables. L'équation (ou le modèle) est alors une traduction d'une loi de la nature en termes mathématiques. C'est un concept qui a les caractéristiques du phénomène naturel que l'on cherche à étudier. C'est une abstraction qui n'« existe » pas, mais qui est « suffisamment proche » de la réalité observée pour qu'on la considère comme représentant du mécanisme que l'on cherche à caractériser. Un modèle absolu n'existe pas : il peut être adapté à l'étude d'un phénomène, mais ne pas convenir pour un autre. Le physicien tente ainsi d'expliquer la nature en cherchant à découvrir les lois cachées qui régissent les phénomènes observables et reproductibles. *« Eureka ! »* C'est ce qu'aurait crié Archimède, nu au milieu de la rue, après être sorti précipitamment du bain public pour laisser éclater sa joie (*« J'ai trouvé ! »*). Il venait de découvrir comment résoudre le problème que son parent Hiéron II le Jeune, tyran de Syracuse, lui avait soumis.

Archimède (vers –287, –212).

Le roi voulait savoir si la couronne qu'il s'était fait confectionner était totalement en or ou si l'artisan y avait mis de l'argent. Laissons Archimède nous énoncer sa découverte (*Traité des corps flottants*) : *« Un solide plus léger que le liquide dans lequel on l'abandonne s'y enfonce de telle façon qu'un volume de liquide égal à la partie immergée ait le même poids que le solide entier. »*

Les mathématiques permettent de calculer la poussée d'Archimède en utilisant la formule $P = Mg$, ou M est la masse du fluide contenu dans le volume V déplacé et g la valeur du champ de pesanteur. La masse volumique de l'argent étant environ deux fois moindre que celle de l'or, Archimède démontra ainsi que l'orfèvre avait réalisé la majeure partie de la couronne en argent.

Plus de deux mille ans plus tard, Albert Einstein écrit ce qui deviendra sa plus célèbre équation : *« Si un corps perd une énergie E sous forme de rayonnement, sa masse m diminue de E/c². »* Ce faisant, il exprime par une formule mathématique simple, $E = mc^2$, une vision physique révolutionnaire. Il nous dit (même si d'autres auteurs sont associés à cette formule : Olinto De Pretto, Henri Poincaré, Max Planck, Hendrik Lorentz…) que non seulement la masse diminue, mais que de plus on peut la quantifier, puisque la vitesse de la lumière c est une constante connue (environ 300 000 km/s).

Entre Archimède et Einstein vécut un génie protéiforme tour à tour dessinateur hors pair, ingénieur inventif et savant doué d'un sens de l'observation aigu : Léonard de Vinci (1452–1519). Il nous a laissé des dessins schématisant des écoulements de fluides (on y trouve une représentation du type lignes de courant, ce qui est toujours d'actualité et permet de comprendre l'écoulement), grâce auxquels il donne une description fidèle de la nature : *« Où la turbulence de l'eau se crée. Où la turbulence de l'eau se maintient plus longtemps. Où la turbulence de l'eau retourne au repos. »* Il cherche à travers ses représentations épurées

Écoulement dans une fontaine.

© Windsor Castle, Royal Library, RL 12660v

Écoulement turbulent (tourbillons désordonnés).

© Institut de France, Manuscrit I, 12r (gauche) et Manuscrit F, 73v (droite)

et précises à trouver des lois de la nature. Le premier, il a conscience que la mécanique des fluides régit à la fois l'eau et l'air.

Les redoutables équations de la mécanique des fluides

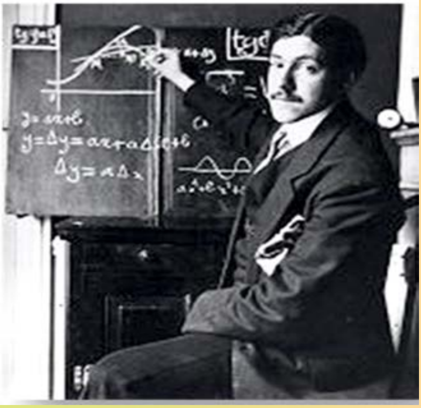
Les pères fondateurs de l'actuelle modélisation en mécanique des fluides ont cependant dû attendre le XVII^{e} siècle pour que soient forgés, grâce notamment à Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz, les outils mathématiques (calcul infinitésimal…) qui leur permettront d'écrire les équations aux dérivées partielles portant maintenant leurs noms : Euler, Navier–Stokes.

Les *équations d'Euler* (savant suisse, 1707–1783) sont des équations de conservation. Elles sont le reflet d'un principe physique qui affirme que ce qui rentre par une face d'un petit morceau du domaine fluide doit ressortir par une autre face. Les quantités conservées sont la masse volumique, la quantité de mouvement et l'énergie totale. Les équations expriment le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

Mais le *paradoxe de D'Alembert* (savant français, 1717–1783) mettant en défaut les équations d'Euler (réversibilité permise du mouvement du fluide, alors qu'une irréversibilité est constatée), des termes représentant la perte d'énergie due au frottement seront ajoutés pour obtenir les célèbres *équations de Navier–Stokes* (du nom de Henri Navier, physicien français, 1785–1836, et George Gabriel Stokes, savant britannique, 1819–1903). La modélisation utilisée de manière courante actuellement est du type Navier–Stokes avec une turbulence moyennée (voir la brochure *Maths Société Express*, CIJM, 2016). C'est le mathématicien russe Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903–1987) qui, par une vision statistique, a le premier avancé une description théorique de la turbulence. La « cascade d'énergie » qu'il propose consiste en un transfert sans dissipation de l'énergie acquise par l'écoulement au niveau des plus grands tourbillons à des tourbillons de plus en plus petits. Dans les plus petits tourbillons, on a alors une dissipation par viscosité. Cette seconde modélisation est nécessaire actuellement car la résolution des équations de Navier–Stokes pour un avion complet en vol ne sera pas possible avant plusieurs années (voir plus loin).

Des tourbillons de rivières à l'aérodynamisme des avions

Quel est le l'objectif d'un avionneur ? Le concepteur d'avions cherche à répondre à un cahier des charges dans lequel figurent des contraintes et des objectifs techniques et financiers : maximiser la distance franchissable, augmenter la vitesse, réduire la consommation de carburant… C'est un problème d'optimisation multidisciplinaire. Pour simuler la réalité, il faut en outre prendre en compte dans les modèles les incertitudes sur la forme, l'aérodistorsion (les interactions fluide–structure) et d'autres facteurs qui rendraient inutile une résolution trop précise d'un problème qui, autrement, ne serait pas le bon.

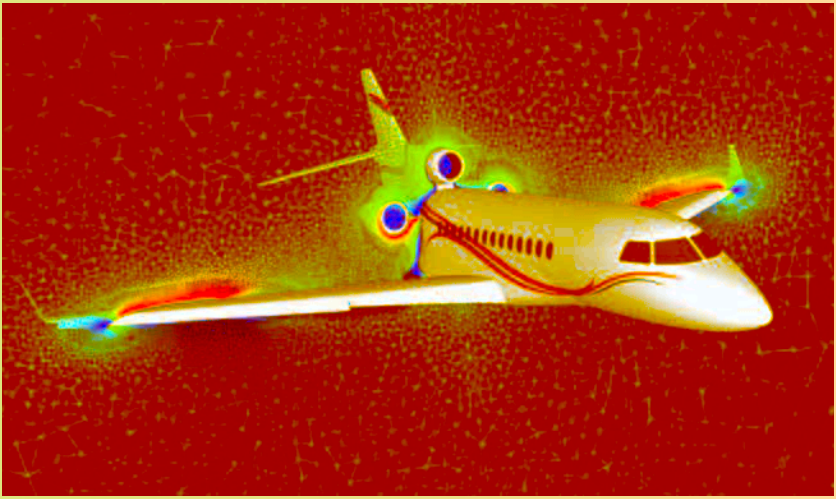


Marcel Dassault (1892–1986).

© *Dassault Aviation*

Les ingénieurs aérodynamiciens du début du XXe siècle utilisaient des modélisations adaptées aux phénomènes de la nature et aux performances des avions qui allaient transporter les pionniers de l'aéropostale et permettre les premières traversées des mers et des océans.
Les ingénieurs actuels simulent l'écoulement de l'air sur un avion complet en vol de croisière en une dizaine de minutes à l'aide de supercalculateurs.

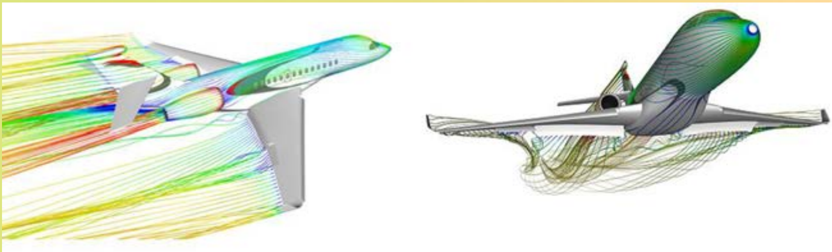
Aujourd'hui, la simulation numérique consiste en effet à résoudre, souvent au moyen de puissants ordinateurs, une grande quantité d'équations résultant d'une modélisation physique suivie d'une discrétisation du domaine spatial et temporel considéré.



Avion d'affaires Falcon immergé dans un maillage spatial formé de tétraèdres.

© *Dassault Aviation*

Le domaine de calcul de l’écoulement est l’espace situé autour de l’avion. Sur ce domaine, on considère alors les équations de Navier–Stokes. Malheureusement, ce domaine est non borné. On commence donc par considérer une boule centrée sur l’avion et de diamètre quelques kilomètres. Cette approximation est suffisante car la perturbation créée par l’avion devient négligeable au voisinage de la sphère formant la frontière de la boule. L’espace situé entre la surface externe de l’avion et la sphère est alors découpé en quelques millions de petits éléments (un *maillage*). Pour fixer les idées, considérons que ces petits éléments sont des tétraèdres (pyramides à base triangulaire). Considérons également que l’approximation utilisée nécessite de connaître uniquement la valeur de nos variables (densité volumique, quantité de mouvement, énergie totale) en les sommets de ces tétraèdres. Nous aurons alors à résoudre un système de 5N équations non linéaires à 5N inconnues, où N est le nombre total de sommets du maillage de l’espace en tétraèdres.



Simulation numérique de l’écoulement autour d’un avion d’affaires.
© Dassault Aviation

Une nécessaire interaction entre modèle et expérimentation

Le résultat obtenu à l’issue d’une simulation est entaché d’erreurs liées à la résolution numérique (convergence de méthode itérative, représentation des nombres avec une précision finie…), à la discrétisation (en gros, le nombre de sommets du maillage), aux conditions aux limites, mais également à la modélisation choisie. Résoudre les équations de Navier–Stokes autour d’un avion en vol sans hypothèse de turbulence moyennée n’est pas envisagé avant 2030. En effet, le nombre d’équations à résoudre est alors de l’ordre de cent mille milliards (à comparer à cent millions actuellement)…

Pour valider les codes de calcul, censés simuler un phénomène physique, on confronte leur résultat à l’expérimentation. Un cas test représentatif, accessible à la réalisation en laboratoire, sert de support de validation.

Essais en soufflerie.

© Onera
(Office national de recherche en aéronautique)

Essai en vol.

© Dassault Aviation

On compare alors certaines quantités accessibles à la fois par l'approche virtuelle et l'approche réelle. La réalisation expérimentale est elle-même soumise à des incertitudes, comme la précision des appareils de mesure (balance pour réaliser des pesées…). En outre, les mesures réalisées pendant des vols d'essai dédiés à la validation des modèles virtuels sont également soumises à des incertitudes (capteurs de pression embarqués, météo…). La forme d'un nouvel avion résulte en pratique d'allers-retours entre la simulation numérique et les essais en soufflerie.

Interpréter le langage et construire les modèles de demain

Selon Pythagore, tout est nombre. Pour Galilée, *« le livre de la nature est écrit en langage mathématique »*. Eugene Wigner s'est émerveillé devant la *« déraisonnable efficacité des mathématiques »*. Son contemporain le physicien allemand Werner Heisenberg (1901–1976) a écrit : *« Les atomes ou les particules élémentaires ne sont pas réels ; ils forment un monde de potentialités ou de possibilités plutôt qu'un monde de choses et de faits. »* Le formalisme mathématique abstrait décrit très bien certains aspects de la mécanique quantique. Il permet de faire des prédictions qui peuvent être vérifiées expérimentalement avec une très grande précision. Mais les physiciens s'affrontent encore sur la description de la réalité que permet la mécanique quantique. Le paradoxe est que, dans ce cas, l'outil mathématique (équation de Schrödinger en tête) permet de quantifier très précisément les phénomènes étudiés, alors même que la description de la réalité physique est controversée. Ici la problématique n'est pas de savoir si le modèle est adapté à la réalité, mais comment interpréter physiquement le modèle… Si les mathématiques sont le langage de la nature, ce sont bien les physiciens qui en sont les interprètes. Un grand défi pour les mathématiciens est de réussir à forger les outils qui permettront de construire les modèles de demain.

G.R.

Le problème de la séparation de sources

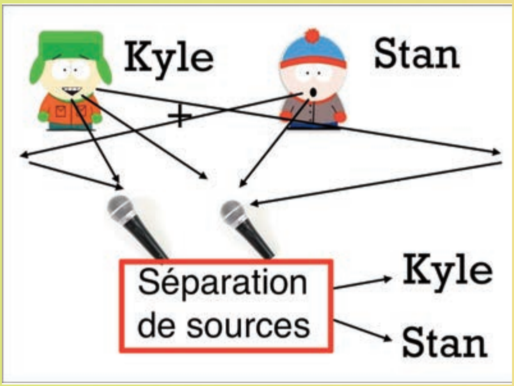
Jean-François Cardoso

Institut d'astrophysique de Paris

Depuis Shannon, on peut dire que, d'une certaine manière, tout langage est signal. Aussi, dans un monde qui tend vers le tout-numérique, il est fondamental d'étudier l'objet signal pour lui-même. On peut par exemple se focaliser sur le bruit ambiant : comment retrouver une information noyée dans un brouhaha ?

Cacophonie : refusons les mélanges, séparons les sources !

Vous êtes invité(e) à un cocktail. La pièce est bondée, plusieurs personnes parlent en même temps. Pouvez-vous suivre les différentes conversations simultanées à l'aide de vos deux oreilles et de votre cerveau ? Pourriez-vous y parvenir à l'aide de plusieurs microphones nourrissant un programme de traitement des signaux, un programme de séparation de sources ?



Séparation de sources audio : deux microphones captent deux voix. Chacun perçoit un mélange différent. L'art de la séparation de sources consiste à retrouver les voix individuelles à partir des mélange reçus.

© JFC

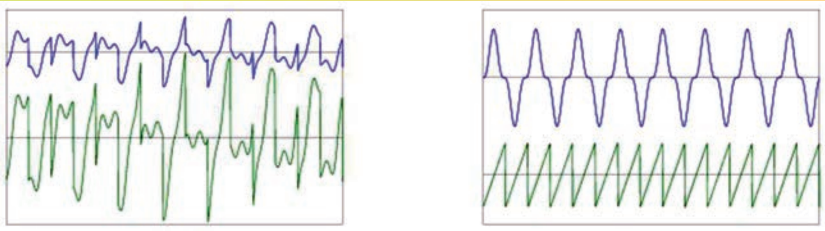
C’est tout le problème de la *séparation de sources* : si l’on observe une scène à l’aide de plusieurs capteurs, microphones, détecteurs… qui reçoivent chacun une superposition de signaux émis par différentes sources, comment extraire ces sources des différents mélanges mesurés par chacun des capteurs ? On retrouve cette problématique dans le domaine audio (séparer les voix de différents locuteurs, isoler les différents instruments d’un orchestre…), dans les télécommunications (une station de base du GSM peut communiquer avec plus de mobiles si elle est équipée d’un réseau d’antennes permettant la séparation de sources), en imagerie satellitaire (l’observation du sol par un satellite à différentes longueurs d’onde permet de séparer les composantes de l’image : types de sol ou de végétation), en biomédical (des électrodes d’électro-encéphalographie placés sur un crâne reçoivent les signaux desquels on peut extraire – séparer – différentes activités cérébrales)…

Chaque fois que plusieurs capteurs « écoutent » ou « observent » une superposition de plusieurs sources, la diversité offerte par les différents points de vue des capteurs peut permettre, par le traitement conjoint de leurs signaux, d’extraire les signaux sources. Quand cela est-il possible ? Eh bien, ça dépend. Dans certaines conditions, c’est possible, et il y a même mille façons de procéder, selon ce que l’on connaît des sources émettrices et des mélanges observés. Un cas simple est celui du mélange en proportions connues. Une situation étonnante est celle du mélange inconnu (problème « aveugle »).

Retrouver les ingrédients quand on connaît le mélange : facile

Le cas le plus simple de séparation de composantes est celui où l’on observe des mélanges de signaux dans des proportions connues. Considérons le problème le plus simple qui soit : deux mélanges différents de deux signaux. À gauche sur le schéma figurent $x_1(t)$ et $x_2(t)$, obtenus en mélangeant deux sources $s_1(t)$ et $s_2(t)$ avec des poids différents. On a choisi $x_1(t) = s_1(t) + s_2(t)$ et $x_2(t) = 2s_1(t) + 3s_2(t)$. Puisque l’on connaît la composition des ingrédients, il est facile d’inverser ces mélanges : on retrouve les sources par $s_1(t) = 3x_1(t) - x_2(t)$ et $s_2(t) = x_2(t) - 2x_1(t)$. Ce sont de simples signaux périodiques, de formes et de fréquences différentes.

Un mélange simple avec des coefficients connus s’inverse donc facilement. En situation réelle, cependant, la tâche s’avère souvent plus ardue : problèmes de très grande taille (avec des milliers de mélanges observés), observations entachées de bruit fort, mélanges observés en nombre plus faible que les sources émettrices, mélanges mal conditionnés (par exemple lorsque les coefficients de mélange de deux sources sont presque proportionnels)… Les obstacles sont légions ! Le domaine des *problèmes inverses* traite de ces cas difficiles.



À gauche, deux signaux, d'aspect un peu maladif. Ce sont des mélanges de signaux plus simples, $s_1(t)$ et $s_2(t)$, à droite.

Maintenant, revenons à des mélanges faciles mais… inconnus. Comment les inverser ? Si le mélange est partiellement connu, on peut s'en sortir. Prenons ainsi des données réelles, les images du ciel obtenues par le satellite Planck de l'Agence spatiale européenne. Cette mission spatiale a fourni des cartes du ciel « micro-ondes ». Les figures qui suivent montrent le ciel vu par Planck à 143 GHz (longueur d'onde de 2 mm) et à 353 GHz (longueur d'onde de 0,85 mm). Dans ces deux cartes, la trainée rouge répartie le long de l'équateur est essentiellement due à l'émission thermique de « poussières », résidus de l'explosion de supernovae dans notre galaxie. Dans la carte à 143 GHz, on observe aussi aux pôles Nord et Sud de faibles fluctuations, qui forment un fonds grumeleux. Il s'agit du *fonds de rayonnement cosmologique*, aussi connu comme le *rayonnement fossile*, car ce fonds est comme une photographie de notre univers lorsqu'il était encore très jeune (trois cent quatre-vingt mille ans après le Big Bang) : la lumière émise à ce moment de l'évolution cosmique a voyagé, quasiment intouchée, près de quatorze milliards d'années pour parvenir jusqu'à nous.

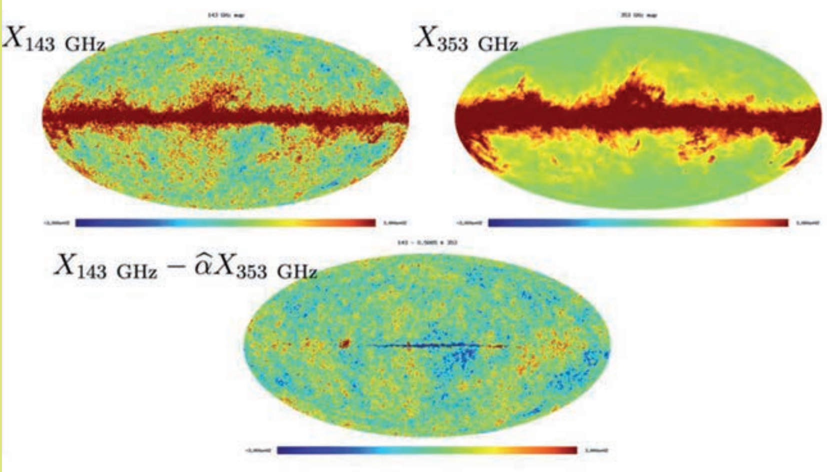
Obtenir une carte du rayonnement fossile était l'objectif principal de la mission Planck. Mais il s'agit bien d'un fonds : à cet arrière-plan de rayonnement se superposent de nombreuses autres émissions astrophysiques, dont en particulier l'émission de poussière (très visible sur la figure). La carte du rayonnement fossile livrée par la collaboration Planck a été obtenue en combinant les observations du satellite dans ses neuf canaux de fréquence, étagés de 30 GHz à 857 GHz. De manière très simplifiée, la carte à 143 GHz a été « nettoyée » par celle à 353 GHz. Supposons que cette dernière ne contienne que des émissions de poussières galactiques et que la carte à 143 GHz ne contienne que le rayonnement fossile entaché d'une certaine quantité de poussière. Autrement dit, postulons que

$$X_{143} = \text{fossile} + \alpha \times \text{poussière et } X_{353} = \text{poussière.}$$

Voici un mélange particulièrement facile à inverser :

$$\text{fossile} = X_{143} - \alpha \times X_{353}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver le bon « coefficient de nettoyage » α. On peut y parvenir en ne s'appuyant que sur notre (simplissime) modèle de mélange et sur les données elles-mêmes, grâce aux statistiques. En effet, le rayonnement fossile n'est pas corrélé avec l'émission de poussière, ces deux phénomènes n'ayant aucun lien de causalité. On peut alors trouver α comme le seul nombre tel que $X_{143} - \alpha \times X_{353}$ soit non corrélé avec X_{353}. C'est très facile à résoudre pour un statisticien : l'affaire est dans le sac ! La figure du bas montre le résultat : toute la contamination galactique semble avoir disparu dans la carte nettoyée, à l'exception de quelques traces au voisinage du plan galactique.

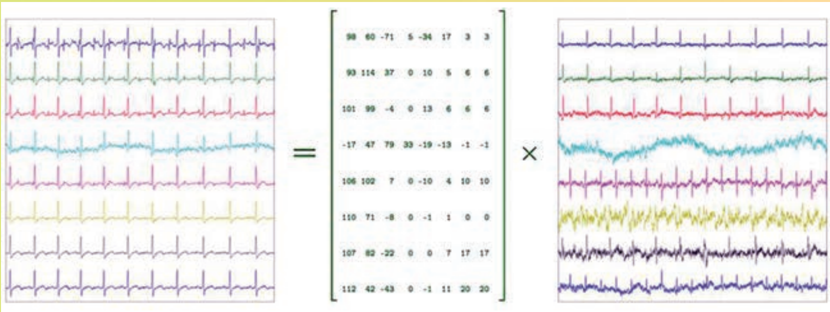


**Le ciel observé par Planck à 143 GHz et à 353 GHz (en haut).
Soustraire à la première carte la « bonne » fraction de la deuxième opère un nettoyage rudimentaire mais spectaculaire, laissant apparaître le rayonnement fossile sur presque tout le ciel (en bas).**

© CNES

L'importance de la notion probabiliste d'indépendance

Le problème remarquable résiduel est la séparation de sources *en aveugle*, c'est-à-dire sans rien connaître *a priori* des coefficients de mélange. Prenons un exemple de traitement de signaux biomédicaux. La figure qui suit montre (à gauche) les signaux issus de huit électrodes ECG (électrocardiographie) placées sur l'abdomen et le thorax d'une femme enceinte. Sur ces données ECG, un algorithme de séparation aveugle obtient des résultats (partie droite de la figure) excellents et faciles à valider: les rythmes cardiaques de la mère et du fœtus, différents, fournissent une signature évidente du succès de la procédure. L'algorithme isole correctement une source de basse fréquence qui est un signal de respiration.



À gauche: on voit clairement les battements du coeur maternel mais on distingue à peine, sur les trois premiers canaux, ceux du fœtus. À droite: la séparation de sources permet d'extraire la contribution maternelle (sources 1, 2, 3 et 7), la contribution du fœtus (sources 5 et 8) et un signal de respiration (source 4). On explique les huit signaux ECG par ces sources sous-jacentes, mélangées avec les coefficients donnés dans le tableau.

© JFC

La séparation en aveugle n'est possible que si les signaux sources sont statistiquement indépendants: c'est précisément l'exploitation de cette propriété d'indépendance qui permet de restaurer sans ambiguïté les sources à partir de l'observation de leurs mélanges.

Le raisonnement est le suivant: si les sources sont mutuellement indépendantes, leurs mélanges, eux, ne le sont généralement pas car deux mélanges particuliers contiennent chacun (en général) des contributions de chaque source. Ainsi, mélanger des sources indépendantes produit des signaux dépendants.

Supposons alors que l'on puisse trouver des combinaisons de signaux capteurs avec des coefficients tels que ces nouvelles combinaisons soient mutuellement indépendantes. Ne faut-il pas alors en conclure que ces nouvelles combinaisons ne peuvent être que les signaux sources originaux ?

Ou encore : si mélanger détruit l'indépendance, alors restaurer l'indépendance n'est-il pas équivalent à « dé-mélanger » ? Sous certaines conditions techniques, la réponse est positive.

C'est un principe général pour réussir en aveugle la séparation de sources indépendantes : un algorithme de séparation aveugle cherche (et trouve) les coefficients des mélanges tels que les sources correspondantes soient « les plus indépendantes possible les unes des autres ». C'est le choix (délicat) de la façon de mesurer et de maximiser l'indépendance statistique qui différencie les différentes méthodes de séparation aveugle, mais toutes reposent sur ce critère statistique, exprimé d'une façon ou d'une autre.

Un vrai problème d'ingénierie qui fait appel aux mathématiques

Le traitement des signaux multi-capteurs offre ainsi de belles perspectives aux mathématiques ! Les signaux sont souvent, comme ici avec les images astronomiques et les signaux biomédicaux, issus d'une problématique concrète. On souhaite alors pouvoir décomposer des observations en sources élémentaires, en construisant des modèles de mélange plus sophistiqués. Songez-y lorsque vous essaierez de suivre une conversation lors d'une soirée, dans le métro parisien ou pendant un concert…

Dans la grande majorité des applications audio, le lien entre une source et un capteur ne peut pas être décrit par un simple coefficient : il doit exprimer tout le phénomène de propagation de l'une à l'autre, sur une large plage de fréquences. La séparation de sources devient alors un vrai problème d'ingénierie !

J.-F. C.

Publications scientifiques : changer les pratiques

Marie Farge et Patricia Mirabile

Directrice de recherche au CNRS, École normale supérieure de Paris, Comité pour l'accessibilité aux publications en sciences et humanités (CAPSH)

Les mathématiques peuvent être considérées comme un langage. Depuis le Moyen Âge, elles appartiennent aux arts libéraux, ceux exercés de façon désintéressée par des personnes libres. C'est au XVII^e siècle que les « savants » fondent les premières revues de recherche. Leur publication est confiée à des imprimeurs, qui mettent en page les articles à partir des manuscrits des auteurs, les impriment et les envoient par la poste à leurs abonnés. Depuis l'avènement des techniques numériques et l'invention du World Wide Web par Tim Bernes-Lee, nous vivons une métamorphose semblable à celle que connut la société au XV^e siècle, quand Johannes Gutenberg inventa l'imprimerie en Europe, permettant le tirage en grand nombre d'exemplaires des ouvrages. Cela contribua à l'épanouissement de la Renaissance grâce à la dissémination des idées.

Un travail d'expertise qui ne coûte rien aux éditeurs

Aujourd'hui, la publication des résultats de la recherche passe par la rédaction d'articles soumis à des revues à comité de lecture, qui ne les acceptent qu'après relecture par les *pairs* (des chercheurs capables d'en comprendre le contenu en détail). Le rôle des chercheurs choisis comme relecteurs, dont le nom n'est pas rendu public pour garantir leur indépendance et éviter les pressions, est de détecter les erreurs éventuelles, de juger l'originalité des résultats présentés et d'améliorer l'article, aussi bien sur le fond que sur la forme.

Comme la participation à des comités éditoriaux et la relecture des articles font partie des tâches pour lesquelles les chercheurs sont rémunérés (le plus souvent par l'État), les maisons d'édition propriétaires des revues bénéficient ainsi gratuitement d'un travail de très haut niveau. En effet, vu l'hyperspécialisation des articles de recherche, celui-ci requiert une expertise exceptionnelle et beaucoup de temps.

La relecture des articles est essentielle : elle évite de mettre en circulation des idées fausses ou mal formulées. Les revues à comité de lecture se doivent de garantir l'objectivité et la rigueur du contenu des articles qu'elles publient. Le contrôle du système d'évaluation des articles de recherche par les maisons d'édition peut présenter des conflits d'intérêts et tend à privilégier la quantité d'articles publiés sur leur qualité. Au XXIe siècle, les revues de recherche ne devraient plus appartenir à leur maison d'édition mais à leur comité éditorial, composé de chercheurs qui continueraient, comme ils l'ont toujours fait, à assurer bénévolement la vérification des articles.

La publication des articles de recherche répond à trois besoins : vérifier et sélectionner ceux qui sont publiables, les disséminer au niveau mondial et les préserver pour les générations futures. D'un point de vue économique, la publication des œuvres de recherche est différente de celle des œuvres littéraires ou artistiques (les chercheurs sont des salariés quand les écrivains et les artistes sont des travailleurs indépendants rémunérés grâce à leurs droits d'auteur).

Quand un article a été accepté pour publication, la maison d'édition propriétaire de la revue demande aux auteurs de leur transmettre gratuitement la propriété intellectuelle de tout ce qui est présenté dans l'article (texte, figures, tableaux de données). Pour ce faire, il suffit qu'un seul des co-auteurs signe un formulaire de transfert de droits d'auteur pour qu'il engage les autres co-auteurs et donne ainsi à la maison d'édition l'exclusivité des bénéfices provenant de cet article, et ce à compter de sa date de publication et jusqu'à soixante-dix ans après le décès du dernier co-auteur. Grâce à ce système, les maisons d'édition possèdent pendant plus d'un siècle les articles publiés par les chercheurs, qu'elles peuvent ainsi revendre à ces mêmes chercheurs, sous forme d'abonnements que leurs bibliothèques achètent aux prix et conditions que les maisons d'édition leur imposent.

À la fin du XXe siècle, les maisons d'édition pressentent les avantages de la publication numérique, qui leur permet de dématérialiser les articles et d'obtenir ainsi des coûts marginaux quasi nuls. De plus, les chercheurs se chargent eux-mêmes de la mise en page (grâce au logiciel *open source* TeX–LaTeX, qui a été développé bénévolement dans les années 1970 par Donald Knuth, professeur à l'université de Stanford). Les articles sont ensuite publiés sous forme de fichiers au format PDF que les lecteurs téléchargent et impriment eux-mêmes. Mais les maisons d'édition ont aussi compris qu'elles ont intérêt à préserver aussi longtemps que possible le modèle économique de l'imprimerie, car il leur donne la propriété aussi bien des articles que des revues de recherche. Quelques-unes d'entre elles* ont alors acheté les revues les plus réputées et se sont

* *Elsevier, Springer Nature, Blackwell-Wiley, Taylor & Francis…*

constituées en oligopole afin de contrôler le marché à l'échelle mondiale et préserver ainsi leurs profits mirobolants (jusqu'à 40 %, voire au-delà !). Cela fait près de vingt ans que les bibliothécaires dénoncent les tarifs exorbitants qu'elles pratiquent, qui les contraignent à interrompre leurs abonnements aux revues des maisons d'édition académique trop faibles pour affronter la concurrence de cet oligopole… qui interdit même aux bibliothécaires de divulguer les contrats d'abonnements, sous peine de poursuites ! La majorité des chercheurs ignorent ces problèmes, ou ne se sentent pas concernés, faute d'information sur le fonctionnement du système d'abonnement aux revues de recherche et sur les dépenses extravagantes que cela entraîne pour l'État.

Le coût faramineux des publications scientifiques

Les chercheurs souhaitent avant tout que leurs articles soient lus et utiles. Il suffit donc que ceux-ci soient téléchargeables gratuitement à partir de plateformes mises à leur disposition, comme le sont les grands équipements publics, tels les centres de calcul et le réseau informatique Renater. Ceci permettrait aux chercheurs retraités ou dont l'institution n'a pas les moyens de payer les abonnements (ceux travaillant pour le secteur privé ou pour une *start-up*), mais aussi à tout citoyen d'être informés des résultats qu'obtiennent les chercheurs grâce au financement public. Ceci est affaire d'équité, mais aussi de bon sens : les résultats de la recherche ne sont utiles que si les articles publiés sont lus ! Hélas, les quelques maisons d'édition qui dominent le marché sont passées expertes en matière commerciale et juridique pour limiter l'accès aux revues de recherche, qui sont pour elles des marchandises, sur la rareté desquelles elles ont beau jeu de spéculer. Ainsi font-elles payer aux chercheurs le droit de lire leurs propres articles sur Internet, ou le droit de les mettre en ligne en accès libre sur le site de la revue (ce qui est de la publication à compte d'auteur). De plus, les prix qu'elles pratiquent ne sont pas du tout en rapport avec les services qu'elles rendent : il ne s'agit plus d'édition imprimée diffusée par la poste, mais d'édition électronique mise en ligne sur le Web.

Par exemple, l'ABES (Agence bibliographique de l'enseignement supérieur) verse 34 millions d'euros par an à la maison d'édition Elsevier pour l'abonnement à ses deux mille revues à comité de lecture (rédigées, relues et en partie mises en forme par des chercheurs qui ne sont pas payés par Elsevier), soit en moyenne 17 000 euros par revue et par an*. De même, si un chercheur veut publier en accès libre un article dans *Nature Communications*, il doit verser 3 700 euros** à la maison d'édition Springer Nature. Nombre de revues font mieux encore grâce au « modèle hybride » : pour un même journal, elles font payer à la fois les

** Selon le site d'opinions Rue89, billet du 10 Novembre 2014.*
*** Détails sur nature.com/openresearch/publishing-with-npg/nature-journals*

abonnements (qu'elles facturent aux bibliothèques) et les frais de mise en ligne en accès libre (qu'elles facturent aux chercheurs) !

Aujourd'hui, les instances qui financent la recherche publique essaient de reprendre le contrôle, afin d'éviter la banqueroute où ces abus de position dominante risquent de les conduire, et demandent aux chercheurs de mettre leurs articles en accès libre. Ceci est légalement possible en France grâce à l'article 30 de la loi du 7 octobre 2016 pour une République numérique*, proposée par Axelle Lemaire, qui permet aux chercheurs de disposer, *« même après avoir accordé des droits exclusifs à un éditeur, du droit de mettre à disposition gratuitement dans un format ouvert, par voie numérique, la version finale de son manuscrit acceptée pour publication à l'expiration d'un délai courant à compter de la date de publication. Ce délai est au maximum de six mois pour une publication dans le domaine des sciences, de la technique et de la médecine et de douze mois dans celui des sciences humaines et sociales »*.

En fait, bien avant que la loi Lemaire ne l'autorise, les chercheurs avaient pris l'habitude, quand ils soumettaient un article à une revue, de le déposer sur une plateforme d'archives ouvertes. Cette pratique est la norme chez les mathématiciens grâce à arXiv (https://arxiv.org), qui a été développée dès 1991 par un chercheur de Los Alamos, Paul Ginsparg, pour diffuser électroniquement les tirés à part des articles. En s'inspirant

Page d'accueil de la plateforme http://dissem.in,
qui permet aux chercheurs de deposer leurs articles en accès libre.

* *Consulter legifrance.gouv.fr/eli/loi/2016/10/7/2016-1321/jo/texte*

de cet exemple, le CCSD (Centre pour la communication scientifique directe) a créé en 2002 HAL (Hyper articles en ligne, https://hal.archives-ouvertes.fr), qui est cofinancée par le Centre national de la recherche scientifique (CNRS), l'Institut national de recherche en informatique et en automatique (Inria) et l'université de Lyon. Pour faciliter la mise en ligne des articles, la plateforme Dissemin (http://dissem.in) a été créée en 2014 par Antonin Delpeuch quand il était étudiant en informatique à l'École normale supérieure de Paris; son code source, ouvert (*open source*), est développé dans le cadre de l'association CAPSH (Comité pour l'accessibilité des publications en sciences et humanités) et téléchargeable sur GitHub (http://github.com/dissem). Dissemin moissonne sur le Web pour constituer la liste des publications disponibles en ligne pour chaque chercheur (quels que soient sa discipline et le pays où il exerce), en précisant pour chacune si elle est ou non en accès libre. Pour celles qui ne le sont pas, Dissemin vérifie si la maison d'édition l'autorise, puis permet au chercheur de déposer la version autorisée dans une archive ouverte, et ce de façon très simple (en deux clics). Dans sa version actuelle, Dissemin offre le choix entre HAL et Zenodo (http://zenodo.org, archive gérée par le CERN, Organisation européenne pour la recherche nucléaire, et financée par la Commission européenne). D'autres interfaces de dépôt sont en cours de développement.

Les chercheurs doivent reprendre le contrôle de leurs publications

L'idéal serait que ni les lecteurs ni les auteurs n'aient à payer, aussi bien pour lire un article que pour le publier en accès ouvert : étant donné que la recherche est financée par des fonds publics, la dissémination des articles (relus et acceptés par les pairs) devrait être financée par ces même fonds publics. Il serait absurde d'investir pour produire des articles présentant de nouveaux résultats de recherche sans les diffuser. Il est tout aussi contre-productif de laisser des entreprises commerciales le faire en leur versant des sommes faramineuses en comparaison du peu de services qu'elles rendent pour la publication électronique.

Des solutions existent déjà : les *archives ouvertes* peuvent être utilisées par les comités éditoriaux des revues pour publier en accès libre leurs articles; on les appelle *épi-revue*s (ou *overlay journals*). Ainsi, l'épi-revue *Discrete Analysis*, fondée en 2015 par le mathématicien Tim Gowers, de l'université de Cambridge (Grande-Bretagne), est publiée sur arXiv. Il existe à ce jour plus de dix mille revues publiées en accès libre, sans que ni les auteurs, ni les lecteurs n'aient à payer, ceci grâce au logiciel *open source* OJS (Open Journal Systems, https://pkp.sfu.ca/ojs), qui a été conçu en 2001 par John Willinsky (université de Stanford) et développé par l'association PKP (Public Knowledge Project). C'est ainsi que la revue de mathématiques appliquées *Image Processing On Line* (IPOL, http://www.ipol.im) est publiée en accès libre depuis sa création par Jean-Michel Morel (École normale supérieure Paris-Saclay) en 2010. Son comité éditorial évalue non seulement les articles mais aussi les algorithmes présentés. Cerise sur le gâteau, les lecteurs ont même la possibilité de les tester sur leurs propres données, qu'ils peuvent importer sur le site de la revue ! Les résultats publiés sont donc bien reproductibles, ce qui garantit l'objectivité de la recherche.

La connaissance n'est pas une marchandise, car échanger une idée est un jeu à somme positive. En effet, la transmission d'une idée n'appauvrit pas son auteur ; au contraire, elle l'enrichit car il gagne ainsi des interlocuteurs avec lesquels il va pouvoir l'approfondir. Cet échange gratuit est au cœur de l'évaluation par les pairs. La marchandisation des articles et des revues de recherche à l'ère de la publication électronique est contre-productive car elle entrave les échanges entre chercheurs. Paierait-on pour utiliser une langue ? Il faut enrayer le cercle vicieux actuel, dans lequel la production des résultats est financée par des fonds publics alors que leur dissémination est laissée à des entreprises commerciales qui abusent de leur situation dominante. Les publications de recherche devraient être considérées comme des biens communs de la connaissance, accessibles gratuitement à tous, sans qu'aucun ne puisse en avoir la propriété exclusive. Ces idées ne sont pas nouvelles, mais elles ne se diffusent que très lentement. On les doit à Elinor Ostrom, qui a reçu le prix Nobel d'économie en 2009 pour *« son analyse de la gouvernance économique, plus particulièrement des biens communs »*.

Il est urgent de changer le modèle économique du système des publications scientifiques pour que les chercheurs et les citoyens puissent bénéficier pleinement de l'ère numérique et des nouveaux moyens de dissémination des résultats de la recherche qu'ils apportent.

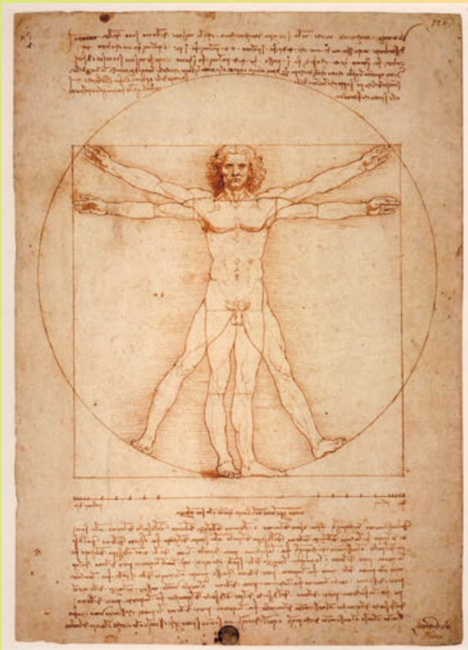
M.F. & P.M.

Les mathématiques : le langage de la beauté

Caroline Jullien

Docteure en philosophie

Le 10 octobre 1912 s'ouvre à Paris La Section d'or, une exposition marquante dans l'histoire du cubisme. La référence est explicite : la *section d'or*, aussi appelée le *nombre d'or* ou encore la *divine proportion*, est la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$, soit $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Ce nombre, tenu pour exprimer une proportion esthétique, se retrouve à l'œuvre tout au long de l'histoire de l'art : depuis la grande pyramide, *l'Homme de Vitruve* de Leonard de Vinci, le cubisme analytique, l'œuvre de Le Corbusier ou la musique de Béla Bartók.



L'homme de Vitruve.

Les mathématiques apparaissent avec insistance et régularité dans les domaines que l'on appelle artistiques, dans les secteurs qui ont « quelque chose à voir » avec l'esthétique. Elles se glissent là où l'on ne les attend pas : la structure de groupe se cache sous la plume du mathématicien et poète Jacques Roubaud, la théorie des graphes sous celle de l'écrivain Raymond Queneau…

Trouver des moyens de caractériser la beauté… par les maths

Quelque trois siècles avant notre ère, Aristote l'affirmait : *« Les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place ni au Beau, ni au Bien, sont assurément dans l'erreur : le Beau est, au contraire, l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations. Ce n'est pas une raison parce qu'elles ne le nomment pas pour dire qu'elles n'en parlent pas, car elles en montrent les effets et les rapports »* (*Métaphysique*). Les mathématiques auraient ainsi à nous apprendre sur les propriétés esthétiques, elles nous donneraient les clés de ce qui provoque l'émotion esthétique ; elles seraient le langage de la beauté. Voilà qui est surprenant, sinon provocateur ! Réputées austères et abstraites, enfermées dans le carcan des théorèmes, dans le mécanisme des démonstrations, les mathématiques ne semblent *a priori* pas les bienvenues dans le royaume de l'esthétique.

Et pourtant. Dès le XVII^e^ siècle et tout au long du XVIII^e^ siècle, les mathématiques occupent une place centrale dans l'élaboration de l'esthétique en tant que discipline philosophique autonome. Jean-Pierre de Crousaz (1663–1750), philosophe et mathématicien suisse, prend part aux enquêtes sur nos facultés de perception, qui déboucheront sur ce que l'on appelle maintenant l'*esthétique philosophique*. Il publie un *Traité sur le beau* (L'Honoré et Chatelain, 1715), dans lequel il est le premier à analyser de façon systématique le principe de l'unité dans la variété. Pour justifier la pertinence de ce principe pour la caractérisation des propriétés esthétiques, c'est aux mathématiques que Crousaz fait appel : *« C'est encore dans les spéculations de cette science [les mathématiques] plus que dans aucune autre, que l'esprit découvre avec ravissement des uniformités qui se soutiennent toujours parmi les diversités infinies. Je ne m'étendrai pas à donner des exemples de cette vérité, ceux à qui ces Belles Sciences sont connues se les rappelleront incontinent, et ceux qui n'en sont pas encore instruits ne les comprendroient pas. »* Il consacre un chapitre entier à la beauté des mathématiques, chapitre qu'il augmentera lors de seconde édition (1724), parce que, explique-t-il, *« on a souhaité que je m'étendisse davantage sur la Beauté des Sciences »*.

Ce qui est remarquable est que la thèse de Crousaz n'est pas de prouver la beauté des mathématiques, mais de montrer le bien-fondé de la caractéristique de la beauté qu'il défend. Autrement dit, il ne construit pas son raisonnement en vue de convaincre le lecteur que les mathématiques sont belles (cela semble se passer d'explication), il tâche d'expliquer pourquoi nous les trouvons belles et, ce faisant, de trouver un moyen de caractériser la beauté.

Chercher l'unité profonde derrière la variété apparente

La démarche est similaire chez le philosophe irlandais Sir Francis Hutcheson (1694–1746). Son ouvrage *Recherches sur l'origine de nos idées de beauté et de vertu* (édité par Wolfgang Leidhold en 1725) est considéré comme l'un des ouvrages fondateurs de l'esthétique. Hutcheson n'était pas mathématicien. Pourtant, il ne cite pas un seul «artiste», pas une seule «œuvre d'art», si ce n'est… Euclide et ses *Éléments*. Les mathématiques lui servent de terrain d'investigation et de source d'exemples : *«À uniformité égale, la variété augmente la beauté. La beauté d'un triangle équilatéral est moindre que celle d'un carré, qui est elle-même moindre que celle d'un pentagone, celle-ci étant encore surpassée par celle de l'hexagone. La plus grande uniformité au sein d'une variété égale augmente la beauté dans les exemple suivants : le triangle équilatéral, ou même isocèle, surpasse le scalène ; le carré surpasse le rhombe ou losange, qui surpasse à son tour le rhomboïde, plus beau pourtant que le trapèze.»* Il consacrera une section entière à la beauté des théorèmes, des corollaires et des propositions. Le philosophe Yves-Marie André, appelé le père André (1675–1764), publie également un ouvrage majeur, *Essai sur le beau* (Guérin, 1741). Il reprochera à Hutcheson de ne pas s'être occupé de la beauté des démonstrations ! Enfin, Diderot propose en 1752 un article pour son encyclopédie, «Recherches philosophiques sur l'origine et la nature du beau», dans lequel il entreprend une synthèse critique des travaux sur la question du beau. À son tour, il s'interroge sur la caractérisation du beau. Il en écarte l'idée de grandeur et justifie cette exclusion en faisant appel… à la reine des sciences : *«En Mathématique on entend par un beau problème, un problème difficile à résoudre ; par une belle solution, la solution simple et facile d'un problème difficile et compliqué ; la notion de grand, de sublime, d'élevé, n'a aucun lieu dans ces occasions, où on ne laisse pas d'employer le nom de beau.»*

La beauté n'est pas une valeur ajoutée, c'est le premier critère !

Cette promenade dans les coulisses de la formation de l'esthétique nous révèle deux choses : les mathématiques fournissent un modèle pour caractériser des propriétés esthétiques ; elles sont elles-mêmes objet d'une évaluation esthétique. Ainsi, non seulement les mathématiques «décrivent» la beauté, mais surtout elles s'en trouvent parées. Il faut donc maintenant se tourner du côté des mathématiciens pour comprendre cela. Que nous disent-ils de la beauté, et plus généralement de l'esthétique de leur discipline ?

Il suffit de lire des écrits rétrospectifs, des textes honorifiques, des conférences grand public, pour mesurer la place qu'occupent les considérations esthétiques chez les mathématiciens. Bien sûr, pourra-t-on objecter, les mathématiques sont tellement difficiles à comprendre pour un public non initié, elles ont une telle mauvaise réputation en ce qui concerne leur rigueur (certains diront *«froideur»*), qu'injecter un peu de beauté de-ci de-là rend la chose plus digeste. Cela serait faire bien peu de cas de l'ardeur avec laquelle certains mathématiciens se sont appliqués à construire de véritables thèses argumentées pour asseoir non seulement la dimension esthétique des mathématiques, mais également le rôle crucial de cette dernière pour comprendre et faire des mathématiques. Pour Godfrey Harold Hardy (1877–1947), mathématicien britannique de premier plan, la beauté est un préalable à la recherche en mathématique: *«Les formes créées par le mathématicien, comme celles créées par le peintre ou le poète, doivent être belles ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'agencer harmonieusement. La beauté est le premier critère: il n'y a pas en ce monde de place permanente pour des mathématiques laides»* (*A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940).

La beauté n'est pas une valeur ajoutée, c'est le premier critère pour décider de l'importance d'un résultat mathématique. Ce que l'on peut mettre en résonance avec la description de Jacques Hadamard, qui nous explique en 1945 dans son *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* le rôle de la beauté: *«Sur le caractère fécond de nos futurs résultats, à propos duquel nous ne savons le plus souvent rien à l'avance, à strictement parler, ce sens de la beauté peut nous renseigner et je ne vois rien d'autre qui nous permette de bâtir des prévisions.»*

Henri Poincaré: le mathématicien *«travaille en artiste»*

Parmi les mathématiciens sensibles à l'attrait esthétique de leur discipline, Henri Poincaré (1854–1912) est sans aucun doute le plus connu. Pour lui, cet aspect des mathématiques procure certes une satisfaction pour l'esprit. Mais surtout la prise en considération de la dimension esthétique des mathématiques est nécessaire à la compréhension ainsi qu'au développement de cette discipline. Ainsi, pour lui, l'esthétique induit une méthode de travail en mathématique. L'argument que Poincaré met en place pour justifier cette idée repose sur la considération des mathématiques en tant que langage. Comme tout langage, elles seront d'autant plus performantes et utiles qu'elles seront riches, nuancées et précises. Or, pour pouvoir atteindre ces raffinements, il faut, explique Poincaré, que l'on tâche de mettre en valeur les symétries, que l'on repère des analogies, il faut que le mathématicien *« travaille en artiste »* (*la Valeur de la science*, Flammarion, 1905). C'est ainsi qu'il compare la méthode de travail du mathématicien avec celle de l'écrivain : *« Les écrivains qui embellissent une langue, qui la traitent comme un objet d'art, en font en même temps un instrument plus souple, plus apte à rendre les nuances de la pensée. On comprend alors comment l'analyste qui poursuit un but purement esthétique, contribue par cela même à créer une langue plus propre à satisfaire le physicien. »*

Pour comprendre l'importance de cette thèse, agrandissons un peu le tableau. Au début du siècle dernier, la communauté mathématique a été agitée par un débat portant sur la nature du raisonnement mathématique et sur la possibilité, ou non, de le réduire à la logique. Poincaré a pris part à ce débat – souvent appelé le *débat sur le logicisme* – notamment dans ses échanges avec le philosophe britannique Bertrand Russell (1872–1970), l'un des fondateurs de la logique. Poincaré s'opposait fermement à la logicisation des mathématiques, c'est-à-dire, schématiquement, à la réduction des démonstrations mathématiques à une succession d'étapes déductives formelles. Il ne questionnait pas la rigueur que permet la logique en mathématique, mais il dénonçait cet excès de formalisme logique comme obstacle à la compréhension. Pourquoi ? Parce que l'écriture strictement logique des mathématiques ne laisse pas de place à leur dimension esthétique : *« Ceux qui les premiers se sont préoccupés avant tout de la rigueur nous ont donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter : mais si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les traités de mathématiques vont devenir bien longs : et si je crains les longueurs ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que je crains qu'en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué [...] le rôle utile »* (*Science et Méthode*, Flammarion, 1908). Ainsi, la dimension esthétique des mathématiques est cruciale : ce n'est ni une simple façon de parler, ni une fantaisie anecdotique ; au contraire, elle est au cœur du processus de compréhension et d'invention mathématique.

Le découpage artificiel entre scientifiques et littéraires

Aujourd'hui encore les mathématiciens ne sont pas satisfaits avec la logicisation des mathématiques. Les *théories de la preuve* ne semblent pas correspondre à l'idée que se font les mathématiciens d'une démonstration : il y a un *nescio quid* [un je-ne-sais-quoi] qui échappe à toute tentative de formalisation exhaustive des mathématiques. Cette tension pourrait-elle se résorber lorsque l'on parviendra à intégrer les éléments d'ordre esthétique dans l'analyse des démonstrations ? Cette question, et plus généralement la question du rôle de l'esthétique en mathématique, connaît un engouement croissant depuis une vingtaine d'années. Des travaux de divers horizons y sont consacrés, en philosophie, en histoire, en didactique ou encore du côté des neurosciences (voir par ailleurs dans cette brochure). C'est dans ce contexte que s'est menée en 2013 une analyse de l'activité du cerveau de mathématiciens, basée sur des données obtenues par IRM, alors qu'ils se voyaient présenter des textes mathématiques ou des œuvres d'art. Les auteurs de cette expérience montrent ainsi la corrélation des zones activées du cerveau : oui, les mathématiques sont susceptibles de provoquer une réponse esthétique, au même titre que le sont les œuvres d'art.

Mentionner cette expérience devrait permettre d'éviter un procès de froide surintellectualisation de la beauté : souligner le lien entre esthétique et mathématique, ce n'est pas vouloir enlever de l'émotif à l'expérience esthétique ! Au contraire, il s'agit ici de dénoncer ce découpage artificiel mais bien actuel dans nos institutions : on oppose le cognitif à l'émotif, on oppose les « littéraires » et les « matheux », les artistes et les scientifiques. Cette opposition apparaît bien artificielle à la lumière du rôle cognitif de l'esthétique…

C.J.

Pour en savoir (un peu) plus :

La science et l'hypothèse. Henri Poincaré, Flammarion, 1902.

Esthétique et mathématiques, une exploration goodmanienne. Caroline Jullien, Presses universitaires de Rennes, 2008.

Logical Dynamics Of Information And Interaction. Johan van Benthem, Cambridge University Press, 2011.

The Experience Of Mathematical Beauty And Its Neural Correlates. Michael Atiyah, Dionigi Benincasa, John Paul Romaya et Semir Zeki, *Frontiers in Human Neuroscience* 8, 2014.

Beauty And Revolution In Science. James Mc Allister, Cornell University Press, 1999.

« Logic In Play. » Johan van Benthem, Congress On Logic, Methodology And Philosophy Of Science, conférence plénière, 3 août 2015 (en anglais) : http://video.helsinki.fi/Arkisto/flash.php?id=20447

Sur la clarté des démonstrations mathématiques. François Rostand, Vrin, 1962.

Explaining Beauty In Mathematics : An Aesthetic Theory Of Mathematics. Ulianov Montano, Springer, 2014.

Bibliographie

Le Comité international des jeux mathématiques est une association indépendante. Nous avons sélectionné les ouvrages suivants pour les lecteurs de Maths Langages Express qui souhaitent interroger plus avant les liens qu'entretiennent les mathématiques et le langage.

Grands classiques :

Alice au pays des merveilles, suivi de *De l'autre côté du miroir*. Lewis Carroll, Le Livre de poche, 2009.
Mathématiques d'ailleurs (nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles). Marcia Ascher, Le Seuil, 1998.
Les mots et les maths. Bertrand Hauchecorne, Ellipses, 2014.
L'information. James Gleick, Cassini, 2016.
La bosse des maths, quinze ans après. Stanislas Dehaene, Odile Jacob, 2010.
One zero show. Denis Guedj, Le Seuil, 2001.
Double jeux (fantaisies sur des mots mathématiques par quarante auteurs). Stella Baruk, Le Seuil, 2000.
Les chiffres ? Même pas peur Stella Baruk, Presses universitaires de France, 2016.
La science selon Henri Poincaré. Dunod, 2013.

Littérature sous contraintes, textes fondateurs :

Exercices de style. Raymond Queneau, Gallimard, 1947.
Mille milliards de poèmes. Raymond Queneau, Gallimard, 1961.
Mono no aware. Jacques Roubaud, Gallimard, 1970.
Trente et un au cube. Jacques Roubaud, Gallimard, 1973.
Je ne le répéterai pas. Gino Levesque, Zus Publications, 2013.

Par l'Oulipo :

Le site de l'Oulipo (Ouvroir de littérature potentielle), http://oulipo.net/
La littérature potentielle. Collectif, Gallimard, 1973.
Atlas de littérature potentielle. Collectif, Gallimard, 1981.
Abrégé de littérature potentielle. Collectif, Mille et une nuits, 2002.

Autour de la bande dessinée sous contraintes :

Oupus. Collectif (Ouvroir de bande dessinée potentielle), L'Association, 1996 (tome 1), 2000 (tome 3), 2003 (tome 2), 2005 (tome 4), 2014 (tome 5), 2015 (tome 6).
Les aventures de Julius-Corentin Acquefacques. Marc-Antoine Mathieu, Delcourt, 1990 *(L'origine)*, 1991 *(La qu...)*, 1993 *(Le processus)*, 1995 *(Le début de la fin)*, 2004 *(La 2,333*$^{\text{ème}}$ *dimension)*, 2013 *(Le décalage)*.
Ratatouille. Étienne Lécroart, Le Seuil, 2000.
Cercle vicieux. Étienne Lécroart, L'Association, 2000.
Le cycle. Étienne Lécroart, L'Association, 2003.
Les penseurs. François Ayroles, L'Association, 2006.
Les parleurs. François Ayroles, L'Association, 2003.
Le dormeur. Lewis Trondheim, Cornelius, 1993.
Moins d'un quart de seconde pour vivre. Lewis Trondheim et Jean-Christophe Menu, L'Association, 1991.

Sur le thème de l'accès aux publications scientifiques :

Consulter la documentation disponible en ligne, en accès libre, sur le site suivant, administré par Marie Farge : http://openscience.ens.fr/MARIE_FARGE/
The Oligopoly Of Academic Publishers. Vincent Larivière, Stefanie Haustein et Philippe Mongeon, *PLOS One* 10 (6), 10 juin 2015, disponible en ligne.
Understanding Knowledge As A Commons : From Theory To Practice. Charlotte Hess et Elinor Ostrom, MIT Press, 2006.

Sur le thème de l'esthétique :

Poincaré vs *Russell On The Role Of Logic In Mathematics*. Michael Detlefsen, in *Russell & Analytic Philosophy*, Andrew Irvine et Gary Wedeking (éditeurs), 1993.
Mathematics And The Aesthetics : New Approaches To An Ancient Affinity. Nathalie Sinclair, William Higginson et David Pimm (éditeurs), Springer–Canadian Mathematical Society, 2007.
The Roles Of The Aesthetic In Mathematical Inquiry. Nathalie Sinclair, *Mathematical Thinking And Learning* 6 (3), 2004.
Aesthetics As A Liberating Force In Mathematics Education? Nathalie Sinclair, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 41(1–2), 2009.

Autour de la littérature sous contraintes :

Mathématiques et jeux littéraires – mathez vos textes ! Arnaud Gazagnes, Ellipses, 2009.
La belle Hortense. Jacques Roubaud, Seghers, 1990.
Quelque chose noir. Jacques Roubaud, Gallimard, 2001.
La princesse Hoppy ou le conte du labrador. Jacques Roubaud, Absalon, 2008.
L'art du contrepet. Luc Étienne, Pauvert, 1987.
Jean qui rit, Jean qui pleure. François Ayroles, L'Association, 2015.
Nogegon. Luc et François Schuiten, Casterman, 2010.
TNT en Amérique. Jochen Gerner, L'Ampoule, 2002.
Les trois chemins. Lewis Trondheim et Sergio Garcia, Delcourt, 2003.
Coquetèle. Anne Baraou et Vincent Sardon, L'Association, 2002.
Morphologie variable. Stéphane Blanquet, L'Association, 2001.

Sur le thème du langage pictural :

Le cubisme. Serge Fauchereau, Flammarion, 2012.
Une brève histoire des lignes. Tim Ingold, Zones Sensibles, 2011.
Théories de la composition musicale au XXe siècle. Sous la direction de Nicolas Donin et Laurent Feneyrou, Symétrie, 2013.

Autour du langage :

La tour de Babylone. Ted Chiang, Folio, 2010.
Le langage et la pensée. Noam Chomsky, Payot, 2012.
Structures syntaxiques. Noam Chomsky, Le Seuil, 1979.
Théories du langage, théories de l'apprentissage. Collectif (Centre Royaumont), Le Seuil, 1979.
L'homme de paroles. Claude Hagège, Gallimard, 1987.
Éléments de linguistique générale. André Martinet, Armand Colin, 2015.

Inria — inventeurs du monde numérique

1967 › 2017 » 2067

Imaginons notre futur

Centre de recherche Inria de Paris en bref

600
personnes dont
520 scientifiques
36 équipes
de recherche

22 bourses ERC depuis 2009

1 à **2** nouvelles start-up par an

En partenariat avec :

Les universités Paris Dauphine, Paris Diderot, Paris-Est Marne-la-Vallée, Pierre et Marie Curie, École des Ponts ParisTech, École Normale Supérieure de Paris, Ecole Pratique des Hautes Etudes, Mines ParisTec, Cerema, Cnrs, Inserm.

Membre de :

PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS — SORBONNE UNIVERSITÉS — USPC Université Sorbonne Paris Cité

Inria.fr/Centre/Paris

@inria_paris

La recherche MATHÉMATIQUE se prend au JEU

Université Paris Diderot Paris 7 · IREM Paris · UPMC Sorbonne Universités · ihp Institut Henri Poincaré · MMI Maison des Mathématiques et de l'Informatique · Inria inventeurs du monde numérique · FSMP Fondation Sciences Mathématiques de Paris · CNRS · Université Caen Normandie

tangente vous souhaite un beau salon

l'aventure mathématique

Tangente fête en 2017 son 30ème anniversaire

Tangente, le magazine de la culture mathématique, est très heureux d'accompagner ce salon dont il est partenaire depuis les débuts.

N'hésitez pas à vous rendre sur notre stand.

L'année 2017 marque le trentième anniversaire de notre magazine. Si vous souhaitez, comme tous les amateurs de mathématiques, qu'il se perpétue encore de nombreuses années, **abonnez-vous** en retirant un bulletin d'abonnement sur le stand.

Un cadeau vous y attend.

Voici les nouveautés que nous sommes heureux de vous annoncer.

• • • • • • *Tangente*

est maintenant disponible en ligne

sur www.tangente-mag.com

L'abonnement numérique est inclus si vous vous abonnez à la version papier !
Testez gratuitement le n° 167 en ligne.

• • • **Recevez un cadeau de 10 €**

en vous abonnant sur notre stand

Remise valable sur tout achat fait sur le stand POLE Tangente après avoir remis un abonnement (papier / numérique).

• • • • • **Une nouvelle librairie en ligne**

vous attend sur www.infinimath.com/librairie

• • • • • • **Bibliothèque *Tangente***

La plus belle librairie mathématique au monde

vient de publier son 59ème livre.
Découvrez ses trésors sur notre stand.

Cette brochure placée sous le parrainage de
Stanislas Dehaene

a été réalisée par le
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de
Marie José Pestel et Édouard Thomas

Imprimée grâce à
la Mairie de Paris et Sciences sur Seine,
la Région Île-de-France, l'INRIA, le CNRS,
le Crédit Mutuel Enseignant et les Éditions POLE

Elle réunit les signatures de

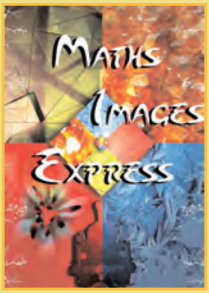
Stanislas Dehaene
Olivier Keller
Emmanuel Claisse
Moreno Andreatta, Martin Granger, Tom Johnson,Valentin Villenave
Marie Amalric
Gérard Huet
Pascal Kaeser
Emmanuel Sander
Cédric Villani
Jean-Jacques Dupas
Assia Mahboubi
Hervé Lehning
Jean-Paul Delahaye
Gilbert Rogé
Jean-François Cardoso
Marie Farge, Patricia Mirabile
Caroline Jullien

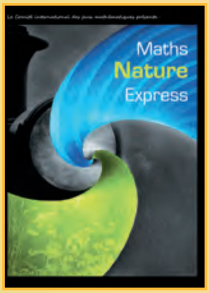
Que tous ces auteurs soient ici remerciés pour leur enthousiasme, leur patience et leur gentillesse. Grâce à eux, nous espérons que le lecteur prendra plaisir à découvrir l'importance des langages dans le développement de notre société et leurs relations étroites avec les mathématiques.

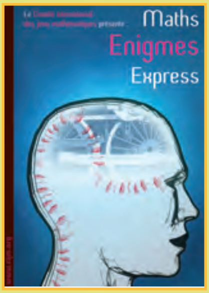
Réalisation: Patrick Arrivetz
Maquette de couverture et bandeau: Elsa Godet – www.sciencegraphique.com
Achevé d'imprimer en Mai 2017 sur les presses de CIA GRAPHIC – 03 86 90 96 10

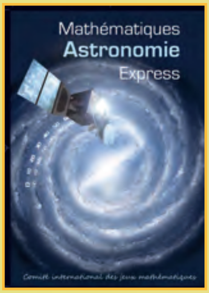
Maths Express

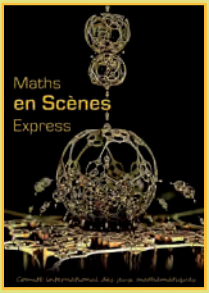
une collection CIJM - **www.cijm.org**











CIJM
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

www.cijm.org