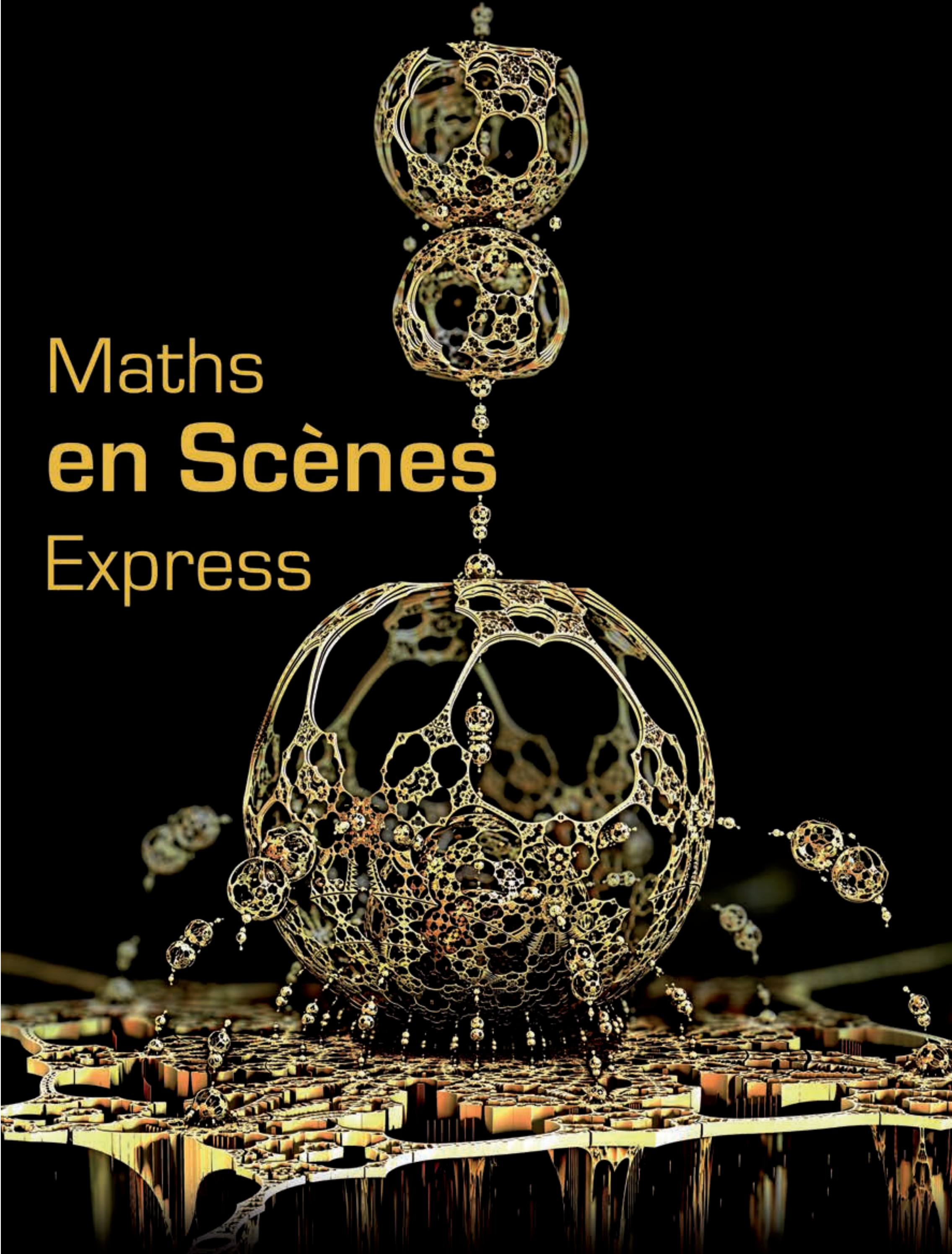
Maths
en Scènes
Express



Comité international des jeux mathématiques

PREFACE

Marie José Pestel

Mettre les « Mathématiques en Scènes » guide les actions du Comité International des Jeux Mathématiques depuis sa création et plus particulièrement depuis l'année 2000, Année Mondiale des Mathématiques et année du 1er salon culture et jeux mathématiques

La volonté de mettre les mathématiques en spectacle est ancienne et très présente dans toutes les civilisations à travers l'artisanat, les arts graphiques, le jeu et dans certains ouvrages pédagogiques. Depuis une trentaine d'années, cette volonté est de plus en plus prégnante et s'exprime de diverses façons.

Pour réaliser cette brochure, nous avons proposé à différents auteurs du monde associatif, culturel, scientifique ou médiatique de mettre en évidence les liens qui unissent leur domaine aux mathématiques. Chacune ou chacun, avec sa sensibilité, son expérience, sa formation a écrit comment il voyait ces échanges, ce qu'ils s'apportent mutuellement, comment ils changent le regard de l'un sur l'autre.

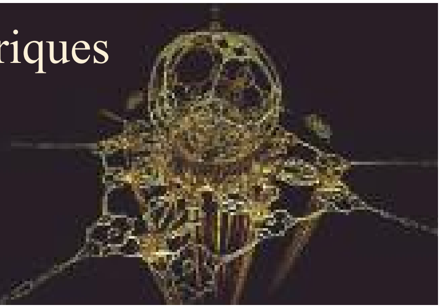
Sans doute le panorama n'est pas complet et heureusement ! Les chemins qui mènent à la culture mathématique sont nombreux, multiples et divers. Les initiatives pour les ouvrir sont de plus en plus innovantes et trouvent des échos dans tous les milieux.

Si vous, lectrice ou lecteur, qui vous croyiez bien loin du monde mathématique, découvriez au fil de ces pages une porte d'entrée vers ces "contrées étranges", si vous, lycéenne ou lycéen, étudiante ou étudiant, trouviez un chemin à explorer pour construire votre vie, nous aurions alors, au CIJM, la modeste satisfaction de la mission accomplie.

M. J. P.

SOMMAIRE

Dessins géométriques et civilisations



Maryse Durieux

L'histoire de l'humanité est émaillée d'une incroyable diversité de représentations graphiques, dont le sens profond s'est parfois perdu avec le temps. Motifs élémentaires tracés dans la pierre, le sable ou mandalas complexes dessinés par les moines tibétains, ces figures ne sont pas de simples œuvres d'art et leur signification relève de la *pensée symbolique*. Certaines d'entre elles (géoglyphes de Nazca, dessins de sable Vanuatu) sont même classées au Patrimoine Culturel Immatériel de l'Humanité.

Les énigmatiques géoglyphes de Nazca

Découverts en 1939 par Paul Kosok, c'est son élève, Maria Reiche, mathématicienne et archéologue, qui consacra sa vie à mettre à jour ces dessins gigantesques, reliés par des segments de droite tracés sur le sol, au milieu du désert et formant un graphe.

lignes et figure de singe à Nazca:
Servicio Aerofotografico Nacional del Peru

Elle avait remarqué que les arêtes de ce graphe ainsi que les figures étaient orientées vers le soleil ou la lune. Selon elle, ces dessins figuraient un observatoire astronomique géant.

Véritable livre d'images à ciel ouvert, qu'un climat aride a permis de conserver durant deux millénaires, le site archéologique de Nazca est parsemé de figures qui, aujourd'hui encore, sont autant d'énigmes quant à leur fonction et aux techniques utilisées pour leur réalisation. Parmi les nombreux motifs figurent courbes, cercles concentriques, spirales doubles, circulaire ou quadranulaire, trapèzes, damiers, grilles, lignes parallèles.

Art éphémère

Chez les Tshokwé d'Angola, le gardien de la tradition perpétue son savoir ancestral en contant des histoires, qu'il illustre par des *sona*, motifs monolinéaires tracés dans le sable avec le doigt à partir d'une grille de points. Messages, supports de connaissances, de légendes, ces dessins ont aussi une fonction rituelle, en rapport avec le monde du sacré, des morts.

On retrouve ces sillons tracés dans le sable chez les Vanuatu : au-delà de la performance artistique, ces figures participent, elles aussi, à la transmission de savoirs sacrés ou profanes.

Pour les Navajos et les Hopis d'Amérique du Nord, les dessins de sable possèdent diverses fonctions : thérapeutique, religieuse, sociale, spirituelle et relationnelle. Les motifs polychromes, généralement carrés et en symétrie, sont tracés par l'Homme-Médecine, qui dispose d'une large palette

Homme-Médecine Navajo

Dessins de sable Navajo

de sables colorés et de matières végétales réduites en poudre. Il choisit parmi des centaines de motifs celui adapté à la situation, qu'il dessine sur un fond sableux beige doré, en laissant couler de minces filets de sable entre pouce et index. Le *hózhó*, harmonie, équilibre qui se dégage de la structure centrée du dessin, pénètre le malade et permet sa guérison. L'art n'existe pas en soi ; il ne prend son sens qu'au travers de ce hózhó, élément essentiel dans la vie de ce peuple. Actuellement, certaines oeuvres, réalisées sur des supports fixes, perdent leur dimension symbolique, liée au caractère éphémère des dessins.

De l'autre côté de la Terre, le *mandala* (cercle en sanskrit) est une tradition millénaire ; née en Inde, elle s'est rapidement propagée aux pays bouddhistes. Sa structure, centrée, carrée ou rectangulaire évoque les plans de pyramides mayas. La réalisation d'un mandala tibétain est un travail collectif minutieux. Sur un support de bois, les moines dessinent le motif, centré et en symétrie, en déposant de minces filets de sables colorés à l'aide de fines pipettes évasées.

Réalisation d'un mandala de kalachakra
Spituk – Ladakh

La fonction du mandala est religieuse, sociale, spirituelle, thérapeutique ; selon eux, sa contemplation permet un recentrage du mental et du corps. Symbolisant le côté éphémère de la vie, ce laborieux travail est détruit peu après son achèvement, et le sable jeté dans un cours d'eau.

Monastère de Thiksé
Ladakh – Himalaya indien

Au Sud de l'Inde, des ornements géométriques fleurissent chaque matin dans les rues. Les *kolam*, également nommés *rangoli* selon les régions, sont une tradition transmise de mère en fille. Après avoir balayé le seuil de la maison, les femmes tracent, avec de la poudre de riz, une grille de points disposés selon un ordre déterminé, servant de base à la réalisation du kolam. Dédiés aux divinités, ces motifs, bénéfiques pour la famille et les passants, nourriront oiseaux et insectes. Les figures s'agrémentent parfois de couleurs, fleurs, objets divers (lampes à huile).

Kolam

Les textiles, patrimoine culturel

Dans la plupart des cultures, l'art vestimentaire est une tradition qui, en Occident, s'est perdue avec la mondialisation et fait désormais partie du folklore. Elle perdure toutefois chez certains peuples, dont elle constitue encore un élément identitaire. Outre des représentations symboliques propres à leur culture, le choix des couleurs, du tissage, des formes sont autant de codes qui parlent de la personne ; ils indiquent à quelle famille, à quel village elle appartient, si elle est mariée ou non.


Tissage de la ville de Chichicastenango
Guatemala


Jupes
Son La – Nord Viêt Nam


Motifs traditionnels - ethnie Êdé
Dak Lak – Viêt Nam

Selon les pays, ces parures ornent les vêtements des femmes, mais également ceux des hommes. On les trouve aussi sur les accessoires tels que coiffes, ceintures, colliers, chaussures. Ils ont généralement une structure géométrique, pas toujours évidente à déceler tant certaines figures sont parfois imbriquées.

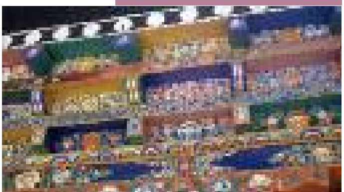

Mapuche au poncho
Araucanie – Chili

Motifs ornementaux

Entrelacs ou noeud celtique, ces figures planes ou en volume (noeuds chinois) se retrouvent dans diverses régions du monde sur manuscrits, textiles, pierres, sable,...


Noeud sans fin

Un entrelacs basique est le *Noeud sans fin* ou *Coeur de Bouddha,* symbole de compassion, perfection et interdépendance pour les bouddhistes.


Fronton du temple de Thiksé
Ladakh

En Inde, comme dans divers pays, des lambrequins protègent murs, portes et fenêtres des écoulements pluviaux ; constitués d'éléments découpés, ils ornent les façades des bâtiments. Ces motifs à caractère répétitif évoquent plantes, animaux, objets familiers ou même le diable. On trouve quatre types de symétries : translation, rotation, réflexion et symétrie glissée. Ces propriétés géométriques sont également présentes dans les frises les crêtes de faîtage ou certains ornements comme les pavages.

Lambrequins du palais de Karaikudi
Tamil Nadu – Inde

Palais d'Udaïpur
Rajasthan – Inde

Crête de faîtage – Viêt Nam

Rosace guatémaltèque

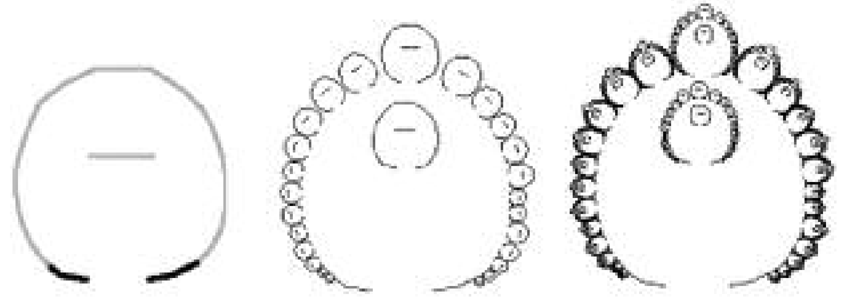
Au Japon, les San Gaku sont des tablettes de bois sur lesquelles sont peintes des énigmes géométriques où dominent les cercles. Au début de l'époque Edo (XVII^{e}-XIX^{e} siècle), le Japon ferma ses frontières afin de se prémunir de l'hégémonie occidentale ; cette autarcie généra une grande expansion intellectuelle et artistique. Offertes aux esprits par des fidèles de toute classe, 900 tablettes votives ont pu être conservées ; leurs contours délicats ornent l'entrée des temples shintoïstes ou bouddhistes.

San Gaku

San Gaku

Architecture : village fractal africain

Au sud de la Zambie, l'ethno-mathématicien américain Ron Eglash a remarqué un village *Ba-Ila* qui possède une propriété d'autosimilitude. Construite sur un modèle fractal dont l'élément de base est la maison et son autel sacré, cette architecture a pour motif initial un arc de cercle, constitué lui-même d'arcs de cercles. La plus grande maison, qui fait face à l'entrée du village, est celle du chef. La récursion se poursuit jusque dans la maison des esprits, qui possède un village dans son village.



Village Ba-Ila

Le village *Kototo* de Logone-Birni, au Cameroun, possède également une structure fractale dont l'élément de base est le rectangle.

Les mathématiques se cachent partout, transformant l'univers, pour ceux qui savent observer, en un immense jeu de piste ; depuis toujours, elles font partie de notre environnement, parfois sans qu'on en ait conscience. Certains peuples l'avait bien compris, et leurs langages décoratifs abstraits constituent des systèmes de pensée complexes, vecteurs de savoirs et de thèmes culturels fondamentaux.

Aujourd'hui, de nouvelles énigmes mathématiques voient le jour, dans le mouvement *Land Art* (Spiral Jetty de Robert Smithson, Chastriscope de Prisca Cosnier), ou à travers les *Crop-circles*. Facétie ou réalité scientifique non encore établie, ces dessins géométriques surgissant au milieu des champs sont avant tout des œuvres d'art qui mettent magnifiquement en scène la géométrie.

Crop-circles facétieux

M.D.

Mathématiques & peinture

Elisabeth Busser

Qu'ils représentent des mathématiciens au travail ou qu'ils s'inspirent directement de la géométrie et de ses techniques, les peintres, de la préhistoire à nos jours, ont toujours su mettre en scène les mathématiques.

L'influence des mathématiques dans l'art et dans la peinture en particulier n'est plus à prouver. De la préhistoire à nos jours, les formes géométriques ont inspiré les dessinateurs et les peintres. Ils ont, dans les périodes de grands bouleversements scientifiques, représenté les mathématiques et leurs acteurs, entourés d'objets géométriques divers, d'ouvrages savants, d'instruments de mesures et de tracés. Ils se sont aussi laissés inspirer par les figures des mathématiques, les laissant guider leur inspiration ou leur technique, montrant par là même combien cette science ne laisse pas indifférent.

Peindre les mathématiciens

Dès la fin du XVe siècle et jusqu'au XVIIIe siècle, nombreux sont les tableaux qui mettent les mathématiques en scène. Ne parlons pas des toiles ou gravures d'artistes savants, les Brunelleschi, Pietro della Francesca, Boticelli en Italie ou Dürer en Allemagne, qui théorisèrent la perspective et firent entrer la géométrie dans l'art. Parlons plutôt de ceux qui, soit sur commande, soit par sympathie pour eux, représentaient les savants, fixant sur la toile tout leur environnement scientifique : cartes, mappemondes, instruments d'optique ou de dessin.

Le manuscrit avec figures faites à la main, seul élément à véhiculer les connaissances en son temps, puis le livre, lui aussi abondamment représenté, sont omniprésents dans les œuvres picturales de cette époque. *Les moines astronomes* de Thomas Blanchet (1772) sont absorbés par la lecture d'un manuscrit mathématique ; *Les mesureurs* de ce tableau anonyme flamand du XVIe siècle utilisent une panoplie complète d'instruments mathématiques, compas divers et variés, équerres de toutes formes, tout comme le mathématicien Nicolas Kratzer, contemporain de Holbein dont cet artiste fit le portrait en 1528 ; les Neudorfer père et fils du tableau de Nicolaus Neufchatel (1561) manipulent un dodécaèdre en lisant des mathématiques.

Les moines astronomes
de Thomas Blanchet (1772)

Les mesureurs, tableau anonyme flamand du XVI^{e} siècle

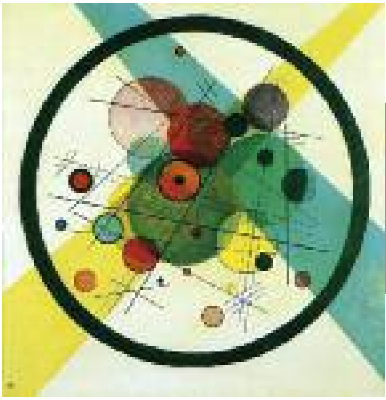
Portrait de Nicolas Kratzer par Holbein, 1528

Le réalisme domine dans ces tableaux où les objets mathématiques sont représentés avec une grande fidélité ; parmi ceux-ci, les polyèdres sont omniprésents, séduisant sans doute les artistes par leur côté esthétique et la perfection de leurs symétries.

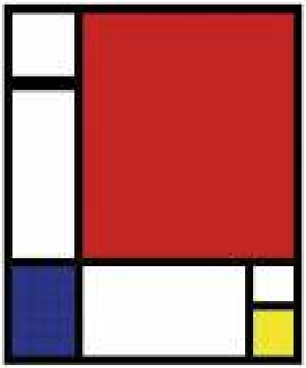
Peindre les mathématiques

Dans les grottes de Lascaux, les hommes préhistoriques peignaient déjà des rectangles ; au néolithique, entre le 8e et le 7e millénaire avant notre ère, l'homme décorait même des jarres en terre avec de savants entrelacs ; aux XIIIe et XIVe siècles, les céramistes arabes utilisaient sans le savoir les groupes de pavages pour dessiner les plafonds de l'Alhambra de Grenade ; en 1514, Dürer incluait un véritable carré magique dans l'une de ses gravures, la fameuse Melancholia ; les lois de la perspective de la Renaissance sont mathématiques ; on a peint des mathématiciens au travail jusqu'au XVIIIe siècle : peinture et mathématiques entretiennent donc des liens familiers.

Ensuite, les mathématiques continuent d'apparaître dans de nombreuses œuvres picturales, mais sous d'autres formes. Nombre d'artistes se revendiquent de cette science comme source d'inspiration. Kandinsky, avec des œuvres intitulées sans ambiguïté *Cercles dans un cercle, Carrés avec cercles concentriques, Horizontale, Cercle jaune, Cercles forts*, Vasarely, qui a développé son propre modèle d'art géométrique fait de carrés, cercles et cubes en abondance, Mondrian, qui structure ses œuvres autour de la géométrie du carré, Morellet, un des interprètes majeurs de l'abstraction géométrique, tous ceux-là s'en sont ouvertement inspirés.



Les éléments géométriques prennent une place évidente dans la peinture de Kandinsky, comme dans ces *Cercles dans un cercle.*

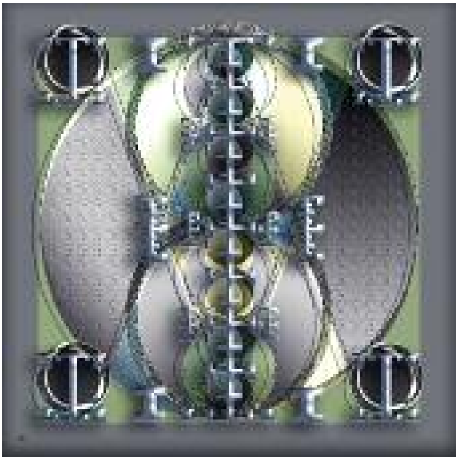


Avec des moyens réduits au rectangle et au carré, Mondrian structure ses oeuvres de manière purement géométrique.

Oui, on peut faire du *beau* avec juste quelques cercles, des segments, des parallèles, des polygones ou des polyèdres : les mathématiques ont de plus en plus leur place dans les œuvres d'artistes contemporains. Parmi ceux-ci, citons le graveur Patrice Jeener, qui se définit lui-même comme *graveur d'équation*s, et s'inspire largement de surfaces géométriques dans ses œuvres. Dans un autre registre, en Angleterre, l'artiste de rues Julian Beever exploite, lui, l'anamorphose, transformation géométrique permettant de représenter les objets de façon déformée (image de gauche) pour qui les regarde de face. L'image véritable (à droite), saisissante de réalisme si on est bien placé pour la regarder, ne se rétablit que par un déplacement de l'œil du spectateur.

Anamorphose de J. Beever :
à gauche, image banale peinte sur le trottoir,
à droite, image saisissante de réalisme…
à condition de la regarder du bon point de vue

On peut, comme Julian Beever, s’appuyer sur un concept mathématique pour créer une œuvre. On peut aussi, comme Jean Constant, plasticien contemporain du Nouveau Mexique, pratiquer l’art en immersion complète dans les mathématiques. Il va imaginer aussi bien une animation sur les nombres de Bell (nombres de partitions d’un ensemble à *n* éléments en sous-ensembles disjoints) que peindre sur toile de magnifiques nœuds ou des illusions d’optique. Il a même une passion toute particulière pour les peintures de sangakus, ces énigmes japonaises de géométrie gravées sur des tablettes de bois durant la période Edo (1603-1867). Il s’agit généralement de retrouver les rayons de cercles tracés dans une figure géométrique simple et tangents les uns aux autres. A ce genre de problèmes, l’artiste a apporté sa sensibilité et en a fait des œuvres d’art, bien souvent animées. (site : hermay.org/jconstant/)

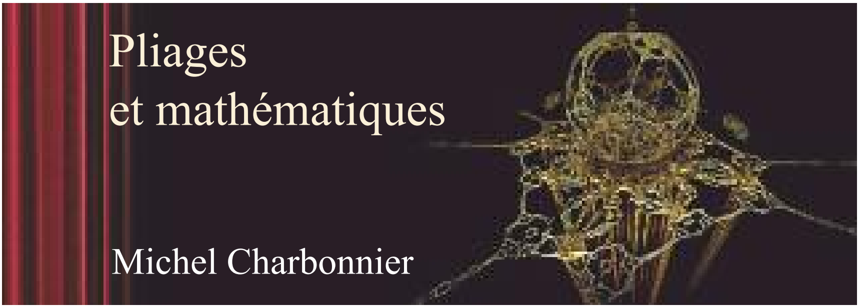


Huiles d’hier, écrans d’aujourd’hui, les mathématiques n’ont pas fini de s’afficher avec des artistes.

E.B.

Un problème de sangaku revisité
par Jean Constant

Pliages et mathématiques



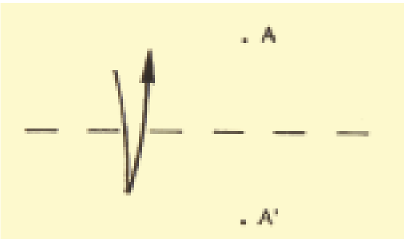
Michel Charbonnier

L'origami est un art traditionnel japonais, qui consiste à réaliser un objet à partir d'une simple feuille de papier uniquement par pliage, sans couper la feuille. Si de nombreuses figures représentent des animaux, des fleurs ou des boîtes, on peut tout faire en origami. A l'instar de notre *cocotte en papier*, cet art a longtemps été destiné aux enfants. Il est pour les enfants, non seulement une simple distraction, mais aussi comme un moyen d'expression et d'apprentissage de la géométrie. Jacques Justin ancien président du Mouvement Français des Plieurs de Papier, dit : *Plier le papier pour faire de la géométrie, cela ne date pas d'aujourd'hui.* Dans un intéressant historique, Vacca signale que le Révérend Dyonisus Lardner a écrit en 1840 un traité de géométrie où il fait appel au pliage. Plus tard, à la suite des expériences de Froebell, le pliage est introduit en 1882 dans l'enseignement élémentaire, notamment en France pour initier les enfants au calcul et à la géométrie.

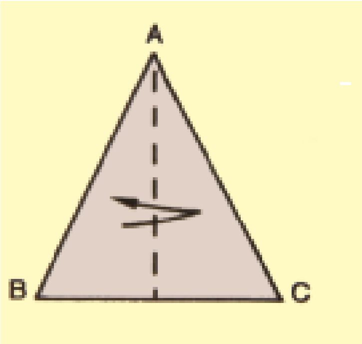
Axiome du pliage

Si nous voulons aborder les choses d'un point de vue plus moderne, nous dirons qu'en matière de géométrie plane tout se ramène à ce que Choquet appelle l'*axiome du pliage*. Le voici tel qu'il était énoncé dans *Mathématiques, classe de 4ème* de Rouquairol, édité par Nathan :

Etant donnée une droite D du plan P, il existe une bijection unique s de P vers P possédant les propriétés suivantes : 1) la bijection s conserve les distances ; 2) tout point de D est invariant par s ; 3) les demi plans ouverts P1 et P2 définis par D sont échangés par s. Cette bijection est appelée symétrie axiale d'axe D.



Construction du symétrique d'un point par pliage

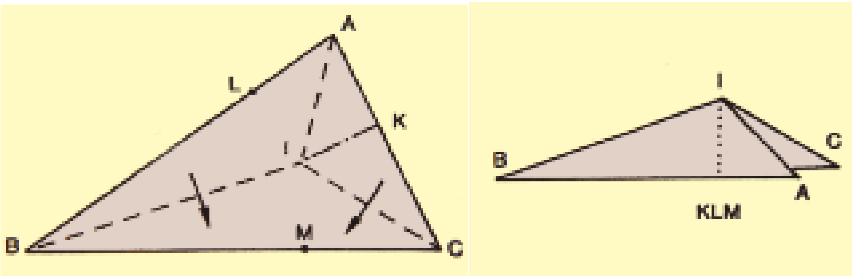


Propriété du triangle isocèle :
un triangle qui a deux cotés égaux a deux angles égaux.

Actuellement, la manipulation que nous venons de faire sert surtout à motiver pédagogiquement l'axiome du pliage. Mais l'inverse peut aussi se faire : démontrer en s'aidant du pliage.

Prenons par exemple un triangle ABC dont les cotés AB et AC sont égaux, le pliage selon la bissectrice de l'angle A amène C en B, fait coïncider les cotés BA et CA, on en déduit que les angles B et C du triangle sont égaux.

Les choses deviennent plus intéressantes si l'on effectue plusieurs plis. Faire plusieurs plis revient à effectuer ce qu'on appelle en mathématiques la composition des symétries associées à ces plis. Le pliage en *oreille de lapin* permet par exemple de montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.



On plie le triangle ABC selon les bissectrices BI et CI de B et de C et selon la ligne AI. Il se forme un troisième pli IK. Le pliage montre que AI est la bissectrice de A, et que les trois bissectrices sont concourantes.
En étudiant les trois points K, L, M qui coïncident après pliage, on peut même montrer que ce sont les points de contact du cercle inscrit.

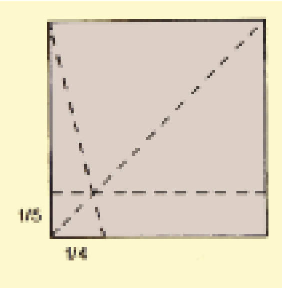
Dans certains ouvrages on peut trouver la «démonstration» par le pliage de théorèmes plus compliqués comme celui dû à Poncelet (général de Napoléon et l'un des pères de la géométrie moderne), ainsi qu'une propriété qui fait appel au pli de *pétale* (c'est-à-dire à la combinaison de deux oreilles de lapin). L'avantage du pliage est qu'il rend évident des résultats qui sont moins faciles à obtenir en raisonnant directement sur les symétries.

Le pliage présente un autre intérêt en géométrie : il est plus facile de tracer une droite, une bissectrice, une médiatrice par pliage qu'avec une règle et un compas. On peut ainsi sans trop de peine obtenir des figures précises mais il faut se méfier et savoir distinguer ce qui est démonstration de ce qui est simple constatation. Les démonstrations, comme celles dont nous avons parlé plus haut sont de véritables raisonnements qui entraînent la conviction, une fois acceptées les propriétés fondamentales du pliage. Par contre, en construisant par pliage les trois hauteurs d'un triangle, on «constate» simplement qu'elles passent par un même point.

Diviser un segment par pliage

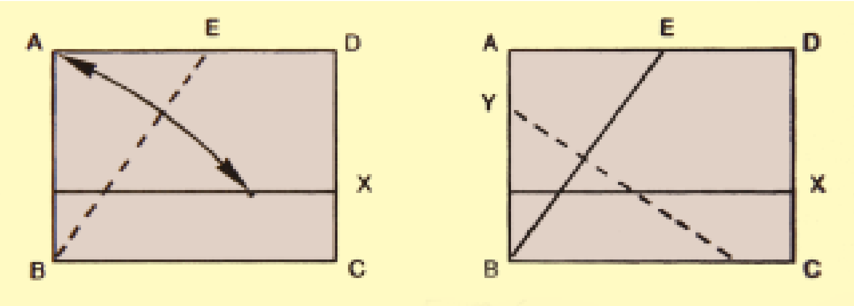
Diviser un segment de droite en 2, 4, 8… parties égales par pliage, tout le monde sait le faire. Mais, comment diviser dans un autre rapport, en 5 ou 7 par exemple ? Il y a bien une méthode par itération qui est approximative et qui a l'inconvénient d'abîmer le papier.

On peut faire mieux et obtenir une solution exacte basée sur le théorème de Thalès.



Division du côté d'un carré en 5 parties égales dans une brochure de La British Origami Society.

Voici deux exemples d'une division de segment, l'une en 3/8 l'autre en 3/11.



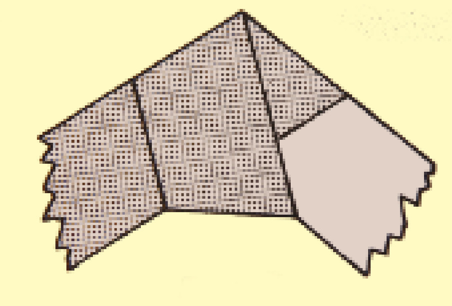
Une très belle méthode due à Fijimoto permet de passer d'une division en CX/CD = m/n en une division en AY/AB = m/(m+n).

Par exemple, si X se trouve aux trois huitièmes sur CD, et si on fait les trois plis indiqués Y sera aux trois onzièmes sur AB.

Construire des polygones réguliers

Il existe des méthodes de construction exactes pour le triangle, l'hexagone et l'octogone réguliers en partant d'un carré mais aussi des méthodes exactes pour le pentagone, même si elles sont plus compliquées.

Voici un pliage, dit du noeud d'or, qui permet d'obtenir un pentagone.



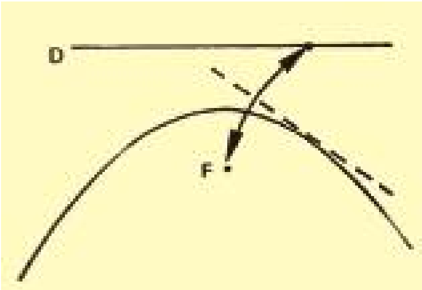
Le nœud d'or
Faisons un nœud avec une bande de papier assez longue et aplatissons- le. On obtient un magnifique pentagone. Est il régulier ? Si le papier est translucide et qu'on regarde par transparence on voit apparaître une étoile à 5 branches (il faut plier le papier une fois de plus pour voir l'étoile complète).

Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'on peut de la même façon, avec un nœud plus compliqué, faire n'importe quel polygone régulier ayant un nombre impair de côtés ; par exemple un heptagone (la manipulation n'est pas très facile, il faut un papier très glissant, ayant juste la bonne souplesse). Et pourtant, l'heptagone régulier ne peut pas se construire avec la règle et le compas. Paradoxe !
La clé du mystère, l'explication du paradoxe, c'est que quand on plie, on ne fait pas que de la géométrie plane, mais on manipule le papier dans l'espace en respectant la propriété topologique qu'il ne peut pas se traverser lui-même.En d'autres termes on peut dire que quand on plie l'heptagone régulier au moyen d'un nœud, on utilise le papier un peu comme un mécanisme.

Construire des courbes par pliage

En pliant on peut obtenir les tangentes d'une courbe non tracée et on voit apparaître ce que les mathématiciens appellent *enveloppe* de la courbe (en fait ce sont plutôt les plis qui enveloppent la coube).

Si au lieu d'une droite D pour obtenir une parabole, on avait tracé un cercle, on aurait obtenu de la même façon une ellipse ou une hyperbole selon que F soit à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

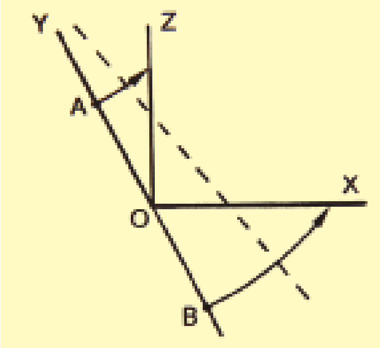


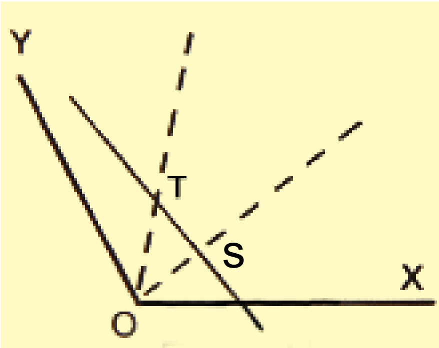
la Parabole
Sur un papier, marquez une droite D et un point F. Amenez par pliage le point F sur la droite D. Dépliez et répétez un grand nombre de fois, en variant la position sur D, vous verrez apparaître une superbe parabole.

Trisection d'un angle par pliage

Il est impossible de diviser un angle en trois parties égales avec la règle et le compas :

Comment faire avec un pliage ?





Soit XOY l'angle à diviser en trois. Choisissons un point A sur OY et marquons son symétrique B par rapport à O. Marquons OZ perpendiculaire à OX. Amenons simultanément A sur OZ et B sur OX. On obtient un pli. Traçons, la perpendiculaire à ce pli passant par O, soit OS, puis la bissectrice OT de SOY. Les droites OS et OT divisent l'angle XOY en trois parties égales.

En conclusion

Aujourd'hui, connu dans le monde entier, l'origami intéresse et fascine petits et grands. Cette mondialisation a produit la grande diversité des modèles actuels. Si la majorité des plieurs perpétuent la tradition en utilisant un carré de papier, d'autres préfèrent utiliser le format A4 (rectangulaire), que l'on trouve partout. Certains spécialistes créent leurs propres modèles, qui peuvent atteindre un très haut degré de complexité. L'art du pliage et l'art mathématiques sont totalement indissociables.

M.C.

Pour en savoir (un peu) plus :

C. Savineau, *Pliage et découpage du papier, travaux manuels scolaires,* Hachette, Paris (1897), Bibliothèque Nationale, cote 8° V26762.

G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris (1964).

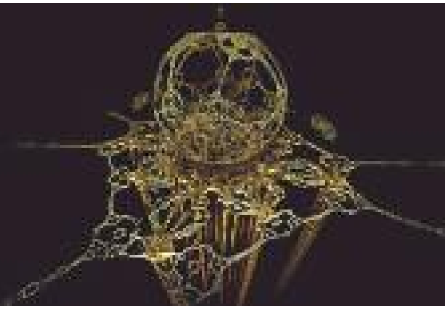
P. Tougne, *Jeux mathématiques*, Pour la Science, (février 1983), 113-119.

S.Fujimoto et **M.Nishiwaki**, *Sojo Suru Origami Asobi no Shotai* (jouez à créer en pliant), Asahi Culture Centre, Osaka (1982).

E. Lucas, *Récréations Mathématiques*, tome 2. Nouveau triage, Librairie Sciences et Tech. A. Blanchard, Paris (1979).

J. Justin, *Démonstration par le pliage des théorèmes de Poncelet sur les tangentes* aux coniques, manuscrit (1982). Orithèque MFPP et BOS Library.

Un regard mathématique sur le monde



Hervé Lehning

Toute culture teinte le regard que nous avons sur le monde qui nous entoure. On ne remplit pas l'objectif de son appareil photographique, on n'appuie pas sur son déclencheur de la même façon que l'on soit poète, mathématicien ou les deux. Le mathématicien s'arrêtera sur des formes, des structures que ne remarqueront pas d'autres, sensibles à des esthétiques différentes. Il verra les mathématiques en scène dans le monde. Cet article propose quelques exemples de ce regard.

Des suites de nombres

Des suites peuvent apparaître dans la nature, qu'elles soient dues au hasard ou à une structure sous-jacente. Plus qu'un autre, le passionné de mathématiques les remarquera comme ces fleurs en triangle 1 + 2 + 3 dans le désert du Namib. Qui d'autre prendrait cette photo ?

Des droites et des courbes

Des droites et des courbes étonnantes apparaissent dans le paysage ou dans le ciel. Hasard ou phénomène scientifique ? Les deux sont possibles. La réponse est rarement sure ou évidente mais la question est là et amène une étude ou un rêve mathématique. D'où viennent ces lignes parallèles ou sécantes dans le ciel, ces points, ces droites et ces cercles ou ces paraboles. Œuvres de l'homme ou du vent ?

Ces parallèles et ces angles ont un sens lié aux couloirs aériens qui fera s'interroger la personne éprise de mathématiques.

Point, cercles et droites
sur l'opéra de Sydney.

Le vent crée d'étranges paraboles dans le désert du Namib.

Il est facile de comprendre pourquoi cette touffe d'herbe du Groenland a poussé en cercle, mais pourquoi a-t-elle dépéri d'un côté d'une droite ?

Théorèmes

Certains théorèmes de géométrie apparaissent naturellement sous les yeux émerveillés du connaisseur, ainsi le théorème de Thalès sur le front de mer de Saint Malo.

Apparition du théorème de Thalès sur le front de mer de Saint-Malo.

Équilibre

Gabor Domokos et Peter Varkonyi, deux mathématiciens hongrois, ont découvert et réalisé un solide homogène qui se redresse tout seul quelle que soit sa position. Il a deux positions d'équilibre, l'une stable, l'autre instable (voir l'article de François Apéry sur la collection de modèles de l'Institut Henri Poincaré). La nature est pleine d'objets de ce genre, comme les carapaces de tortue, ou certains rochers semblant défier les lois de la gravité.

Même si ce ne sont que des approximations lointaines du gömböc de nos deux Hongrois, comment ne pas y penser en les observant ?

Rocher en équilibre dans la vallée des Dieux. Chapeau mexicain pour le poète, gömböc retourné pour le mathématicien ?

Lignes de niveau et géométries non euclidiennes

Tout près des rochers en équilibre, les cols évoquent les géométries non euclidiennes. Si les droites tracées sur la surface sont les lignes de plus court chemin, une droite partant horizontalement de l'un des versants ne coupe jamais une droite sur l'autre versant.

Contradiction du postulat d'Euclide !

Col dans les Rocheuses. Une ligne tracée sur le versant de droite peut-elle couper une ligne sur le versant de gauche ?

Objets divers et inattendus

Pour qui a l'œil mathématique, le monde est rempli d'objets mathématiques, ponts, tours de refroidissement bien entendu mais aussi tabourets, comme celui sur lequel est assise cette jeune lavandière. Cette surface, qui porte le nom poétique d'hyperboloïde de révolution à une nappe, se construit naturellement avec deux familles de morceaux de bambous de longueur égales.

Jeune femme sherpa assise sur un tabouret en forme d'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Détail du tabouret népalais où l'on voit les deux familles de morceaux de bambous le constituant.

Formes naturelles

Les formes rencontrées dans la nature sont souvent des évocations des mathématiques, comme ces glaçons fondant sur une plage du Groenland, véritables objets topologiques.

Glaçon fondant sur une plage du Groenland évoquant certaines questions topologiques.

Symétries

Pour finir, toutes les symétries, transformations, anamorphoses attireront l'œil du mathématicien.

Zèbres en symétrie. Leur pelage a également un intérêt mathématique. Existe-t-il un algorithme générant sa formation ? Le précurseur de l'informatique, Alan Turing, a étudié la question.

L'infini dans le transsibérien.

Réflexions sur le lac Gokyo, dans l'Himalaya.

Au-delà de l'esthétique

Le côté esthétique suffit pour justifier le regard que permettent les mathématiques sur le monde … mais ce regard va bien au-delà. Il permet de faire émerger des questions et de mieux comprendre les raisons cachées des choses, des taches des animaux à l'érosion en passant par le mouvement des sables. Il est à la base des modèles mathématiques que l'homme crée pour mieux appréhender la nature.

H.L.

La collection de modèles de l'Institut Henri Poincaré

François Apéry

L'Institut Henri Poincaré (IHP) à Paris possède une remarquable collection d'objets mathématiques datant de la fin du XIX^{e} siècle ou du début du XX^{e}. Ils servaient alors à illustrer les cours de mathématiques.

Même si ce sont de pures abstractions, les objets mathématiques proviennent souvent d'intuitions concrètes, et donc peuvent conduire à des réalisations physiques qui jouissent de qualités plastiques dont les artistes peuvent s'emparer. Ceci explique le renouveau d'intérêt de certains musées pour ces objets, d'autant que des célébrités, comme le photographe Man Ray, s'y sont intéressés, leur donnant ainsi le statut d'œuvre d'art.

La collection de l'IHP a traversé un bon siècle de désamour avant d'entamer sa renaissance ces dernières années, et elle s'enrichit aujourd'hui de modèles nouveaux suggérés par les mathématiciens en action.

J'ai souhaité prêcher par l'exemple en proposant deux objets en fil de fer exposés actuellement dans la bibliothèque de l'IHP: une surface de Boy du sixième degré et une surface de Morin du huitième degré, surfaces liées au problème du retournement de la sphère.

Surface de Boy en bouquet d'ellipses

Surface de Morin en bouquet d'ellipses.

La collection complète de l’IHP comprend quatre cent cinquante modèles environ, dont voici quelques exemples.

Cyclide unilatère

Ce modèle a été réalisé en juillet 1947 par Maurice El-Milick et offert à Paul Belgodère, bibliothécaire de l’IHP.

Surface de sixième degré

Notons qu’il ne s’agit pas réellement d’une cyclide, mais d’une surface du sixième degré dont l’allure rappelle la cyclide de Dupin (voir figure ci-dessous).

Véritable cyclide de Dupin

La bouteille de Klein

Nous ne présenterons pas ici la bouteille de Klein puisqu'elle est décrite dans l'article sur le graveur Patrice Jeener, mais l'IHP en possède une intéressante représentation en verre, clin d'œil sur ce nom de *bouteille* qui vient, selon certains, d'une confusion entre les deux mots allemands *Flasche* et *Fläche*.

Bouteille de Klein en verre.

Le grand dodécaèdre de Poinsot

Un modèle en carton recouvert d'un vernis représente le grand dodécaèdre découvert par Louis Poinsot en 1809. Les arêtes du polyèdre sont en noir. Les lignes rouges sont des lignes d'intersection de faces. Il a douze faces, douze sommets et trente arêtes, de sorte que sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -6.

Le grand dodécaèdre de Poinsot représente une décomposition cellulaire de la surface fermée de genre 4.

Grand dodécaèdre de Poinsot.
Cette phototographie peut créer une illusion d'optique : l'étoile doit être vue en bosse

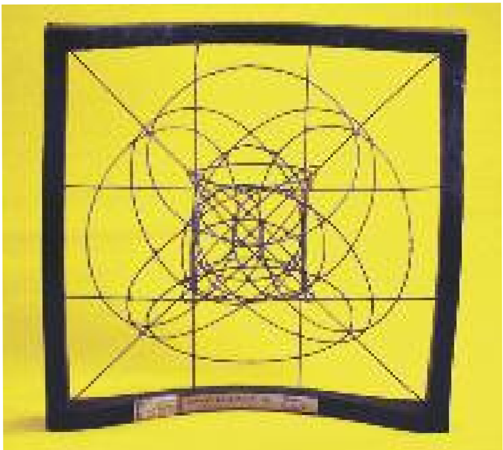
Cubique lisse à sept droites réelles

On ne voit sur ce modèle de surface réalisé en fil de fer par Joseph Caron le 10 juin 1912, que quelques courbes remarquables.

La surface, d'équation :

$$Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(X^2 - Y^2) - 16Z = 0$$

est une *cubique lisse*, autrement dit sans points singuliers.



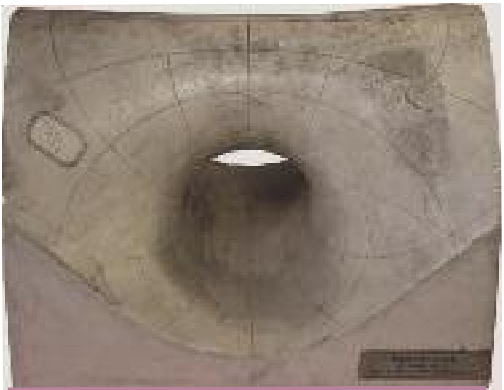
Cubique lisse à sept droites réelles.

Ludwig Schläfli avait imaginé en 1858 de classer ces surfaces suivant le nombre de leurs droites réelles, lequel, dès lors que la surface n'est pas réglée, ne peut prendre que les valeurs 3, 7, 15 et 27. Dans le cas présent, la surface contient sept droites réelles, dont six sont représentées, la septième étant à l'infini. La surface est en outre engendrée par des ellipses. Certaines d'entre elles sont des cercles qui sont figurés sur le modèle. Le choix des courbes matérialisées par le fil de fer respecte l'invariance par le groupe des isométries laissant la surface globalement inchangée.

Quoique d'allure très proche, cette surface cubique ne doit pas être confondue avec la *cyclide parabolique annulaire* d'équation :

$$Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + 4(X^2 - Y^2) - 16Z = 0.$$

Cette dernière possède en effet deux droites doubles. Chacune des deux surfaces sépare l'espace en deux parties isométriques qui sont échangées par le demi-tour d'axe $X = Y$ et $Z = 0$.



Cyclide parabolique annulaire,
série X n° 5 de la collection Schilling

Modèle de Dandelin

Le but didactique du modèle de Dandelin saute aux yeux. Sur un cône en bois séparé en deux parties pour laisser apparaître deux sphères inscrites, également en bois, on observe d'une part une génératrice en laiton, et d'autre part une ellipse métallique dont le plan est tangent aux deux sphères. Les points de contact avec les sphères matérialisent les foyers de l'ellipse (première partie du théorème de Dandelin), tandis que les cercles de contact des sphères avec le cône définissent des plans qui recoupent celui de l'ellipse suivant ses directrices (deuxième partie du théorème de Dandelin).

Modèle de Dandelin

Le Gömböc

La dernière acquisition de l'IHP est le Gömböc, construit en 2006 pour prouver l'existence d'un corps homogène mono-monostatique, conjecturée auparavant par Vladimir Arnold. Cet objet en aluminium a exactement une position d'équilibre stable et une instable. En dimension deux, un ensemble convexe compact posé sur une droite jouit d'au moins quatre positions d'équilibre statique. La situation diffère en dimension trois, puisque, comme l'avait pensé Arnold, il existe des corps convexes compacts et homogènes admettant seulement deux positions d'équilibre, en comptant les positions stables comme les instables.

Gömboc

Cédric Villani présente le Gömboc sur le Salon Culture et Jeux Mathématiques

Cet exemple a été découvert par un ingénieur et un mathématicien appliqué, Gàbor Domokos et Peter Vàrkonyi, en partant d'un modèle physique qu'ils ont graduellement travaillé en une suite d'approximations jusqu'à l'objet final, le Gömböc, dont ils ont ensuite prouvé, au sens mathématique du terme, l'exactitude.

Voilà un bel exemple de ce que les modèles géométriques peuvent apporter aux mathématiciens.

F.A.

Pour en savoir (un peu) plus :

F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, Braunschweig, (1987).

F. Apéry, *Immersionen der reellen projektiven Ebene in R^3*, Mathematische Semesterberichte, n°591, 2011.

J. Brette, *La collection de modèles mathématiques de la bibliothèque de l'IHP*, Gazette des mathématiciens, n°85, juillet (2000), p.4-8.

G. Fischer Ed, *Mathematische Modelle*, Vieweg, Braunschweig, (1986).

Graveur de surfaces

Patrice Jeener : Interview d'Hervé Lehning

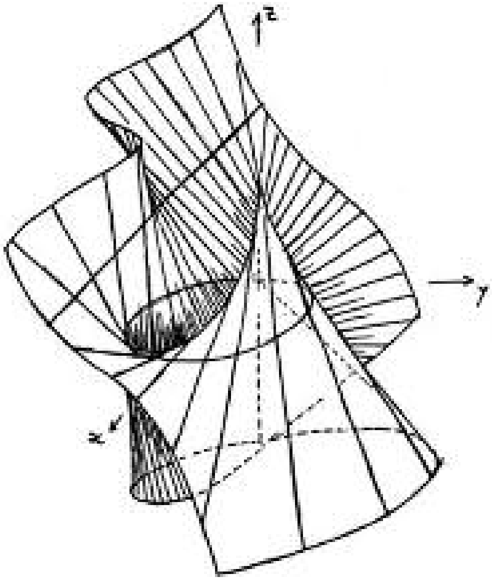
Patrice Jeener montrant des propriétés de l'hypercube.

Patrice Jeener est un graveur au burin qui, à la suite d'Escher, s'inspire des mathématiques. Voici selon lui l'origine de sa vocation :

J'étais étudiant à l'école des beaux-arts dans l'atelier de gravure au burin quand, lors d'une visite au Palais de la découverte, j'ai découvert des maquettes de modèles mathématiques en bois et en plâtre. Je les ai dessinées. Des équations étaient inscrites sur chaque modèle. Le fait de savoir qu'une équation correspondait à chaque maquette, me donna l'idée d'apprendre les mathématiques en autodidacte. Cela m'a donc permis de créer de nouvelles surfaces. Voulant en savoir plus, je me suis rendu à l'Institut Henri Poincaré, pour continuer mon travail ; j'y ai découvert des modèles de fonctions spéciales qui m'ont fasciné. À partir de là, j'ai eu envie de comprendre la relation étroite qu'il peut y avoir entre l'art et les mathématiques.

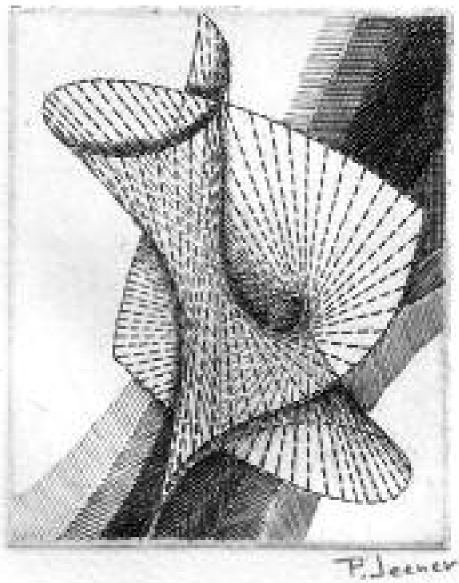
Aussitôt, Patrice Jeener s'intéressa aux surfaces d'équations de degrés 3 et 4 et les dessina, d'après les modèles en plâtre puis en utilisant un ordinateur. Il continua en les gravant.

Ces études l'amènent à comprendre concrètement ce qu'est la courbure d'une surface … et à en faire une gravure.



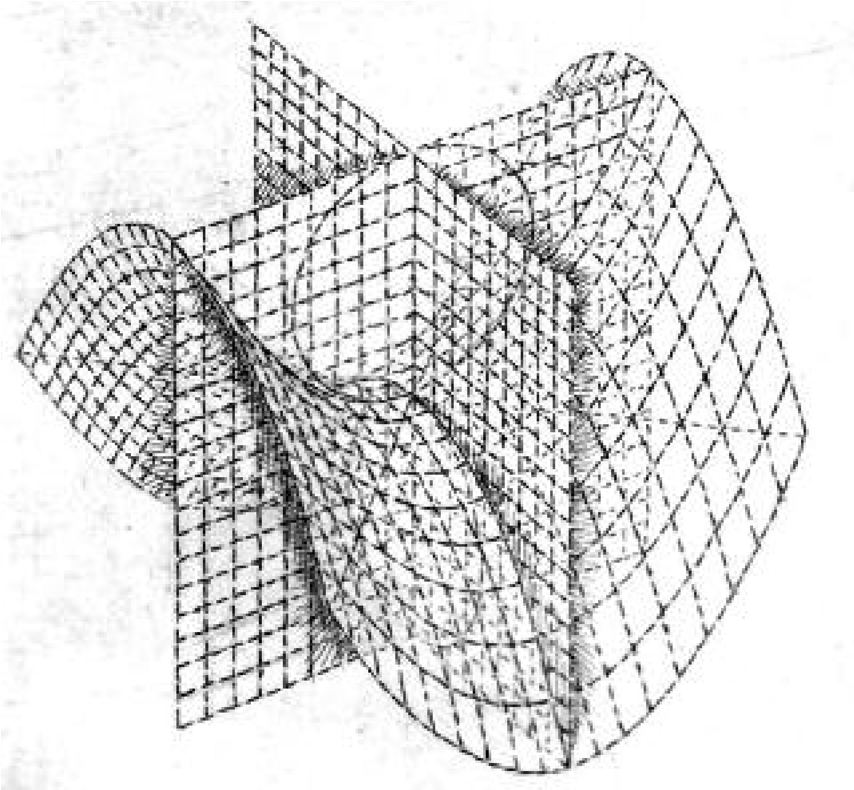
$$y(x^2+y^2-2x)+z(x^2+y^2+2xy)=0$$

Dessin d'une surface du troisième degré avec son équation, ces dessins sont souvent préparatoires aux gravures.



$$x(x^2+y^2-4)+z(x^2-y^2)=0$$

Gravure d'une surface du troisième degré avec son équation.

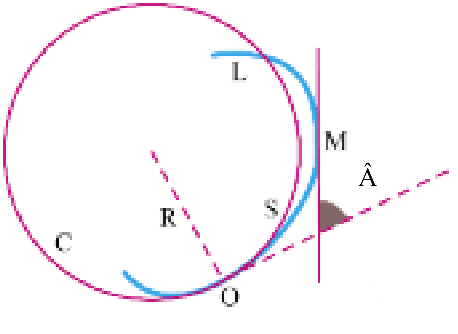


Gravure donnant la définition des courbures principales d'une surface. En un point M d'une surface, les plans normaux découpent chacun une courbe sur la surface, qui possède une courbure en M. Quand le plan normal varie autour de la normale, cette courbure varie. Elle possède un maximum et un minimum, que l'on appelle courbures principales. Les plans correspondants sont perpendiculaires. La courbure moyenne de la surface en ce point est la moyenne de ses courbures principales.

Courbure d'une courbe

La courbure d'une courbe se définit relativement facilement. Nous l'exposons ici car il est difficile de suivre l'œuvre de Patrice Jeener sans en avoir une idée. A priori, il s'agit d'une mesure du caractère *non droit* d'une courbe. Ainsi, une ligne droite a une courbure nulle et une épingle à cheveu, une courbure importante. La courbure peut être positive ou négative, selon le sens de la concavité par rapport au sens de parcours de la courbe.
Comme toujours en mathématique, le sens positif est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre.

L'inverse de la courbure est appelé *rayon de courbure*. Il s'agit du rayon du cercle se confondant localement avec la courbe. Le rayon de courbure d'une droite est donc infini.

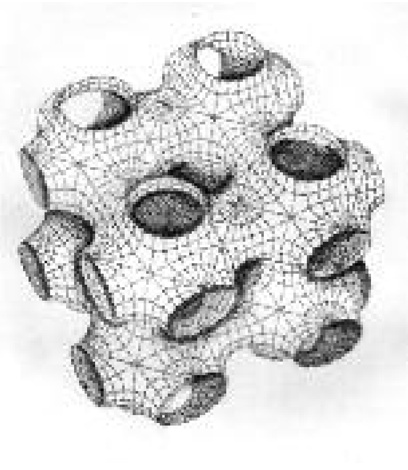


La *courbure moyenne* entre les points O et M de la courbe L ci-dessus est le rapport entre l'angle Â que font les tangentes en O et en M et la longueur S de l'arc OM. La courbure en O est la limite de cette courbure moyenne quand M tend vers O. Son inverse est appelé *le rayon de courbure* en O et le cercle C, tangent à L en O et de rayon R est appelé *le cercle de courbure* en O à L. Localement, il s'agit du cercle approchant le mieux la courbe L. Ainsi, la courbure d'une droite est nulle et celle d'un cercle, égale à l'inverse de son rayon.

Surfaces minimales

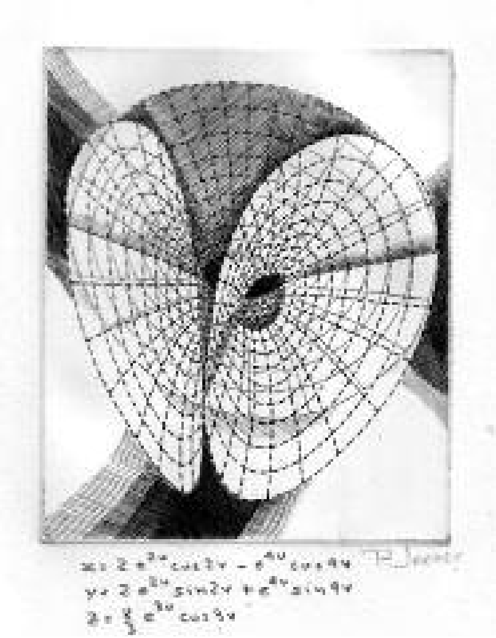
Très vite, Patrice Jeener s'évada vers des formes plus complexes comme les surfaces minimales, dont la définition la plus manipulable est : *surface de courbure moyenne nulle* mais dont la définition heuristique est *surface minimisant son aire*.

On peut matérialiser la plupart d'entre elles par des bulles de savon s'appuyant sur un contour, car le film de savon tend à minimiser son énergie, donc sa surface. Elles ont des applications pratiques mais notre propos n'est pas là. Nous n'écrirons pas leurs équations ici, nous nous contenterons d'en admirer l'esthétique à travers quelques gravures.



Surface minimale de Schwartz.
Cette surface est triplement périodique, comme la gravure le laisse deviner.

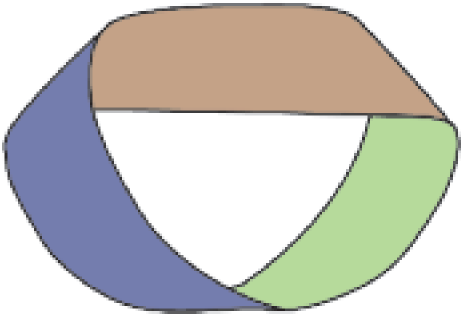
L'étude des surfaces réserve quelques surprises comme l'apparition surprenante d'une chouette là où l'on attendait une surface minimale. Ce genre de surprises explique sans doute ce texte de Lautréamont :
O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante.



Surface minimale
à la chouette
avec ses équations.

Curiosités topologiques

De façon assez naturelle, Patrice Jeener s'est ensuite intéressé aux surfaces singulières, généralisant la bande de Möbius, que l'on peut obtenir en recollant une bande de papier à l'envers.

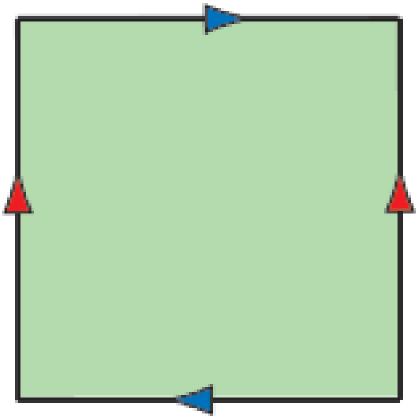


En collant les deux côtés d'une bande de papier à plat, on obtient un cylindre. Si on la tord d'un tour avant de la coller, on obtient une bande de Möbius. Cette surface a la propriété étonnante de n'avoir qu'une face. Si vous marchez dessus, vous parcourez ce qui peut sembler être les deux côtés, sans changer de côté.

La bouteille de Klein

La bouteille de Klein est une sorte de généralisation de la bande de Möbius, puisqu'il s'agit d'une surface fermée dont on ne peut définir intérieur et extérieur, autrement dit, ils se confondent comme le font les deux faces de la bande de Möbius.

La construction avec une feuille de papier est en principe simple … sauf qu'elle est impossible à réaliser dans l'espace de dimension trois. Pour cela, il est nécessaire de passer en dimension quatre !

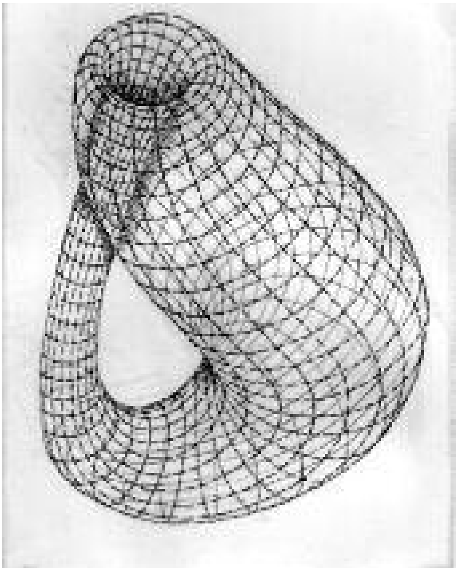


Plan de montage d'une bouteille de Klein. On part d'un carré (ou d'un rectangle) en papier comme pour la bande de Möbius. Si on colle seulement les côtés en rouge dans le sens des flèches, on obtient un cylindre. Si on colle seulement les côtés en bleu toujours dans le sens des flèches, on obtient une bande de Möbius. Si on fait les deux à la fois, on obtient une bouteille de Klein. Dans l'espace de dimension trois, ce n'est possible que si on autorise la feuille de papier à se traverser elle-même !

L'art du dessin ou de la gravure est particulièrement adapté à la représentation de ce genre de surface. L'épaisseur, la texture des courbes, et des lignes d'auto-intersection, permettent une bonne lisibilité de la surface.

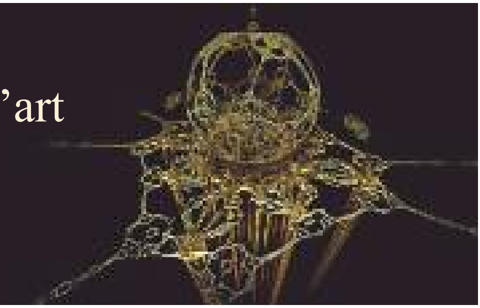
Dans l'article de François Apéry sur la collection de modèles de l'institut Henri Poincaré, on retrouve une représentation de cette surface en dimension trois.

P.J. et H.L.



Bouteille de Klein

Les fractals : du concept à l'art

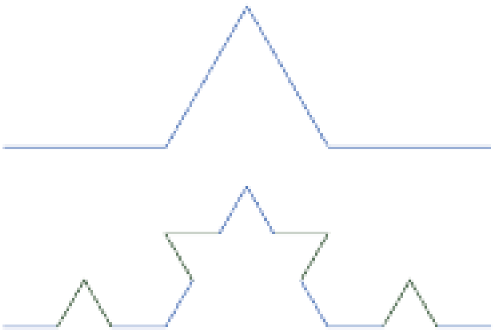


Hervé Lehning

La nature est complexe. Les objets que l'on y rencontre ne se laissent pas modéliser par les figures usuelles de la géométrie classique. Les montagnes ne sont pas des cônes, les nuages ne sont pas des sphères. Et que dire de notre système vasculaire ou des branches d'un arbre, de la surface des matériaux ou de la Terre ? Prenez un chou-fleur. En détachant un bouquet, vous obtenez un petit chou-fleur très semblable au chou-fleur initial. Sans faire de biologie, vous pouvez vous douter que cette structure vient de la formation même du légume. Cette similitude du local au global se retrouve dans bien des objets naturels : côte rocheuse, flocons de neige, alvéoles pulmonaires, etc. Cette idée de ressemblance du microscopique et du macroscopique est à l'origine de la création des objets curieux que Benoît Mandelbrot (1924 – 2010) a baptisés fractals à la fin des années 1960.

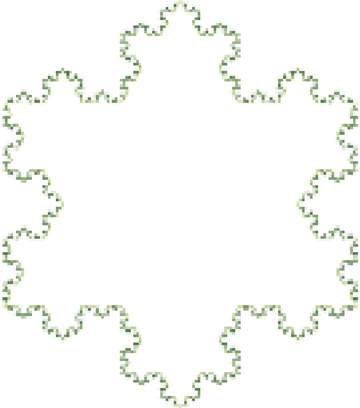
Fractalité mathématique

L'exemple de fractal le plus simple a été inventé bien plus tôt par Helge von Koch, au début du XX^{e} siècle. Sa courbe se construit à partir d'un simple triangle équilatéral en répétant ce motif à l'infini tout en le réduisant (voir ci-dessous).



Courbe de von Koch. À la première étape, nous avons un simple motif triangulaire, à la seconde, nous répétons ce motif sur chacun des quatre segments de la première étape… puis nous recommençons ainsi à l'infini.

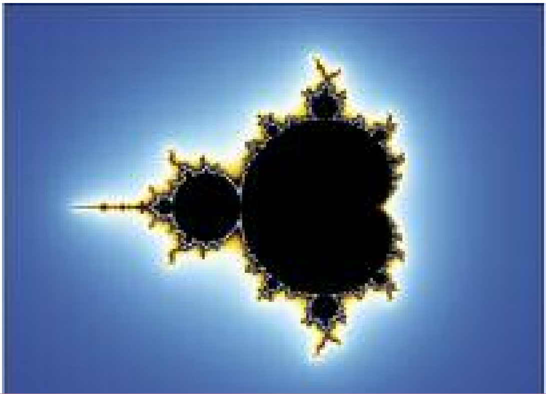
En ajoutant des rotations de 120 et 240 degrés, on obtient une sorte de flocon de neige et, en modifiant les couleurs selon les itérations concernées, des effets plus ou moins esthétiques. On passe alors des mathématiques à l'art.



Flocon de von Koch.

Recherche de l'esthétique

La plus célèbre fractale reste le fameux ensemble de Mandelbrot dont la définition importe peu ici (voir figure ci-dessous). Il est caractérisé par le fait qu'on en retrouve des copies miniatures à toutes les échelles tout le long de sa frontière. Sur la figure, le choix des couleurs a été fait de façon que l'intérieur de l'ensemble soit en noir, son extérieur en bleu avec un changement de couleur progressif selon la proximité à l'ensemble.



Ensemble de Mandelbrot. Il s'agit de l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite (z_n) définie par : $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$ reste bornée. La modification de la couleur est calculée à travers le nombre d'itérations nécessaires pour que z_n dépasse un certain seuil.

Utilisation de logiciels

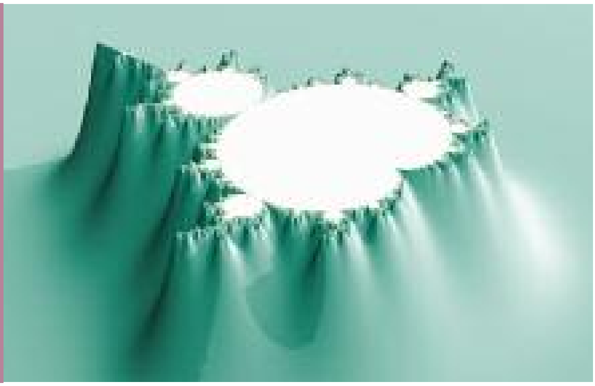
Au premier niveau de la création, on trouve donc d'excellents utilisateurs des logiciels que l'on peut trouver sur internet, comme Ultrafractal, Mandelbulb3D, etc. Pour que l'effet soit intéressant, il faut savoir choisir le bon point de vue et surtout les couleurs. Jérémie Brunet, par exemple, a ces talents d'explorateur et de coloriste qui rendent ses œuvres particulièrement intéressantes.

Le Burning Ship de Jérémie Brunet généré par l'itération d'une fonction à trois variables généralisant la suite complexe :

$z_{n+1} = (| \mathrm{Re}(z_n) | + i\, | \mathrm{Im}(z_n) |)^2 + c.$

Avec une telle expertise, il est possible de créer des œuvres originales semblant sortir d'un univers de science-fiction (voir le burning ship).

Pour aller plus loin, il faut programmer soi-même. Jos Leys l'a fait en plaçant l'ensemble de Mandelbrot au sommet d'une falaise et en faisant varier la profondeur en fonction de la distance au bord de l'ensemble.



Ensemble de Mandelbrot placé au sommet d'une falaise par Jos Leys.

En survolant les falaises, en nous approchant infiniment, nous découvrons des détails de plus en plus fins, et toujours de nouvelles copies de l'ensemble, une particularité due à l'auto similarité des objets fractals.

Cette image de Jos Leys montre un espace dix milliards de fois plus petit que l'image de départ.

La réalité et la conscience sont-elles fractales ?

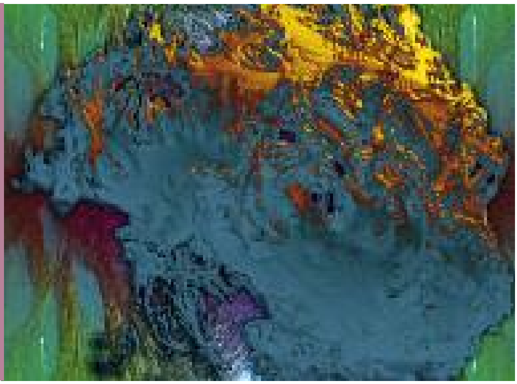
Certains artistes, comme Jean-François Colonna, se sont intéressés à la reproduction de la réalité à partir de fractales. Le résultat est parfois surprenant quand il s'agit de chaînes de montagnes ou de rochers tels ceux de Monument Valley aux États-Unis.

La géométrie fractale permet de décrire mathématiquement de nombreux phénomènes naturels irréguliers et donc de les reproduire ensuite à l'aide d'un ordinateur : c'est ainsi le cas de ce paysage ressemblant à Monument Valley au coucher du Soleil créé par Jean-François Colonna.

À partir de là, il est permis de s'évader et de réinterpréter les images que nous fournissent les mathématiques. Ainsi, le tableau *la conscience émergeant des mathématiques* a été produit à partir de l'itération d'une fonction mais ressemble à un cerveau dont les zones s'illumineraient de différentes façons selon son activité.

La diversité des œuvres de Jean-François Colonna tient aussi au fait qu'il réalise personnellement tous les logiciels informatiques qu'il utilise, cela à

La conscience émergeant des mathématiques
par
Jean-François Colonna.



partir d'un langage de programmation qu'il a également créé. Ceci lui permet de s'adapter à tous ses désirs créatifs.

Fractalité et photographie

À l'inverse, il est possible de créer des objets fractals à partir de la réalité, par exemple en assemblant des photographies. Denise Demaret Pranville s'est spécialisée dans cette méthode. Le tableau que nous montrons ici résulte d'une photographie prise sur les quais de Bordeaux où, quand la lumière est vive, les personnes semblent évoluer au-dessus de leurs reflets dans un bal surréaliste. Un peu de couleurs et quelques transformations fractales donnent un résultat étonnant.

Danse surréaliste
sur les quais de Bordeaux
par Denise Demaret Pranville.

H.L.

Sites des artistes cités pour en voir (un peu) plus :

http://www.fractal-3D.com/
http://www.josleys.com/
http://www.lactamme.polytechnique.fr/

Vulgariser les mathématiques par le clown théâtre

Cédric Aubouy : Compagnie *L'île logique*

Où est 17 ? Qui a déjà vu une droite ? Les mathématiques n'existent pas vraiment, mais le Clown non plus … En tant que pures créations de l'esprit, l'art et les mathématiques ont en commun de n'être qu'imaginaires, de ne pas exister concrètement. On fait des murs avec des briques et non avec des parallélépipèdes ; une musique, une sculpture, ne sont que des concepts, elles n'ont de sens que si notre imagination leur en donne un ; une émotion n'a pas la même réalité qu'un marteau. Et pourtant on ne peut pas nier leur existence. Le Clown vient de nulle part, et s'il nous ramène étrangement à des situations de la vie réelle, nous savons bien qu'il n'est pas dans la *vraie vie*. Les maths et les concepts fondamentaux de la physique théorique comme le temps, l'espace, la masse ou l'énergie n'existent pas vraiment non plus, ils sont abstraits. Qui a déjà vu une seconde ou un gramme ? Ce point commun d'existence abstraite qu'on trouve entre le clown et les mathématiques fonde la démarche de L'île logique : il s'agit de s'appuyer sur le premier pour transmettre la seconde … et pourquoi pas le gramme.

Absurde, échec, doute et naïveté

Compter jusqu'à zéro, couper en rien, ranger deux par trois … C'est dans la nature même du clown d'être dans l'inversion. Aussi quand il s'égare dans l'absurde, cette façon de prouver une proposition en démontrant que son contraire est impossible, il suggère logiquement la validation d'une affirmation inverse : aller dans le faux pour faire surgir l'évidence du vrai et permettre au spectateur de comprendre par lui-même en dénichant la contradiction.

Ces clowns sont bêtes papa, alors que moi j'ai tout compris !

Le clown est naïf. Il tombe dans les pièges et pose les questions que personne n'ose poser par peur du ridicule. Or se questionner naïvement est nécessaire pour savoir ce que l'on sait, savoir ce qu'on ne sait pas, et savoir ce que l'on cherche. Cette ingénuité, reflet de son ignorance, mène aussi le clown vers la curiosité, moteur principal du mathématicien. Le clown fait peur tout en émerveillant, les maths aussi. Les émotions, indispensables pour pratiquer les mathématiques (le cerveau qui pense et calcule n'est autre que celui qui rit ou pleure) sont relayées par le clown : il montre qu'on peut s'étonner ou s'enthousiasmer pour une équation mais il relativise aussi les craintes et les phobies en les prenant à sa charge : il prend sur lui la peur de l'échec, la culpabilité de l'ignorance, laquelle peut mener à la mise en sommeil de la curiosité. Car le clown rate. Il est nul, zéro pointé du doigt. Or l'erreur est motrice dans la compréhension, se tromper c'est apprendre. Le clown nous décharge de la honte illégitime de l'échec. Combien d'enseignants disent à leurs élèves : *Si vous ne comprenez pas, c'est de ma faute* ? On a mis plusieurs millénaires pour comprendre la division, n'est-il pas normal de ne pas bien la saisir aujourd'hui à 18 ans ? Et puis la peur fait perdre la confiance en soi.

Alors le clown doute. Il sait qu'il ne sait pas et ne sait pas qu'il sait. Il peut douter positivement, comme un chercheur qui remet en cause, mais il doute aussi de lui-même, souvent auto-référentiel comme la preuve de la non dénombrabilité des réels. Avoir de l'assurance c'est déjà bien se connaître, évaluer ses compétences, remettre en cause son être, avoir de l'assurance c'est douter de soi-même. Ou bien : pour être rapide il ne faut pas se tromper, pour éviter les erreurs il ne faut pas se presser, pour aller vite il faut … aller lentement.

On marche sur la tête, heureusement que le monde est à l'envers.

Enfance, imaginaire, vide et limites

L'enfant voit aussi bien un triangle que le panneau de la route, un cercle qu'une pièce de monnaie, il ne distingue pas tant le bâton de l'épée, la boule de la balle, il n'a pas besoin de la quantité pour comprendre le nombre : c'est un grand théoricien, il est dans l'imaginaire par nature. Le clown est aussi dans cette enfance (alors que ses spectacles ne sont pas forcément à l'attention des enfants) car il est à sa place dans l'imaginaire. Henri Poincaré, dont nous commémorons le centenaire de la mort cette année, accordait à l'étape intermédiaire du travail du chercheur une importance majeure : une fois le problème et ses difficultés bien posés et avant de formaliser sa preuve, laisser son imagination, sa créativité, voire ses rêves, agir jusqu'à ce que surviennent les idées clef. *L'imagination est plus importante que le savoir* disait Albert Einstein.

Comme on reconstruit les mathématiques à partir du vide en théorie des ensembles, le clown part de rien, lui aussi. Moins il sait ce qu'il doit faire et mieux il le fait ; c'est l'absence qui lui donne sa consistance, puis l'imaginaire fait le reste, il établit des liens. Le départ et l'arrivée comptent moins que le voyage. Toute chose n'existe que par les relations qu'elle entretient avec ce qui l'entoure, c'est ce qui nous distingue, qui nous fait exister. Si les mathématiques ne sont qu'histoire de relations, c'est tout aussi vrai chez le clown : ce qui nous touche n'est pas tant ce qui a lieu que la façon dont ce dernier va s'en emparer ; pas tant la situation que la façon de la vivre ; les relations au contexte, au partenaire, au public.

Mais le sage connaît le pas sage … alors le clown transgresse, il dépasse les bornes. Il montre les règles en ne les respectant pas, il sort du cadre. Or les mathématiques, cet unique domaine où tout le monde est nécessairement toujours d'accord, s'appuient sur des règles arbitraires, choisies : des règles de déduction permettent de passer des règles-axiomes aux théorèmes. Mais qu'ont fait Riemann, Lobachevsky ou Einstein ?

Les plus grands ont toujours montré un point de vue radicalement différent sur le monde, ils sont sortis du cadre.

À quand les cours de recul à l'école ?

Un grille-pain en forme de téléphone permet nécessairement de contacter une tartine.

Théâtre et sciences abstraites...

La logique fonde tout raisonnement par sa présence, mais aussi toute situation loufoque en brillant par son absence. Avec les sciences abstraites comme but et le clown comme moyen, sans se substituer au cours, l'île logique tente de montrer que le jeu du clown, vu comme une catégorie professionnelle des arts dramatiques, a des qualités toutes particulières pour venir à la rencontre des sciences théoriques, que c'est un partenaire pertinent pour la pédagogie des mathématiques, qu'il est possible d'aborder concrètement des sujets tels que la numération, l'énergie, la relativité du mouvement ou du temps, la logique, la géométrie, la mécanique newtonienne, les fonctions, l'infini, les nombres complexes, la théorie de Galois, les travaux de Poincaré, la matérialité de l'air, l'écosystème, les forces, la chaîne alimentaire, l'astronomie, les ondes, la structure de la matière, la nature de la lumière... d'une façon à la fois distrayante et pertinente, absurde et rigoureuse.

C.A.

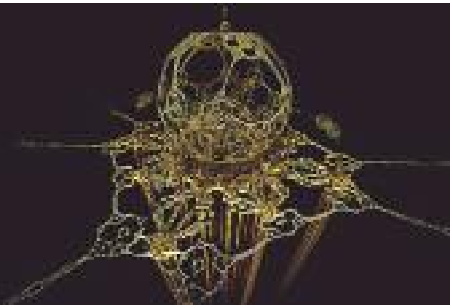
Plus on fait n'importe quoi, moins il faut le faire n'importe comment.

Pour en savoir (un peu) plus :

L'île logique est une compagnie de théâtre et clowns de sciences théoriques, elle propose 5 spectacles burlesques de niveaux différents, des saynètes-clown sur les travaux de Galois, de Poincaré...
Elle co-organise *Des clowns et des sciences*, festival intercroisé et réciproquement...
www.ilelogique.fr

Calligraphie des nombres

Laurent Pflughaupt



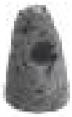
DÉNOMBRER · COMPTER · ÉCRIRE

Les premières traces de numération connues remontent à la fin du paléolithique, soit environ 30 000 ans avant notre ère. Pour fixer, et ainsi mémoriser des quantités, nos ancêtres pratiquaient des entailles à l'aide de silex rendus tranchants sur des bâtons ou des os.

Ils se servaient également de cailloux de formes et de tailles différentes (le mot "calcul", apparu à la fin du XV^{e} s. dans la langue française, vient ainsi du latin *calculus* qui signifie "pierre" ou "jeton").

Bulle renfermant des *calculi* (disques, billes, petits et grands cônes)

Petit cône de valeur 1



Grand cône perforé valant 600
Non troué il valait 60

Disque de valeur 100

La sphère valait 3600, perforée elle signifiait 36 000

Silex taillé, destiné à racler ou à pratiquer des incisions

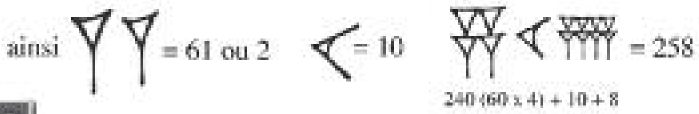
Durant le IV^{e} millénaire avant notre ère, en Mésopotamie, on se servit de tablettes d'argile pour consigner des données. Les empreintes étaient alors réalisées à l'aide de calames, des roseaux taillés qui, tenus obliquement ou perpendiculairement à la surface d'écriture laissaient sur l'argile des marques de natures différentes. Celles relatives à la numération étaient filiformes, triangulaires ou circulaires.

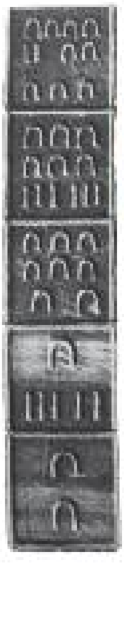
Tablettes sumériennes comptabilisant animaux et céréales (3000 av. J.-C.)

L'ÉCRITURE CUNÉIFORME

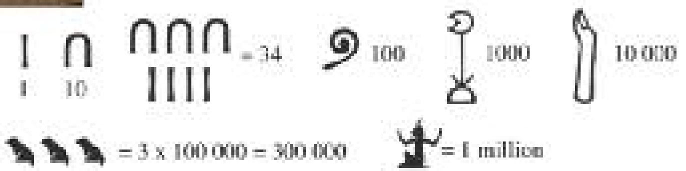
Les signes empreints dans l'argile prirent par la suite l'aspect de clous ou de coins (*cuneus* en latin), l'extrémité des roseaux utilisés étant triangulaire. Une écriture de ce type est dite "cunéiforme".

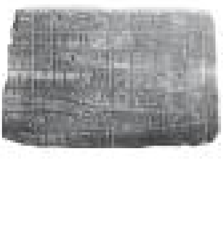
Le système de numération sumérien et babylonien étaient sexagésimaux (utilisant la base 60). Un clou vertical, suivant son positionnement, pouvait signifier l'unité ou 60.





Parallèlement se développait en Égypte une autre forme d'écriture dite HIÉROGLYPHIQUE.
Voici les quelques signes qui servaient à la numération :



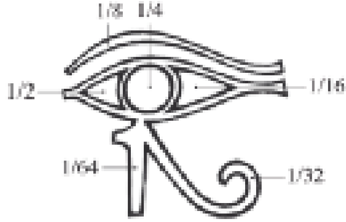


Calendrier d'Éléphantine 1450 av. J.-C.

Le phonogramme noté , correspondant au son "R", servait à l'écriture des fractions.

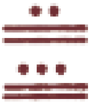
Ex. :  = 1/3

Certaines parties de l'OUDJAT  dit "Œil d'Horus", servaient à noter les fractions relatives à des quantités de céréales.
On remarquera que l'addition de toutes ces fractions ne donne que 63/64ᵉ.
Il est dit que c'est le dieu THOT patron des scribes, qui en ajouta le 1/64ᵉ manquant.



Le HÉQAT, unité de mesure des céréales, correspondait à environ 4, 785 litres. En l'associant au dessin d'une ou plusieurs parties de l'OUDJAT, on signifiait alors une certaine quantité de HÉQAT.
Sur l'exemple ci-contre on peut lire 1/4 de HÉQAT, soit environ 1,2 litre.

De nombreux systèmes graphiques furent utilisés par la suite pour noter les nombres, et il serait bien difficile ici de les montrer tous. On peut cependant mentionner celui des Mayas, fonctionnant en base 20, dont les signes, en dehors du zéro noté , sont constitués de points et de traits horizontaux.



Le nombre 253 représenté ci-contre se décompose ainsi : 12 x 20, soit 240 (partie supérieure) augmenté de 13, noté au dessous.

Les Grecs, quant à eux, disposaient de deux principes pour noter les chiffres et les nombres ; le premier, dit "alphabétique", fait correspondre α à 1, β à 2, γ à 3... et comprend trois signes particuliers : le DIGAMMA Ϝ, le KOPPA Ϟ et le SAMPI Ϡ, valant respectivement 6, 90 et 900. L'autre, dit "acrophonique" ne conserve que la première lettre du mot désignant le chiffre pour le signifier. Ainsi la lettre Π (pi) sera-t-elle utilisée pour désigner le chiffre 5 (Πεντε en grec), le Δ (delta) servira à noter le 10 traduit par Δεκα...
Ces signes de numération seront par la suite adoptés par d'autres écritures (copte, gotique ou cyrillique).
Les Romains se sont aussi servi de lettres pour noter les nombres :

I · V · X · L · C · D · M

Signes valant respectivement : 1, 5, 10, 50, 100, 500 et 1000.
Surmontée d'un trait horizontal la valeur de la lettre était multipliée par 1000 : $\overline{V}$ = 5000, $\overline{L}$ = 10000...

CIↃ

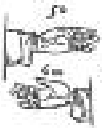
Signe tripartite reprenant le dessin d'un ↀ pour signifier MILLE.

Les chiffres médiévaux, à l'époque nommés *apices*, (pluriel du mot *apex* qui désigne également la partie sommitale d'une lettre) revêtent des formes tout à fait étonnantes. En voici certaines, usitées entre le XI^{e} s. et le XIII ^{e} s.

2 —— 3 —— 4 — 7 — 8

De part et d'autre de la main, une date : 1478

Par ailleurs, de nombreuses civilisations ont compté, et comptent toujours, en s'aidant de différentes parties du corps humain, comme les doigts et les orteils.



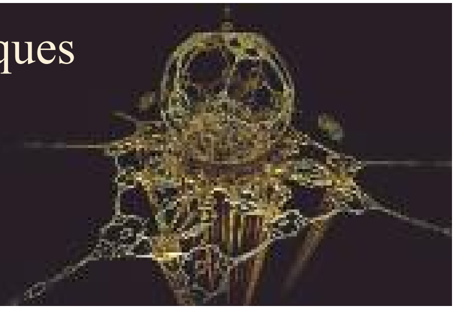
L'Art de compter avec les doigts.
Luca Pacioli "*Summa de Arithmetica*"
Venise, 1494.

Le nombre 196 au X^{e} s.

Dans les temps qui suivirent, et à l'instar des lettres, les chiffres, se métamorphosant sans cesse pour suivre les tendances du moment, furent un jour gravés sur des plaques de cuivre, puis imprimés ou sérigraphiés sur de multiples supports. Force est de constater qu'ils sont aujourd'hui omniprésents, des plaques minéralogiques aux tickets de caisse, figurant sous les codes barres ou les claviers de nos ordinateurs, ornant les touches de nos téléphones et de nos cartes bleues. On les retrouve enfin graffités ou tagués sur les murs, les bancs ou le sol de nos cités, empruntant alors des formes inédites, audacieuses, tendues et pertinentes qui, n'en doutons pas, dirigent notre pensée vers d'autres formes de perception. Selon moi, ces formes s'adressent autant à notre intelligence que ce qu'elles représentent.

Laurent Pflughaupt

Les mathématiques au cinéma



Roland Lehouq

Je me rappelle avoir vu, enfant, un dessin animé de Walt Disney intitulé *Donald au pays des Mathémagiques*[1]. On y voit Donald, armé d'un fusil de chasse, pénétrer dans une contrée tout à fait curieuse où il croise des arbres ayant des *racines carrées*, un ruisseau charriant des nombres, un oiseau à tête de crayon qui joue au morpion, un oiseau qui récite les 15 premières décimales du nombre pi (avec une erreur dans les deux dernières !).

Au début, Donald n'est guère intéressé par ce qu'il découvre, considérant que les mathématiques sont faites pour les crânes d'œufs. Pourtant, guidé par un esprit, il parcourt ce pays étrange et merveilleux où il comprendra les liens entre les mathématiques et la musique, l'architecture, les formes de la nature et les jeux.

A la fin, Donald est convaincu de l'intérêt des mathématiques et le film se termine sur la célèbre phrase de Galilée :

La mathématique est l'alphabet dans lequel Dieu a écrit le monde.

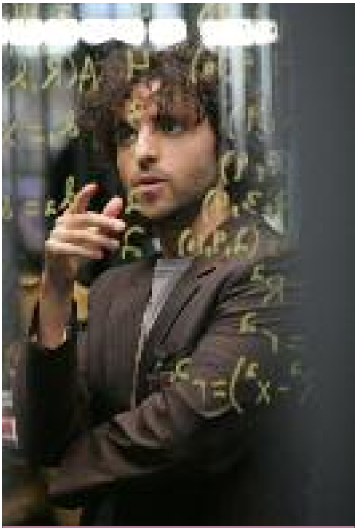
Donald au pays des Mathémagiques © Walt Disney

1- Le titre original de ce court métrage de 27 minutes est Donald in Mathmagic Land (1959). On peut encore le voir sur à l'adresse internet suivante : http://www.youtube.com/watch?v=YRD4gb0p5RM.

L'idée que les notations des mathématiques forment un langage à part entière est aussi présente dans une célèbre scène du film d'Alfred Hitchcock intitulé *Le rideau déchiré* : deux savants absolument silencieux, debout devant un tableau noir, se livrent à une joute silencieuse à coup d'équations écrites, biffées et réécrites, comme si aucun langage parlé n'était apte à exprimer leur différend.

Sortie en France du film d'Hitchcock - (***D.R.)***

Cette capacité des mathématiques à rendre compte des phénomènes est aussi présente dans la série télévisée *Numb3rs*, où le professeur Charlie Eppes, génie des mathématiques, est régulièrement consulté par le FBI et la NSA pour les aider dans des enquêtes délicates. L'argument de cette collaboration quelque peu inattendue réside dans une phrase prononcée par l'un des personnages : *Nous utilisons les maths tous les jours, pour prévoir la météo, pour mesurer le temps, pour gérer l'argent. Les maths sont plus que des formules ou des équations ; elles sont logique et rationalité et sont utiles à notre cerveau pour résoudre les plus grands mystères qui se posent à nous.*



Charlie Eppes *Numbr3rs* - (***D.R.***).

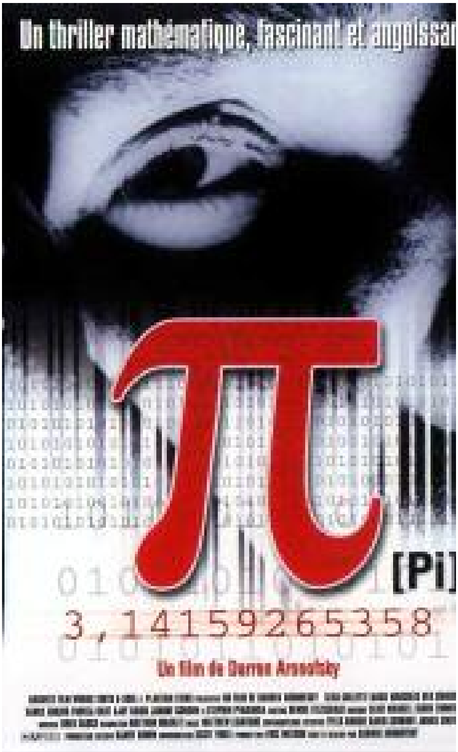
Des mathématiciens ayant été consultés, les équations écrites au tableau noir par le héros sont toujours réelles

2- Le blog de Mark Bridger explique les mathématiques utilisées dans chaque épisode de Numb3ers (http://www.atsweb.neu.edu/math/cp/blog/)
ainsi que celui de Wolfram Research à partir de la saison 4 (http://numb3rs.wolfram.com/).

et parfois pertinentes pour l'enquête en cours, même s'il faut bien reconnaître qu'il s'agit surtout de créer une ambiance et que le jargon utilisé sonne juste[2].

Max Cohen, le héros de *Pi*, un thriller psychologique de Darren Aronofsky (1998), est un théoricien des nombres qui partage aussi l'opinion des pythagoriciens. Il considère que tout peut être expliqué grâce aux nombres et aux séquences de nombres. Ses capacités de calcul mental sont prodigieuses mais son personnage, plutôt asocial et paranoïaque, ne jure que par son ancien professeur qui a passé toute sa vie à tenter de découvrir une séquence dans le nombre pi. Un jour, l'ordinateur avec lequel il mène ses recherches est victime d'un bug inexplicable au beau milieu d'une impression dont il ne reste qu'une série, apparemment aléatoire, de 216 chiffres.

Le héros se retrouve poursuivi à la fois par une firme de Wall Street qui souhaite dominer le monde de la finance et par des cabalistes qui tentent de percer les mystères enfouis derrière le nombre mystérieux. Ce film peut aussi donner l'occasion de parler des nombres univers, nombres réels dont le développement décimal contient n'importe quelle succession de chiffres de longueur finie[3].



Affiche du film Pi - (*D.R.)*

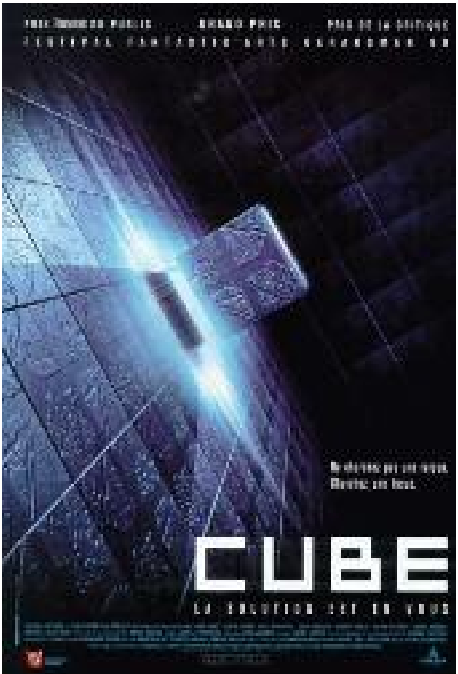
Ainsi, la succession des décimales d'un nombre univers contient, par exemple, tous les livres déjà écrits mais aussi ceux qui le seront.

Bien sûr, il est impossible d'en tirer une quelconque information, ce qui voue à l'échec les tentatives de Max Cohen et de son ancien maître.

3-La constante de Champernowne 0,123456789101112… est un exemple de nombre univers en base 10. On ignore encore si pi est un nombre univers.

Au cinéma, les mathématiques sont aussi sources d'énigmes posées aux personnages, en général pour sauver leur vie comme dans *Cube*, un thriller de science-fiction canadien, sorti en salle en 1997. Des personnages se réveillent dans une salle cubique, ignorant tout du lieu où ils sont et des raisons pour lesquelles ils y sont. Remarquant que les six faces de la pièce sont pourvues d'un passage communiquant avec d'autres pièces cubiques, ils décident d'explorer leur environnement. Rapidement ils constatent que certaines des pièces adjacentes sont piégées et finissent par remarquer que chaque passage porte une série de nombres.

L'un des personnages, une femme experte en mathématique, comprend en utilisant un raisonnement inductif que la pièce est sûre si aucun des nombres marquant son entrée n'est premier. Mais cette conjecture est mise en défaut par une pièce piégée satisfaisant pourtant la condition de primalité. Après moult péripéties, ils finissent par s'échapper en comprenant que les pièces sont mobiles et que la bonne condition est que les nombres repérant les pièces soient des puissances de nombres premiers, plutôt que des nombres premiers.



Affiche du film CUBE - (*D.R.*)

Cube a été suivi de deux autres films, *Cube 2 : Hypercube* (2003), dont l'action se passe dans un tesseract, un cube à 4 dimensions, et *Cube Zéro* (2004) qui explique qui se cache derrière ces cubes et les raisons de leur fabrication.

Dans la même veine énigmatique, *La chambre de Fermat* est un thriller espagnol de 2007 dans lequel trois brillants mathématiciens, affublés des pseudonymes Galois, Hilbert et Pascal, sont invités par un hôte mystérieux, se nommant Fermat, au prétexte de résoudre une grande énigme. Séquestrés par Fermat, ils doivent résoudre des énigmes pour pouvoir s'échapper d'une pièce dont les murs se rapprochent à chaque mauvaise réponse. La suite du film nous montre que le piège diabolique est monté pour une sombre histoire de vengeance, celle d'un vieux mathématicien qui a démontré la fameuse conjecture de Goldbach[4], envers un jeune mathématicien qui affirmait faussement l'avoir démontré.

Affiche de la version originale - (*D.R.)*

Pour conclure, voici la première énigme que doivent résoudre les personnages : un vendeur de confiseries reçoit trois colis. Il sait que l'un contient des bonbons à la menthe, l'autre des bonbons à l'anis et le dernier un mélange de bonbons à la menthe et à l'anis.

Les trois boîtes sont étiquetées Menthe, Anis et Mélange, mais les étiquettes sont toutes incorrectement placées.

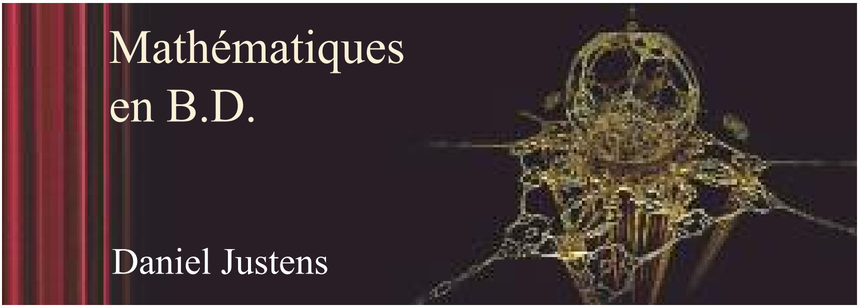
Quel est le nombre minimum de bonbons que le vendeur doit goûter pour pouvoir attribuer la bonne étiquette au bon colis ? Auriez-vous échappé à la pièce infernale ?

A vous de jouer ! [5]

R.L.

4-La conjecture de Goldbach énonce que tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.
C'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres.

5- Il suffit de prendre un unique bonbon dans la boîte étiquetée Mélange. S'il est à l'anis, cette boîte contient les bonbons à l'anis, celle étiquetée Menthe contient le mélange et celle étiquetée Anis contient les bonbons à la menthe. S'il est à la menthe, cette boîte contient les bonbons à la menthe, celle étiquetée Anis contient le mélange et celle étiquetée Menthe contient les bonbons à l'anis.



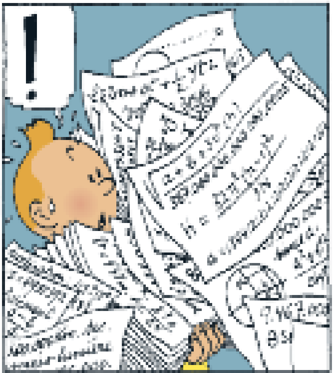
Mathématiques en B.D.

Daniel Justens

Les mathématiques sont tellement présentes dans la bande dessinée qu'il faudrait un fort volume pour n'en étudier qu'une partie. Alors que faire dans ces quelques lignes ? Choisir ! Voilà pourquoi quelques grandes séries mathématophores ne seront même pas évoquées ici. Que leurs auteurs me pardonnent. Eliminons ainsi d'emblée *le chat* de Geluck qui a déjà fait l'objet d'une étude prétendument exhaustive et dont, en tant qu'auteur, je me suis défendu, ici, de reprendre ne serait-ce qu'une ligne.

Le cas Tintin

Restons dans la B.D. classique (et donc belge !) en passant au cas Tintin. On ne peut pas dire que Hergé se soit spécialement intéressé aux mathématiques. Pas l'ombre d'un calcul ou d'une formule dans l'aventure lunaire. Et pourtant, Tournesol devrait être un grand utilisateur de mathématiques encore que son éclectisme ait de quoi surprendre et que l'on s'interroge sur sa spécialité. Mais bien avant son entrée dans le monde de Tintin, ce dernier avait multiplié les contacts avec les savants distraits dont l'un des plus beaux exemples est l'astronome Hippolyte Calys dans *l'Étoile mystérieuse*. C'est lui qui, à la page 6 de cette aventure, présente à Tintin une pile de feuilles noircies de calculs savants et de formules. L'un des coefficients intervenant dans lesdits calculs est 387 000 000 000 000, 0005.... Miracle de précision extrême dont on ne peut que s'étonner. Tintin a, quant à lui, une certaine culture mathématique. Quand il se lance à la recherche du *Trésor de Rackam le Rouge*, il sait que l'île sur laquelle ce trésor serait enterré se situe à 20° 37’ 42’’ N et 70° 52’ 15’’ W qui sont les coordonnées précises à la seconde d’angle près (30 mètres) d’un point perdu de l’Atlantique. Quelle précision ! alors que le sextant ne sera inventé qu’en 1730 par le mathématicien anglais John Hadley. Pas d’île déserte



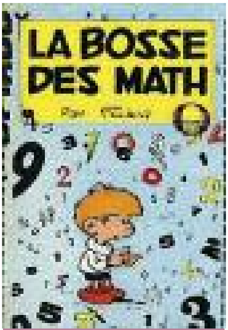
L’Etoile Mystérieuse

à l'emplacement indiqué mais comme Tintin le remarque (page 23), le système de référence utilisé par le Chevalier ne peut être celui actuellement en vigueur : *Le Chevalier de Hadoque, lui, a certainement compté en prenant comme méridien d'origine le méridien de Paris, qui est situé à plus de deux degrés à l'est du méridien de Greenwich !* Ce n'est que le 10 mars 1911 que la France a décidé d'aligner son heure légale sur celle du méridien de Greenwich. Pour les Français, la nouvelle heure retarde de 9 minutes et 21 secondes sur l'ancienne. Attention, minutes d'angles et minutes horaires ne sont pas équivalentes. Les 24 heures de notre journée se traduisent par 360° d'angle, soit 15° par heure. Les 9 minutes représentent donc bien 9/60 de 15° soit 2,25°.

Les savants fous

Les personnages de savants fous pullulent dans les bulles. Ainsi le génial Franquin nous a-t-il présenté dans *Le voyageur du mésozoïque*, l'étrange savant atomique Sprtschk dont le patronyme exempt de voyelle sonne comme une onomatopée porteuse de tous les maux. Et de fait, le savant cherche l'arme absolue. Ses pensées se résument à une suite de formules parmi lesquelles on peut reconnaître le fameux facteur de Lorentz en relativité restreinte. Entre parenthèse, la relativité restreinte semble une source d'inspiration fertile puisqu'elle fit également l'objet de calculs détaillés dans *La bosse des maths*, un mini récit du à la plume de Francis (Bertrand) et paru dans le magazine Spirou en 1962.

© Editions Dupuis 2012



(D.R.) Francis
Editions Dupuis

Revenons à notre Sprtschk qui finira dévoré tout cru par le dinosaure (herbivore !) ramené à la vie par le Comte de Champignac, un autre modèle de savant loufoque, et ce au moment même où l'atomiste s'exclame : *J'ai trouvé ! C'est effroyable !*

Les profs

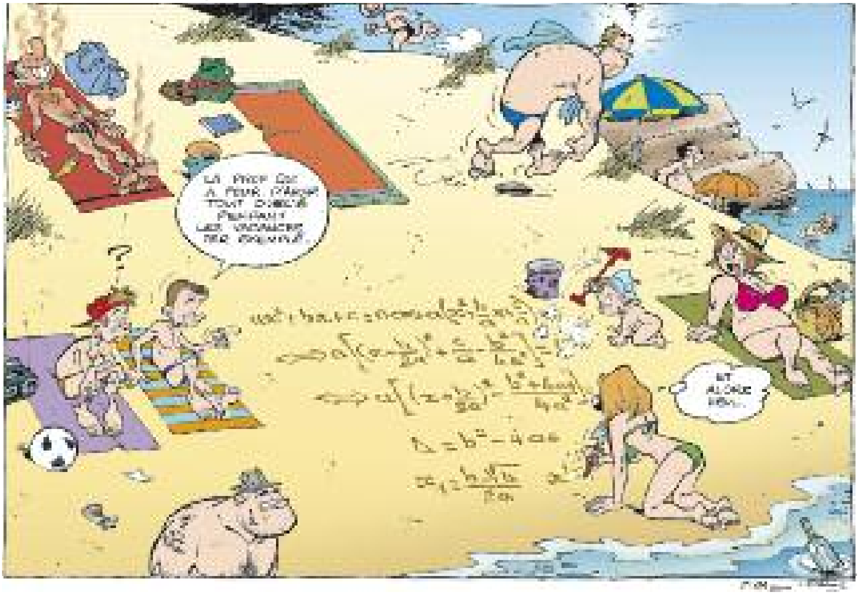
© Editions Dupuis 2012

De Spirou au Petit du même nom, il n'y a qu'un pas que nous franchirons d'autant plus facilement que le prof de mathématiques qui éclaire cette série, mademoiselle Chiffre, Claudia pour les intimes, est très éloignée par sa plastique parfaite, des caricatures horripilantes que l'on a coutume d'associer aux matheux. On ne la voit hélas que fort peu dans l'exercice de ses fonctions (Tome 5 « *Merci Qui ?* » page 11 ou tome 7 « *Demande à ton père* », page 44 à titre d'exemples) et le niveau scientifique de ses prestations se limite au calcul élémentaire.

Les Profs © Bamboo Edition Erroc @ Pica 2012

Mais dès que l'on se place dans le cadre scolaire, l'allusion au prof de maths devient une évidence. Dans cette lignée, la série *les Profs* n'échappe pas à la règle.

Remercions toutefois les auteurs (Pica et Erroc : serait-ce des pseudos ?) de nous offrir une fois encore une prof de math sexy mais hélas peu douée ! Dans *Loto et colles*, tome 2 de la série, page 46, elle nous présente, outre son bikini adorable, une résolution de l'équation du second degré, gravée sur le sable (donc heureusement provisoire) ne comprenant pas moins de deux fautes de signe.



Les Profs © Bamboo Edition Erroc @ Pica 2012

Les modèles de Midam

Les mathématiques ne sont pas faites que de données numériques et de formalisme. Elles nous permettent de représenter et de modéliser de multiples facettes de notre univers, en physique, sociologie, biologie, économie... Les modèles mathématiques sont descriptifs, explicatifs et parfois prédictifs.

Le problème des modèles prédictifs est qu'ils peuvent devenir des *boîtes noires*.

Connaître les données entrantes (*input)* et sortantes (*output*) d'un système ne suffit pas nécessairement.

Le dessinateur Midam (Michel Ledent d'où Mi-dent d'où Midam) illustre cette particularité de manière récurrente dans sa série *Game over*. Par le biais de jeux informatiques, le petit héros de la série (totalement dépourvue de bulles, donc de texte, ce qui ne l'empêche pas de pétiller comme un bon champagne) passe régulièrement par une série de portiques ou de mécanismes transformateurs. L'expérience lui apprend à tester ces *boîtes noires*. Mais hélas, les résultats de ces tests sont rarement conformes à ses attentes.

Dans la BD représentée ci-après, notre petit bonhomme doit franchir un précipice et se voit proposer deux portiques de transformations situés de part et d'autre du ravin. Un jet de pierre au travers du premier portique lui apprend que ce dernier dote la pierre d'ailes qui lui permettent de voler jusqu'au portique suivant qui le débarrasse de ces ailes, éjectant un cailloux en apparence totalement semblable à celui qui fut jeté dans la première machine à transformation.

Notre bonhomme se jette donc allègrement au travers du premier portique et se retrouve ailé. Le modèle était donc correct :

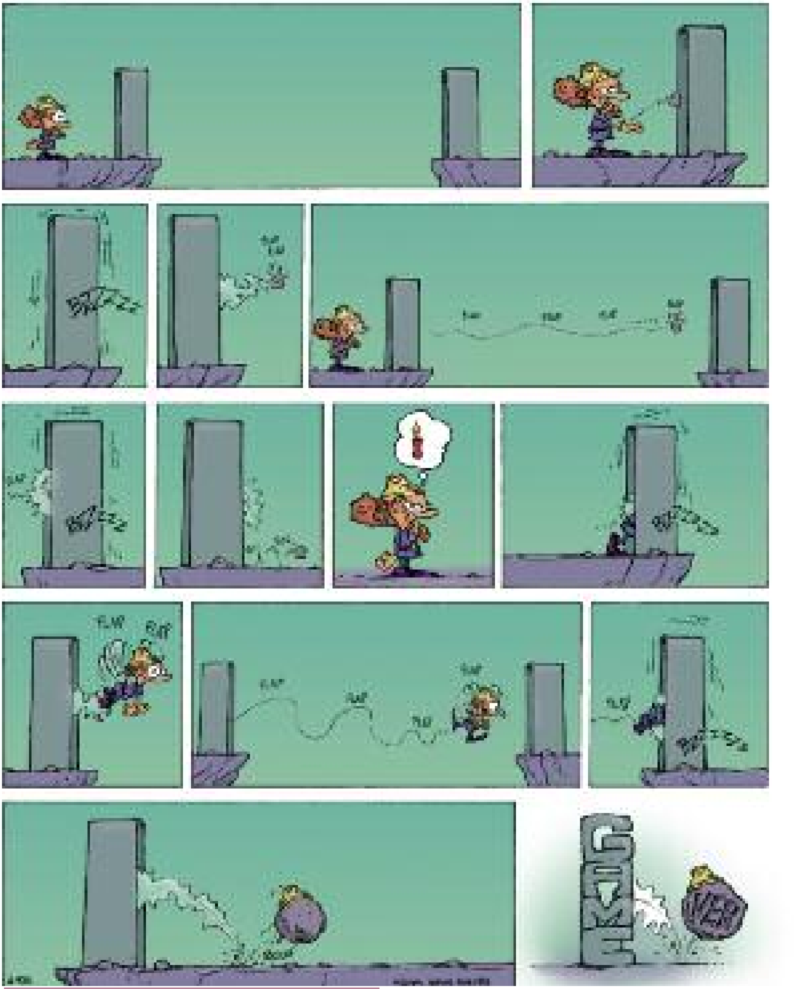
objet de sortie = objet d'entrée + ailes

Hélas, le passage au travers du second portique le voit éjecté ... sous la forme d'une grosse pierre. Le modèle anticipé expérimentalement semblait dire :

objet de sortie = objet d'entrée - ailes

Le modèle véritable était moins agréable :

objet de sortie = cailloux de masse égale à objet d'entrée
quel que soit ce dernier



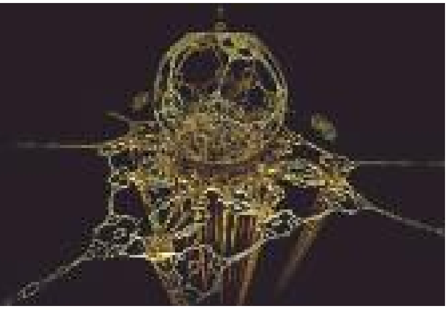
MIDAM © MAD Fabrik, 2012

Que ce gag serve de leçon aux utilisateurs de *boîtes noires*. Même si je ne peux leur jeter la pierre.

D.J.

Romans & mathématiques

Benoît Rittaud



La grande épopée du nombre π, le "paradis" des nombres transfinis de Cantor, la guerre entre Newton et Leibniz pour la paternité du calcul différentiel, la traque des nombres premiers… chaque notion mathématique a son histoire, dont il est courant de dire qu'elle est "un véritable roman". Une épopée devrait-on plutôt dire, tant c'est bien plutôt un souffle épique qui s'en dégage, de la longue marche de la construction des nombres à celle de la démonstration du théorème de Fermat. Avec ses conquêtes toujours recommencées de "terra incognita" de la pensée abstraite, ses percées fulgurantes, ses reculs, ses fausses routes et ses surprises, les mathématiques ont tout d'une grande saga.

Le premier à avoir mêlé mathématiques et littérature est peut-être Lewis Carroll, au milieu du XIX^{e} siècle. Son œuvre la plus connue, "Alice au pays des merveilles", est avant tout un conte pour enfants, qui comporte la caractéristique de cultiver les paradoxes, faisant de multiples allusions à la logique mathématique. L'auteur, de son vrai nom Charles Dogdson, était mathématicien. S'il n'a guère brillé dans sa propre discipline, il est en revanche celui à qui l'on doit d'avoir créé un répertoire inégalé d'énigmes mathématiques présentées sous forme d'historiettes, en accordant un soin particulier à disposer chacune de ses créations dans un écrin littéraire - non sans une forte prédilection pour les situations loufoques.

Alice Liddell, photographiée ici par Lewis Carroll, fut également son modèle pour *Alice au pays des merveilles.*

Un plat pays

À la fin du XIX^{e} siècle, Edwin Abbott, publie un livre d'une belle originalité : *Flatland.* Il y décrit les aventures d'un carré vivant dans un espace à deux dimensions, une "terre plate" où se trouvent des formes géométriques diverses qui ignorent tout d'une troisième dimension. Au fil de ses pérégrinations, le personnage principal découvre progressivement ce que cela pourrait signifier pour lui de vivre dans un monde à trois dimensions. En s'identifiant au héros dans ses efforts de compréhension de cette troisième dimension qui le dépasse, le lecteur est amené à comprendre ce que serait la mystérieuse quatrième dimension dont, quelques années plus tôt, les algébristes comme Arthur Cayley, William Hamilton ou encore Hermann Grassmann avaient mis en évidence la possibilité théorique.

Couverture du livre *Flatland* d' Edwin Abbott.

Lorsqu'un mathématicien se hasarde à expliquer les mathématiques au travers d'une fiction, il se heurte à un écueil majeur : l'histoire a très vite tendance à se borner à la mise en scène d'un"enseignant idéal", parfait pédagogue à la patience infinie, toujours disposé à tout expliquer à un "élève idéal" qui, de son côté, n'est jamais avare de questions pertinentes et de remarques destinées à relancer la discussion. Le tout devient alors une simple explication dialoguée dont la dimension romanesque n'est plus qu'un appendice superflu.

Or si l'on convient, comme proposé en introduction, que les mathématiques sont en elles-mêmes un roman, se pose alors la question de la pertinence d'un tel habillage. Le *Flatland* d'Abbott montre certes que, dans certains cas, le procédé fonctionne : l'intention y étant autant de faire *ressentir* que de faire *comprendre* l'idée de quatrième dimension, mettre en scène un personnage dont l'on découvre "de haut" l'initiation à la troisième dimension est une méthode efficace - et d'ailleurs souvent reprise. Notons que, bien qu'ayant fait quelques études de mathématiques, Abbott n'est pas mathématicien mais théologien, et que son exposé est aussi l'occasion d'une charge contre les mœurs de l'époque victorienne.

Mathématiciens et romanciers

Mathématiciens et romanciers ne sont pas dans des situations équivalentes pour écrire des romans mathématique*s*. Alors que les généralités mathématiques nécessaires sont en principe accessibles au romancier (quitte à solliciter l'aide d'un spécialiste), l'on n'imagine guère en revanche un mathématicien demander à un romancier de lui fournir le scénario d'une histoire ou de lui apprendre comment écrire dans un style littéraire. Un exemple réussi écrit par un mathématicien est *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*, d'Apostolos Doxiadis, un livre qui porte toutefois davantage sur la vie d'un mathématicien que sur les mathématiques elles-mêmes.

L'oncle Petros est un mathématicien fictif du XX^{e} siècle dont les brillants travaux le conduisent à rencontrer les grands noms de la théorie des nombres comme Godfrey Hardy ou Srinivasa Ramanujan, avant de se lancer à corps perdu dans la démonstration de la conjecture de Goldbach, y sacrifiant carrière et équilibre mental. (cf. encadré)

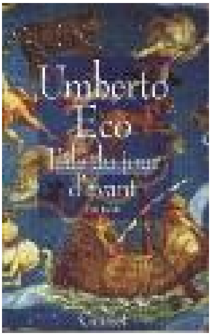
Lorsqu'un romancier s'attelle à présenter les mathématiques sans sombrer dans la caricature, le résultat peut se révéler extrêmement intéressant, à condition de ne pas s'attendre à ce que l'histoire toute entière tourne autour d'un théorème dont le roman nous expliquerait les arcanes en détail, remplaçant avantageusement le rébarbatif cours de maths sur le même sujet. Malgré la mode de ces aliments censés guérir ou prévenir une maladie, qui nous vaut le néologisme

La conjecture de Goldbach

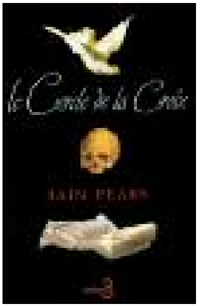
Tout nombre pair (sauf 2) est la somme de deux nombres premiers. Par exemple :
4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, …, 1 116 769 786 = 5 536 463 + 1 111 233 323, etc.
Cet énoncé, proposé par Christian Goldbach au XVIII^{e} siècle et jamais mis en défaut jusqu'à présent, n'a pas encore reçu de démonstration.

alicament, il y a un monde entre aliment et médicament, même si cela ne signifie pas que tous les aliments se valent ; de même, un roman n'est pas un manuel, sa fonction est ailleurs, ce qui n'empêche pas que certains d'entre eux soient intéressants pour les mathématiques.

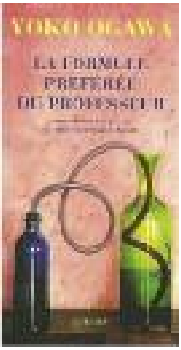
Un point où les romans peuvent se montrer irremplaçables est l'explication de la manière dont une question mathématique peut faire corps



avec une réalité sociale. Ainsi dans *L'Île du jour d'avant* d'Umberto Eco, qui traite de la question, aussi délicate que hautement stratégique, à l'époque de Mazarin, de la détermination du méridien, c'est à dire : comment calculer, à partir de la position des étoiles et des planètes, la longitude où se trouve un navire en haute mer ? Plus encore, dans le *Cercle de la Croix* de Iain Pears, roman en quatre parties dont l'une a pour narrateur le grand mathématicien John Wallis, lequel doit faire face à un problème de cryptanalyse (décryptage d'un message



secret), dans le cadre des temps troublés de l'Angleterre, peu de temps après la chute de Cromwell. Pour finir, ayons un mot pour *La Formule préférée du professeur*, de Yoko Ogawa, qui raconte la très belle his-



toire d'une assistante ménagère qui se lie d'amitié avec son employeur, un mathématicien souffrant d'un type d'amnésie qui l'empêche de se souvenir des événements récents. Bien loin des intrigues de cour, bien loin des coups d'état, c'est avec beaucoup de calme et de poésie que la narratrice découvre, avec candeur et admiration, quelques unes des plus belles formules des mathématiques, sans guère les comprendre mais en n'en pressentant pas moins la beauté et l'élégance. L'émerveillement, voilà bien un point de rencontre possible entre roman et mathématiques.

B. R.

Bibliographie pour en savoir(un peu) plus

Edwin Abbott, *Flatland*, http://www.ebooksgratuits.com/pdf/abbot_flatland.pdf
Lewis Carroll, *Œuvres*, Gallimard, 1990.
Apostolos Doxiadis, *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*, Christian Bourgois, 2000.
Umberto Eco, *L'Île du jour d'avant*, Grasset et Fasquelle, 1996.
Denis Guedj, *Le Théorème du perroquet*, Seuil, 1998.
Yoko Ogawa, *La Formule préférée du professeur*, Actes Sud, 2008.
Iain Pears, *Le Cercle de la Croix*, Belfond, 1998.
Benoît Rittaud, *L'Assassin des échecs et autres fictions mathématiques,* Le Pommier, 2004.

Littérature et infinité de nombres premiers

Michèle Audin

Raymond Queneau fut, avec François Le Lionnais, un des fondateurs de l'Oulipo (**ou**vroir de **li**ttérature **po**tentielle) où l'utilisation des mathématiques pour écrire de la littérature est une activité habituelle... depuis plus de cinquante ans. Les mathématiques fournissent des contraintes, grâce auxquelles des textes littéraires s'écrivent.

Il y a une infinité de nombres premiers (Je vois une masse confuse)

Ces petits textes sont une suite de variations sur ce thème. Commençons par une démonstration, que nous explique le mathématicien Jacques Hadamard (1865-1963), célèbre notamment pour avoir démontré un théorème (beaucoup plus difficile) sur la façon dont les nombres premiers sont répartis parmi tous les nombres entiers.

Jacques Hadamard, 1

Il nous faut par exemple démontrer qu'il existe un nombre premier supérieur à 11.

Je considère tous les nombres premiers de 2 à 11, soit, 2, 3, 5, 7, 11.

Je forme leur produit 2x3x5x7x11=N.

J'augmente ce produit de 1, soit N+1.

Ce nombre, s'il n'est pas premier, doit avoir un diviseur premier, lequel est le nombre cherché.

*

Jacques Hadamard nous explique ensuite ce qui se passe dans sa tête pendant qu'il fait cette démonstration.

Jacques Hadamard, 2

Je vois une masse confuse.

N étant un nombre assez grand, je vois un point assez éloigné de cette masse confuse.

Je vois un second point un peu au-delà du premier.

Je vois un endroit quelque part entre la masse confuse et le premier point.

*

Maintenant, dans la lignée des Exercices de style de Raymond Queneau, nous envisageons différentes procédés littéraires appliqués à l'infinitude des nombres premiers.

*

Il y a beaucoup de façons de mélanger les mathématiques avec les autres activités culturelles et c'est bien normal : les mathématiques font partie de la culture.

*

D'abord une démonstration... d'un résultat faux (le seul nombre premier pair est 2!).

Étonnant

Il y a une infinité de nombres premiers pairs. Démonstration : on suppose qu'il y en a un nombre fini, on en fait le produit, on ajoute 2, le nombre trouvé n'est divisible par aucun nombre premier pair.

*

Différents styles sont ensuite abordés. La prétérition consiste à prétendre qu'on ne fait pas une chose tout en la faisant.

Prétérition

Je pourrais supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. Je ne le ferai pas, mais je pourrais en faire le produit. Je pourrais, si je voulais, ajouter 1 à ce produit. Là je conclurais. Mais non, car je n'ai droit qu'à 7000 signes et je n'ai pas la place.

*

Prière d'insérer

Dans son nouvel ouvrage, traité avec le brio qui lui est propre, le célèbre professeur X, à qui nous devons déjà tant de chefs d'oeuvre, s'est appliqué à ne montrer que des résultats compréhensibles par tous, grands et petits. L'intrigue tourne autour de nombres qui n'ont que deux diviseurs, ce qui ne les empêche pas d'intervenir dans la plupart des autres nombres. Dans l'épisode final, un grand nombre, qui est parvenu à s'extraire d'une masse confuse et qui a cru montrer ainsi son indépendance, doit se rendre à l'évidence et retrouver sa place dans la succession infinie de ses semblables. Le tout dans une tension dramatique que X a burinée avec un rare bonheur.

*

Le texte suivant contient l'énoncé (en bleu)... mais raconte une autre histoire (qui est plus ou moins celle que Raymond Queneau raconte 99 fois dans les exercices de style).

Logo-rallye

L'autre jour, trois autobus s'arrêtent **ensemble ; des** passagers en grands **nombres** attendent. Les deux **premiers** pleins et partis, le troisième **est** plein et met un temps **infini** à démarrer. **Je suppose qu'il** attend que les autres soient un peu plus loin. Il **est** parti, il a **fini** par partir. Il y a un type dont **je fais le** portrait : cou trop long, comme **produit** par un étirement, un cordon **de** chapeau comme **tous ces** jeunes en portent (il doit s'en vendre en grands **nombres**). Et voilà qu'il **ajoute** à l'intérêt que je lui porte, en agressant **un** voyageur, sans **aucun** égard, d'après la casquette un **facteur** qui rentre chez lui et dont mon **premier** quidam se plaint **de ce** qu'il le bouscule. Malgré le **nombre** de gens debout, il parvient à s'asseoir. Ce **n'est** que plus tard, **dans** la cour de la gare Saint-Lazare que **notre** gars et moi nous retrouvons **ensemble**. **D'où une** petite appréhension. Mais il a trouvé quelqu'un à qui porter la **contradiction**.

*

Maintenant quelques textes écrits « sous contrainte ». Un lipogramme en e est un texte dans lequel on s'interdit d'utiliser la lettre e.

Lipogramme

Infini ? Mais oui ! Pourquoi ? Voilà : trois, cinq, vingt-trois, tout ça sans fin. Tu croyais voir la fin ? Multiplions, ajoutons un (oui, un). Du coup, lui, mon produit plus un, voilà un truc qu'aucun divisa : ni trois, ni cinq, ni vingt-trois pas, aucun. Gut, souffla-t-il, souriant (car il n'aimait pas l'anglais). Voilà la contradiction ! Y a pas. Sont infinis.

*

Et maintenant, un monovocalisme en e : la seule voyelle autorisée est le e.

Sept et les éléments de l'ensemble (en « e »)

Les élèves, d'emblée, égrènent l'ensemble. Sept en est. Bel exemple ! En excès, les éléments recensés se régénèrent éternellement. Perpette ! Prestement les élèves zélées démêlent le sens de ce secret.

*

Dans le texte suivant, chaque « substantif » a été remplacé par le septième substantif qui le suit dans un dictionnaire.

Inflammabilité de l'ensoleillement des nominalismes premiers (translation ou S plus 7)

On suppose qu'ils sont en nominalisme fini. On en fait la profession, à la quelle on ajoute 1. Ce nouveau nominalisme n'admet pour divulgateur aucun des nominalismes premiers de notre litanie. Contraste.

*

Un « beau présent » est écrit avec seulement les lettres d'un texte fixé (ici « infinité de nombres premiers »).

Beau présent (infinité de nombres premiers) bdefimnoprst

En bons piétons, démontrons. Si nombre fini. Opérer « fois ». Trois fois sept fois... et premier nombre. Mon nombre rond, notre nombre doit être premier fois... Bon. Fin de démonstr.

*

Le haïku est une forme de courts poèmes japonais qui obéissent à de très nombreuses contraintes. Ici nous n'avons conservé que la « métrique » (5 pieds pour le premier vers, puis 7, puis 5).

Haïku

seuls quelques premiers
au produit ajouter un
et se contredire

*

La morale élémentaire est une forme poétique inventée par Raymond Queneau (encore lui!).

Morale élémentaire

premier pair	début facile suite erratique	nombres impairs
ensemble égrené	masse confuse produit fini	bel exemple
diviseur premier	un ajouté sourire épanoui	nombre cherché

Deux trois
cinq sept
pas neuf
mais beaucoup d'autres
une infinité
oui

premiers jumeaux	progrès futur problème ouvert	énoncé goldbachien

*

Pour finir, un hommage à Mona Lisa, qui inspira le mathématicien Léonard de Vinci.

Joconde

Dans la salle Renaissance italienne, ils sont deux, trois, cinq, sept, onze, treize, dix-sept... Si seulement tous ces jeunes premiers étaient en nombre fini, pense Mona Lisa dans son cadre, on en fabriquerait un produit, à plus ou moins un près, et tout serait terminé, on pourrait retirer la vitre blindée et respirer un peu.

Son sourire commence à s'épanouir — commence seulement, car elle sait bien qu'il y a une infinité de jeunes premiers.

M.A.

Pour en savoir (un peu) plus :

Post-scriptum

✍ **le site officiel de l'Oulipo http://www.oulipo.net/**

✍ **un texte qui fait un point illustré sur mathématiques et Oulipo http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/ExposeRennes.pdf**

Dans la place dont nous disposons ici, nous nous sommes contentés de montrer quelques contraintes littéraires et littérales appliquées à un texte mathématique court (et pas trop difficile à comprendre). Bien entendu, il y a beaucoup d'autres textes qui ont déjà imité les exercices de style, et nous nous sommes inspirés de quelques-uns d'entre eux. Il s'agit, outre les exercices de style déjà nommés, de *Joconde jusqu'à 100*, d'Hervé le Tellier et de *Rationnel mon Q*, de Ludmila Duchêne et Agnès Leblanc, (voir illustrations)

Le(s deux) texte(s) de Jacques Hadamard (à lire en parallèle) sont extraits de son livre Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.

Les progressions en musique

Emmanuel Amiot

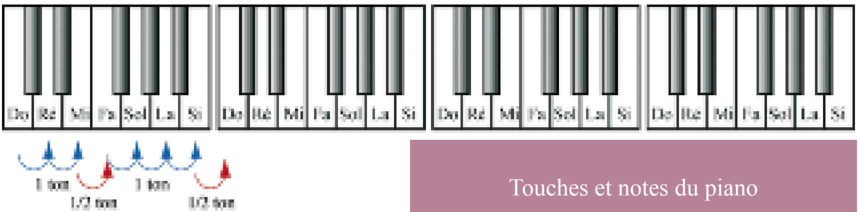
La musique est réputée avoir des rapports avec les mathématiques, au point que, pour certains, il semble naturel qu'un mathématicien soit musicien. Pourtant, au-delà de l'idée floue et simpliste que *la musique est nombre*, ces rapports sont parfois fins et subtils, voire cachés. Les chercheurs dans ce domaine sont d'ailleurs amenés à faire usage des ressources les plus ésotériques des mathématiques contemporaines.

Les clefs de la beauté.

Nous allons voir comment une apparente irrégularité peut cacher une structure très régulière de façon élémentaire. Chaos apparent et symétries cachées ne sont-ils pas une des clefs de la beauté ? Dans bien des styles de musique, un court passage emprunte ses notes à une gamme, c'est à dire à un sous-ensemble spécifique de l'ensemble des notes possibles. La gamme la plus courante dans les musiques ouest-européennes, celles qu'on entend à la radio, est la *gamme majeure*. Son prototype est constitué par les touches blanches du piano.

Comme il s'agit de sept notes choisies parmi douze, sa répartition ne peut qu'être irrégulière. Plus précisément, les intervalles de *seconde*, c'est-à-dire entre deux notes consécutives, sont de deux espèces différentes, selon qu'il y a ou non une touche noire entre les deux touches blanches. L'intervalle entre deux notes consécutives s'appelle le demi-ton, il y a deux demi-tons dans le premier cas, un seul demi-ton dans le second.

Cardinalité égale variété



Touches et notes du piano

Cette irrégularité des intervalles entre notes successives se lit bien quand on les compte : 22122212212221221221… La répétition de cette séquence 2212221 signifie que, quand la gamme est passée du do au do suivant, la séquence recommence à l'identique. La coutume est de représenter cela sur un diagramme circulaire.

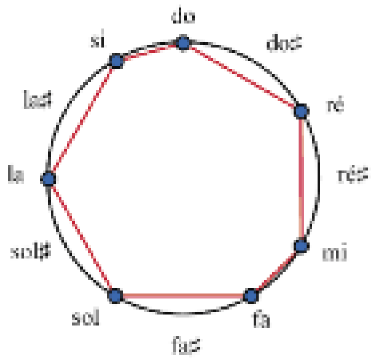
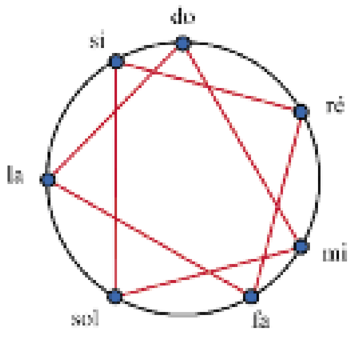


Diagramme de la gamme majeure. Si on note 0 le do (en haut) puis 1 le do♯, etc. le si est noté 11. L'arithmétique sur ce cercle se fait comme sur une montre: 12 vaut 0, 13 vaut 1, etc. La gamme peut ainsi être notée 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

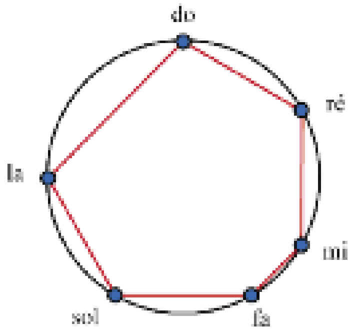
De manière surprenante, cette propriété se manifeste aussi pour les tierces, c'est à dire pour les intervalles de deux notes en deux notes.

Diagramme des tierces.



Il en est de même pour les quartes, les quintes, etc.

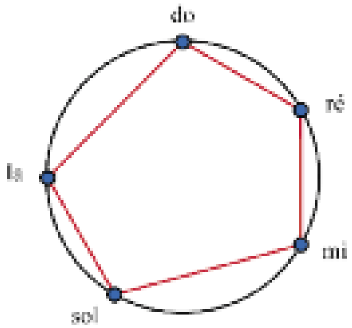
Cette propriété a été nommée par les théoriciens *cardinal égale variété*. Elle est assez rare. Ainsi, la gamme hexatonique ne la vérifie pas, il y a trois sortes différentes de *secondes*. Dans d'autres gammes (*comme do do♯ ré ré♯ mi*), on a bien deux sortes de secondes, mais trois sortes de tierces.



Gamme hexatonique :
do ré mi fa sol la.
Elle ne vérifie pas la propriété
cardinal = variété.

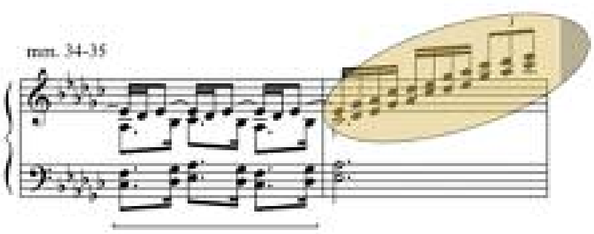
La gamme pentatonique

En revanche, la gamme pentatonique, souvent qualifiée de chinoise, mais omniprésente en blues, rock et de nombreux autres idiomes musicaux, vérifie les mêmes propriétés !



Gamme pentatonique
do ré mi sol la,
dite chinoise.

Un exemple de *tierces dans la gamme pentatonique* se trouve à la fin de *La Fille aux Cheveux de Lin* de Claude Debussy.



Tierces dans la gamme pentatonique sous la forme ré♭ mi♭ sol♭ la♭ do♭ dans *La Fille aux cheveux de lin* (Prélude I) de Debussy, exemple emprunté à D. Tymockzo. Pour l'écouter, aller à l'adresse :
http://manu.amiot.free.fr/Musiques/LaFilleAuxChLin.mp3

Régularité de ces gammes

Je vais vous confier un secret de ces régularités inattendues… En fait la gamme majeure, comme la gamme pentatonique, sont *parfaitement régulières.* Reprenons en effet les numéros des notes de la gamme de do majeur (les touches blanches *do ré mi fa sol la si*) : 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 (voir la figure diagramme de la gamme majeure).

Compte tenu que l'on trouve la même note une octave plus haut, cela revient à compter de douze en douze ; cela fonctionne comme les heures d'une montre, on ne garde que le reste dans la réduction modulo 12. Ainsi la progression arithmétique de raison 7 : 5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, (une séquence de quintes, pour les musiciens), donne avec cette règle : 5, 0, 7, 2, 5, 9, 11 soit les notes *fa do sol ré la mi si* (voir la figure *diagramme de la gamme majeure*). Il en est de même pour la gamme pentatonique, par exemple *mi la ré sol do* peut s'écrire 4 9 14 19 24 alias 4 9 2 7 0, ce qui donne bien *do ré mi sol la* permutés. Un diagramme respectant cet ordre met en évidence la régularité de ces deux gammes. Il en est de même de 0, 2, 4, 6, 8, 10 soit *do ré mi fa# sol# la#* dont la régularité est encore plus évidente : une gamme par tons, fréquemment utilisée par Debussy, Gershwin et d'autres.

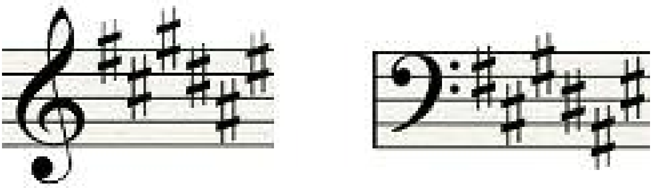
On comprend mieux pourquoi cela donne une si petite variété de valeurs des intervalles : par exemple pour la gamme majeure, on voit bien que la plupart des notes consécutives sont distantes en fait de deux quintes, ce qui fait bien un intervalle de 7 + 7 = 14 qui se réduit à 2. Est-ce enfin la clef de ces mystérieuses symétries ?

Pas tout à fait… la *raison* de ces progressions arithmétiques doit être *liée* au *nombre de notes* de la séquence, 7 demi-tons pour la gamme à 7 notes, etc. Je vous laisse le plaisir d'expérimenter différents cas possibles pour conjecturer quelle doit être cette relation ! Notez que par exemple la gamme hexatonique mentionnée plus haut (*do ré mi fa sol la*, alias 0 2 4 5 7 9), est elle aussi une progression arithmétique (5 12 19 26 33 40 alias 5 0 7 2 9 4) mais ne vérifie pas la propriété *cardinal égal variété*.

Aussi, si on *transpose* la gamme majeure de son intervalle générateur 7, une seule note va changer dans l'ensemble, et changer de la distance la plus petite possible : *fa* devient *fa#* d'où : *fa do sol ré la mi si* donne *do sol ré la mi si fa#*.

La clef

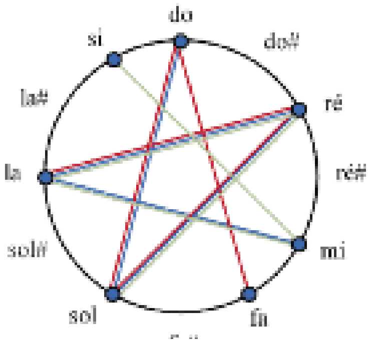
Ces transpositions à la quinte donnent la clef (le jeu de mot est intentionnel) des *armures* des portées musicales, où l'on trouve des séquences de dièses qui suivent précisément la progression de ces notes nouvelles.



Séquences de dièses à la clef…

Dans son *étude* n° 5 op 10, Frédéric Chopin joue d'une propriété remarquable : une gamme pentatonique, qui est une séquence de quartes (progression de raison 5), est aussi bien une séquence de quintes (raison 7 : en effet 7 est l'opposé de 5 puisque 7 + 5 = 12, c'est la même séquence à l'envers !) : *mi la ré sol do* est l'ordre inverse de *do sol ré la mi*. Mais une progression plus longue de deux notes fournit, comme on l'a vu, une gamme majeure : on a donc un petit théorème, selon lequel toute gamme majeure contient trois gammes pentatoniques ! Chopin fait jouer la main droite sur les cinq touches noires (la même gamme pentatonique qu'utilisée par Debussy dans le prélude précédent), et la main gauche joue dans 2 des trois tonalités majeures qui la contiennent, de façon parfaitement harmonieuse donc !

En rouge, la gamme *fa do sol ré la*,
en bleu *do sol ré la mi*
et en vert *sol ré la mi si*.



On a vu combien des calculs élémentaires (addition et réduction modulo 12) permettent d'expliquer des phénomènes musicaux apparemment très compliqués.

La *déraisonnable efficacité des mathématiques* dont parle Eugène Wigner (1902 – 1995) ne se cantonne pas à la physique, elle opère aussi bien dans les arts et tout particulièrement dans la musique.

E.A.

Interaction musicale entre musiciens et ordinateur

Arshia Cont
Responsable de l'équipe-projet Inria Musync

L'informatique musicale, de l'accompagnement musical automatique vers la programmation synchrone en temps réel

Pour ses travaux sur le logiciel Antescofo, Arshia Cont a obtenu le Prix « coup de cœur du jury » du prix La Recherche 2011.

La création musicale passe le plus souvent par l'écriture, sous la forme d'une partition musicale, destinée aux instrumentistes et réalisée sur scène. Cette réalisation est le résultat de l'interaction d'un ou de plusieurs musiciens entre eux et avec leurs partitions musicales. Ce passage de l'écriture à l'interprétation en temps réel est un défi majeur pour l'informatique musicale. L'idée globale est de déléguer tant l'écriture que la performance à un ordinateur, à l'image de l'activité humaine des compositeurs et interprètes.

La capacité de synchronisation et de coordination en temps réel entre plusieurs musiciens sur scène, interprétant chacun sa propre partie et donnant un résultat d'ensemble cohérent, est un acquis commun des musiciens, qui pose des défis intéressants à l'intelligence artificielle.

L'étude de ces processus de synchronisation et de coordination et l'idée de les déléguer à un ordinateur se rattachent à plusieurs thèmes de recherche tels que le traitement du signal, l'apprentissage automatique, la programmation et les langages synchrones et temps réel pour une finalité musicale.

Contexte musical

La complexité de l'interprétation polyphonique / en ensemble

Tout concert, par définition, a lieu en *temps réel* ; on assiste à un événement unique pris sur le vif. Ce qu'on apprécie, c'est précisément la construction la plus savante et la plus calculée qui soit de l'événement. C'est l'essence même du concert que d'être vécu comme un moment de virtuosité technique, instrumentale et musicale tout à la fois : tout concert donne à voir et à entendre non pas des faits, mais leur fabrique en temps réel. C'est-à-dire une *interprétation*.

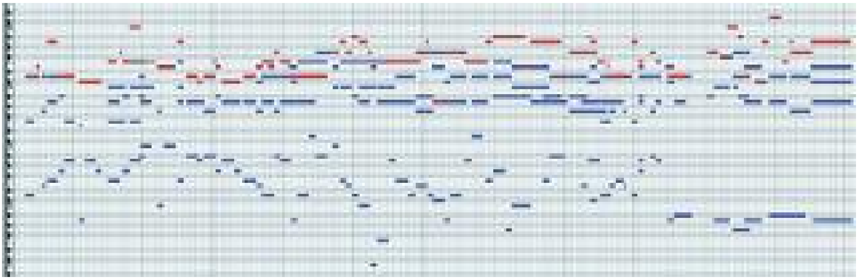
L'interprétation musicale devient toutefois complexe quand plusieurs musiciens se produisent sur scène. Chaque musicien est responsable de l'interprétation de son propre texte (sa partition) en cohérence avec les autres. Il s'agit donc d'un processus de synchronisation et de coordination entre plusieurs agents, malgré toute déviation possible en fonction de l'interprétation, pour produire la cohérence d'ensemble déterminée par le texte d'origine fourni par le compositeur. Cette synchronisation est assurée soit implicitement par les musiciens eux-mêmes dans le cas d'un petit ensemble de musique (un quatuor à cordes par exemple), soit par un chef d'orchestre quand un grand nombre de musiciens sont présents sur scène. Qu'en est-il lorsque l'une des parties est interprétée par un ordinateur ?

Partition originale de la sonate N°4 de Haendel pour flûte et clavecin
(interprétée par ordinateur - Synthèse MIDI)

Accompagnement automatique

Dans un contexte plus commercial, imaginons un musicien (amateur ou professionnel) voulant s'entraîner et jouer sa partie tout seul, en l'absence d'autres musiciens. Pour cela, il suffit, de déléguer les parties des autres instruments à des sons préenregistrés ou bien à des synthétiseurs. Autrement dit, on peut remplacer la partie d'accompagnement par un support numérique. Dans un schéma figé, l'accompagnement peut être un enregistrement sonore simple (sans la partie solo). Dans ce cas, la partie solo est exécutée de façon synchrone avec ce support fixe, ce qui est contraignant pour le soliste. Dans un schéma idéal, à l'image d'un accompagnement musical humain, il est préférable que ce soit la partie d'accompagnement qui s'adapte en temps réel au jeu de l'instrumentiste : ralentir ou accélérer la vitesse d'interprétation, et modifier les dynamiques en fonction de l'interprétation de l'œuvre. Dans ce cas, nous avons besoin d'un système d'accompagnement automatique.

En accompagnement automatique, l'ordinateur joue le rôle d'un musicien virtuel et agit en fonction du jeu de l'instrumentiste en temps réel. Il doit donc être doté d'une capacité d'écoute temps réel ainsi que d'une capacité d'entreprendre les actions musicales en coordination et de façon synchrone avec le jeu de l'instrumentiste. Il prend donc en entrée la partition solo ainsi que la partition d'accompagnement, et utilise le flux du son en temps réel pour écouter, synchroniser et réagir en fonction du texte musical.



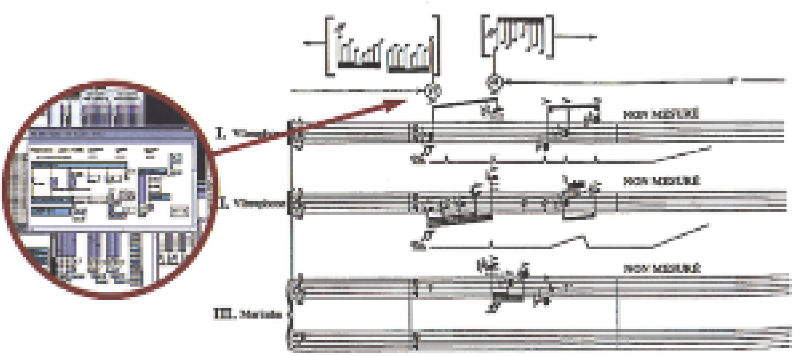
Transcription de l'interprétation (par un flûtiste amateur) de la partition de la figure (1) avec accompagnement automatique. À la flûte à bec, l'informaticien Gérard Berry, à l'occasion du colloque anniversaire GGJJ à Gérardmer, en février 2011

Il est évident qu'une bonne écoute n'est pas suffisante pour réaliser un bon accompagnement avec une bonne synchronisation musicale, mais que l'ordinateur doit également être doté d'un cerveau ou d'une intelligence musicale pour pouvoir simuler la complexité d'un tel processus en temps réel. Cette complexité devient encore plus évidente si on considère une interaction plus fine et contrôlée avec l'ordinateur pour faire plus qu'une exécution d'accompagnement. Ceci est le cas de la création musicale contemporaine avec les dispositifs électroniques temps réel.

Musique électronique mixte, à la fois électronique et instrumentale

La première œuvre mixte pour instrument et dispositif électroacoustique est souvent attribuée au compositeur Bruno Maderna pour sa pièce *Musica su due dimensioni* pour flûte et bande (1952). L'idée étant de ramener les dispositifs électroacoustiques sur scène et de les faire jouer en interaction avec des instruments acoustiques, cette tendance a été suivie par d'autres compositeurs comme Karlheinz Stockhausen et Mario Davidovsky dans les années 1950 et 1960. L'Ircam a, depuis sa création en 1977, travaillé sur le temps réel, c'est-à-dire des dispositifs matériels et informatiques permettant la création et le travail du son numérique sans délai de calcul perceptible. Les possibilités offertes par les stations de calcul temps réel ont donné naissance à plusieurs œuvres dans des styles très différents employant le *temps réel*. Parmi les compositeurs intégrant ces technologies dans leurs œuvres, le premier à avoir exploré de manière systématique les possibilités du temps réel est sans doute Philippe Manoury (lauréat de la victoire de la musique classique du meilleur compositeur en 2012). Ses œuvres mises à part, il est surtout connu dans le monde de l'informatique musicale pour sa contribution, dès 1988, aux côtés de l'informaticien Miller Puckette, au développement du logiciel Max, dont le nom est un hommage à Max Matthews, le père de l'informatique musicale, décédé en avril 2011. Ce logiciel est connu aujourd'hui sous le nom MaxMSP et distribué par la société Cycling74.

Parallèlement, Manoury a développé une véritable pensée du temps réel. Il a en effet tenté une sorte de *déduction* de la notion de temps réel à partir d'une analyse de la notation musicale, dans ses rapports avec l'in-



Extrait de Neptune de Philippe Manoury
pour trois percussionnistes et électronique temps réel (1991)

terprétation. L'une des *facultés* de la notation musicale, écrit-il, est *sa virtualité*. L'exemple de la notation baroque le montre bien : l'écriture comporte certains éléments que Manoury qualifie d'*absolus* (la hauteur de la note dans la majeure partie du répertoire occidental) et d'autres qui sont *relatifs*, c'est-à-dire laissés à la discrétion de l'interprète dans certaines limites (le tempo ou les dynamiques dans la musique baroque, par exemple). C'est en ce sens que toute partition destinée à un interprète est *virtuelle* : elle ouvre des champs de possibles, sans les déterminer complètement. La notion de partition virtuelle pour l'ordinateur est conforme à cette idée : il s'agit de programmes réactifs composés par l'artiste dont les sorties seront déterminées en fonction du jeu de l'instrumentiste et en temps réel, tout en étant musicalement déterministe.

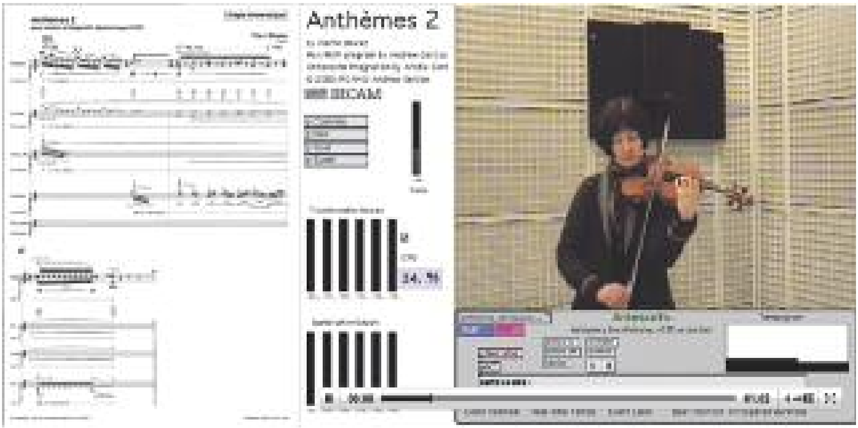
Dans ce contexte musical, la partie électronique de l'œuvre ne se limite donc plus à une simple synchronisation par *reconnaissance* ; il s'agit de tenir compte, dans la fabrique même des événements sonores, des valeurs *relatives* (variables, vivantes) saisies sur le vif de l'interprétation. Et l'interprète peut dès lors contrôler les réactions de la machine : il joue avec la machine, et la machine joue avec l'interprète.

L'informatique musicale, dans sa quête du temps réel, était à ses débuts préoccupée par les moyens de calcul, les supports matériels, et des puissances de calcul permettant diverses opérations comme la spatialisation, la synthèse sonore, et la transformation sonore en temps réel. Aujourd'hui, avec des ordinateurs personnels plus puissants et la disponibilité des processeurs sonores intégrés dans chaque ordinateur personnel, les moyens et supports matériels permettant le calcul et la manipulation sonore en temps réel ont été largement démocratisés. Mais pour autant, la tâche d'écriture musicale en temps réel avec les ordinateurs (composition), et leur interaction avec des musiciens reste une quête majeure pour diverses disciplines dont l'informatique. Les idéaux du *temps réel musical,* des années 1980 représentent toujours des défis importants à la théorie des langages de programmation ainsi que des systèmes temps réel.

Contexte scientifique

Dans le contexte musical décrit plus haut, l'ordinateur joue le rôle d'un musicien. Le compositeur *écrit* des programmes sous forme d'une partition virtuelle, faisant appel aux diverses techniques (temps différé ou temps réel) de l'informatique musicale : de la synthèse sonore à la spatialisation, à la transformation et aux effet temps réel, figés dans le temps ou bien relatifs à la vitesse des musiciens réels.

À l'exécution, la machine ayant sa partition virtuelle ainsi que celles



Extrait de la partition d'Anthèmes 2 de Pierre Boulez
(© Universal Edition A. G., Wien, 1997.)

de ses collègues humains, prend en charge l'interprétation de sa partie en coordination et en synchronisation avec celles des musiciens sur scène.

Un tel système informatique doit donc être capable de mener deux tâches principales en parallèle :

1. **Machine d'écoute :**

   Cette tâche concerne notamment le traitement du signal, et les méthodes en apprentissage automatique pour la reconnaissance et l'extraction des données musicales en temps réel depuis un signal audio capté par un micro. Ce système doit être capable de prendre une partition de musique, et de suivre l'interprète en temps réel sur cette partition ; d'où l'intitulé commun de *suivi de partition*. Un suiveur de partition doit être capable de gérer des situations incertaines (environnement bruité, différents instruments ou dispositifs de captation sonore) et de gérer les éventuelles *erreurs* provenant de l'instrumentiste.

2. **Accompagnement réactif :**

   En connaissant la position dans la partition d'un interprète et ses paramètres d'interprétation, l'ordinateur lance les actions correspondantes dans sa propre partition virtuelle en réaction au jeu de l'instrumentiste en synchronie avec lui, et en respectant la temporalité musicale décrite pour ces actions. Cette partie du système est donc réactive et synchrone.

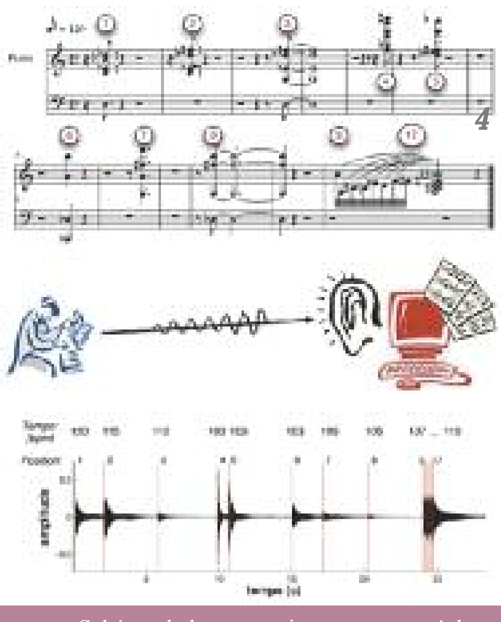


Schéma de la reconnaissance temps réel.

Le couplage de ces deux technologies est l'idée principale derrière le projet Antescofo, un suiveur de partition temps réel muni d'un langage réactif et synchrone. Le logiciel dispose donc de la partition et prend en charge le suivi de partition ainsi que le lancement de la partie réactive.

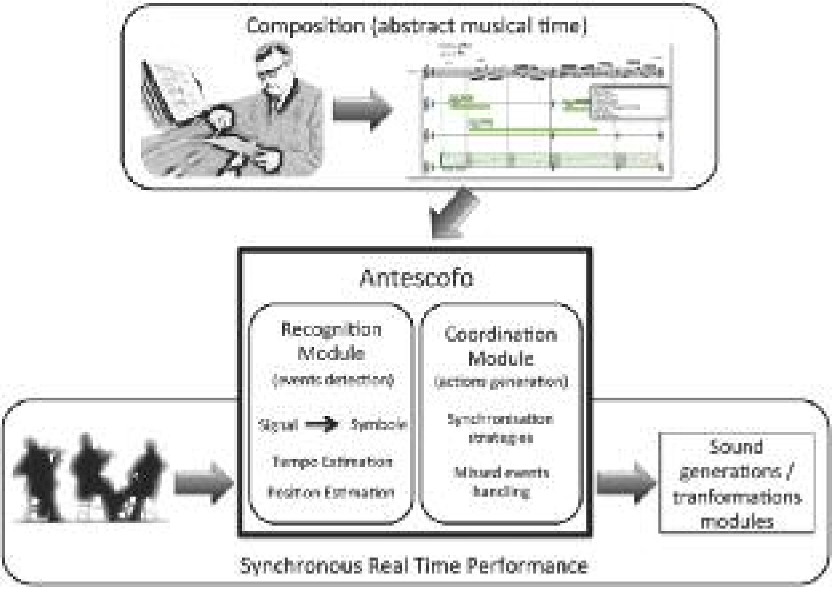


Schéma d'intervention d'Antescofo

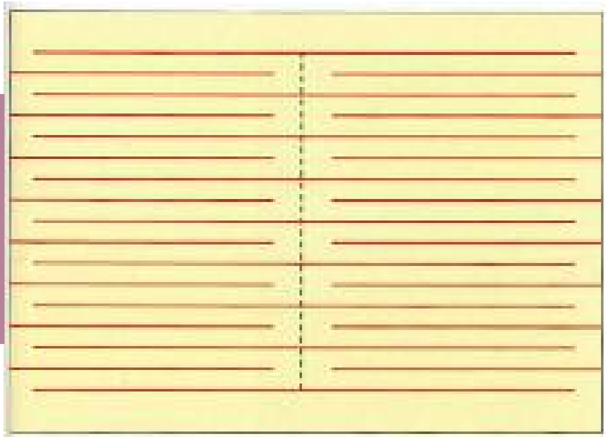
A.C.

Mathématiques mises en scènes par la magie

Dominique Souder

Si l’on vous défie de découper un trou dans une carte à jouer, de façon à pouvoir y passer la tête, réussirez-vous ? Ce qui paraît invraisemblable peut être réalisé. La plupart du temps on accompagne le découpage par le récit de la légende de Carthage fondée par Didon. Outre le charme du conte il y a des mathématiques là-dedans : visualiser le résultat vous donne des images mentales de la différence entre les notions d’aire et de périmètre.

Plier la feuille en deux, puis découper selon les traits rouges et selon les pointillés verts, sans dépasser.



La recherche d'invariants est une tâche courante du mathématicien dans des domaines variés : géométrique, numérique, permutations… Parallèlement, imaginons un magicien : faire semblant de battre les cartes mais garder en fait leur ordre initial a toujours été un souci pour lui… Prenons un jeu de 13 cartes, présenté faces cachées, tous les piques rangés du 1 au roi, du haut vers le bas du paquet. Mettez la carte du dessus du paquet sur la table (le 1). Faites passer la carte suivante (le 2) sous le paquet. Placez la carte qui est maintenant sur le dessus du paquet (le 3) sur la table, au dessus de la première. Faites passer la carte du dessus du paquet (le 4) vers le dessous, et continuez ainsi jusqu'à ce que votre paquet soit épuisé et que les 13 cartes soient arrivées en une pile sur la table. Vous venez de réaliser ce qu'on appelle une *battue à l'australienne*.

Observons l'évolution des cartes si l'on fait plusieurs battues à la suite :

Départ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	D	R
Après battue n°1	10	2	6	D	8	4	R	V	9	7	5	3	1
Après battue n°2	7	2	4	3	V	D	1	5	9	R	8	6	10
Après battue n°3	R	2	D	6	5	3	10	8	9	1	V	4	7
Après battue n°4	1	2	3	4	8	6	7	V	9	10	5	D	R

On ne retrouve pas encore l'ordre initial, mais observez les cycles de mouvements de chaque carte jusqu'à son retour en position d'origine. Il y en a deux d'ordre 1 (pour le 2 et le 9), un d'ordre 3 : (pour 5,8,V), deux d'ordre 4 : (pour R,1,10,7) et (3,6,4,D). Le Plus Petit Commun Multiple. de 1, 1, 3, 4, 4 est 12. Il faudrait 12 battues pour retrouver l'ordre initial des 13 cartes.

Ce tableau observé, imaginons un moment de magie :

Le tour des 13 spectateurs

Vous êtes le magicien, vous avez placé les piques dans l'ordre suivant que vous avez appris par cœur : 6, 1, 8, R, 4, 2, 10, 7, D, 5, 3, 9, V (du haut vers le bas). Proposez un tour à 13 spectateurs ! Mettez-les en cercle. Distribuez un carton numéroté de 1 à 13 à chacun. Faites une démonstration d'une 1ère battue à l'australienne des 13 piques. Donnez le paquet de 13 cartes à un spectateur. Faites-lui faire une 2e battue australienne. Demandez au spectateur n°2 de regarder la 2e carte à partir du haut (sans l'enlever ou perturber le paquet - ce sera l'as de pique), et au spectateur n°9 de regarder la 9e (ce sera la D de pique). Demandez à un spectateur de faire une 3e battue, qui sera encore plus rassurante sur l'honnêteté du tour. Faites choisir aux spectateurs n°5 la 5e carte (ce sera le 4 de pique), au n°8 la 8e, au n°11 la 11e. Demandez à un spectateur de faire une 4e battue. Faites choisir aux spectateurs n°1, 3, 4, 6, 7, 10, 12, 13 les cartes situées à la position correspondant à leur numéro. Ce tour devrait être apprécié à sa juste valeur : vous allez retrouver les 13 cartes choisies ! En mettant les 13 spectateurs en ordre, bien rangés du numéro 1 au numéro 13, vous pouvez réciter devant eux votre liste des 13 valeurs apprises par cœur : 6-1-8-roi-4-2-10-7-dame-5-3-9-valet. Voici un tour qui justifie votre opinion que les maths peuvent être, aussi, un talent de société…

La Mathémagie

La démarche scientifique ci-dessus a été complétée par l'élaboration d'un tour de magie. Un professeur peut aussi imaginer de démarrer par un tour de magie, et de le décortiquer comme un enquêteur, exhibant les maths cachées qui permettent le succès. Nous voici dans le domaine de la *mathémagie* : ce sont des tours de magie automatiques qui s'expliquent par des considérations mathématiques et logiques, et ne nécessitent aucune habileté manuelle de prestidigitateur. Les buts des mathémagiciens ? Faire rêver un public plus ou moins jeune, développer sa réflexion et une démarche scientifique, lui donner confiance en ses capacités indépendamment de l'application scolaire de formules, et encore épanouir sa créativité en introduisant dans ses propres tours un petit grain de sel personnel. Un souhait sous-jacent ? Faire aimer davantage les maths. Un espoir permanent ? Donner une motivation supplémentaire pour les travailler avec persévérance. Cet état esprit « militant » est évidemment différent de celui d'un magicien professionnel qui veut lui aussi faire rêver, distraire, mais ne dévoile pas ses trucs pour ne pas casser le rêve. En effet de nombreux tours de mentalisme font un effet extraordinaire car le spectateur peut croire que le magicien lit dans son esprit et peuvent susciter, si on les explique, une désillusion amère…

Avec la mathémagie, il n'en est pas ainsi car ce qui doit émerveiller le plus c'est la logique mathématique , elle seule permettant la réussite : **« la science est plus magique que la magie, c'est une magie à preuves »**
(Jean-Marie Adiaffi, cinéaste, poète et écrivain ivoirien; 1941-1999)

Pour illustrer ces différences d'esprit et d'objectifs, voici maintenant un tour inventé par Alex Elmsley, 1929-2006, informaticien britannique, spécialiste mondial reconnu de cartomagie.

Le mathématicien et le magicien

Le mathémagicien tire 16 cartes d'un jeu battu. En les comptant, il s'est arrangé pour regarder discrètement une carte, la 1ère sous ses yeux quand on tient le paquet de 16 cartes, faces visibles devant soi. Il a ainsi repéré mettons le 2 de cœur. Un spectateur est invité à penser à un entier compris entre 1 et 16, et à regarder dans le paquet, présenté les faces visibles tournées vers lui, celle qui est à la position correspondant à son nombre à partir du haut du paquet.

Voici pour commencer le tour *du mathématicien* :

Il prend le jeu dans la main gauche, les faces visibles tournées vers le public, puis il les fait passer une à une vers la main droite, sans les regarder, sans en changer l'ordre, mais en les décalant légèrement : une d'abord vers le haut, puis une vers le bas, une vers le haut, une vers le bas, etc. Il tient donc 2 moitiés de jeu dans sa main droite l'une au-dessus de l'autre, faces visibles côté spectateurs. Puis il demande si la carte est plutôt en haut ou en bas. Il dégage alors le groupe qui lui est signalé (haut ou bas). C'est un groupe de 8 cartes qu'il fait passer devant l'autre groupe (ceci vu côté spectateur). Il recommence alors l'expérience précédente une 2e fois, une 3e, puis une 4e fois, et il annonce alors que la carte choisie se trouve en 1ère position ! (Juste sous les yeux du spectateur). Il explique que chaque expérience consiste à diviser par 2 le nombre de cartes possibles. Après la 1ère opération, la carte choisie se trouvait parmi les 8 premières, après la 2e parmi les 4 premières, après la 3e parmi les 2 premières, elle est maintenant au-dessus du paquet après la 4e opération.

S'enchaîne le tour *du magicien* :

Celui-ci met le paquet précédent faces cachées sur le haut, et fait chercher par le spectateur la carte située à la position correspondant à son nombre. Le magicien annonce : c'est le 2 de cœur ! On la retourne et vérifie : magique !

La magie est spectaculaire, vive, inattendue, on est émerveillé de ne pas comprendre… L'explication du long tour du mathématicien était courte, concentrée, à la fois abstraite et lumineuse, logique.

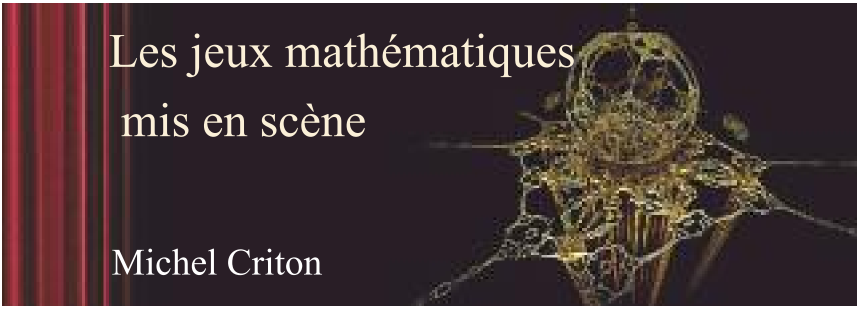
L'explication du bref tour du magicien serait, par contre, très longue : pourquoi cet échange entre la 1ère carte et celle choisie ? Vous pourriez faire une 1ére vérification empirique pour une 1ère position de carte choisie, puis pour les 15 autres. Plus abstrait, vous pourriez nommer **a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p,** les 16 cartes, et noter tous les mouvements possibles jusqu'à la vérification… Démarche complexe, fastidieuse… Quel paradoxe entre les durées d'illusion et d'explication !

Songez maintenant au conflit d'intérêts que pourrait ressentir un grand-père voulant faire des tours de magie mathématique à une petite fille, mais aussi l'initier : que doit-il privilégier, entre sa volonté d'éclairer, de faire comprendre un beau principe, et l'envie d'émerveiller, de prolonger un rêve ? Selon quelle répartition, et à quels moments ? Attention à la schizophrénie ! Sans doute, après le désir de passer un moment agréable en famille tous âges mêlés, l'essentiel pour lui sera-t-il d'aider à se développer un être humain pensant, rêvant, imaginant, et non un automate à l'apparence humaine...

D.S.

Pour en savoir (un peu) plus :

- **Dominique SOUDER :** *80 petites expériences de maths magiques* (Dunod, 2008)
- **Dominique SOUDER :** *Magic Mathieu multiplie les mystères* (Belin, 2010)
- **Dominique SOUDER :** *Le mathématicien et le magicien,* 60 tours magiques de mathématiques et de logique, (Ellipses, 2012)



Les jeux mathématiques mis en scène

Michel Criton

Les jeux mathématiques, qui sont la face *grand public* des mathématiques, apparaissent dans l'édition (livres, magazines, almanachs) depuis fort longtemps. Ces jeux sont souvent une *mise en scène* de concepts mathématiques destinée à les rendre moins abstraits et plus attrayants. Mais on a également essayé, souvent avec succès, de les faire vivre sur une vraie scène, qu'elle soit scène de théâtre, plateau de télévision, voire même place ou rue.

Les défis mathématiques des XVI^{e} et du XVII^{e} siècles

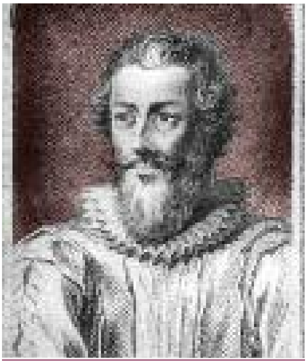
Au 16^{e} siècle, les mathématiciens européens prennent l'habitude de se lancer des défis, par voie de publications ou même d'affiches. Le premier de ces défis fut lancé par le mathématicien italien Anton Maria del Fiore autour de la résolution de certaines équations du 3^{e} degré d'Annibal de la Nave, défi déjà proposé par Scipione del Ferro (1465 - 1526).

Le défi fut relevé et vaincu par Niccolo Tartaglia (1499 - 1557). Ensuite, en 1535, les deux hommes se livrèrent à un *duel mathématique* en déposant chacun chez un notaire une liste de 30 problèmes (se ramenant tous à des équations du 3^{e} degré) ainsi qu'une somme d'argent qui devait revenir au premier à résoudre les 30 problèmes proposés. Ce fut Tartaglia qui gagna en proposant une méthode générale de résolution des équations du 3^{e} degré.

Niccolo Tartaglia (1499 - 1557)

En 1593, le mathématicien flamand Adriaan Roomen (1561 - 1615, son nom latinisé est Adrien Romanus ou Adrien Romain), propose *à tous les mathématiciens de la terre* la résolution d'une équation du 45^{e} degré. Ce défi sera résolu par le mathématicien français François Viète (1540 - 1603).

Adriaan Roomen
(1561 - 1615)



François Viète
(1540 - 1603)

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12'300x^{39} + 111'150x^{37} - 740'259x^{35} + 3'764'565x^{33} - 14'945'040x^{31} + 46'955'700x^{29} - 117'679'100x^{27} + 236'030'652x^{25} - 378'658'800x^{23} + 483'841'800x^{21} - 488'494'125x^{19} + 384'942'375x^{17} - 232'676'280x^{15} + 105'306'075x^{13} - 34'512'075x^{11} + 7'811'375x^{9} - 1'138'500x^{7} + 95'634x^{5} - 3'795x^{3} + 45x = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

l'équation d'Adriaan Roomen

Cette tradition se poursuit au 17e siècle et se propage jusqu'aux Pays-Bas. Les biographes de Descartes (1596 - 1650) racontent qu'en 1617, Descartes (qui n'a alors que 21 ans), se trouve en garnison à Breda aux Pays-Bas et voit un groupe de gens devant une affiche sur laquelle figure un problème de géométrie rédigé en flamand. Il se fait traduire l'énoncé du problème et le résout le soir même. En 1633, le mathématicien néerlandais Jan Stampioen (1610-1653) propose *à tous les mathématiciens* un problème qui sera résolu par le même René Descartes.

Un nouveau média : la télévision

Faisons un saut temporel jusqu'à l'avènement d'un nouveau média : la télévision. La littérature a eu droit de cité sur les écrans dès les débuts de la télévision. Qu'en est-il des mathématiques ? En dehors des émissions de la télévision scolaire, il faudra attendre fin 1991 pour que la jeune revue *Tangente* lance sur FR3 la première émission de vulgarisation mathématique destinée au grand public. Celle-ci propose chaque semaine aux téléspectateurs une *énigme de la vie ordinaire*, *une friandise mathématique* et une énigme du championnat des jeux mathématiques et logiques. Malheureusement, l'émission, soumise au couperet du sacro-saint audimat, n'aura pas de suite.

En 1993, les mathématiques font également une apparition à la télévision ... japonaise, sous la forme d'une compétition internationale à laquelle participeront trois jeunes français. Le mathématicien hongrois Peter Frankl, qui vit à Tokyo et qui s'intéresse particulièrement à la popularisation des mathématiques, organise le premier *World Junior Brains Championship* (championnat mondial des jeunes cerveaux) sponsorisé par la grande chaîne de télévision japonaise NTV (Nippon TeleVision). Ce championnat mondial, auquel participaient des équipes venues d'Allemagne, d'Espagne, de France, de Hongrie, du Japon, de Chine, de Corée du Sud, de Taïwan, de Russie, et des U.S.A., comportait quatre épreuves.

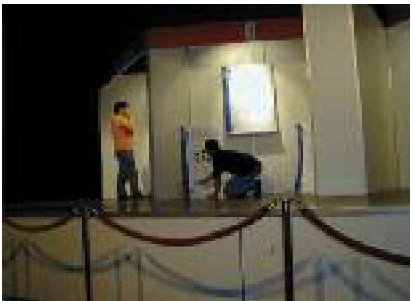
La première épreuve était une épreuve de calcul mental. Seuls des concurrents des quatre pays asiatiques participaient à cette épreuve. Mais la rapidité de calcul de ces jeunes candidats, à qui un boulier avait dû être donné au berceau en même temps qu'un biberon, avait de quoi impressionner les participants non asiatiques ! Avec ce boulier dans la tête leur vitesse de calcul dépassait largement celle qui est nécessaire à un joueur entraîné pour taper les nombres sur le clavier d'une calculatrice ! Il faut préciser que tous les concurrents à cette épreuve, participaient, en plus de leur scolarité *normale*, à un entraînement intensif dans des écoles du soir.

Le championnat comportait également une épreuve de musique (solfège, théorie de la musique et pratique d'un instrument). La troisième épreuve portait sur l'arithmétique et les mathématiques. Les questions étaient de difficultés très inégales, allant de la question facile au problème de type olympiades.

Une dernière épreuve enfin portait sur la mémoire immédiate. Malheureusement, là encore, un audimat insuffisant, mettra un terme à cette expérience.

Le World Puzzle Championship

Cette compétition internationale, organisée par la World Puzzle Federation, est née en 1992 à New York, à l'initiative de Will Shortz, éditeur de jeux américain. Il faut lire ici le mot *puzzle* dans son sens anglo-



Equipe française au World Puzzle Championship

saxon, qui est proche de *casse-tête*. Les jeux proposés sont principalement des jeux de grilles, du type des jeux popularisés en France par Bernard Novelli et Martin Rivière.

La compétition, à laquelle participe une équipe par pays (la France y participe seulement depuis l'an 2000), comprend une douzaine d'épreuves de type *papier-crayon* qui se jouent sur table, suivie d'une demi-finale et d'une finale sur scène, en public.

La coupe Euromath CASIO

Avec *l'année mondiale des mathématiques,* proclamée en l'an 2000, nous avons vu de nombreuses initiatives en faveur de la popularisation des mathématiques. La plus spectaculaire est certainement le **Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques** qui se tient fin mai-début juin à Paris. Cette manifestation extraordinaire vise tous les publics, de l'école maternelle jusqu'aux adultes de tous âges, quel que soit leur niveau d'études et leur formation et explore les connexions des mathématiques avec de nombreux domaines de l'activité humaine.

Dans le cadre de ce Salon, une compétition internationale réunit des participants de nombreux pays. Ces participants sont organisés en équipes multi-âges (de l'école élémentaire jusqu'aux adultes) coopérant pour résoudre les énigmes qui leurs sont proposées (la compétition comprend des épreuves individuelles et des épreuves par équipes). Après une phase qualificative sur table, la finale et la super-finale se déroulent sur une scène devant un public qui est appelé à participer.

En conclusion, nous ne pouvons qu'espérer que puissent se développer de telles mises en scène des jeux mathématiques qui contribuent à améliorer l'image des mathématiques auprès du grand public.

M.C.

Pour en savoir (un peu) plus :
Bibliographie et internaugraphie

Philippe P. A. Henry :
La solution de François Viète au problème d'Adriaan Roomen,

www.worldpuzzle.org

www.cijm.org

Cette brochure a été réalisée par

Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de

Marie José Pestel et de Hervé Lehning

avec le soutien

de la Mairie de Paris et de Sciences sur Seine,
de la Région Ile-de-France,
de l'INRIA et du CNRS.

Elle réunit, par ordre d'entrée en scène, les signatures de

Marie José Pestel
Maryse Durieux
Elisabeth Busser
Michel Charbonnier
Hervé Lehning
François Apéry
Patrice Jeener
Cédric Aubouy
Laurent Pflughaupt
Roland Lehouq
Daniel Justens
Benoît Rittaud
Michèle Audin
Emmanuel Amiot
Arshia Cont
Dominique Souder
Michel Criton

Que ces auteurs soient ici remerciés
pour leur patience, leur gentillesse et leur disponibilité

Réalisation

Patrick Arrivetz
Elsa Godet - www.sciencegraphique.com

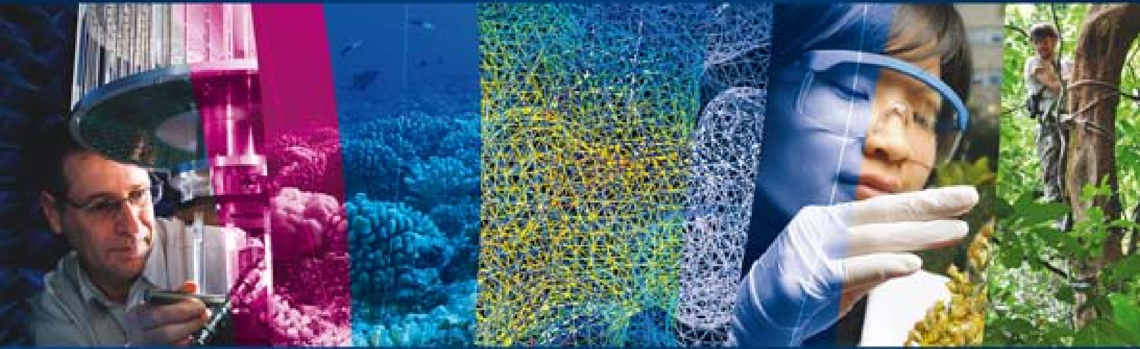
Maquette de couverture et bandeaux

Objet fractal de Jérémie Brunet - www.fractal-3D.com

Impression

FP Impression - 01 39 72 21 72
sur les presses de l'*Imprimerie de Pithiviers*

CNRS | Dépasser les frontières



Le Centre national de la recherche scientifique est un organisme public, placé sous la tutelle du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Pluridisciplinaire, il couvre l'ensemble des domaines scientifiques : les sciences humaines et sociales, la biologie, la physique nucléaire et la physique des particules, les sciences de l'information, l'ingénierie et les systèmes, la physique, les mathématiques, la chimie, les sciences de la Terre et de l'Univers, l'écologie et l'environnement.

Interdisciplinaire, il encourage les échanges entre les disciplines.

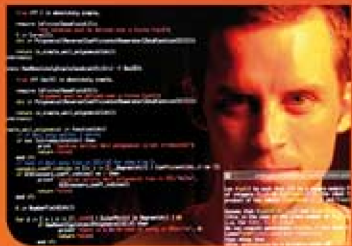
Fort de **34 000 chercheurs, ingénieurs et techniciens,** le CNRS est organisé en **10 instituts** qui orchestrent la politique scientifique et **19 délégations** qui le représentent en région.

Il dispose d'un budget de **3,3 milliards d'euros** environ.

Ses **1 053 laboratoires,** dont près de 95 % en partenariat avec **les universités, les grandes écoles et les autres organismes de recherche,** sont répartis sur l'ensemble du territoire.

Chaque année le CNRS décerne **la médaille d'or,** considérée comme la plus haute distinction scientifique française.

www.cnrs.fr



CIJM

8 rue Bouilloux-Lafont

75015 Paris

tél : 01 40 37 08 95

www.cijm.org