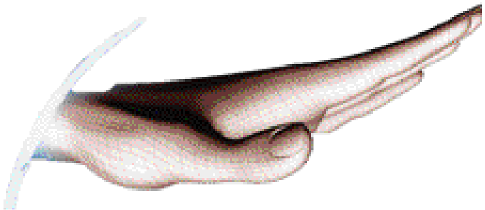
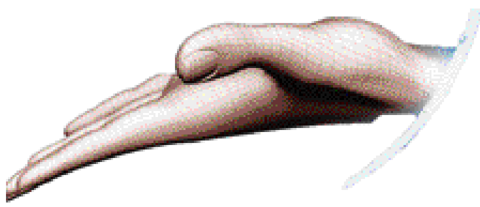
MATHS A VENIR
Express

Comité international des jeux mathématiques





Préface

Claudie Haigneré

Présidente d'Universcience

A quoi servent les mathématiques ? A presque tout : l'arithmétique, l'algèbre, la probabilité, la statistique ou la géométrie sont employés dans l'ingénierie, l'informatique, les assurances, la finance, l'architecture, la biologie, même dans les arts. Pour ne prendre qu'un exemple entre mille, le paiement en ligne sécurisé, avec la cryptographie des données qui s'échangent sur internet, doit tout à la théorie des nombres, une des branches des mathématiques que l'on croyait la moins applicable.

Mais à quoi peuvent me servir les mathématiques ? Nombre d'élèves ont ainsi, un jour, pu interpeller leurs professeurs ou parents, par désespoir ou par provocation. " A quoi va me servir de connaître Pythagore, demandait avec aplomb une jeune fille à l'un des médiateurs scientifiques du Palais de la découverte, moi qui prépare un BEP coiffure ?"

Il n'est pas toujours évident, pour les pédagogues que nous nous efforçons d'être, d'apporter une réponse convaincante à cette question. D'abord, parce qu'il nous faut reconnaître que si les mathématiques se trouvent dans une multitude d'activités, nous ne sommes, en réalité, amenés à n'employer que les rudiments de l'algèbre, pour effectuer des calculs élémentaires. Ensuite, parce que la majorité des adultes ont des mathématiques un souvenir lointain ... et souvent douloureux !

Notre société entretient une relation quasi schizophrène aux mathématiques. On les divinise, on les abhorre. On tient leur connaissance comme la forme d'intelligence supérieure mais on est prompt à railler les "forts en thème," les "matheux," on se console en se persuadant que leurs facultés intellectuelles hors norme ne peuvent que les rendre inaptes à la vraie vie. "Nul en maths, et fier de l'être" pourrait-on résumer.

La configuration actuelle de notre système éducatif ne serait pas étrangère à cette ambivalence. Les mathématiques sont la matière sélective par excellence, le grand test. Leur maîtrise donne accès aux voies royales ; leur incompréhension oriente vers les autres.

L'arithmétique, la géométrie, la probabilité et autres branches des mathématiques seraient autant d'outils complexes, dont nous sommes tous contraints d'étudier minutieusement le mode d'emploi, mais qu'un faible nombre d'individus utilisera réellement. A quoi bon les mathématiques alors ?

Commençons par répondre à cette question par une autre question : les mathématiques sont-elles un outil pratique ? Car avant de trouver une application, les mathématiques sont enseignées comme une discipline. Le terme n'est pas fortuit. Comme toute discipline, les mathématiques requièrent concentration, effort, rigueur. Et plus qu'aucune autre discipline, elles ne peuvent supporter l'à peu près, elles excluent toute paresse intellectuelle dans le raisonnement.

Apprendre les mathématiques, c'est d'abord entraîner son cerveau, tel un muscle, à développer son sens logique et à acquérir un goût pour les défis intellectuels. Sécher devant un problème n'est pas une activité improductive. Il s'agit certes d'une impasse, mais comme quelqu'un qui creuse son trou, le chercheur avance laborieusement. Mais il avance ! Et il finira sans doute par percer le mystère de cette réalité qui lui oppose résistance. Les mathématiques sont une école de patience et de persévérance, d'autant plus utile dans un monde où les vitesses s'accélèrent, où l'on pense à tort qu'il faut aller vite, sans cesse plus vite, pour obtenir à un résultat.

Les mathématiques nous obligent également à adopter l'état d'esprit suivant lequel n'est certain, n'est réel, que ce qui peut se vérifier, par une démonstration. Tout le reste n'est qu'hypothèses, opinions, croyances. L'histoire des théories mathématiques nous enseigne, par ailleurs, que ce qui a pu être démontré par certains peut toujours se trouver remis en question par d'autres. Cette incertitude, ce doute permanent sur la réalité et la relativité des certitudes est au cœur de la discipline. Les mathématiques sont une école d'humilité.

Qui plus est, parce qu'elles demandent de l'audace intellectuelle, les mathématiques libèrent nos forces créatives. Le mathématicien, à la recherche de la solution d'une équation, s'apparente à l'explorateur, qui partant d'un point, chemine sans savoir ce qu'il trouvera au bout du chemin. Il est troublant de lire, dans les biographies et récits des grands génies des mathématiques, que "l'instant Eurêka," fut souvent précédé par des préoccupations d'ordre esthétiques et non scientifiques.

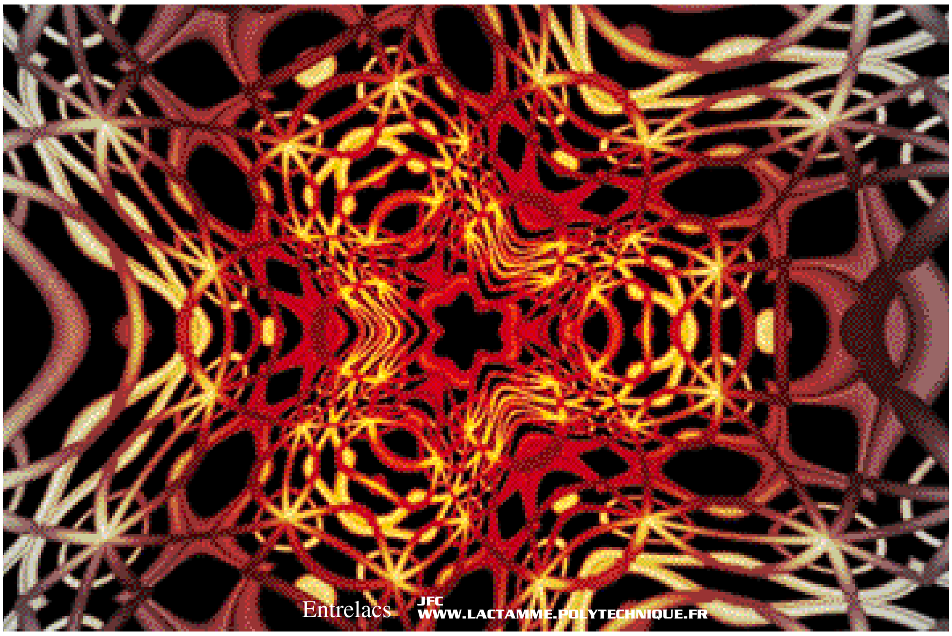
Car au final, les mathématiques sont une activité spirituelle de l'homme, c'est-à-dire une réflexion de l'homme sur le monde qui l'entoure. Le point commun entre une peinture de Matisse, un Lied de Schubert et les équations d'Einstein est un certain rapport au monde, une tentative pour le décrire, une recherche pour le comprendre et l'organiser, pour mettre en valeur son harmonie, pour en sublimer toute la magie.

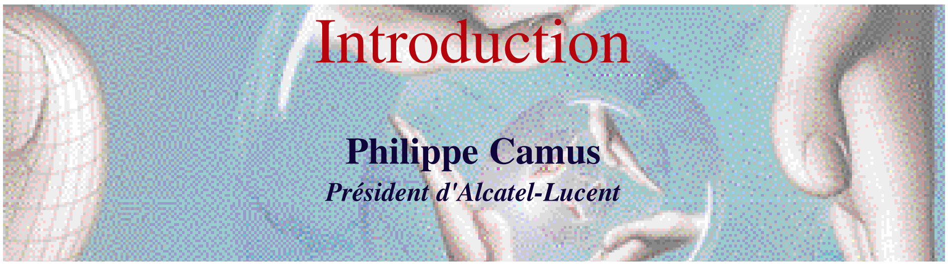
Appréhender les mathématiques comme un outil est donc, non seulement réducteur, mais aussi incorrect. Dès leurs premières années d'apprentissage, les jeunes esprits devraient pouvoir percevoir ce qu'il y a de connaissance, de savoir et d'humanité dans les sciences, comme dans l'art. Je peux, bien sûr, continuer de vivre en l'ignorant mais cette connaissance m'éclaire sur la complexité de notre monde et sur ma propre complexité.

D'où l'importance de dépasser cette approche des mathématiques comme un ensemble de vérités déjà acquises ou une série de problèmes à résoudre, dont on a par ailleurs déjà trouvé la solution. D'où l'urgence d'intégrer les mathématiques et les sciences comme partie intégrante de notre culture générale. Pour franchir ce fossé, pour tenter de rapprocher ces domaines apparemment si distancés, nous avons besoin de "passeurs."

L'un des plus talentueux d'entre eux, le romancier-scientifique Denis Guedj vient de disparaitre récemment. Guedj le passeur n'était pas intéressé par le passé mort ou les problèmes de robinet qui fuit. Son projet a été de rendre les mathématiques mouvantes et émouvantes. Le succès de ses œuvres, au-delà de nos frontières, montre non seulement qu'il y est parvenu, mais découvre aussi notre soif inextinguible de connaissance sur l'odyssée mathématique.

Les mathématiques ne me servent à rien, si ce n'est à mieux comprendre le monde. Les mathématiques me servent à mieux exercer mon métier d'homme.(DG)





Introduction

Philippe Camus

Président d'Alcatel-Lucent

Philippe Camus, normalien, agrégé de physique, ancien co-président d'EADS est actuellement président d'Alcatel-Lucent et co-gérant du groupe Lagardère. Cette personnalité de premier plan parmi les industriels français a accepté de présider le Comité de parrainage de MATHS A VENIR 2009. MATHS A VENIR Express a voulu savoir pourquoi.

Pourquoi un capitaine d'industrie comme vous se sent-il aussi concerné par l'avenir des mathématiques?

Je suis convaincu que les Mathématiques sont une ressource véritablement stratégique ! En effet la plupart des objets ou services de la vie quotidienne n'existeraient pas sans les mathématiques : le téléphone portable, la dépollution des eaux usées, les avions de ligne, internet et ses moteurs de recherche, les prévisions météorologiques, le scanner médical, les produits des banques, les fibres optiques, les cartes de crédit pour ne citer que quelques exemples.

Réciproquement nombre d'avancées théoriques mathématiques proviennent de recherches lancées pour répondre à des problèmes très concrets de la vie courante. La gestion du trafic routier, l'enlèvement des ordures ménagères ou le cryptage des cartes de crédit, par exemple, ont fait progresser certains domaines des mathématiques tels que la théorie des graphes ou la théorie des nombres.

Qu'en est-il de l'état des mathématiques en 2010 ?

Nous constatons une certaine désaffection vis-à-vis des études scientifiques. Certes il y a plus de chercheurs, et plus de moyens qu'en 1987, date du premier colloque Maths A Venir, mais les besoins de la société sont aujourd'hui considérables et se sont élargis à des domaines moins développés en 1987, en particulier à l'informatique, aux sciences du vivant et à l'économie.

L'image des Mathématiques reste toujours un peu la même. Plus inquiétantes, car elles restent un instrument de sélection, que séduisantes, car elles sont un domaine de connaissance, les Mathématiques sont assez facilement prises à partie par l'opinion publique. Le rôle des mathématiques financières dans la crise économique mondiale de 2008 a suscité des critiques très vives. La réalité est plus nuancée. Si certains mathématiciens financiers ont fait preuve d'une certaine irresponsabilité, les fautes sont partagées entre les différents acteurs publics ou privés. Il y a là matière à réflexion sur le bon usage des mathématiques et leur finalité morale.

Quels sont selon vous les défis à relever ?

L'accélération de la pression concurrentielle dans la plupart des secteurs économiques, se caractérise par des rattrapages de plus en plus rapides des écarts de recherche et d'innovation entre acteurs d'un même segment.
Dans ce contexte, l'innovation déterminante est très dépendante des méthodes et résultats de la recherche scientifique. Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans l'évolution de ces méthodes. Cette interdépendance est particulièrement forte là où l'innovation a les conséquences les plus marquées sur la vie de la société, comme les biotechnologies, la communication, l'environnement ou l'énergie.

Les pressions économiques et concurrentielles se rejoignent pour que les activités de recherche et développement se concentrent sur des projets de plus en plus étroitement définis, limitant les champs d'investigation scientifique.

Le potentiel des mathématiques à apporter des innovations est également impacté par la formidable croissance des capacités de calcul aujourd'hui disponibles. Réciproquement ce sont des calculs avec des nombres premiers qui permettent de tester le bon fonctionnement des microprocesseurs. Mais il en va de la recherche appliquée comme de toutes nos activités électroniques : traiter plus d'informations demande plus de temps, plus d'outils, de meilleures méthodes et plus de Mathématiques afin de transformer cette information brute en connaissance exploitable.

Organiser l'information mondiale, la rendre universellement accessible intelligible et exploitable, pour reprendre le *mission statement* de Google, est une entreprise essentiellement mathématique.

Nos systèmes économiques, informatiques et financiers sont totalement dépendants de cœurs mathématiques de plus en plus importants et sophistiqués. Il est significatif que les plus grosses entreprises mondiales en capitalisation (Petrochina, Exxon, Industrial & Commercial Bank of China, China Mobile, Microsoft, Petrobras, BP), comme les françaises (Total, EDF, GDF-Suez, Sanofi-Aventis, BNP Paribas) appartiennent toutes, à des secteurs d'activités dont le développement est hautement dépendant des mathématiques. Même Wal Mart au 6ème rang consacre maintenant de gros moyens scientifiques à l'analyse fine du comportement des clients de ses hypermarchés ce qui est une des applications de plus en plus étendues de la statistique au sens le plus pur du terme.

Il en est de même pour les secteurs qui mobilisent le plus de capital-risque. Dans le domaine des biotechnologies ou du médical par exemple, la progression exponentielle du recueil de données concernant l'observation des comportements des molécules et des cellules conduit actuellement à une vraie révolution technologique : la meilleure analyse quantitative de mécanismes biophysiques ou biochimiques accélère le rythme d'innovation dans la production de nouveaux matériaux biologiques.

La société a-t-elle besoin de plus de compétences en mathématiques ?

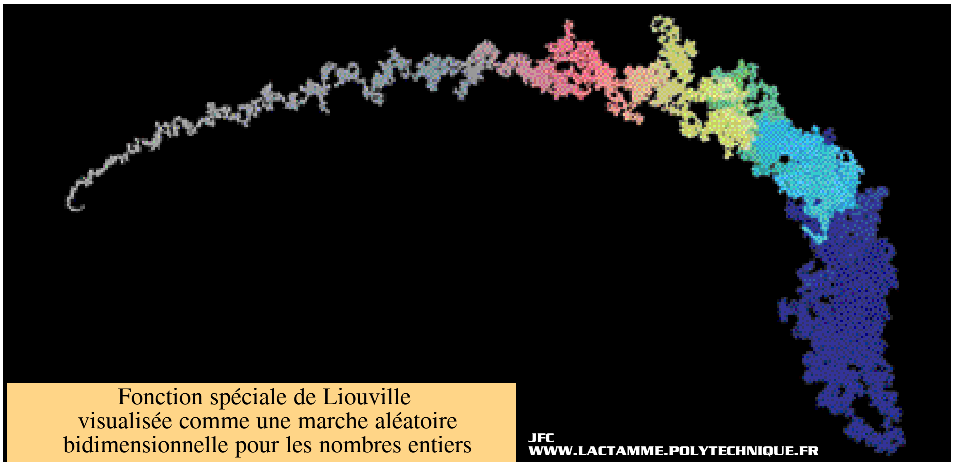
Sans aucun doute, les mathématiques constituent un langage universel, une *Lingua Franca* pour les modèles ou processus d'analyse, d'optimisation et de contrôle et, plus largement, pour toutes les Sciences.

La communication des progrès scientifiques a connu une accélération fulgurante avec Internet. Les travaux les plus réservés sont maintenant *chroniqués*, sans être pour autant compris. Il s'en suit une pression du corps social qui demande à être *informé*, rassuré, protégé. On observe simultanément, l'exigence des consommateurs pour plus de qualité et plus de sécurité. Cela demande des progrès significatifs dans les méthodes de modélisation et de validation de plus en plus complexes qui ne peuvent se faire sans les mathématiques. Les Mathématiques sont contingentes du principe de précaution maintenant inscrit dans la Constitution. Il serait judicieux que ce principe, pourtant contesté d'un strict point de vue scientifique, soit géré plus par des scientifiques et moins par des juges.

C'est ainsi un paradoxe français que de devoir faire face à une sorte de consensus trouvant qu'on accorde trop d'importance à la filière mathématique/scientifique, alors que le besoin de la société en mathématiciens est croissant.

Pour vous, développer les mathématiques est donc une priorité ?

C'est pour moi une évidence. Il faut entretenir notre potentiel scientifique et cela passe par de multiples actions, en particulier la fluidification des transferts de connaissances et la fertilisation croisée entre l'Enseignement, la Recherche et les Entreprises dans le respect des objectifs et des compétences de chacun. Il en va de notre modèle de société et de notre positionnement global dans le concert des nations. Notre avenir, votre avenir passe par les Mathématiques.

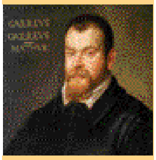


Fonction spéciale de Liouville
visualisée comme une marche aléatoire
bidimensionnelle pour les nombres entiers

L'effet papillon :
la science est-elle désormais incapable de prévoir l'avenir ?

Etienne Ghys
ENS Lyon, CNRS


Aristote


Galilée


Copernic


Képler


Huygens


Newton

Depuis Aristote, au IVe siècle avant J. C., et jusqu'à Galilée, la physique du mouvement est basée sur l'observation *naturelle* des phénomènes : après un certain temps, un système physique en mouvement tend à se placer dans une position d'équilibre. Les corps en mouvement tendent vers le repos .

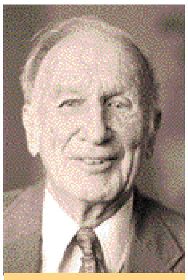
Puis viendront des hommes de génie, au XVIe siècle, Galilée, bien sûr, mais aussi Copernic, Képler pour remettre en cause plusieurs siècles de vérité *aristotélicienne* en imaginant que sans les frottements qui ralentissent le mouvement, celui-ci se poursuivrait indéfiniment de façon périodique. Huygens, successeur de Galilée et prédécesseur de Newton, imagine alors les premières pendules pour mesurer le temps ; il *suffit* de lutter contre les frottements pour aider le pendule à garder son mouvement.

Et pour plus de trois siècles, la physique du mouvement semble régie par un dogme : après un certain temps un système physique en mouvement, si on lui fournit une énergie suffisante pour compenser les frottements, finit par osciller et trouver son régime permanent qui est périodique. La physique jusqu'au début du XXe siècle est déterministe, tout se calcule, tout se prédit.


Poincaré


Hadamard

Cependant, dès la fin du XIXe siècle, Hadamard et Poincaré, dans le contexte de la mécanique céleste, s'attaquent au problème de la stabilité des mouvements et dans *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré déclare déjà bien en avance sur son temps : "*Un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et, non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées.* "


Lorenz

Le génie de Lorenz est d'introduire ce concept de sensibilité aux conditions initiales ou de chaos et de l'illustrer sur un *modèle réduit* hypersimplifié avec des équations qui régissent le climat. Il donne en 1973 une conférence dont le titre résume à merveille cette idée "*Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer un ouragan au Texas ?* ".
L'effet papillon était né.

Grâce à Poincaré, Hadamard et Lorenz, notre conception du déterminisme a changé. Nous savons que le présent détermine le futur mais nous savons également qu'une connaissance imparfaite du présent, comme c'est presque toujours le cas, rend la détermination du futur illusoire.

Lorenz a écrit : " *Si un battement d'ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan , la même chose est vraie pour tous les autres battements du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des innombrables créatures plus puissantes comme les hommes par exemple.* "

La sensibilité aux conditions initiales semble empêcher le mouvement de trouver un régime permanent, il devient erratique, imprévisible et chaotique. Alors, si on ne peut plus prévoir le futur, que vont faire le mathématicien et le physicien? On a trop souvent limité la pensée de Lorenz à cette idée : il y a une quantité immense de petites causes et chacune peut être responsable de grands effets.

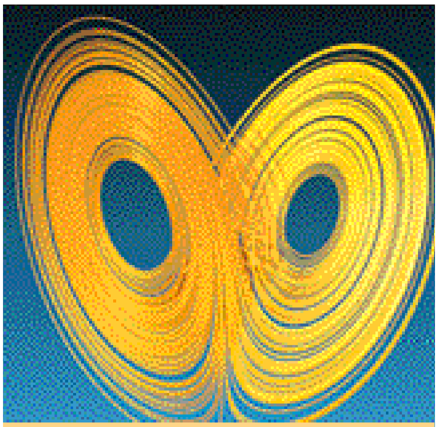
Mais une idée essentielle de Lorenz, moins bien comprise, réintroduit une forme de prévision possible dans le futur :
" *J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent.*"

Cette idée de Lorenz ouvre une voie aux scientifiques pour dire quelque chose sur ce qui se passera dans le futur. Les trajectoires particulières ne sont pas prévisibles, mais il est possible en utilisant probabilité et indices de confiance, de prévoir des fréquences et des moyennes.

En amont un travail de statisticiens s'impose, il faut faire un grand nombre de relevés et des représentations des résultats, des calculs de fourchettes, de sondages et constater qu'une idée forte se dégage : l'aléa du mouvement est lui insensible aux conditions initiales.

En météorologie il ne s'agirait plus de prédire s'il fera beau sur la place Saint Sulpice fin mai 2010 mais il devrait être possible de prévoir des moyennes, des fréquences d'évènements météorologiques, avec une bonne précision, en un endroit donné, sur une longue période de temps. Ce type de prédiction est plus modeste, mais il est souvent tout à fait utile.

Le travail des mathématiciens contemporains, et sans doute de demain, est de démontrer cette intuition de Lorenz pour les grands systèmes dynamiques que l'on rencontre dans la nature. Du chemin reste à faire puisque les scientifiques d'aujourd'hui se disputent encore pour savoir si le mouvement de l'atmosphère est sensible aux conditions initiales, car les vraies équations qui régissent le climat sont bien plus complexes que le modèle réduit qui a amené Lorenz à mettre en évidence l'effet papillon.


Attracteur de Lorenz

Il semble donc, qu'en recentrant les ambitions autour de questions de statistiques, même dans un système déterministe, on peut préserver un caractère prédictif à la Science. Du travail pour tous pour les années à venir ! Car bien au delà de l'effet papillon, les idées engendrées et le concept de chaos, né il y a un siècle en mécanique céleste, enrichi de l'exemple de la turbulence dans l'atmosphère, ont envahi une bonne partie des mathématiques. Comme souvent en mathématiques, un exemple est devenu le germe d'une théorie dont l'ambition est de comprendre un champ beaucoup plus vaste qu'on ne le pensait initialement. La théorie des systèmes dynamiques ne se limite pas à la description de l'atmosphère, elle envahit une bonne partie des mathématiques, jusqu'à la théorie des nombres, qui paraît si souvent immuable et statique.

Poincaré nous avait prévenus "*Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes.*" Sous le mot chaos se cache désormais des significations diverses bien plus que Poincaré ou Lorenz n'auraient pu l'imaginer.

E.G.

Pour en savoir (un peu) plus

Article illustré, **Etienne Ghys** sur
http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html
Article, **Etienne. Ghys** sur
http://images.math.cnrs.fr/L-effet-papillon.html

Mathématiques et étude du climat

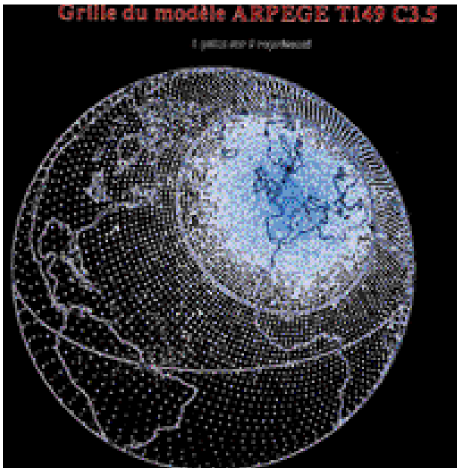
Michaël Ghil
Directeur
du Centre d'Enseignement et de Recherches sur l'Environnement et de la Société (CERES-ERTI) de l'Ecole Normale Supérieure

Histoire des relations entre science du climat et mathématiques.

Le système climatique est difficile à étudier car sa modélisation doit tenir compte des interactions entre l'atmosphère, l'océan, la surface de la terre, les cycles biogéochimiques, la végétation et les activités de l'homme. Chacun de ces sous-systèmes a ses propres échelles d'espace et de temps, ainsi que des processus spécifiques qui le régissent. Par exemple, les tourbillons dans l'océan sont à peu près dix fois plus petits, mais aussi dix fois plus lents, que les tempêtes dans l'atmosphère.

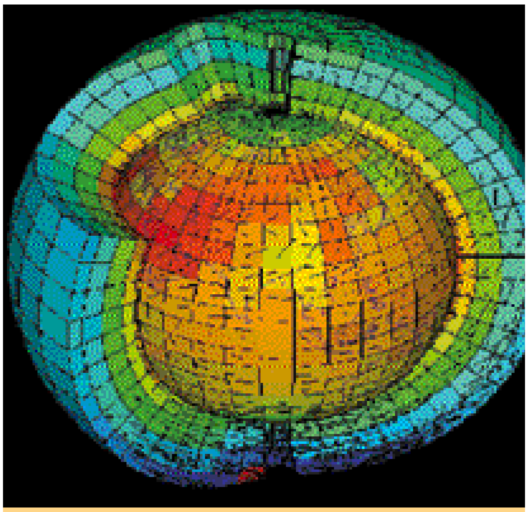
Formuler des modèles, analyser la dynamique qui les caractérise et -en s'appuyant sur ces modèles et les résultats de leur analyse, ainsi que sur celle des données-, prédire l'évolution future du climat n'est donc pas aisé.

Aucun modèle ne peut incorporer tous les processus climatiques, ni résou-dre toutes les échelles de temps et d'espace. Certains veulent s'en approcher en construisant un modèle de l'ensemble du système climatique -avec tous les détails que nous en connaissons déjà et toutes ses échelles-, mais il est difficile de comprendre le fonctionnement d'un modèle aussi complexe. Edward Lorenz affirmait qu'un modèle qui décrirait de façon exacte l'évolution de l'atmosphère ne présenterait pas d'intérêt, car il serait aussi difficile à comprendre que l'atmosphère elle-même. Cette affirmation est en partie inexacte, car un tel modèle permettrait au moins de modifier certains paramètres de manière systématique, chose que nous ne pouvons, ou au moins ne devrions pas, faire pour l'atmosphère elle-même.



Grille du modèle prévisionnel ARPEGE utilisé par Météo-France

Une voie complémentaire de la construction du modèle unique le plus complet qui soit est celle de la *hiérarchie de modèles*. Nous utilisons, de manière de plus en plus systématique, des modèles multiples, classés des plus simples -ou *modèles-jouets*- aux plus compliqués, les modèles dits de circulation générale (*global circulation models* ou GCM en anglais). Ces modèles sont tous formulés mathématiquement par des relations entre différentes grandeurs sous la forme de systèmes d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles.



Modèle climatique
au maillage tridimentionnel

Les modèles conceptuels, ou *modèles-jouets*, servent à examiner les principes fondamentaux du fonctionnement du climat ; ils utilisent typiquement des équations différentielles ordinaires. Leurs résultats permettent de construire et d'étudier des modèles intermédiaires, exprimés souvent en tant que systèmes d'équations aux dérivées partielles, en une ou deux variables spatiales (latitude et altitude, ou latitude et longitude). Si les principes simples qui sont le fondement des *modèles-jouets* sont vérifiés par ces modèles intermédiaires, on peut s'aventurer à l'étude systématique des GCM les plus complets et détaillés qui soient, et à leur confrontation avec les données.

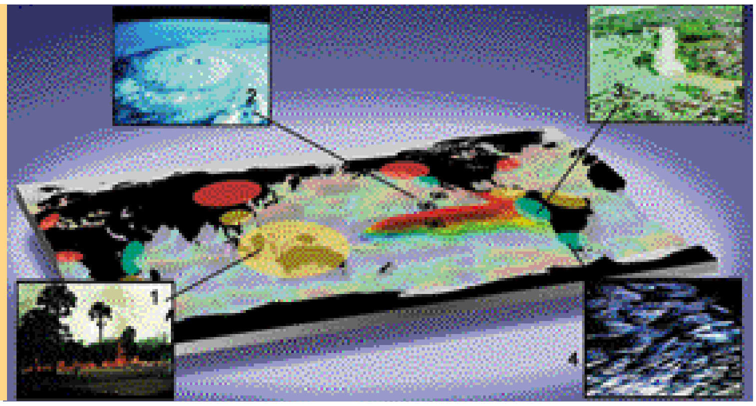
Pour rédiger son dernier rapport, qui a été couronné du Prix Nobel de la Paix en 2008, le Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat (GIEC) a utilisé une vingtaine de GCM des mieux testés et plus fiables qui soient. En utilisant ces modèles, ainsi que des inférences basées sur des études sophistiquées de données, le GIEC est parvenu à établir une fourchette de prévisions climatiques pour le reste de ce siècle, selon l'ampleur des émissions humaines de gaz à effet de serre, dont le dioxyde de carbone. Il faut compren-dre que chacun de ces modèles est basé sur les meilleures connaissances physiques, chimiques et biologiques disponibles sur le climat : des aspects empiriques interviennent nécessairement, plus qu'en physique théorique, mais beaucoup moins, par exemple, que dans des modèles économiques.

Vu cette part d'empirisme, ainsi que la complexité des GCM, il est très difficile de réduire les fourchettes d'incertitude. En effet, les prévisions établies grâce à tel modèle peuvent être satisfaisantes pour un élément climatique et moins satisfaisantes pour un autre. Ainsi, aucun des modèles utilisés dans le dernier rapport du GIEC ne permet de prévoir avec précision l'évolution de la variabilité climatique interannuelle due au phénomène couplé océan-atmosphère nommé

El Niño-Oscillation Australe (ENSO en anglais) ; ENSO domine cette variabilité dans l'Océan Pacifique tropical et l'affecte sur une grande partie du globe.

Trajectoire et impact d'El Niño

simulation CNES

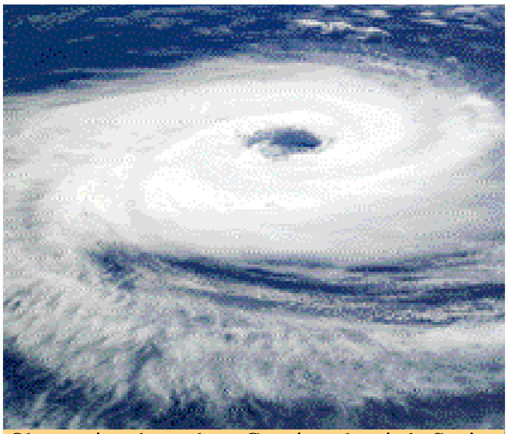


Le caractère chaotique du climat.

Les incertitudes dans la prévision du climat à l'échéance de plusieurs décennies résultent donc essentiellement de deux sources complémentaires : les imperfections dans la formulation des modèles, d'un côté, et dans la compréhension de leur comportement, de l'autre. Pour mieux avancer dans la compréhension et la prévision des phénomènes climatiques, il ne faut pas confondre les deux. Le premier de ces deux problèmes demande une meilleure connaissance des phénomènes physiques et autres qui interviennent. Le deuxième demande une meilleure maîtrise des méthodes mathématiques pour l'étude des systèmes non linéaires et complexes.

Les études de Lorenz et de ses émules ont bien démontré, depuis près d'un demi-siècle, qu'un obstacle important à la prévision du temps est le caractère chaotique de l'atmosphère, et non seulement l'imperfection des modèles numériques -apparentés aux *GCM*-, qu'on utilise pour cette prévision. A des échelles de temps plus longues, allant des dizaines de jours aux dizaines d'années, il ne s'agit plus seulement de l'atmosphère, mais du système couplé océan-atmosphère. Ce système est encore plus riche et -non linéaire- que l'atmosphère elle-même. Certaines irrégularités dans le comportement de ce système couplé -comme les années moins chaudes durant une décennie très chaude, ou vice-versa-, sont effectivement dues au chaos déterministe : il s'agit de l'interaction non-linéaire de quelques degrés de liberté les plus énergétiques, comme les jets atmosphériques ou les courants océaniques les plus puissants. Mais, à ces échelles de temps, le temps lui-même devient une perturbation aléatoire ; les ingénieurs disent que l*e signal de l'un est le bruit de l'autre*. Pour le prévisionniste, le signal est le temps et le bruit sont les évolutions des nuages isolés ; pour le dynamicien du climat, le signal est la variabilité d'ENSO ou de la circulation océanique et le bruit est le temps.

Le rôle futur des mathématiques dans l'étude du climat.



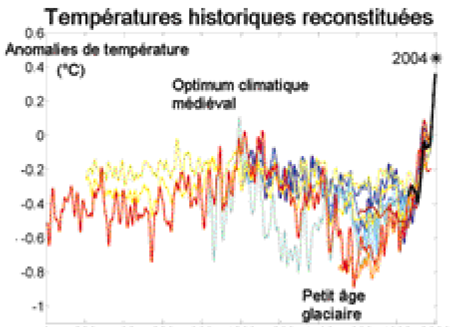
Observation du cyclone Catarina depuis la Station Spatiale Internationale le 26 mars 2004
NASA

En tant que chercheur j'ai vécu des deux côtés de la frontière qui sépare -encore et souvent, dans le monde universitaire-, les mathématiciens des autres scientifiques. Il me semble que l'étude des systèmes dynamiques est souvent perçue par les climatologues comme une abstraction sans intérêt. Mais tout pendule sujet à des non-linéarités est un système dynamique très simple avec des comportements pourtant très compliqués, selon la valeur de sa masse ou de sa longueur. Ce n'est pas parce que le système climatique est tellement plus compliqué qu'il faut penser que son comportement est nécessairement plus simple. Le chaos déterministe, tout autant que les processus encore plus subtils qui combinent l'aléatoire avec le non linéaire, est solidement ancré désormais dans la perception -et la prévision- de la réalité physique, chimique, biologique et même économique.

Certaines théories mathématiques -un exemple archiconnu est celui de la théorie des nombres-, semblaient éloignées de ce qui est perceptible par l'expérience jusqu'à ce que nous disposions d'outils d'observation ou de calcul numérique adéquats. Aujourd'hui, on ne peut pas accéder à son compte bancaire en ligne sans que la théorie des nombres n'intervienne.

Il en va ainsi des rapports entre la théorie des systèmes dynamiques et celle du climat également. Le développement des méthodes numériques et des ordinateurs a permis de suivre les trajectoires chaotiques de modèles de plus en plus réalistes de l'atmosphère, de l'océan et du système climatique couplé. Les contributions fondamentales à la *théorie et pratique du chaos*, celles de Stephen Smale, d'Edward Lorenz ou de David Ruelle et Floris Takens, sont de natures différentes, mais tellement complémentaires : purement mathématiques pour l'un, météorologiques et numériques ou physiques pour les autres.

Il convient pourtant de noter que les incertitudes qui pèsent sur les prévisions climatiques n'ont pas diminué au cours des trente dernières années. Il faut donc les considérer avec scepticisme : le scepticisme en science n'est pas une injure, c'est un compliment. J'enseigne donc à mes élèves l'esprit critique, pour qu'ils se forgent leur propre opinion sur toute chose, y compris le discours des têtes de file du GIEC. J'estime cependant que les conclusions essentielles du GIEC sont correctes : le climat se réchauffe, en moyenne sur le dernier siècle, et l'activité humaine y contribue dans une mesure tout à fait significative. C'est un fait scientifique -établi dans les règles de l'art-, mais ce n'est pas non plus une vérité révélée, comme veulent le faire croire certains de mes collègues.



Le problème des prévisions climatiques à moyen terme reste très difficile. Le grand mathématicien John von Neumann a convoqué, peu avant sa mort prématurée, un atelier à Princeton sur ce sujet. Il a évoqué trois problèmes : celui de la prévision à court terme -ou de la sensibilité aux données initiales-, qui est le plus simple des trois ; celui du comportement asymptotique d'un système, à des échelles de temps tendant vers l'infini ; et celui des temps intermédiaires, où les données initiales et le comportement asymptotique jouent tous les deux un rôle. La prévision du climat à moyen terme est exactement dans ce cas de figure, qui est donc le problème le plus difficile à appréhender.

Plusieurs grandes personnalités dans l'étude du climat, dont notamment Jules Charney et Edward Lorenz, possédaient une importante formation en mathématiques. Actuellement, de nombreuses thèses ne consistent qu'en l'analyse d'une simulation obtenue à l'aide d'un ordinateur ou d'un jeu de données satellitaires.

En conclusion, j'aimerais bien être témoin d'une renaissance de l'application des méthodes mathématiques les plus avancées à l'étude du climat. L'étude rigoureuse de la robustesse des résultats de modèles très complexes est un champ fascinant avec des retombées importantes à d'autres domaines, tels que les modèles biologiques ou économiques.

M. G.

Pour en savoir (un peu) plus

Site CERES-ERTI,
http://www.environnement.ens.fr/

M. Ghil : *Hilbert problems for the geosciences in the 21st century*,
2001, Nonlin. Proc. Geophys., vol. 8, pages 211–222.

M. Ghil : *Natural climate variability*,
2002, in Encyclopedia of Global Environmental Change, T. Munn (Ed.), Vol. 1,
J. Wiley & Sons, Chichester/New York, pp. 544–549.

E. N. Lorenz : *The Essence of Chaos*,
1993, Univ. of Washington Press, Seattle, 227 pages.

Mathématiques et biologie

Bruno Goffinet
Chef du département Mathématiques et Informatique Appliquées, INRA

Les enjeux de la biologie sont fascinants et les mathématiques sont de plus en plus nécessaires aussi bien pour proposer des concepts qui permettent de modéliser les processus extrêmement complexes qui régissent le vivant que pour analyser le nombre considérable de données que produit aujourd'hui la biologie. Au-delà de la compréhension du vivant, il s'agit d'être capable de prédire le comportement de systèmes vivants dans certains environnements comme par exemple, la résistance à la sécheresse d'un nouveau génotype (nouvelle variété) de blé.

Les mathématiques n'ont commencé à jouer un rôle décisif dans la biologie que tardivement. C'est d'abord avec Fischer que la variabilité des résultats d'expérience et la diversité entre les individus ont trouvé un cadre de formalisation pertinent avec les statistiques et les probabilités. La génétique quantitative, la génétique des populations, et l'analyse des résultats expérimentaux en agronomie ont même été des moteurs essentiels du développement des statistiques au début du 20ème siècle. En parallèle, les modèles de type *prédateur-proie*, à base d'équations différentielles ont permis de poser les bases de l'écologie quantitative. Ce qui est nouveau aujourd'hui c'est la formidable croissance des données, associée avec celle des moyens de calcul, qui rend possible de modéliser les processus intégrant des niveaux d'échelles multiples aussi bien sur le plan spatial, que temporel ou des niveaux d'organisation de la cellule à l'individu, puis à la communauté d'individus. La construction de ces modèles offre de nouveaux défis pour les mathématiques et l'informatique.

Avec l'écologie sont apparus des concepts opérationnels comme la plasticité, la compétition, etc... Un enjeu est donc de construire avec les biologistes qui travaillent à l'échelle de la cellule des concepts du même type, et de les confronter à la réalité. Il s'agit bien de concepts qui mobilisent des mathématiques, de l'informatique ou de la physique. On peut penser par exemple que les notions d'optimisation sous contrainte ou de *feed-back*, dans un cadre d'objets en interactions, devraient permettre de *mathématiser* la biologie et ainsi conduire à des lois générales de fonctionnement. On peut arriver ainsi à des problématiques génériques irriguant de nombreuses questions biologiques.

Une question en particulier est l'identification de l'ensemble d'échelles pertinentes pour travailler sur un problème. Il ne suffit pas d'affirmer que l'on peut intégrer les échelles inférieures d'organisation du vivant pour répondre à une question à une échelle donnée, ou au contraire d'être trop prudent en refusant systématiquement ce que l'on appelle des *usines à gaz*, mais de se donner une méthode pour savoir jusqu'où il est pertinent de modéliser, en fonction des données disponibles, des connaissances sur les processus, de l'objectif du modèle, etc. A quel point l'intégration des connaissances à l'échelle n-1 est elle nécessaire si l'on veut prédire à l'échelle n au-delà du domaine de validité des modèles statistiques basés sur l'observation ?

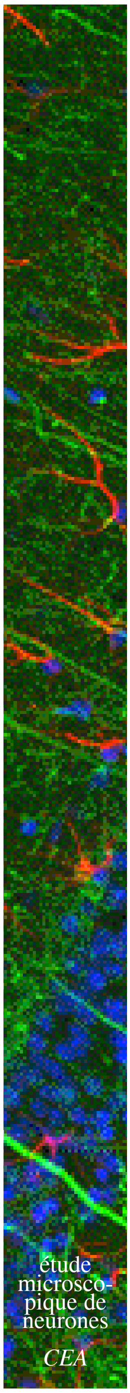
Un modèle complexe peut avoir un comportement chaotique (au sens où un changement minime dans un paramètre ou donnée d'entrée conduit à des résultats très différents), mais avoir un comportement beaucoup plus stable et prédictif si l'on s'intéresse à des résultats synthétiques. Par exemple, la prédiction de la position précise d'un cyclone par des modèles météorologiques est très instable, mais le nombre de cyclones est une quantité relativement prédictible.

Un exemple de problématique biologique mobilisant des mathématiques : les gènes et leur régulation.

Chaque cellule possède un bagage génétique contenu en grande partie dans son ADN qui porte une quantité considérable d'informations. Les gènes qui se trouvent sur l'ADN sont traduits et conduisent à la synthèse de protéines qui jouent un rôle décisif dans le métabolisme des cellules. En effet la capacité de ces protéines à accélérer ou catalyser des réactions biochimiques va permettre à la cellule de produire tel ou tel métabolite, d'être capable d'exploiter telle ou telle molécule pour pourvoir à ses besoins énergétiques et donc de s'adapter à des conditions extérieures changeantes.

Pour analyser ces phénomènes, les mathématiques jouent un rôle à de multiples niveaux. Tout d'abord, elles offrent une modélisation de l'ADN pour identifier les zones codantes pour des gènes. L'ADN est une suite de nucléotides de 4 types, A (pour la base azotée Adénine), C (Cytosine), G (Guanine) et T (Thymine). En théorie des graphes, on peut modéliser la suite des lettres (A, C, G et T) par des chaînes de Markov plus ou moins complexes. Ceci a conduit à des méthodes parfois sophistiquées qui s'avèrent extrêmement efficaces.

Après cela, on dispose avec les puces à ADN d'un indicateur de l'intensité de l'expression des gènes qui conduit à la synthèse des protéines, à un moment donné de la vie de la cellule et le cas échéant sous différentes conditions expérimentales. L'évolution dans le temps


étude microscopique de neurones

CEA

de ces quantités permet d'inférer des liens entre ces gènes à l'aide de méthodes statistiques d'analyse de la co-variation entre ces quantités.

Ayant identifié des réseaux de gènes, l'enjeu devient alors d'analyser leurs fonctionnements. On peut construire un graphe qui réunit les différents gènes impliqués dans un processus et modéliser les flux entre ces nœuds du réseau à partir d'un système d'équations différentielles. La difficulté vient alors de la taille qui peut être énorme de ces systèmes et des informations très incomplètes sur le réseau. L'enjeu est d'en tirer cependant des connaissances profondes sur le comportement du système en terme de cycles, de contrôle, de rétroaction, etc. Des techniques de discrétisation du processus peuvent s'avérer pertinentes. D'autre part, les méthodes à la frontière des statistiques et de l'informatique pour extraire et gérer des connaissances à partir d'un nombre considérable de données de nature hétérogène (données de flux, d'expression des gènes, connaissances expertes, résultats d'expérimentations spécifiques, etc.) se développent et apparaissent cruciales pour répondre aux enjeux.

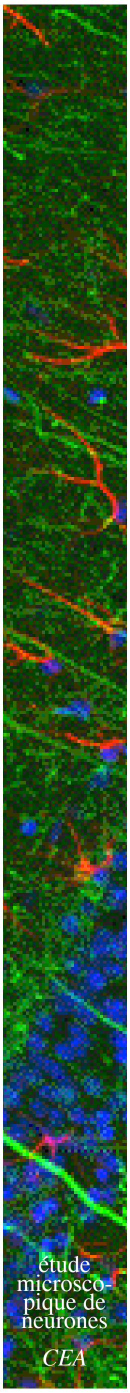
Des enjeux de recherche pour les mathématiques.

Plusieurs fronts de recherche s'ouvrent actuellement face à l'accroissement du nombre de données.

Le premier est lié à la massification de la production actuelle des connaissances au niveau mondial et aux difficultés qu'il y a à les exploiter de façon systématique et efficace. Le deuxième est lié aux possibilités technologiques nouvelles d'observation et de récolte des données à des échelles de résolution spatiale et temporelle sans précédent. Le troisième est le fruit des deux premiers et concerne l'intégration dite verticale, où il s'agit de combiner/explorer/expliquer des données diverses acquises sur un même objet mais à des échelles différentes.

Sur le plan de la recherche, le premier front conduit à poursuivre le développement de méthodes et d'algorithmes pour extraire automatiquement des connaissances à partir des données, en particulier celles issues de la littérature scientifique.

Le second front de recherche touche lui à de nombreux domaines et constitue un enjeu central dans l'acquisition de nouvelles connaissances. L'exemple emblématique est celui de l'imagerie 3D ou 4D, qui constitue clairement à ce jour l'un des outils clés pour améliorer la compréhension de l'organisation des mécanismes cellulaires. Des enjeux aussi importants se retrouvent au niveau de l'acquisition de données à l'échelle des paysages pour citer une autre facette du problème. Tout cela introduit des besoins très importants de *modélisation à façon* par ces nouveaux moyens d'acquisitions, qui conduisent à examiner et développer des modèles entremêlant aspects biologiques, physiques et biophysiques.


étude microscopique de neurones
CEA

Le troisième front est en quelque sorte le fruit des deux précédents et constitue sans doute l'un des enjeux les plus difficiles à relever car il nécessite de combiner des objets/méthodes mathématiques différents et de collaborer activement entre plusieurs disciplines comme l'intelligence artificielle, l'informatique, les statistiques, l'automatique, etc.

Bien au-delà de la gestion, du stockage des données (qui pose bien sûr des problèmes d'ingénierie importants) et de l'accès à des ressources informatiques (grilles de calcul et de données), il faut souligner que l'ensemble de ces fronts de recherche, et spécifiquement le dernier, renouvelle profondément la pratique actuelle des différentes disciplines, en leur adressant non seulement un nombre important de nouvelles questions (conséquence des spécificités des systèmes biologiques), mais aussi en les obligeant à collaborer davantage ensemble pour traiter les différentes facettes des problèmes de façon synergique et non concurrente.

Quelques exemples pris dans les très nombreux domaines où les mathématiques développent des concepts et des méthodes pertinents pour les enjeux de la biologie.

- Meta analyse

Dans de nombreuses situations, en écologie en particulier, les chercheurs accumulent des données expérimentales diverses et hétérogènes, à des degrés de résolution variés. Il s'agit de les organiser, de les analyser, de les modéliser pour en extraire des relations signifiantes et structurantes. Pour exploiter pleinement de tels modèles, il y a souvent besoin de les mettre en relation avec des données ou méta données à une échelle plus large dans l'espace ou dans le temps : données ou modèles météo, cartographies diverses et variées, etc. Il faut recueillir ces données et les adapter aux objectifs. C'est à ce niveau que se situe l'intérêt potentiel des générateurs de climat ou de paysages. D'autre part, il est souvent envisageable d'utiliser des données issues de multiples et diverses expérimentations déjà effectuées sur des problématiques scientifiques voisines, pour analyser une nouvelle problématique scientifique. Il s'agit alors de faire une *Meta analyse* de ces informations, avec des difficultés liées à leur potentielle grande hétérogénéité.

- Méta modélisation et calculs intensifs

Les différentes disciplines des mathématiques et de l'informatique envisagent la problématique de l'analyse de *grands modèles* avec des méthodologies variées : apprentissage de structures, émergence de propriétés à différentes échelles, agrégation de variables, réduction de modèles par méthodes de régression, à l'aide de systèmes intégro-différentiels, etc. Ces différentes méthodologies visent à se donner une représentation manipulable d'un *grand modèle* de façon à pouvoir d'une part en analyser le comportement et d'autre part rendre les calculs praticables pour comparer des scénarios, optimiser des variables de décision, ou prédire en tenant compte des incertitudes des entrées des modèles. Cet aspect *calculatoire* est à rapprocher des problématiques numériques et calculatoires pour des simulations intensives, posant aussi les enjeux de parallélisation des calculs.

- *Méthodes d'inférence des systèmes dynamiques*

Les nouvelles technologies et moyens d'acquisition de données conduisent de plus en plus à observer les phases transitoires des systèmes biologiques/agro-écologiques. Cela va de l'observation à toutes les échelles de l'adaptation d'une population de cellules bactériennes à une modification de son environnement, en passant par les problèmes du développement de l'embryon à celle des plantes. Dans ce contexte, les questions de l'exploitation systématique des données posent des problèmes qui sont à la frontière entre les statistiques (fonctionnelles) et l'automatique (identification/estimation de paramètres). Au delà des aspects touchant à l'inférence de modèle, il s'agit bien ici de développer des outils permettant d'intégrer les aspects temporels dans l'analyse des données.

- *Méthodes de simulation stochastique pour l'inférence des paramètres des modèles*

Les modélisations statistiques réunissant des données multiples à des échelles et à des précisions variées, utilisent de plus en plus des modèles avec un très grand nombre de paramètres où le problème à résoudre est en grande partie algorithmique. Les méthodes ABC (pour Approximate Bayesian Computing) apparaissent comme extrêmement prometteuses pour l'inférence et les tests dans le cadre des modèles pour lesquels la vraisemblance n'est pas accessible. Elles sont apparues dans certains domaines (génétique des populations) il y a quelques années, et commencent à investir d'autres domaines (épidémiologie par exemple). Les méthodes particulaires constituent une autre alternative pour l'estimation dans le cadre des modèles multi-échelles. Ces deux classes de méthodes reposent sur la mise en oeuvre de simulations intensives.

- *Optimisation de modèles complexes*

La conception de stratégies de gestion innovantes pour les agroécosystèmes implique la résolution de problèmes d'optimisation multicritères dans l'incertain sur la base de modèles complexes. Il s'agit là d'un domaine méthodologique en pleine expansion, fédérant les approches informatiques et mathématiques.

- *Validation des modèles*

La validation pose à la fois un enjeu théorique et un enjeu pratique car il nécessite de disposer de jeux de données sur lesquels on confronte la prédiction aux données réelles. Il est courant en statistique de réaliser des exercices de validation, soit sur des données synthétiques (données simulées selon un certain modèle), soit sur une partie du jeu de données écartée de la phase d'estimation. Il s'agit là de validation interne, dans le sens où on reste à l'intérieur d'un problème donné. Plus difficile est la validation externe, lorsqu'on cherche à utiliser un modèle dans un contexte différent de celui pour lequel il a été construit. Notons que c'est malheureusement dans ce cadre là que seront utilisés bon nombre de modèles qui servent en effet à l'aide à la décision, bien que chaque situation ait ses singularités propres. La question de la validation rejoint donc la question de la robustesse du modèle et donc la question de la connaissance du comportement qualitatif des modèles. Remarquons également que très souvent ce sont les modèles *simples* ayant peu de paramètres qui ont les meilleures prédictions en extrapolation. Dans ce sens la modélisation dans un objectif de prédiction peut se révéler différente en pratique d'une modélisation fine cherchant à représenter fidèlement l'ensemble des processus impliqués.

Conclusion.

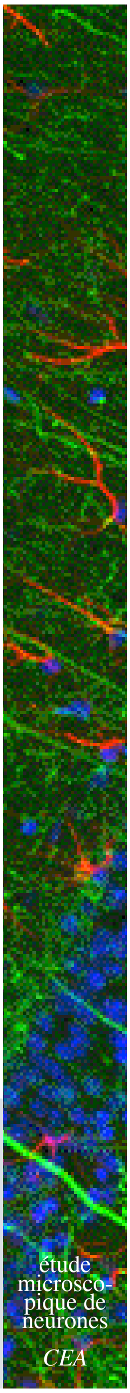
Face aux enjeux de la biologie, il apparaît clairement qu'il faut pouvoir mobiliser des méthodologies et des compétences multiples. Il est donc particulièrement important que les mathématiciens impliqués dans ces problématiques aient une culture mathématique plus large et que les diverses communautés scientifiques en mathématiques et en informatique communiquent entre elles. Il est essentiel aussi que les biologistes aient un bagage suffisant pour communiquer avec les mathématiciens car de nombreuses avancées ne se feront qu'à l'interface entre les champs disciplinaires.

B. G.

Pour en savoir (un peu) plus

http://images.math.cnrs.fr/Des-mathematiques-dans-nos.html

J.D. Murray : *Mathematical Biology.* Biomathematics Texts. Volume 19. Springer
G. Israel : *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisaton du réel*. Seuil.



étude microscopique de neurones
CEA

L'imagerie médicale : une affaire de mathématiques ?

Jean-Louis Coatrieux
Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, Inserm U642, Université de Rennes 1, France

L'imagerie médicale nous est désormais familière. Quelle part réserve-t-elle aux mathématiques, à la physique, l'électronique, l'informatique, voire même à la chimie ? Que nous apprendra-t-elle demain sur nous-mêmes?

Explorer l'intérieur du corps humain : un rêve devenu réalité.

Léonard De Vinci avait, comme Vesale et ses célèbres Ecorchés, cette passion de *connaître et comprendre la nature humaine, savoir ce qu'il y avait à l'intérieur de nos corps* et, il n'hésitait pas pour cela à braver l'interdiction de la dissection par l'église (Figure 1). Il a fallu cependant attendre plus de quatre siècles, et Wilhelm Roentgen (Prix Nobel de Physique en 1901) pour voir les structures anatomiques sans ouvrir le corps. Ce premier pas, l'image par rayons X d'une main (Figure 2), marque une étape décisive suivie de nombreuses autres : les ultrasons, liés à l'acoustique sous-marine, dans les années 1960, le tomodensitomètre à rayons X (e.g Scanner X) dix ans plus tard (Prix Nobel pour Alan Cormack et Godfrey Hounsfield, 1979), puis l'imagerie par résonance magnétique ou IRM (Prix Nobel de Paul Lauterbur et Peter Mansfield, 2003), la tomographie d'émission par positrons dès 1975 (ou TEP) ... Si la physique joue un rôle essentiel dans les processus d'interaction entre

Figure 1. La leçon d'anatomie, Rembrandt, 1632

Figure 2. La première image par rayons X *de W.C. Roentgenn*

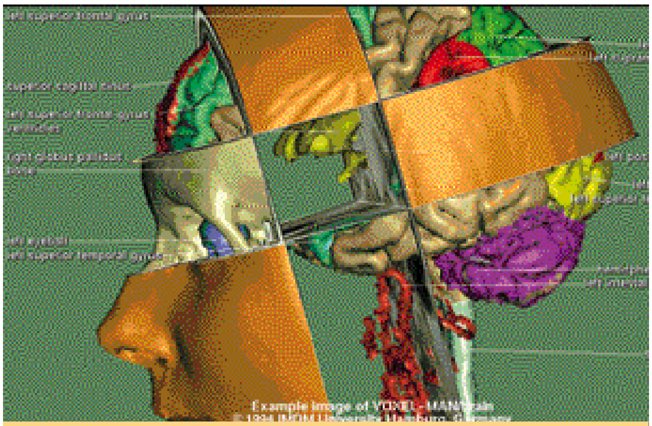


Figure 3. Atlas 3D des structures cérébrales obtenu à partir d'images par résonance magnétique
(*K.H Hoehne, Hambourg, Allemagne)*

ondes et tissus, la formation de l'image à partir des mesures issues des capteurs relève des mathématiques.La transformée établie en 1917 par Johann Radon pour la reconstruction d'image à partir de projections est restée longtemps à la base de la tomographie par rayons X et si les méthodes statistiques actuelles tendent à la supplanter, c'est du fait d'une puissance de calcul toujours plus grande[1]. La transformée de Fourier est largement mise à contribution dans les techniques d'IRM (Figure 3). Mais la chimie joue aussi un rôle majeur car c'est elle qui permet de fixer des radiotraceurs sur des cibles privilégiées du corps qui pourront être ensuite, par leur émission, localisés, et vont traduire l'activité métabolique de l'organe. D'une observation à visée purement anatomique on passe à un objectif de compréhension du fonctionnement intime des tissus vivants où la biologie est essentielle.

De la vision à la quantification : le traitement de l'information *image*.

L'accès à l'image est seulement une première étape. Il faut encore en extraire l'information utile qu'elle porte, comme les anomalies tissulaires. C'est là tout l'enjeu des méthodes de segmentation, de caractérisation, d'estimation de mouvement, de recalage. Les mathématiques appliquées sont au cœur de toutes ces opérations. La segmentation est la délimitation des contours d'un organe ou d'une lésion. Il s'agit d'une phase particulièrement délicate. Depuis la morphologie mathématique développée en 1966 par Jean Serra[2] et Georges Matheron à l'Ecole des Mines de Paris, de nombreuses méthodes performantes ont été proposées. Citons les modèles déformables de Demetri Terzopoulos[3] et de James Sethian[4], les "graph-cut" de Yuri Boykov[5] (Figure 4) mais aussi les ondelettes chères à Yves Meyer[6] .

La caractérisation s'intéresse aux propriétés de texture par l'extraction de paramètres traduisant l'architecture tissulaire, dont la variabilité peut signer une pathologie particulière. Nous entrons là dans le champ très large de la reconnaissance de formes et des méthodes d'analyse de données.

L'estimation de mouvement suppose l'accès à des séquences temporelles d'images. Le mouvement peut être un artefact dont il faut éliminer l'effet, comme la respiration lors d'un examen prolongé. Il peut aussi apporter une information

utile : le mouvement du cœur peut traduire un dysfonctionnement dans son excitation électrique ou dans sa capacité à se contracter. Les méthodes variationnelles ont largement été mises à contribution pour estimer ces mouvements.
Enfin, le recalage est la mise en correspondance dans le même repère géométrique de volumes acquis par différentes sources d'image, à différents instants. Cette approche peut consister à *fusionner* une image morphologique (Scanner X) et une image fonctionnelle (TEP). Les transformations géométriques restent simples (translation, rotation, mise à l'échelle) mais la complexité devient plus grande quand des déformations sont à prendre en compte.

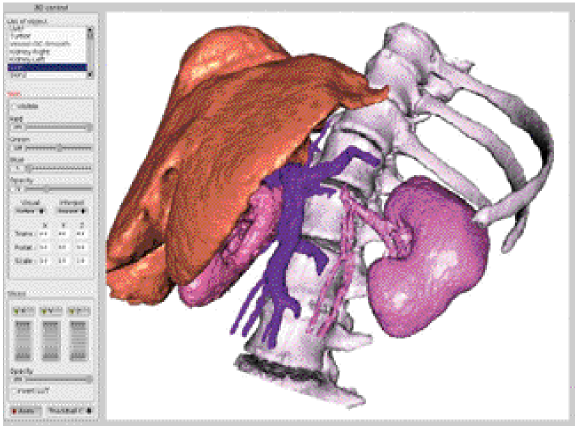


Figure 4. Segmentation du foie (marron) et des reins (violet) par graph-cut d'images scanner X
(J.L Dillenseger, LTSI, Inserm U642, Rennes)

La visualisation 3D a une place prépondérante à chacune de ces étapes avec des techniques de rendu par transparence permettant de voir des objets contenus dans d'autres.

L'imagerie médicale demain.

Elle va jouer un rôle clef dans de nouvelles thérapies dites mini-invasives ou encore de robotique médicale[7] dont Jacques Demongeot, Philippe Cinquin et Jocelyne Troccaz ont été les pionniers en France (Figure 5). Il s'agit d'exploiter des observations pré-opératoires pour planifier les gestes à accomplir pendant une intervention chirurgicale. En traversant des cavités naturelles, on peut à partir de petites incisions, introduire et guider les instruments miniaturisés jusqu'à la cible qu'il faut traiter.
Beaucoup moins traumatisantes pour le patient, ces techniques permettent une récupération plus rapide. Les progrès des techniques d'imagerie médicale vont se poursuivre : le Scanner X réduira son niveau d'irradiation en utilisant moins de projections, l'IRM améliorera sa résolution temporelle et le contraste entre tissus, les ultrasons permettront une haute résolution spatiale mais aussi

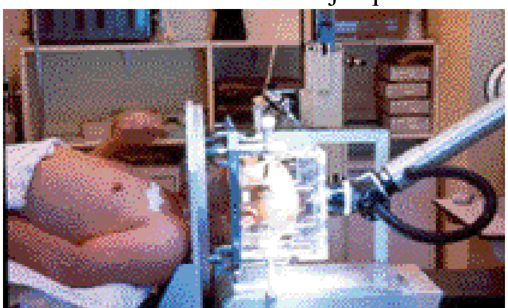


Figure 5. Le premier robot, IGOR, conçu en 1989 par *S Lavallée et P Cinquin (TIMC-CNRS, Grenoble)* pour des biopsies cérébrales

temporelle (1000 images/s), l'optique dans le proche infra-rouge prendra une place importante, etc.

Mais le plus innovant viendra sans doute d'un couplage de l'intégration de la vision par imagerie et d'une procédure thérapeutique. Le meilleur exemple actuel concerne les transducteurs ultrasonores associant image échographique et thérapie par ultrasons focalisés haute énergie (Figure 6).

Des traitements plus précoces seront permis par l'association d'un radiotraceur (capable de se fixer sur la cible voulue et d'être visible par IRM ou TEP), d'une molécule thérapeutique et d'un procédé de libération contrôlable par stimulation externe (radiofréquence, ultrasons, optique)[8] . La modélisation mathématique et la simulation de tels systèmes extrêmement complexes vont devenir indispensables.

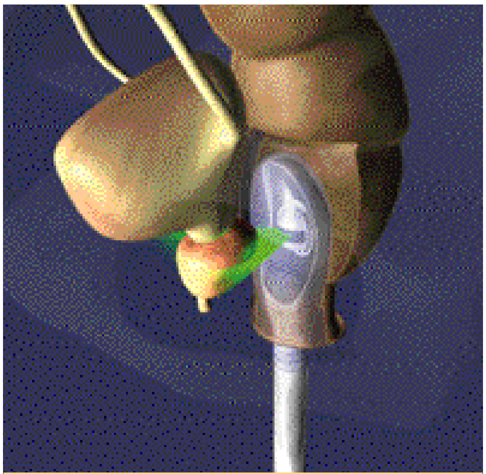


Figure 6. Représentation par synthèse d'images d'un dispositif ultrasonore pour le traitement du cancer de la prostate. En vert, image échographique, en bleu transducteur haute énergie. *(société EDAP-TMS, France).*

S'il est donc un domaine de recherche pluri-disciplinaire, c'est bien celui de l'imagerie médicale. Tous les savoirs -biologie, physique, chimie, ingénierie- y convergent, et aucun ne peut se passer des mathématiques, pour le plus grand bien des patients.

J.L. C.

Pour en savoir (un peu) plus

1 *La tomographie médicale. Imagerie morphologique et imagerie fonctionelle*, **P. Grangeat**, Ed Hermes, Paris, 2002

2 *Image Analysis and Mathematical Morphology*, **J Serra**, Academic Press, London, 1982

3 *Deformable models*, **D. Terzopoulos, K. Fleischer,** The Visual Computer, 4(6), 1988, 306-331

4 *Level Set Methods*, **J.A. Sethian,** Cambridge University Press, 1996

5 *Interactive Graph Cuts for Optimal Boundary & Region Segmentation of Objects in N-D images,* **Y Boykov, Marie-Pierre Jolly**, International Conference on Computer Vision, (ICCV), vol. I, 2001, 105-112

6 *Ondelettes sur l'intervalle*, **Yves Meyer**, Revista Matematica Iberoamericana, 7(2), 1991, 115-133

7 *Image-guided therapy: evolution and breakthrough,* **P Haigron, J-L Dillenseger, L Luo, J-L Coatrieux**, IEEE Eng.Med.Biol. Mag, 29(1), 2010, 100-104

Mathématiques et neurosciences

Alain Berthoz
Professeur au Collège de France
Membre de l'Institut

Les neurosciences et les fondements de la géométrie.

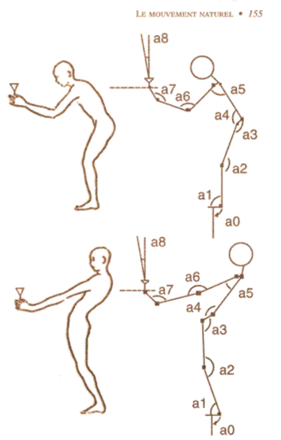
Pour les neurosciences, il s'agit de déterminer si certaines formes de mathématiques sont implémentées dans le cerveau. Ce qui rejoint parfois les interrogations des mathématiciens sur leur discipline.

Henri Poincaré, réfléchissant sur les fondements de la géométrie, dit dans son ouvrage *La Science et l'Hypothèse* : *"... localiser un objet en un point quelconque signifie se représenter les mouvements qui seraient nécessaires pour l'atteindre, c'est-à-dire les sensations musculaires qui les accompagnent ".*

Albert Einstein approuve :*" Poincaré a raison : l'erreur fatale qu'une nécessité mentale précédant toute expérience est à la base de la géométrie euclidienne est due au fait que la base empirique sur laquelle repose la construction axiomatique de la géométrie euclidienne fut oubliée. La géométrie doit être considérée comme une science physique, dont l'utilité doit être jugée par sa relation avec l'expérience sensible. "*

Ces deux grands mathématiciens ont donc considéré que les fondements de la géométrie ne sont pas dans une axiomatique abstraite mais dans ce qui constitue le cœur de l'action humaine, le mouvement.

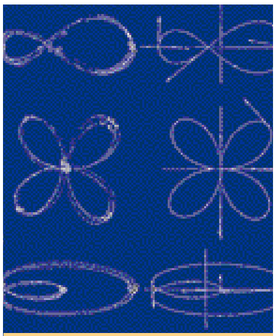
J'ai consacré au Collège de France, il y a quelques années, un cours sur les fondements cognitifs et moteurs de la géométrie, sujet qui a aussi fait l'objet d'un séminaire organisé à l'Ecole Normale Supérieure[1]. Aujourd'hui nous travaillons sur le problème des géométries qui sous tendent la génération de trajectoires de la main et de trajets locomoteurs. C'est ce problème que je prendrai comme exemple de la façon dont nous travaillons avec des mathématiciens.



Modélisation de postures par l'étude des angles reliants les segments d'un corps.
ext. *Le sens du mouvement*
A. Berthoz

Les trajectoires de la main.

On a montré que, lorsqu'on trace une ellipse dans un plan avec son doigt, la vitesse tangentielle du doigt le long de sa trajectoire est linéairement liée -en coordonnées logarithmiques- à la courbure de l'ellipse. La vitesse du doigt est d'autant plus grande que la courbure est faible. Cette loi, qui reçoit le nom de *relation de la puissance un tiers*, est vraie pour de nombreux mouvements naturels. Elle influence la perception, car un observateur ne considèrera que le doigt se meut à vitesse constante que si son mouvement obéit à la *relation de la puissance un tiers*, et se déplace donc à vitesse variable. Des mathématiciens ont supposé que cette loi consistait en une minimisation de la secousse. Déplacer sa main ne supposerait pas de se représenter mentalement auparavant sa trajectoire ; il suffirait, d'après cette théorie de considérer le point de départ et le point d'arrivée et d'appliquer une loi de minimisation de la secousse pour obtenir la trajectoire observée. Nous avons aussi généralisé cette loi à des mouvements tridimensionnels où intervient la torsion[2].

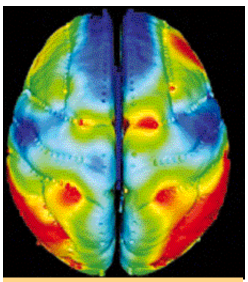


Tracés de dessin et modélisation basés sur la *relation de la puissance un tiers*

Nous avons cherché à déterminer si cette *relation de la puissance un tiers* était vérifiée pour des mouvements aussi complexes que celui de la locomotion. Nous avons enregistré la trajectoire de la tête de sujets décrivant, en marchant, une trajectoire elliptique, et nous avons constaté que ce mouvement obéissait aussi à cette relation. Si on remplace l'ellipse par un limaçon ou d'autres courbes, on observe que la relation linéaire entre la vitesse tangentielle et la courbure de la trajectoire est conservée. Cependant, le coefficient de proportionnalité n'est pas identique à celui de la *relation de la puissance un tiers*. Cette variation de coefficient entre différentes lois pourrait être le signe que celles-ci s'inscrivent dans une théorie mathématique plus générale.

Les géométries du cerveau.

Nous avons donc interrogé des mathématiciens, parmi lesquels le géomètre Daniel Bennequin et la mathématicienne Tamar Flash. Nous avons examiné ensemble l'idée que le cerveau utilise, non la géométrie euclidienne, mais une combinaison des géométries euclidienne, affine et équi-affine. Cette idée a été proposée voici quelques années par Pollick et par le physicien Koenderick pour la vision et par Faugeras pour l'analyse d'images. Si le cerveau combine trois géométries, il se peut qu'il y ait une théorie générale qui permette de le comprendre. Il faut aussi déterminer si les trois géométries sont implémentées dans des zones distinctes du cerveau. Rappelons que voici quelques années, nous avons montré, grâce à l'imagerie par résonance magnétique, que saisir un objet proche et se représenter une zone plus éloignée de l'espace étaient deux manipulations mentales impliquant des réseaux de neurones différents.

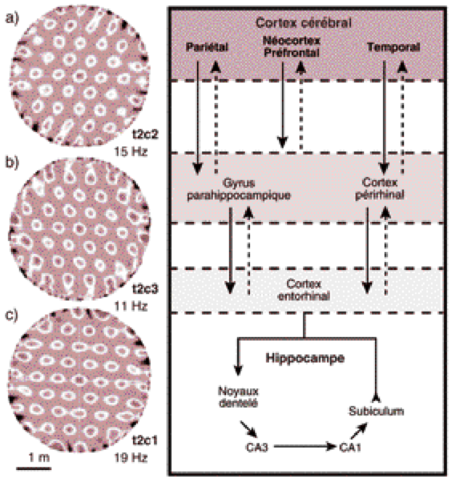


Etude du cerveau
INRIA

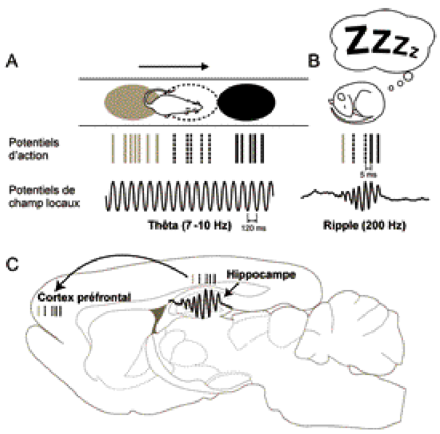
On voit ici comment hypothèses neurophysiologiques et théories mathématiques peuvent dialoguer.

La perception de l'espace.

Des problèmes semblables concernant les bases neurales de notre perception de l'espace sont en cours de formulation. On sait depuis fort longtemps que des neurones de l'hippocampe codent pour certains le lieu, et pour d'autres la direction. Voici une dizaine d'années, on a également découvert que des neurones du cortex enthorinal du rat déchargent lorsque celui-ci se trouve sur les points d'un réseau formé de triangles équilatéraux. Cette représentation de l'espace pourrait résulter de phénomènes d'interférence un peu comme en optique. En effet, notre cerveau est essentiellement constitué d'oscillateurs couplés et si, deux oscillateurs convergent vers les dendrites des neurones du cortex entorhinal avec des fréquences différentes, une interférence peut se produire.



A gauche la figure illustre la remarquable régularité de l'activité de neurones dits *de grille* dans le cortex enthorinal. A droite le schéma indique la place stratégique du cortex entorhinal dans les circuits qui relient les aires de traitement de l'information avec les aires de la formation hippocampique.
d'après A.Berthoz "La simplexité" O. Jacob 2009



Il faut dormir pour mémoriser. Pendant l'exploration (A), le rat traverse successivement les champs d'activation des neurones de *lieu* de l'hippocampe. Pendant son sommeil (B), le rat mémorise l'information de l'exploration qui lui est restituée, compressée, comme dans les télécommunications modernes.
d'après A.Berthoz "La simplexité" O. Jacob 2009

De nombreux problèmes se situent donc à la frontière des neurosciences et des mathématiques et on pourrait en fournir de nombreux exemples. Citons en particulier, les théories de la *contractance* élaborées par Jean-Jacques Slotine de MIT, qui permettraient, si cette propriété est implémentée dans le cerveau, de faire travailler ensemble les milliers de boucles dont notre cerveau est constitué. Nous avons récemment étudié la possibilité que cette propriété soit présente dans des circuits qui contrôlent les mouvements des yeux.

Physiologie et mathématiques.

L'interaction de la physiologie et des mathématiques est nécessaire. En particulier parce que, dans l'étude de l'évolution des organismes vivants, des principes simplificateurs ont été trouvés pour mieux comprendre les processus de perception et d'action. Ces processus ne sont ni simples ni complexes. J'ai proposé de les désigner comme s*implexes* et je m'en suis expliqué dans un livre.

Malheureusement, les physiologistes comprennent peu les mathématiques. La solution est de constituer des équipes comprenant un mathématicien et un physiologiste qui comprend les mathématiques et qui peuvent soumettre les problèmes soulevés à un informaticien, qui cherchera alors à obtenir des résultats pour les modèles proposés.

A. B.

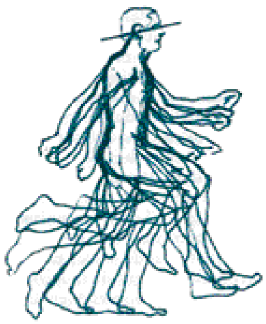
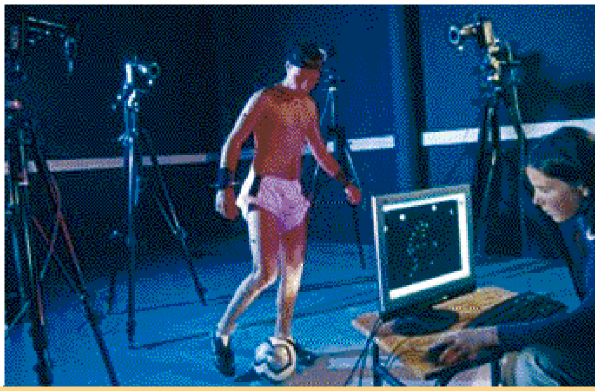


Fig. 4.1. La tête est stabilisée pour contrôler la posture et la coordination des mouvements.



Etude du mouvement, à gauche un dessin A. Berthoz dans *Le sens du mouvement*, à droite un système d'analyse sur un plateau de marche *UMR CNRS 6233*

Pour en savoir (un peu) plus

1 **Longo, G. et al.** (2004) *Géométrie et Cognition.* Numéro spécial de la Revue de Synthèse. Editions de la rue d'Ulm Ecole Normale Supérieure.Tome 124.

2 **Maoz, U., Berthoz, A., Flash, T**.(2009)*: Complex unconstrained three-dimensional hand movement and constant equi-affine speed.* J Neurophysiol.101(2):1002-15.

3 **Pham, Q.-C., Hicheur, H., Arechavaleta, G., Laumond, J.-P., Berthoz, A.**: *The Formation of Trajectories during Goal-Oriented Locomotion in Humans. II. A Maximum Smoothness Model.* Eur. J. Neurosc. 26(8):2391-2403.

4 **Bennequin, D., Fuchs, R., Berthoz, A., Flash, T.**(2009)*: Movement timing and invariance arise from several geometries.* PLoS Comput Biol. 5(7):e1000426.

5 **Girard, B., Tabareau, N., Pham, Q.C., Berthoz, A. & Slotine, J.-J.**: *Where Neuroscience and dynamic system theory meet autonomous robotics: a contracting basal ganglia model for action selection.* Neural Netw. 21(4): 628-641.

6 **Tabareau, N., Bennequin, D., Berthoz, A., Slotine, J.J., Girard, B.** (2007)*: Geometry of the superior colliculus mapping and efficient oculomotor computation.* Biol. Cybern. 97(4): 279-292.

7 **Berthoz, A.** (1997) *: Le Sens du Mouvement,* Odile Jacob, Paris, pp.345.
Berthoz, A. (2009) *: La simplexité,* Odile Jacob, Paris.

Nano-objets, méga-calculs

Philippe Depondt et Fabio Finocchi
Institut des NanoSciences de Paris (INSP), CNRS et Université Pierre et Marie Curie

Le mathématicien Pierre-Simon Laplace imagine, au début du XIX^{e} siècle : *" Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux."* Laplace explique alors que cela n'est pas possible et qu'il faut, du fait de notre ignorance et de nos capacités limitées, recourir à des méthodes probabilistes. Ce texte est d'ailleurs tiré des premières lignes de son *Essai philosophique sur les probabilités*.

Où en sommes-nous maintenant, presque deux siècles plus tard ? La puissance de calcul des ordinateurs nous permet-elle de nous affranchir de ces limites ?

Paradoxalement, l'émergence d'objets de très petite taille, de l'ordre du nanomètre (un milliardième de mètre), les nano-objets, nous complique plutôt la tâche. En effet, lorsqu'on s'intéresse à des objets de taille *humaine*, quelques grammes de matière, le nombre d'atomes qui le composent est astronomique ($\sim 10^{23}$) et la loi des grands nombres s'applique. Les théories utilisant les probabilités donnent ainsi des résultats très satisfaisants : la voie montrée par Laplace est suivie par les physiciens avec succès... même s'ils produisent de la sorte des équations qu'ils ne savent pas résoudre et doivent donc faire appel aux compétences de leurs collègues mathématiciens et à la puissance de calcul des ordinateurs!

En revanche, lorsqu'on s'intéresse à des systèmes qui ne contiennent plus que quelques milliers de particules, voire moins, ces modèles ne sont plus applicables : des fluctuations importantes peuvent se produire, jusqu'à la limite *individualiste* (Figure1) où le comportement de chaque particule (en interaction avec les autres!) compte et alors la loi des grands nombres ne s'applique plus. En contrepartie, et c'est ce qui fait l'intérêt des nano-objets, l'interaction avec l'environnement ou avec du rayonnement (la lumière, le son, etc.) est complètement différente lorsque les objets deviennent plus petits que les longueurs caractéristiques du rayonnement auquel ils sont soumis (Figure 2) : loin d'être simplement une complication, la petite taille permet d'obtenir des propriétés nouvelles et parfois étonnantes. C'est pourquoi aujour-d'hui les physiciens et les chimistes s'intéressent à des systèmes naturels ou, le plus souvent, artificiels, de la taille de quelques nanomètres.

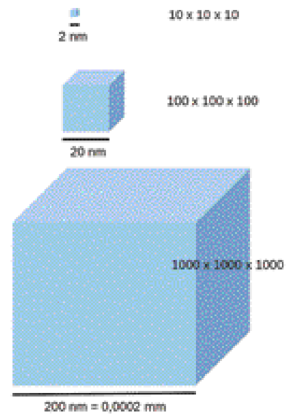


Figure 1: Un nanocube qui contient 10 atomes de chaque coté a des dimensions latérales d'environ 2 nanomètres (nm); sur 1000 atomes, 488 (presque 50%) sont en surface et donc très sensibles à l'effet de l'environnement! Cette proportion baisse considérablement pour des cubes plus grands: 5,8% pour un cube qui contient un million d'atomes et seulement 0,6% pour celui qui en contient un milliard. Le coté de ce dernier est néanmoins 200 fois plus petit que le diamètre d'un cheveu très fin (0,04 mm).

Comment décrire les nano-objets, à partir du moment où les équations mathématiques pour les *grands* systèmes ne sont généralement plus adaptées ?

A l'échelle du nanomètre, la matière est régie par les lois de la mécanique quantique ; l'électron, particule élémentaire de charge négative, est un constituant essentiel des atomes ; c'est grâce à lui que les liaisons entre atomes se forment et donnent molécules et cristaux. L'électron se comporte toutefois à la fois comme une onde et comme une particule : l'équation de Schrödinger décrit fort bien ce comportement. Hélas, sa solution exacte ne peut s'obtenir analytiquement que pour un seul électron ou bien pour un système virtuel d'électrons qui n'interagissent pas entre eux, avec certaines conditions aux bords. Ce n'est pas satisfaisant, car :

(1) tous les systèmes intéressants contiennent plusieurs, voire beaucoup d'électrons ;

(2) l'interaction entre électrons ne peut pas être négligée...

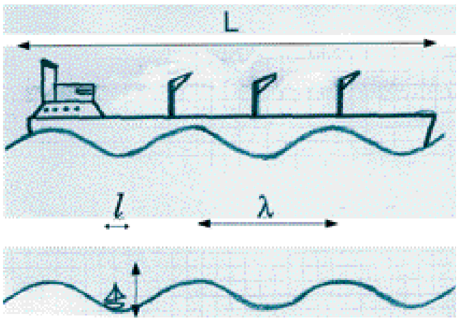


Figure 2: Comportement de deux bateaux sur une vague de longueur d'onde λ. Le petit bateau, de dimension $l < \lambda$, oscille sur la vague. Le super pétrolier, en vertu de sa longueur $L > \lambda$, est bien moins sensible à la vague. Le comportement des objets peut donc fortement dépendre de leur taille: cela est aussi vrai à l'échelle du nanomètre.

Que faire?

On utilise des ordinateurs, bien sûr! Toutefois, l'effort de calcul augmente exponentiellement avec le nombre d'électrons dans le système et une résolution numérique directe (ou par *force* *brute*) de l'équation de Schrödinger est vouée à l'échec : le calcul de la structure électronique d'une toute petite molécule, avec à peine 10 électrons, demanderait des milliards d'années aux plus puissants ordinateurs actuels ! Il faut donc faire des modèles : cela suppose, par exemple de se demander si l'on veut absolument connaître le comportement individuel de chaque électron ou si un compromis est possible, par exemple de se contenter du nombre d'électrons par unité de volume en chaque point de l'espace. Il faut alors se demander si cela n'entraîne pas d'effets pervers sur les solutions qui sont ainsi obtenues, si ces approximations sont acceptables. Les physiciens et les chimistes théoriciens utilisent donc des modèles : on construit des nouvelles approches au problème quantique, moyennant des approximations dont la validité doit être à chaque fois évaluée. Dans ce cadre, on peut faire des simulations sur ordinateur pour des systèmes avec, au plus, un millier d'atomes. Cette limite n'empêche pas de traiter des cristaux : en effet, un cristal idéal est constitué par une répétition d'une cellule élémentaire; grâce à ces conditions périodiques (Figure 3), ces systèmes sont à la portée des calculs quantiques.

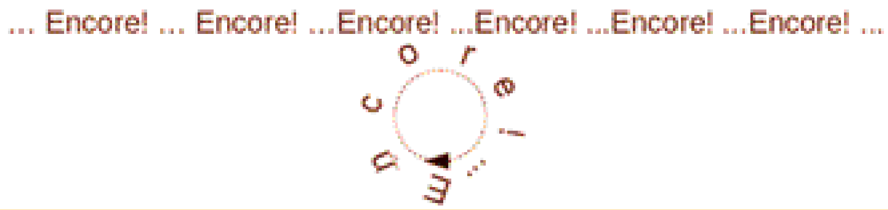


Figure 3: Conditions périodiques: on peut représenter une séquence infinie par la répétition cyclique d'un même motif. De cette manière, un système périodique peut être traité à partir de son entité élémentaire, qui est constituée d'un petit nombre d'atomes.

Et au-delà?

Il faut encore simplifier, il faut trouver des interactions effectives entre particules qui permettent *d'oublier*, au moins en partie, l'équation de Schrödinger. Si l'on est capable de calculer les forces entre atomes, on peut simuler grâce à des algorithmes puissants mis aux point par les mathématiciens, des systèmes allant jusqu'à quelques millions d'atomes pour des durées jusqu'au milliardième de seconde... ce qui, à l'échelle atomique, est beaucoup !

Finalement, pour des tailles encore plus grandes, il faut oublier la structure en atomes de la matière et prendre des modèles continus : les simulations aérodynamiques permettent de connaître le comportement d'un avion avant son premier vol ou l'effet d'un choc frontal sur une carcasse de voiture avant que celui-ci n'ait lieu...

Mais les physiciens sont insatiables ! Certains des systèmes qui nous intéressent mélangent des échelles très différentes. Imaginons par exemple la fracture d'un matériau (Figure 4) : l'amorce de cette fracture brise des liaisons chimiques entre atomes et Schrödinger revient en force. Toutefois, cette fracture se développe en fissure, d'abord microfissure, puis jusqu'à plusieurs millimètres de dimension. Quelle méthode choisir ? Nous avons des méthodes efficaces pour de toutes petites tailles d'échantillon, d'autres pour des échantillons un peu plus gros et encore d'autres pour de grands systèmes, mais ici toutes les tailles se mélangent ! De même, lorsqu'on a besoin de connaître le comportement d'un système de quelques dizaines de milliers d'électrons (pour en faire un circuit électronique par exemple) et que les aspects quantiques en sont importants, le défi est de taille. Le simple fait de vouloir étudier un système électronique en interaction avec de la lumière qui le met dans un état excité pose des problèmes redoutables.

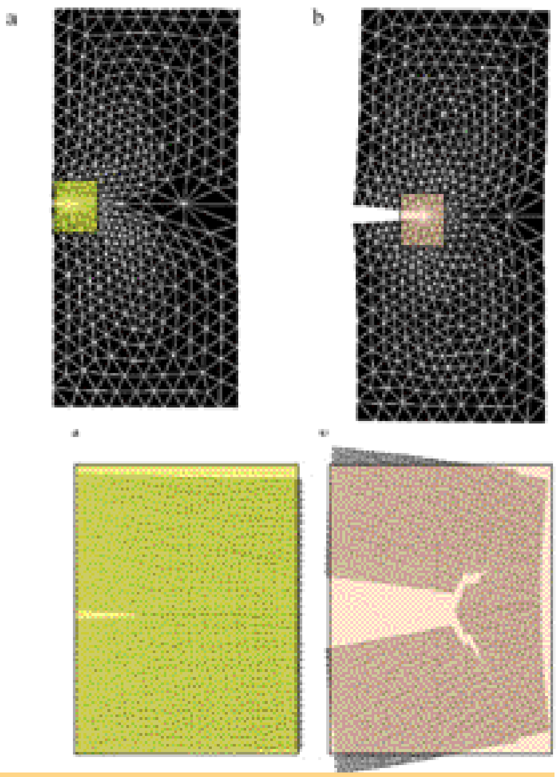


Figure 4: Méthodes multi-échelles, modélisation de la fracture : (a) Début de la fissuration; (b) propagation (en haut: simulation par éléments finis; en bas: méthode atomistique sur la région agrandie).

(d'après G. Mejía-Rodríguez et C. K. Mozumder, www.nd.edu/~malber/multi_scale_06/cracks.pdf).

Dans tous ces domaines, attendre que la puissance de calcul des ordinateurs devienne suffisante n'est pas une stratégie réaliste. Le travail, consistant à faire des modèles, des approximations toujours plus habiles, mettre au point des algorithmes efficaces, des approches originales, mobilise des efforts de recherche où, chacun de son côté ou ensemble, mathématiciens, chimistes et physiciens tentent de comprendre !

P. D. et F. F.

Pour en savoir (un peu) plus

Sven Ortoli et Jean-Pierre Pharabod, *Le cantique des quantiques (le monde existe-t-il?),* La Découverte (2004).

Ph. Depondt, *La physique numérique*, Vuibert (1998)

Rôle de la statistique dans les études de toxicité

Marc Lavielle
Directeur de Recherche, INRIA Saclay

Le rôle de la statistique dans les études de toxicité.

Les maïs OGM sont des variétés de maïs modifiées génétiquement par l'ajout d'un gène leur conférant, par exemple, une résistance à des insectes nuisibles comme la pyrale du maïs (Figure 1). Afin d'obtenir une autorisation de mise sur le marché ou de mise en culture d'un tel maïs OGM, une entreprise doit produire différentes études afin de démontrer que son nouveau produit présente des propriétés semblables à un maïs non OGM traditionnel en terme d'alimentarité, de risque sanitaire ou encore de risque environnemental. Un grand nombre de données sont recueillies à l'issue de ces études et l'outil statistique devient alors incontournable pour l'analyse de ces données.

Nous allons ici nous limiter à une étude particulière dont l'objectif est d'explorer une éventuelle toxicité du maïs OGM. On nourrit pendant 90 jours des groupes de rats avec différents régimes (maïs OGM ou non OGM) et différentes doses (11% et 33%). On mesure de très nombreux paramètres : paramètres biochimiques dans le sang et dans les urines, paramètres hématologiques, poids des organes. On va ensuite regarder si des dissemblances apparaissent entre les groupes tests et les groupes témoins. Il faut bien sûr comparer ce qui est comparable : on compare donc les données entre groupes de même sexe et nourris avec la même dose de maïs (Figure 2).

Il faut bien avoir à l'esprit qu'il s'agit de groupes de 10 rats (20 pour le poids de l'animal). Bien évidemment, des différences sont toujours observées et une partie de ces différences observées est due simplement au *hasard* (i.e. à la façon dont ont été constitués les échantillons). Une première question se pose alors :

i) Ces différences ne sont-elles dues que au hasard, ou bien une partie de ces différences peut-elle être expliquée par la différence de régime (OGM v.s. non OGM) ?

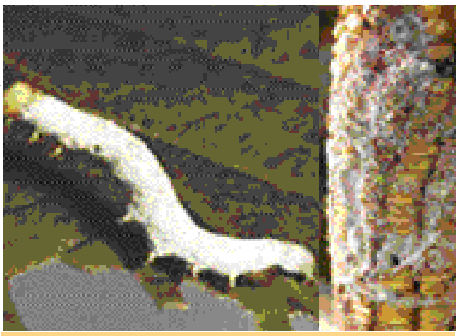


Figure 1 : la chenille de la pyrale du maïs et un épi de maïs attaqué par la pyrale.

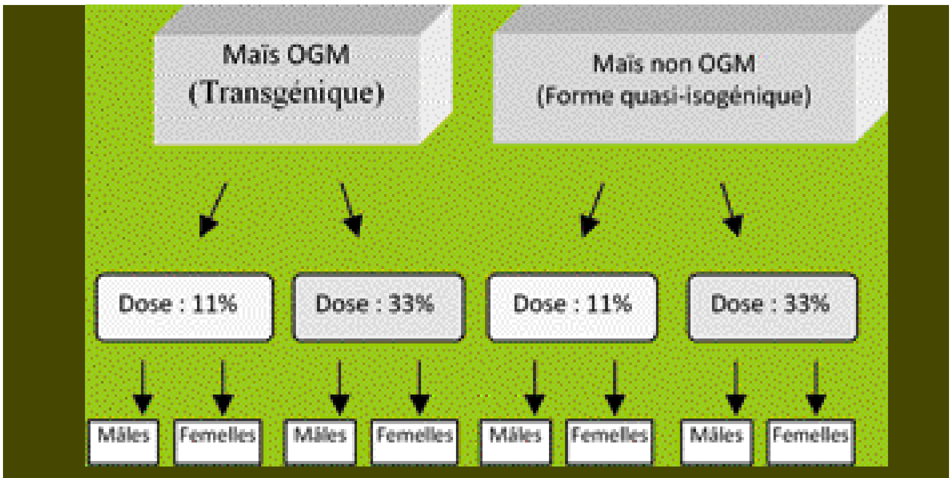


Figure 2 : Etude de toxicité : schéma récapitulatif des groupes par type de régime, par dose et par sexe.

Cette question est d'ordre purement statistique. On met donc en œuvre des tests statistiques de comparaisons pour tenter de répondre à cette question. La procédure classique consiste à comparer, pour chaque paramètre, les moyennes obtenues dans les groupes témoin et test. On pose alors comme hypothèse de référence (noté H_0) *les moyennes sont identiques dans les deux groupes*. On ne peut ensuite rejeter cette hypothèse que si la différence observée est suffisamment importante. Ce seuil est traditionnellement fixé à une valeur telle que le niveau *a* du test (i.e. la probabilité de conclure à tort à un effet OGM) soit de 5%.

ii) Si des différences sont considérées comme statistiquement significatives (i.e. on rejette l'hypothèse nulle en acceptant l'idée que la différence de régime explique une partie des différences observées), faut-il alors conclure à l'existence d'un risque pour notre santé ?

Ce n'est plus du tout une question d'ordre statistique et seul le toxicologue est en mesure d'évaluer si les différences qu'il observe peuvent indiquer ou non des signes de toxicité. En effet, il ne suffit pas, par exemple, d'observer une baisse significative de l'albumine sérique pour conclure à une toxicité hépatique.

D'autres paramètres biochimiques comme les transaminases doivent également présenter des différences. Le statisticien ne fait que lever des drapeaux oranges pour les paramètres pour lesquels il soupçonne un effet OGM, c'est ensuite au toxicologue de décider s'il convient de lever le drapeau rouge s'il observe une configuration particulière de drapeaux oranges levés.

Le rôle du statisticien dans un débat comme celui sur les OGM est multiple :

Rappeler que nous sommes dans un environnement incertain :

Le peu d'informations que l'on peut tirer de ces études ne permet pas de conclure que le maïs OGM est dangereux, mais il n'autorise pas pour autant à conclure fermement à son innocuité. La première fonction du statisticien consiste à évaluer le juste niveau des incertitudes.

Apporter de bonnes réponses à de bonnes questions :

Le test de comparaison de moyennes tel qu'il est généralement mis en œuvre ne présente pas beaucoup d'intérêt car on pourrait systématiquement rejeter l'hypothèse nulle (et donc conclure à un effet OGM) sans risque de se tromper. En effet, le fait de changer de régime provoque inévitablement des modifications de nombreux paramètres physiologiques, et ce indépendamment du caractère toxique de ces régimes. Même infimes, ces différences existent et il est donc paradoxal d'en tester l'existence ! La vraie question qu'il convient de se poser est de savoir si ces différences sont suffisamment importantes pour être associées à un effet toxique. Le bon outil statistique pour répondre à cette question n'est pas le test de comparaison de moyennes (particulièrement favorable à l'industriel qui part du principe qu'il n'existe pas d'effet OGM) mais le test de bio-équivalence qui protège davantage le consommateur en partant de l'hypothèse qu'il existe un effet OGM préoccupant : c'est alors à l'expérience de démontrer qu'il n'en est rien.

D'autre part, se contenter d'évaluer la probabilité de se tromper en concluant à tort à l'existence d'un effet OGM (donc risquer de ne pas commercialiser un aliment sans danger) n'est pas suffisant. Il faut systématiquement évaluer la puissance du test, c'est-à-dire la probabilité de conclure à un effet OGM lorsque cet effet existe réellement (dans le but de ne pas commercialiser un aliment dangereux).

Enfin, les outils statistiques évoluent et sont de plus en plus performants, grâce au développement de nouvelles méthodologies d'une part et grâce aux outils informatiques aujourd'hui disponibles d'autre part.

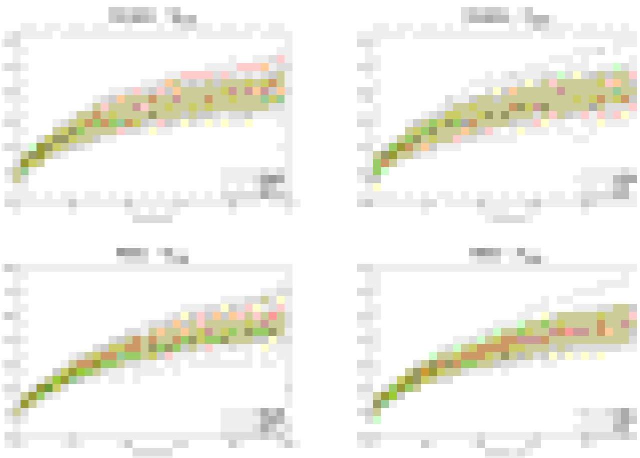


Figure 3 : Courbes individuelles de poids

Ainsi la modélisation permet de décrire des phénomènes biologiques complexes. A titre d'exemple (très simple), les courbes individuelles de poids des rats (Figure 3) sont très bien décrites par un modèle du type $c + (a\text{-}c)^{(-b*t)}$ où les paramètres (a,b,c) du modèle dépendent du sujet. Les modèles à effets mixtes permettent de décrire de façon pertinente la variabilité que l'on observe dans les données puisqu'ils intègrent des effets *fixes* (effet *temps*, *sexe*, *régime*, *dose*…) et des effets aléatoires (effets *animal*). Il est alors possible d'estimer les paramètres du modèle et donc d'évaluer l'effet *régime* ou l'effet *dose* par exemple.

Rappeler le rôle limité de la statistique :

C'est un outil *d'aide* à la décision, mais pas un outil de décision ! Ce n'est pas la statistique qui permet de conclure si un OGM est dangereux ou non pour la santé humaine (pas plus que décider des mesures à prendre pour limiter les émissions de CO2 ou décider du caractère opportun de la vaccination contre la pandémie grippale A H1N1…).

La statistique est là uniquement pour aider le toxicologue à évaluer correctement les risques de se tromper en concluant sur l'absence ou la présence d'effets négatifs. C'est finalement au gestionnaire du risque de prendre une décision, qui va prendre en compte bien sûr l'évaluation des différents risques, mais également d'autres critères de type économique ou social.

M.L.

Pour en savoir (un peu) plus

http://www.math.u-psud.fr/~lavielle/ogm_lavielle.html

http://www.math.u-psud.fr/~lavielle/

Mathématiques et énergie nucléaire

Jean-Christophe Trama
CEA, DEN, SERMA, 91191 Gif-sur-Yvette, France

Mathématiques, probabilités et statistiques.

Qui ne se rappelle avoir attendu avec excitation la sortie d'un 6 pour sortir du box de départ ou d'un 1 pour rentrer dans l'écurie lors d'une partie de petits chevaux ? Le dé à 6 faces, comme le jeu de pile ou face, sont deux illustrations ludiques de la notion de *hasard*. Mais si c'est bien un fait qu'il n'est pas possible de prédire l'issue d'un jet de dé, cela ne signifie pas pour autant qu'on ne puisse rien en dire d'autre. En supposant que le dé n'est pas truqué, on peut en effet annoncer que chaque nombre de 1 à 6 a autant de chances de sortir lors d'un jet. On peut rajouter que deux lancers successifs donneront deux résultats indépendants, ou en d'autres termes que le fait d'obtenir par exemple un 6 lors d'un premier jet n'affectera en rien l'issue d'un deuxième jet. En particulier le joueur gardera une chance sur 6 d'obtenir un deuxième 6 ou n'importe quelle autre valeur parmi les possibles. La branche des mathématiques qui s'occupe de ces événements *hasardeux* s'appelle probabilités. Elle permet de formaliser dans un langage rigoureux un grand nombre de situations. Le lancer d'un dé à 6 faces s'apparente à une expérience de la pensée, que l'on appellera une variable aléatoire, dont les valeurs possibles sont les nombres de 1 à 6. Le résultat d'un lancer effectif, donc un des nombres de 1 à 6, sera appelé réalisation de cette variable aléatoire. L'information qui nous dit que l'on a autant de chances d'avoir une réalisation égale à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 s'appelle la loi de cette variable aléatoire. L'information qui nous dit que deux tirages successifs du dé, c'est-à-dire deux réalisations successives, n'ont pas de lien peut également se formaliser mathématiquement avec la notion d'indépendance de deux variables aléatoires : le premier et le second lancer de dé. Tout l'enjeu des probabilités est de construire des informations sur les lois de variables aléatoires, rencontrées ou bien dans des situations concrètes de sciences autres que mathématiques (physique, biologie, économie etc.) ou bien dans le contexte des mathématiques pour elles-mêmes.

Dans l'univers mathématiques, les probabilités ont une branche sœur : les statistiques. Les statistiques ont pour objet, à partir de l'observation des réalisations d'un variable aléatoire, de remonter aux lois de la variable aléatoire. Par exemple, supposons qu'une personne ignore a priori si un dé à 6 faces est truqué. Comme cette personne dispose du dé en question, elle peut s'amuser à le lancer un grand nombre de fois consécutivement et de façon indépendante, et noter la suite des valeurs obtenues. En observant cette série elle peut obtenir des infor-

mations sur le dé lui-même. Regardons par exemple la série suivante : 6 2 3 Difficile d'en tirer quelque chose n'est-ce pas ?
Considérons maintenant : 6 2 3 4 2 6 5 4 2 4 5 6 3 2 4 3 5 6 2 6 5 3 4 2 3 4 5 6 2 3 4 5 4 4 6 5 2 3 4 5 2 4 5 6 6 3. Voilà 38 résultats successifs, et pas une seule fois le nombre 1 n'est sorti : est-ce normal ?
On ne peut pas affirmer directement que c'est normal ou pas, en revanche voilà ce que l'on peut dire : si le dé n'est pas truqué, à chaque réalisation il y a 1 chance sur 6 d'avoir 1 et 5 chances sur 6 d'avoir autre chose que 1. En termes mathématiques on dira que la réalisation de l'événement *j'obtiens 1* a une probabilité de 1/6, alors que la réalisation de l'événement *j'obtiens autre chose que 1* a une probabilité de 5/6. La théorie des probabilités nous dit également que la probabilité de l'occurrence de deux événements indépendants est le produit des probabilités des deux événements pris séparément. En étendant ceci à 38 événements indépendants nous pouvons en conclure que :

Les joueurs de dés
Murillo

Si le dé n'est pas truqué, la probabilité d'obtenir 38 fois de suite, de manière indépendante, un résultat différent de 1 est : $(5/6)^{38}$, soit $9{,}8 \times 10^{-4}$, ou encore moins d'une chance sur 1000 ($9{,}8 \times 10^{-4} < 1/1000$).
Certes l'observateur d'une telle série de jets de dés ne pourra pas garantir absolument que le dé est truqué, mais il pourra en revanche affirmer qu'il y a 999 chances sur 1000 qu'il le soit !
Car s'il ne l'était pas, il n'y aurait qu'une chance sur 1000 d'obtenir 38 tirages successifs et indépendants différents de 1.

Résumé :

Les probabilités nous donnent des informations sur les lois des variables aléatoires, comme par exemple : pour un dé non truqué on a autant de chances d'avoir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Les statistiques nous permettent à partir de réalisations de variables aléatoires de faire des hypothèses sur la loi des variables aléatoires concernées : par exemple décider à partir de résultats de jets d'un dé s'il est truqué ou non.

Physique nucléaire, probabilités et statistiques.

En mécanique classique nous disposons de modèles déterministes. Dit autrement : quand les conditions d'entrée d'une expérience sont parfaitement connues on obtient à l'issue de l'expérience toujours le même résultat.

Prenons par exemple l'exemple classique du choc élastique de deux boules de pétanque, l'une à l'arrêt, la seconde en mouvement. Si l'on connaît exactement la vitesse de la boule incidente, le point d'impact, les dimensions des boules et les masses des deux boules on peut très exactement prédire la trajectoire comme la vitesse des deux boules après le choc. Le modèle de choc est déterministe. Quiconque a jamais joué à la pétanque, au bowling, ou à tout autre jeu approchant, sait pourtant combien aléatoire est le résultat de deux lancers de boules… C'est simplement qu'il est absolument impossible à un humain de lancer exactement de la même façon deux fois de suite une boule ! Mais si c'était possible, les trajectoires des boules seraient rigoureusement identiques.

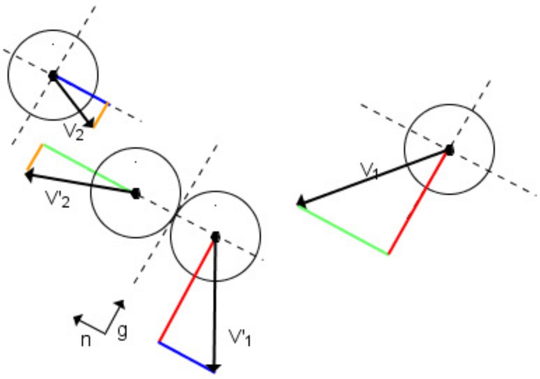


Figure 1 : Collision élastique de 2 boules de même masse
Wikipedia, auteur Jlpons

Plongeons à des distances bien plus petites que celles d'un terrain de boule, regardons la matière à une échelle de 10^{-10} m et examinons le choc de deux petites *boules* : un neutron et un noyau. Le noyau est un assemblage de neutrons et protons au centre de chaque atome constituant la matière. Un neutron, comme un proton d'ailleurs, peut vivre sa vie seul, et se mouvoir avec une certaine vitesse dans la matière constituée d'atomes. Au cours de ses déplacements, toujours en ligne droite, il peut entrer en interaction avec des noyaux d'atomes au repos. Mais contrairement à ce qui arrive aux boules de pétanque, les modèles qui régissent ces chocs sont probabilistes. Autrement dit, comme pour le lancer de dé, on ne peut dire avec certitude l'issue du choc, mais seulement donner des informations sur la loi de probabilité des particules issues du choc, et sur les lois qui vont

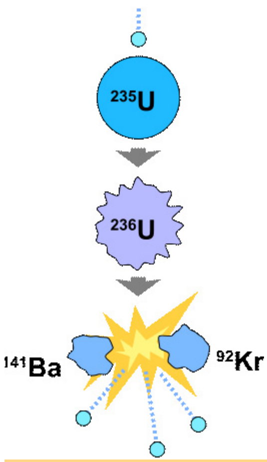


Figure 2 : Exemple de fission d'un noyau d'uranium 235 par un neutron
Wikipedia, auteur fastfission

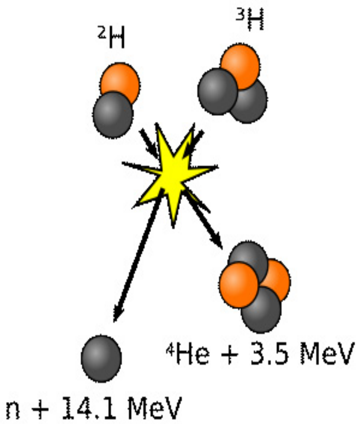


Figure 3 : Exemple de réaction de fusion deuterium-tritium,
Wikipedia auteur Aarchiba

régir la nature des particules en sortie du choc, leur vitesse et leur direction. Des physiciens théoriciens travaillent à établir ces modèles probabilistes d'interaction nucléaire (nucléaire car mettant en œuvre des neutrons), et d'autres physiciens, expérimentateurs, conçoivent des expériences pour valider ces modèles et en estimer les paramètres. Notons au passage que ces physiciens expérimentateurs font un travail de statisticiens : ils recueillent des mesures, c'est-à-dire des réalisations de variables aléatoires, dont ils doivent déduire des informations sur les modèles probabilistes des chocs.

Résumé :
Des physiciens, théoriciens et expérimentateurs, utilisent des modèles probabilistes et des techniques statistiques pour décrire les chocs des neutrons avec la matière.

Informatique, probabilités et statistiques.

Faire des calculs avec ses doigts reste toujours possible, mais pouvoir les déléguer à des machines nous facilite la vie, et nous rend possibles des calculs difficiles à conduire avec nos dix doigts (ou avec nos vingt doigts pour les plus souples d'entre nous !). Le boulier chinois, ou la machine de Pascal en leur temps ont représenté des progrès conséquents. Le calcul électronique, né au milieu du 20ème siècle, et dont les développements continuent à un rythme soutenu, nous permet des calculs toujours plus complexes, dans un temps toujours plus court. Pour cela nous donnons une liste d'instructions, appelée programme, à un ordinateur pour qu'il effectue les calculs que nous attendons. Ainsi, nous pouvons dorénavant jouer aux petits chevaux électroniques, laissant le loisir à l'ordinateur de lancer le dé et bouger les chevaux à notre place. C'est franchement moins amusant que jouer *à l'ancienne*, et ça coûte plus cher, mais ça nous montre au moins qu'il est possible d'apprendre à un ordinateur à tirer des variables aléatoires. Notons au passage que les instructions qui permettent à l'ordinateur de créer des variables aléatoires sont aussi l'œuvre de mathématiciens qui maîtrisent les probabilités. Au-delà du dé électronique à 6 faces, nous pouvons aussi programmer des variables et modèles aléatoires bien plus complexes, comme ceux qui président aux chocs des neutrons dans la matière. Ainsi, nous pouvons écrire un programme qui simule suivant les lois probabilistes de la physique le cheminement d'un neutron dans un matériau.

Résumé :
L'informatique permet de simuler numériquement les lois de probabilités qui décrivent le parcours d'un neutron dans la matière.

Énergie nucléaire, méthodes Monte Carlo et réacteurs du futur.

Nous avons parlé des chocs des neutrons dans la matière. Le terme plus couramment employé est celui de *réaction nucléaire*. Par analogie avec la chimie et ses réactions chimiques, ce terme traduit le fait qu'il peut y avoir transformation des particules et émission ou consommation d'énergie dans une réaction nucléaire.

Le neutron incident peut disparaître, tout comme l'atome cible peut être transformé en un autre atome, de nouveaux neutrons peuvent apparaître, et une certaine quantité d'énergie peut être dégagée. C'est par exemple le cas de la *réaction de fission* d'un noyau d'uranium 235 par un neutron : quand cette réaction se produit, sous l'impact d'un neutron incident, un noyau d'uranium 235 est cassé en deux noyaux plus petits, et ceci s'accompagne d'un dégagement d'énergie et de la production d'un certain nombre de nouveaux neutrons. Il est possible de concevoir des systèmes dans lesquels ce type de réaction se produit en chaîne, les neutrons issus d'une fission pouvant à leur tour rencontrer un noyau d'uranium 235 et produire à nouveau une réaction de fission. En contrôlant adéquatement la réaction en chaîne, on peut en tirer de l'énergie. Ce principe, breveté en France en 1939 (Kowarski, Joliot, Halban, brevet 976.541 déposé le 1er mai 1939) est à l'origine du développement de l'énergie nucléaire. Les systèmes dans lesquels on crée et contrôle cette réaction en chaîne s'appellent des réacteurs nucléaires, la chaleur dégagée par les fissions est récupérée par exemple par de l'eau, qui est ensuite transformée en vapeur pour faire tourner des turbines. Les turbines produisent enfin de l'électricité suivant le principe de la dynamo.

Le domaine de l'énergie nucléaire s'est développé à partir du milieu du vingtième siècle, en parallèle avec les débuts de l'informatique. Dès l'origine, des chercheurs, mathématiciens, physiciens, informaticiens se sont intéressés à la simulation du parcours des neutrons dans la matière. L'objectif affiché était de prédire la façon dont la population de neutrons se répartissait dans le réacteur, en fonction des paramètres de contrôle du réacteur. Ceci permettait d'en optimiser la conception. L'équation à résoudre est connue sous le nom d'équation du transport (sous-entendu des neutrons) ou encore équation de *Boltzmann linéaire*. Cette équation est une équation du type bilan, c'est-à-dire une équation qui relie la variation du nombre total de neutrons dans un système nucléaire pendant un court intervalle de temps à la différence entre les neutrons nouvellement apparus suite à des réactions nucléaires de fission et ceux disparus par exemple par suite de réactions nucléaires de capture.

Résolution de l'équation de Boltzmann.

Deux familles de méthodes existent pour résoudre cette équation, la première est dite déterministe et la seconde Monte Carlo. C'est à cette seconde famille que nous nous intéressons dans ce court article.

Une méthode Monte Carlo est une méthode de résolution d'équations qui repose sur le recours à des variables aléatoires, dont les réalisations, répétées suffisamment de fois vont nous amener à une estimation de la solution recherchée.

Regardons un exemple simple de méthode Monte Carlo pour déterminer la valeur de π.

Considérons un disque de rayon 1, par conséquent d'aire π, circonscrit dans un carré de côté 2, par conséquent d'aire 4. On suppose le disque et le carré centrés au point (0,0) dans un repère cartésien. Tirons *au hasard* des points dans ce carré. Nous avons vu plus haut qu'il fallait être plus explicite pour parler de ce *hasard* : ici nous voulons dire de façon uniforme. Un point de coordonnées (x,y) appartient au carré si et seulement si x comme y sont compris entre -1 et 1. Il appartient en plus au disque circonscrit si en plus $x^2 + y^2 <= 1$. Par tirage uniforme du point (x,y) nous entendons que si l'on découpait le segment [-1,1] de l'axe Ox et le segment [-1,1] de l'axe Oy en un nombre quelconque de sous-segments de même taille les coordonnées x et y auraient autant de chances de tomber dans n'importe lequel de ces segments. Par exemple, si l'on découpait les deux segments en 20 sous-segments de longueur 1/10, les points x et y auraient tous une même probabilité de 1/20 de tomber dans n'importe lequel des sous-segments. Supposons que l'on simule un très grand nombre N de points de coordonnées (x,y) dans le carré, et que l'on compte parmi ceux-ci le nombre de points M qui en plus d'être dans le carré sont aussi dans le disque. Le rapport M/N va être une estimation du rapport des deux surfaces. Ce serait d'ailleurs vrai pour tout type de figure dont l'une est totalement incluse dans l'autre. Si l'on est capable de lancer *au hasard* c'est-à-dire avec une loi uniforme des points sur ces figures, le rapport du nombre de points dans la plus petite sur le nombre de points dans la plus grande va approcher le rapport des deux surfaces. Dans le cas de notre carré et de notre disque, le rapport des deux surfaces est $\pi/4$, et puisque l'on sait estimer ce rapport par notre méthode on peut en déduire une estimation de π. Mais pour que cette estimation soit bonne il faut un grand nombre de tirages N, plus grand est N, meilleure est la qualité de l'estimation de π . On peut même montrer avec des calculs de probabilité simples que la qualité de l'estimation varie comme 1/ N . Pour améliorer d'un facteur 10 la qualité de l'estimation, il faut augmenter le nombre de tirages N par un facteur 100.

Les premières démonstrations de ce type d'utilisation de variables aléatoires pour résoudre des équations mathématiques sont le fait de deux français : Georges-Louis Leclerc de Buffon et Pierre-Simon de Laplace.

La première utilisation moderne de la méthode de Monte Carlo pour résoudre une équation est précisément celle qui concerne l'équation du transport des neutrons. En effet un moyen pour déterminer le comportement d'une population de neutrons dans un système est la simulation du parcours d'un nombre *suffisant* de ceux-ci dans le système grâce à un programme d'ordinateur, et nous avons vu plus haut que les mathématiciens, les physiciens et les informaticiens nous donnaient tous les éléments pour le faire. Pour connaître la répartition relative des neutrons dans deux endroits différents du système, il suffit de compter dans

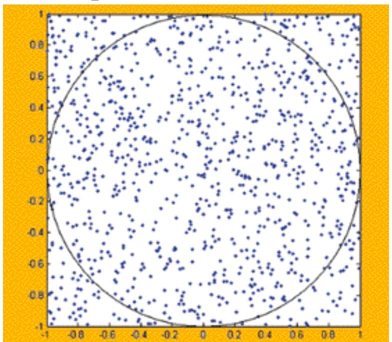


Figure 4 : N=1000, M = 782, estimation Monte Carlo de π : 4M/N = 3.128

Image CEA

notre simulation le nombre de neutrons qui sont passés par chacun des deux endroits, exactement comme pour l'estimation de π.

Avant d'illustrer ce type de simulation, revenons sur le nom de cette méthode : Monte Carlo. C'est une boutade d'un des scientifiques américains à l'origine des premiers travaux sur le sujet au milieu du vingtième siècle, il aurait déclaré que tant qu'à jouer avec des variables aléatoires pourquoi ne pas aller au casino à Monte Carlo…Le terme est resté, et la méthode a connu de nombreux développements dans des domaines scientifiques très variés où peu de gens qui l'emploient aujourd'hui connaissent son rapport avec le transport des neutrons.

Nous avons vu que toutes choses égales par ailleurs, la précision d'un calcul Monte Carlo était liée au nombre de tirages aléatoires. Dans les années 60 on pouvait simuler un millier de neutrons, dans les années 70 on allait jusqu'à 10000, jusqu'à 100000 dans les années 80, plusieurs millions dans les années 90, le milliard au milieu des années 2000 et en 2010 la centaine de milliards. La barrière des 10^{12} neutrons sera franchie dans la décennie qui s'ouvre, avec des machines informatiques de nouvelle génération, disposant de centaines de milliers de processeurs. Des progrès sont également attendus et nécessaires en physique pour affiner les modèles probabilistes des chocs de neutrons, et en mathématiques pour développer de nouveaux algorithmes pour estimer les grandeurs statistiques attachées

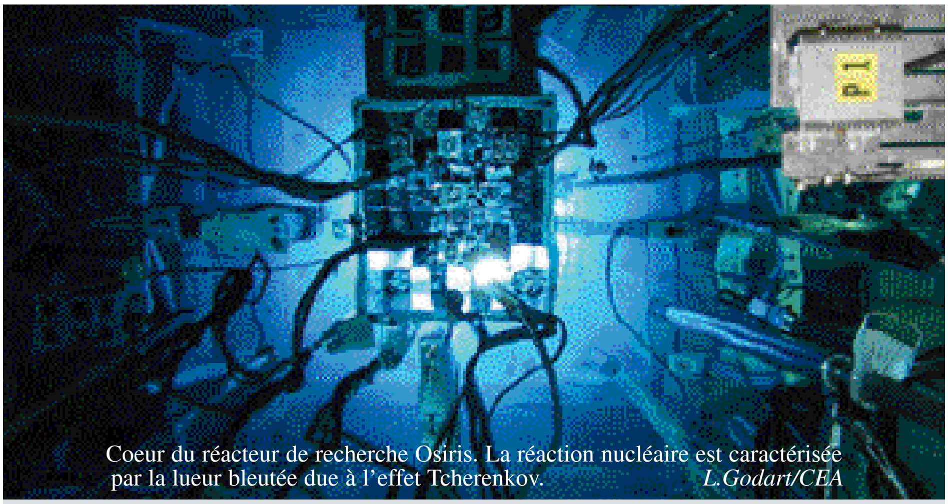
Réactions du futur.

Aujourd'hui en France, les trois-quarts de l'électricité produite sont d'origine nucléaire (58 réacteurs), et près de 450 réacteurs sont en opération dans le monde. La recherche est très active pour travailler sur des concepts de réacteurs innovants appelés à remplacer les réacteurs existants. Des progrès sont en particulier attendus pour une meilleure gestion (en particulier une plus grande économie pour une sûreté encore améliorée) du combustible nucléaire (les matériaux dans lesquels les neutrons créent des réactions de fission). La communauté internationale a lancé d'ambitieux programmes de recherche pour étudier de nouveaux *réacteurs à fission*, dits de quatrième génération, mais également à fusion. Dans ce deuxième cas la réaction qui produit de l'énergie n'est plus la cassure (fission) d'un gros noyau d'uranium 235, mais au contraire l'agglomération (fusion) de deux noyaux légers (deuterium et tritium). Le projet ITER à Cadarache est destiné à réaliser un tel réacteur à fusion. Dans un cas comme dans l'autre, il importe pour affiner les concepts, en mesurer la pertinence technologique comme économique, de pouvoir simuler toujours plus finement le parcours des neutrons dans la matière. Comme dans d'autres domaines, la simulation prend de plus en plus d'importance, car elle est de plus en plus prédictive. Nous voulons dire par là que les résultats sont dans certains cas si précis, qu'ils permettent de diminuer le nombre de maquettes expérimentales à réaliser avant de construire effectivement le réacteur désiré. Certaines expériences deviennent en effet inutiles, car on peut obtenir numériquement par le calcul les résultats qu'elles donneraient, en revanche d'autres plus générales se révèlent nécessaires pour approcher de plus près les phénomènes physiques modélisés. Ceci n'est pas spécifique à l'énergie nucléaire, il suffit de penser à la réalisation des nouveaux modèles d'avions civils, pour lesquels on ne réalise plus certaines maquettes destinées à des tests de résistance mécanique, car ces tests peuvent être réalisés numériquement sur ordinateur.

Conclusion.

C'est en alliant les forces de ces trois disciplines mathématiques, physique et informatique qu'il sera possible d'affiner toujours plus les calculs de transport des neutrons pour la définition des centrales nucléaires de demain et d'après-demain, qu'elles reposent sur la fission comme les réacteurs de quatrième génération ou la fusion comme ITER et son successeur DEMO.

J.C. T.



Coeur du réacteur de recherche Osiris. La réaction nucléaire est caractérisée par la lueur bleutée due à l'effet Tcherenkov. *L.Godart/CEA*

Pour en savoir (un peu) plus

Première évocation de l'usage des nombres aléatoires pour résoudre un problème mathématiques : **Georges de Buffon,** *Essai d'arithmétique morale,* L'Histoire naturelle, volume 4, 1777.

Calcul de π par échantillonnage aléatoire : **Pierre-Simon de Laplace,** *Théorie Analytique des Probabilités*", Livre 2, pp 356-366

Théorie cinétique des gaz, calcul Monte Carlo " à la main " avec 5000 particules **Lord Kelvin,** " *Nineteenth Century Clouds Over the Dynamical Theory of Heat and Light* ", Philosophical Magazine, series 6, 2, 1 (1901).

Première application moderne (avec calculateur électronique) et appellation calcul Monte Carlo : **Metropolis et Ulam,** " *The Monte Carlo Method* ", Journal of the American Statistical Association, 44, 335 (1949)

Exemple de code Monte Carlo moderne développé en France : *TRIPOLI-4 : A 3D continuous-energy Monte Carlo Transport code*, ***ICAPP 2007***, mai 2007, Nice, communication 7380

Mathématiques et informatique

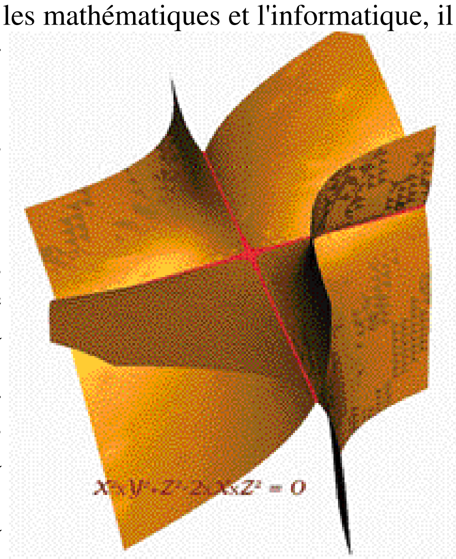
Gérard Berry
Chercheur à l'INRIA, membre de l'Académie des Sciences
Titulaire de la nouvelle chaire du Collège de France
Informatique et sciences numériques

Histoire des relations entre informatique et mathématiques.

Si ces deux sciences sont liées depuis longtemps, nombre de mathématiciens semblent considérer l'informatique comme un domaine de leur discipline. Les informaticiens, au contraire, recherchent une autonomie et une reconnaissance qu'ils peinent à obtenir. La création d'une chaire d'informatique au Collège de France est le premier signe de cette reconnaissance. L'Administrateur général du Collège de France a souligné que, pour la première fois, l'informatique entrait dans cette institution comme discipline autonome. La création de la chaire d'informatique a été fortement soutenue par les mathématiciens.

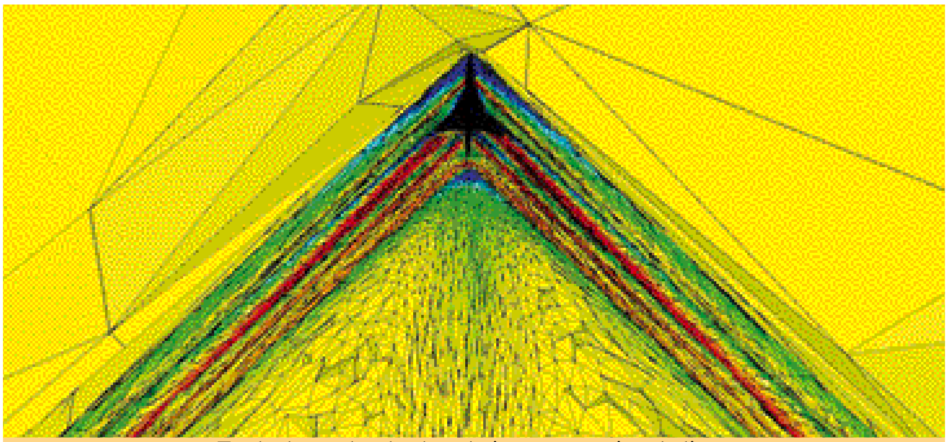
Les relations entre informatique et mathématiques sont anciennes. En effet, les mathématiques sont nées de la justification d'algorithmes qui leur préexistaient. Les mathématiques ont cependant pris leur essor tôt dans l'histoire humaine, au contraire de l'informatique.

Lorsqu'on examine les relations entre les mathématiques et l'informatique, il faut considérer trois éléments : l'utilisation des mathématiques en informatique, les nouveaux domaines des mathématiques qui sont liés à l'informatique - mais qui demeurent de nature mathématique -, et les sciences numériques.



Visualisation d'une surface algébrique
INRIA

Concernant le premier de ces trois éléments, l'informatique fait grand usage de mathématiques, en particulier de la théorie de la calculabilité, de la logique, du calcul booléen pour modéliser les circuits, des probabilités pour analyser les défaillances du réseau internet, de la théorie des nombres pour la cryptologie, de la géométrie, notamment pour la conception assistée par ordinateur, de la théorie des graphes, du calcul matriciel



Etude des ondes de choc émise par un avion de ligne
INRIA

pour le traitement des images et des sons, etc. Ce lien entre les mathématiques et l'informatique est semblable à celui qui unit les mathématiques et la physique, à ceci près que les informaticiens créent un nouveau monde, alors que les physiciens étudient le monde existant. La tâche des premiers est donc plus aisée que celle des seconds, et il n'est pas fait usage, dans ces deux disciplines, des mêmes outils mathématiques. Ainsi l'informatique s'intéresse aux mathématiques discrètes et ignore les nombres réels.

L'informatique offre aux mathématiques de nouveaux champs de recherche.

Parmi les nouveaux domaines des mathématiques qui se développent en lien avec l'informatique, il faut citer l'algorithmique et la théorie de la complexité dont relèvent de nombreux problèmes, dont celui de la NP-complétude. Le calcul booléen avec de très nombreuses variables soulève également de nombreux problèmes et recèle des propriétés mathématiques qui n'ont pas été découvertes. La raison pour laquelle certains algorithmes utilisés sont efficaces reste inconnue.

La sémantique formelle, qui vise à concevoir des programmes dont le fonctionnement est conforme à celui attendu, est un autre domaine des mathématiques lié à l'informatique. Les applications industrielles en sont innombrables. Des logiques nouvelles sont nées de l'informatique : théorie de la démonstration effective, logiques temporelles. La sécurité informatique est un problème de nature mathématique. La géométrie algorithmique est un champ qui se développe.

Un des domaines des mathématiques liés à l'informatique est la modélisation du calcul parallèle et distribué. Les informaticiens se sont contentés, jusqu'à présent, d'imiter les mathématiciens et leur crayon. Il s'agit désormais de travailler avec un million de crayons.

Les sciences numériques, considérées non comme un outil, mais comme une façon de penser, constituent une autre relation entre les mathématiques et l'informatique. Les neurosciences computationnelles en sont un exemple. Elles requièrent la collaboration des mathématiciens, des informaticiens et des neuroscientifiques.

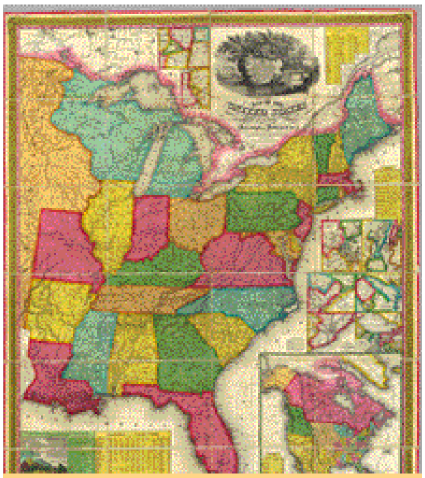
En matière de sciences numériques, la France accuse un retard important. Ainsi, dans sa leçon inaugurale de physique de la matière condensée, Antoine Georges a affirmé qu'il était inconcevable que, en France, on ait mis si longtemps à admettre l'importance de la physique numérique. Les sciences numériques sont pourtant utilisées en astronomie, en imagerie médicale, en biologie, etc.

L'utilisation de l'ordinateur par les mathématiciens est inéluctable.

Les mathématiciens sont appelés à devenir informaticiens même si l'ordinateur présente, pour eux, un défaut : son absence de créativité.

Au sein des mathématiques mêmes, les logiciels de calcul formel deviennent un outil incontournable, donnant naissance à la possibilité de mathématiques expérimentales.

Le domaine des preuves formelles a également connu une évolution importante avec la naissance du logiciel COQ et la preuve complète par ordinateur du théorème des quatre couleurs. Une preuve ancienne de ce théorème comportait une partie mathématique et une partie algorithmique, trop longue pour être vérifiée et donc contestée et jugée peu satisfaisante par les mathématiciens. Il est pourtant apparu que seule la partie mathématique de la démonstration s'est avérée incomplète. Démontrer ainsi le théorème des quatre couleurs présente l'intérêt, pour les informaticiens, de mettre en évidence qu'il est possible de produire de longues démonstrations.


Carte des Etats-Unis datant de 1831 utilisant le théorème des quatre couleurs

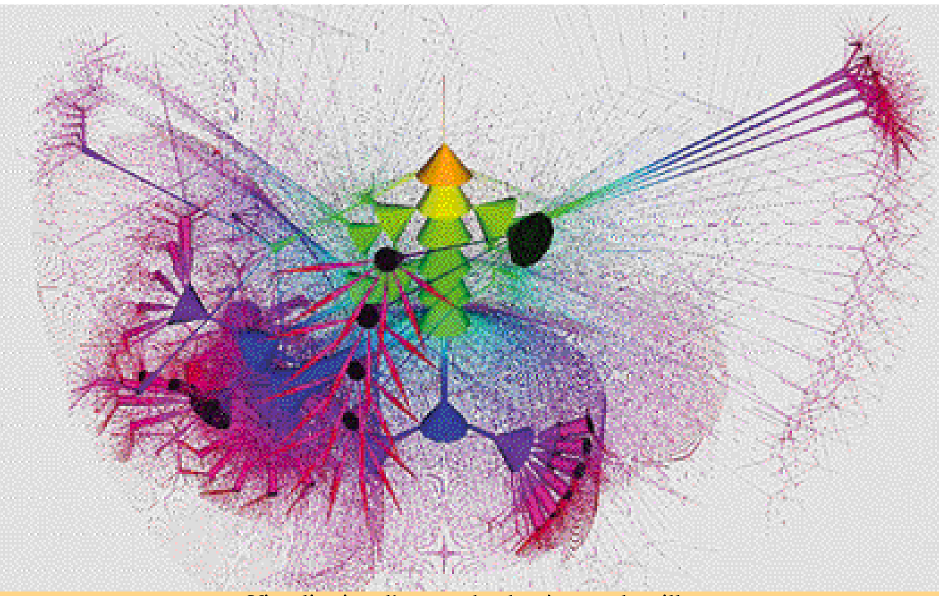
L'équipe qui a élaboré la démonstration du théorème des quatre couleurs cherche désormais à faire vérifier par des ordinateurs un monument des mathématiques, la classification des groupes finis. C'est un programme très ambitieux qui prendra des années.

Nous ne croyions pas qu'il était possible de formaliser aussi bien les mathématiques. Les conséquences pratiques et industrielles de cette formalisation sont immenses. De nouvelles méthodes, basées sur la logique mathématique permettent de *prouver* des objets importants en pratique- par exemple, un compilateur C, ce qui donne une garantie sur tous les programmes qui seront éxécutés par la suite . Il faut, pour cela, démontrer un nombre très élevé de petits lemmes qui ne présentent pas en eux même d'intérêt mathématique.

L'avenir du couple " informatique et mathématiques."

Au sein du monde scientifique et du monde éducatif, on évoque l'outil informatique, mais on est réticent à concevoir l'informatique comme une science. L'enseignement a peu évolué, en France, depuis le milieu du XX^{e} siècle, et un élève des classes préparatoires peut n'avoir étudié l'informatique qu'une heure durant toute sa scolarité. Cette situation est déraisonnable. Il faut se rappeler que l'informatique représente 29 % de la Recherche et Développement mondiale. Il faut espérer que les mathématiques discrètes intéresseront de plus en plus les mathématiciens et que informaticiens et mathématiciens développeront leur collaboration et cesseront de former des clans.

G. B.



Visualisation d'un graphe de très grande taille
INRIA

Pour en savoir (un peu) plus

http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/inn_tec2007/lecon_inaugurale_.jsp

Mathématiques et moteur de recherche

Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie, Universität Stuttgart, Allemagne

Depuis plus d'une décennie Google domine le marché des moteurs de recherche sur internet. Son point fort est qu'il trie intelligemment ses résultats par ordre de pertinence. Comment est-ce possible?

Depuis sa conception en 1998, Google continue à évoluer et la plupart des améliorations demeurent des secrets bien gardés. L'idée principale, par contre, a été publiée : le pilier de son succès est une judicieuse modélisation mathématique.

Que fait un moteur de recherche ?

Une base de données a une structure prédéfinie qui permet d'en extraire des informations, par exemple, nom, rue, code postal, téléphone. L'internet, par contre, est peu structuré: c'est une immense collection de textes de nature variée. Toute tentative de classification semble vouée à l'échec, d'autant plus que le web évolue rapidement : une multitude d'auteurs ajoutent constamment de nouvelles pages et modifient les pages existantes.

Pour trouver une information dans ce tas amorphe, l'utilisateur pourra lancer une recherche de mots-clés. Ceci nécessite une certaine préparation pour être efficace : le moteur de recherche copie préalablement les pages web une par une en mémoire locale et trie les mots par ordre alphabétique. Le résultat est un annuaire de mots-clés avec leurs pages web associées.

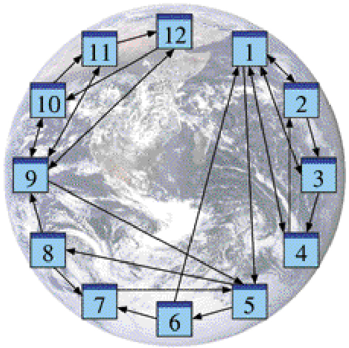
Pour un mot-clé donné il y a typiquement des milliers de pages correspondantes (plus de cinq millions pour *matrice*, par exemple). Comment aider l'utilisateur à repérer les résultats potentiellement intéressants ? C'est ici que Google a apporté sa grande innovation.

Le web est un graphe !

Profitons du peu de structure qui soit disponible. L'internet n'est pas une collection de textes indépendants mais un immense hypertexte : les pages se citent mutuellement. Afin d'analyser cette structure nous allons négliger le contenu des pages et ne tenir compte que des liens entre elles. Ce que nous obtenons est la structure d'un graphe. La figure suivante montre un exemple en miniature.

Dans la suite je note les pages web par P_1, P_2, P_3,...,P_n et j'écris $j \longrightarrow i$ si la page

P_j site la page P_i. Dans notre graphe nous avons un lien $1 \longrightarrow 5$, par exemple, mais pas de lien $5 \longrightarrow 1$.



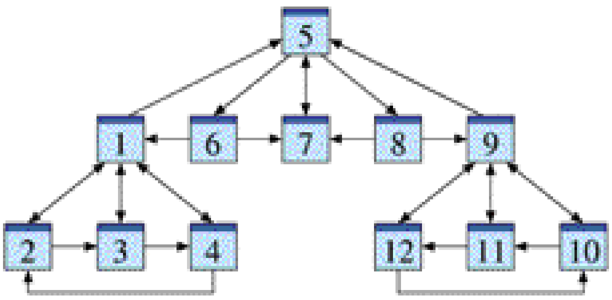
Comment exploiter ce graphe?

Les liens sur internet ne sont pas aléatoires mais ont été édités avec soin. Quels renseignements pourrait nous donner ce graphe ?

L'idée de base, encore à formaliser, est qu'un lien $j \longrightarrow i$ est une recommandation de la page P_j d'aller lire la page P_i . C'est ainsi un vote de Pj en faveur de l'autorité de la page P_i

Analysons notre exemple sous cet aspect.

La présentation suivante de notre graphe suggère une hiérarchie possible - encore à justifier.



Parmi les pages P_1, P_2, P_3, P_4 la page P_1 sert de référence commune et semble un bon point de départ pour chercher des informations. Il en est de même dans le groupe P_9, P_{10} , P_{11} , P_{12} où la page P_9 sert de référence commune. La structure du groupe P_5 , P_6 , P_7 , P_8 est similaire, où P_7 est la plus citée. A noter toutefois que les pages P_1 et P_9, déjà reconnues comme importantes, font référence à la page P_5. On pourrait ainsi soupçonner que la page P_5 contient de l'information essentielle pour l'ensemble, qu'elle est la plus pertinente.

Premier modèle : comptage naïf

Il est plausible qu'une page importante reçoit beaucoup de liens. Avec un peu de naïveté, on croira aussi l'affirmation réciproque : si une page reçoit beaucoup de liens, alors elle est importante.

Ainsi on pourrait définir l'importance μ_i de la page P_i comme le nombre des liens $j \longrightarrow i$. En formule ceci s'écrit comme suit:

$$\mu_i := \sum_{j \to i} 1. \qquad (1)$$

Autrement dit, μ_i est égal au nombre de *votes* pour la page P_i, où chaque vote contribue par la même valeur 1. C'est facile à définir et à calculer, mais ne correspond souvent pas à l'importance ressentie par l'utilisateur: dans notre exemple on trouve $\mu_1 = \mu_9 = 4$ devant $\mu_5 = \mu_7 = 3$. Ce qui est pire, ce comptage naïf est trop facile à manipuler en ajoutant des pages sans intérêt recommandant une page quelconque.

Second modèle : comptage pondéré

Certaines pages émettent beaucoup de liens : ceux-ci semblent moins spécifiques et leur poids sera plus faible. Nous partageons donc le vote de la page P_j en l_j parts égales, où l_j dénote le nombre de liens émis. Ainsi on pourrait définir une mesure plus fine:

$$\mu_i := \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j}. \tag{2}$$

Autrement dit, μ_i compte le nombre de votes pondérés pour la page P_i. C'est facile à définir et à calculer, mais ne correspond toujours pas bien à l'importance ressentie : dans notre exemple on trouve $\mu_1 = \mu_9 = 2$ devant $\mu_5 = {}^3/_2$ et $\mu_7 = {}^4/_3$. Et comme avant, ce comptage est trop facile à truquer.

Troisième modèle : comptage récursif

Heuristiquement, une page P_i paraît importante si beaucoup de pages importantes la citent. Ceci nous mène à définir l'importance μ_i de manière récursive comme suit:

$$\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j} \mu_j. \tag{3}$$

Ici le poids du vote $j \longrightarrow i$ est proportionnel au poids μ_j de la page émettrice. C'est facile à formuler mais moins évident à calculer. (Une méthode efficace sera expliquée dans la suite.) Pour vous rassurer vous pouvez déjà vérifier que notre exemple admet bien la solution

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & \\ \mu & = (& 2, & 1, & 1, & 1, & 3, & 1, & 2, & 1, & 2, & 1, & 1, & 1 &). \end{array}$$

Contrairement aux modèles précédents, la page P_5 est repérée comme la plus importante. C'est bon signe, nous sommes sur la bonne piste.

Remarquons que *(3)* est un système de n équations linéaires à n inconnues. Dans notre exemple, où $n = 12$, il est déjà pénible à résoudre à la main, mais encore facile sur ordinateur. Pour les graphes beaucoup plus grands nous aurons besoin de méthodes spécialisées.

Promenade aléatoire

Avant de tenter de résoudre l'équation *(3)*, essayons d'en développer une intuition. Pour ceci imaginons un surfeur aléatoire qui se balade sur internet en cliquant sur les liens au hasard. Comment évolue sa position ?

A titre d'exemple, supposons que notre surfeur démarre au temps $t = 0$ sur la page P_7. Le seul lien pointe vers P_5, donc au temps $t = 1$, le surfeur s'y retrouve avec probabilité 1.

D'ici partent trois liens, donc au temps $t = 2$, il se trouve sur une des pages P_6, P_7, P_8 avec probabilité $^1/_3$.

Voici les probabilités suivantes:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$t=0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.167	.000	.000	.000	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t=4$	.000	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.111	.000	.042	.042	.042
$t=5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
...												
$t=29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

On observe une diffusion qui converge assez rapidement vers une distribution stationnaire. Vérifions cette observation par un second exemple, partant cette fois-ci de la page P_1 :

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t=4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t=5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
...												
$t=69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Bien que la diffusion mette plus de temps, la mesure stationnaire est la même! Elle coïncide d'ailleurs avec notre solution $\mu = (2,1,1,1,3,1,2,1,2,1,1,1)$, ici divisée par 17 pour normaliser la somme à 1. Les pages où μ_i est grand sont les plus fréquentées ou les plus populaires . Dans la quête de classer les pages web, c'est encore un argument pour utiliser la mesure μ comme indicateur.

La loi de transition

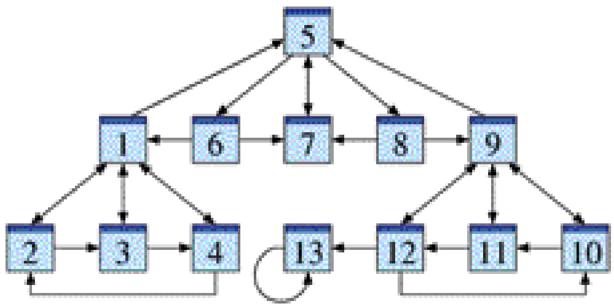
Comment formaliser la diffusion illustrée ci-dessus ? Supposons qu'au temps t notre surfeur aléatoire se trouve sur la page P_j avec une probabilité p_j . La probabilité de partir de P_j et de suivre le lien $j \longrightarrow i$ est alors $^{P_j}/_{l_j}$. La probabilité d'arriver au temps $t + 1$ sur la page P_i est donc

$$p'_i := \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j} p_j. \tag{4}$$

Etant donnée la distribution initiale *p*, la loi de transition (4) définit la distribution suivante $p' = T(p)$. C'est ainsi que l'on obtient la ligne $t + 1$ à partir de la ligne *t* dans nos exemples. (En théorie des probabilités ceci s'appelle une *chaîne de Markov*). La mesure stationnaire est caractérisée par l'équation d'équilibre $\mu = T(\mu)$, qui est justement notre équation (3)

Attention aux trous noirs

Que se passe-t-il quand notre graphe contient une page (ou un groupe de pages) sans issue ? Pour illustration, voici notre graphe modifié :



L'interprétation comme marche aléatoire permet de résoudre l'équation (3) sans aucun calcul : la page P_{13} absorbe toute la probabilité car notre surfeur aléatoire tombera tôt ou tard sur cette page, où il demeure pour le reste de sa vie. Ainsi la solution est $\mu = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)$. Notre modèle n'est donc pas encore satisfaisant.

Le modèle utilisé par Google

Pour échapper aux trous noirs, Google utilise un modèle plus raffiné : avec une probabilité fixée *c* le surfeur abandonne sa page actuelle P_j et recommence sur une des *n* pages du web, choisie de manière équiprobable ; sinon, avec probabilité $1 - c$, le surfeur suit un des liens de la page P_j, choisi de manière équiprobable.

Cette astuce de *téléportation* évite de se faire piéger par une page sans issue, et garantit d'arriver n'importe où dans le graphe, indépendamment des questions de connexité.

Dans ce modèle la transition est donnée par

$$p_i' := \frac{c}{n} + \sum_{j \to i} \frac{1-c}{\ell_j} p_j. \tag{5}$$

Le premier terme c/n provient de la téléportation, le second terme est la marche aléatoire précédente. La mesure d'équilibre vérifie donc

$$\mu_i = \frac{c}{n} + \sum_{j \to i} \frac{1-c}{\ell_j} \mu_j. \tag{6}$$

Le paramètre c est encore à calibrer. Pour $c = 0$ nous obtenons le modèle précédent. Pour $0 < c \leq 1$ la valeur $1/c$ est le nombre moyen de pages visitées, c'est-à-dire le nombre de liens suivis plus un, avant de recommencer sur une page aléatoire (processus de Bernoulli).

Par exemple, le choix $c = 0.15$ correspond à suivre environ 6 liens en moyenne, ce qui semble une description réaliste.

Pour conclure l'analyse de notre exemple, voici la marche aléatoire partant de la page P_1:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t=2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t=3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t=4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t=5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
...												
$t=29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t=30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

La mesure stationnaire est vite atteinte, et la page P_5 arrive en tête avec $\mu_5 = 0.15$ avant les pages P_1 et P_9 avec $\mu_1 = \mu_9 = 0.12$.

Le théorème du point fixe

Afin de développer un modèle prometteur nous avons utilisé des arguments heuristiques et des illustrations expérimentales. Fixons maintenant ce modèle et posons-le sur un solide fondement théorique. Nos calculs aboutissent bel et bien dans notre exemple miniature, mais est-ce toujours le cas ? Le beau résultat suivant y répond en toute généralité :

Théorème du point fixe. *Considérons un graphe fini quelconque et fixons le paramètre c tel que* $0 < c < 1$. *Alors l'équation (6) admet une unique solution vérifiant* $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$. *Dans cette solution* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *sont tous positifs. Pour toute distribution de probabilité initiale le processus de diffusion (5) converge vers cette unique mesure stationnaire* μ. *La convergence est au moins aussi rapide que celle de la suite géométrique* $(1-c)^n$ *vers0.*

L'idée de la preuve est simple : on montre que la loi de transition (5) définit une application $T : p \longrightarrow p'$ qui est contractante de rapport $1-c$. Le résultat découle ainsi du théorème du point fixe de Banach.

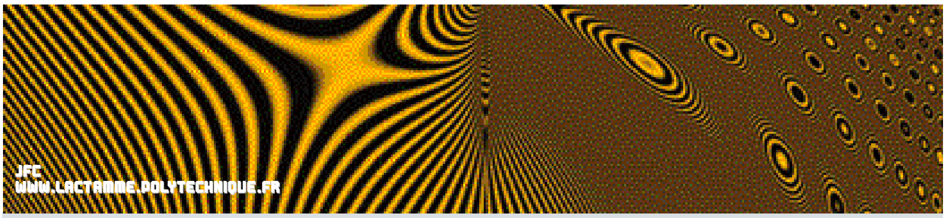
Conclusion

Pour être utile, un moteur de recherche doit non seulement énumérer les résultats d'une requête mais les classer par ordre d'importance. Or, estimer la pertinence des pages web est un profond défi de modélisation.

En première approximation Google analyse le graphe formé par les liens entre pages web. Interprétant un lien $j \longrightarrow i$ comme *vote* de la page P_j en faveur de la page P_i, le modèle Page-Rank (6) définit une mesure de *popularité*.

Le théorème du point fixe assure que cette équation admet une unique solution, et justifie l'algorithme itératif (5) pour l'approcher. Celui-ci est facile à implémenter et assez efficace pour les graphes de grande taille.

Muni de ces outils mathématiques et d'une habile stratégie d'entreprise, Google gagne des milliards de dollars. Il fallait y penser!



Pour en savoir (un peu) plus

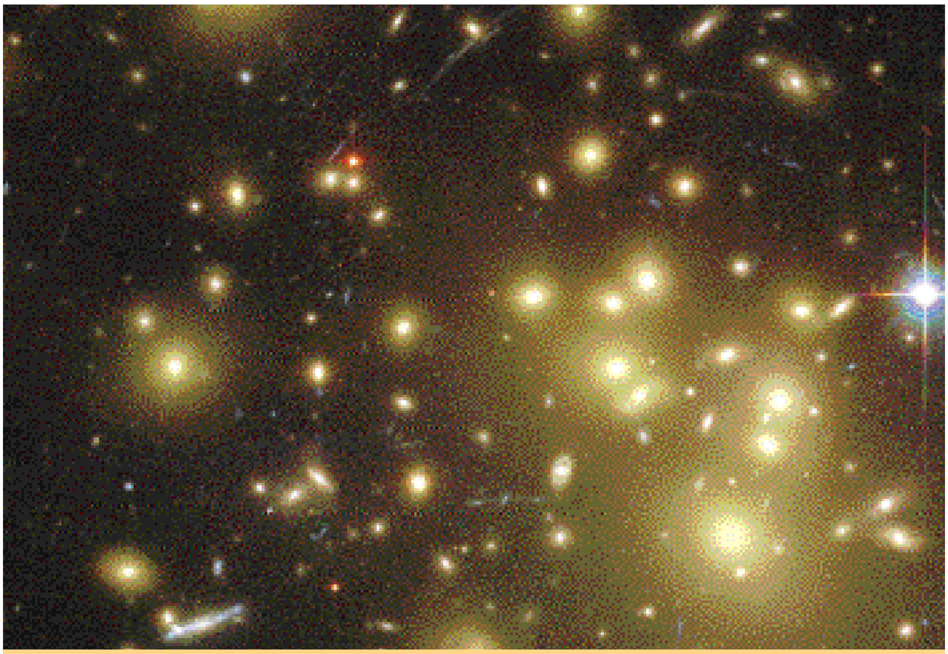
S. Brin, L.Page : *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine.*
Stanford University 1998, (20 pages)
http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf

M. Eisermann : *Comment Google classe les pages web. Images des Mathématiques,* CNRS, 2009.
http://images.math.cnrs.fr/Comment-Google-classe-les-pages.html

Mathématiques et cosmologie
L'Univers primordial en équations

Patrick Peter
GReCO - Institut d'Astrophysique de Paris - UMPC

Les mathématiques s'invitent pratiquement toujours dans nos réflexions sur les tout premiers instants de l'Univers. Pour décrire l'Univers dans son ensemble, c'est la théorie de la relativité générale d'Einstein qu'il faut utiliser pour nous indiquer comment la gravitation agit. C'est donc une vision géométrique tout d'abord, l'espace-temps étant décrit par un espace riemannien, c'est-à-dire courbe, à la manière d'une sphère, mais quadri-dimensionnel, le temps étant compris comme une dimension. Les calculs se font dans le cadre de la géométrie différentielle qui n'est autre que la théorie mathématique permettant de décrire la structure locale des espaces courbes. On s'intéresse aussi, et c'est plus récent, à la structure globale de l'espace : dans ce cas, c'est la topologie qu'il faut étudier. Le quotidien d'un cosmologiste consiste à résoudre, souvent à l'aide de méthodes numériques, des équations différentielles.



Effet de lentille gravitationnelle dans l'amas galactique Abell
Nasa ESA

Certaines propriétés de l'Univers primordial (ou récent) pourraient être des conséquences de sa structure à grande échelle. Il faut alors intégrer sur l'espace avoisinant et/ou les temps précédents pour comprendre ce qu'on observe maintenant. De plus, la cosmologie primordiale s'occupe d'une période de l'Univers pour laquelle les interactions entre les particules avaient lieu à des énergies considérables, le microscopique produisant un effet sur le macroscopique. Par conséquent, ce sont aussi les lois de la physique quantique, avec ses espaces de Hilbert et autres opérateurs conduisant à des calculs non commutatifs. Enfin, que ce soit la théorie des supercordes ou celle de la grande unification, c'est aussi la théorie des groupes qui joue un rôle majeur. D'autres structures mathématiques encore moins intuitives sont utilisées fréquemment : la cosmologie est devenue une science complexe nécessitant un recours constant à des mathématiques très avancées.

La théorie des cordes en cosmologie.

La théorie des cordes est basée sur l'idée, simple au départ, suivant laquelle les particules élémentaires ne sont pas réellement des particules, mais plutôt des petites cordes, si petites qu'on a l'impression qu'elles sont ponctuelles.

L'expansion de l'Univers nous révèle que celui-ci était, dans le passé, beaucoup plus petit qu'il ne l'est actuellement. Tellement petit, en fait, qu'il y a environ treize milliards d'années de ça, la taille des cordes n'était pas négligeable. Et ça change tout. Par exemple, si la matière est constituée de particules ponctuelles, alors ces particules peuvent tout à fait se mettre toutes au même endroit : l'Univers aurait alors eu toute sa matière concentrée en un seul point. C'est une singularité. Dès lors qu'il s'agit de cordes, la situation est très différente, puisqu'il faut nécessairement un volume fini pour les contenir, même en les entassant au maximum. Bref, si la théorie des cordes dit vrai, on peut comprendre ce qui se passe au moment du Big-Bang, qui n'est alors plus singulier, mais une simple étape dans l'histoire de l'Univers.

Il y a beaucoup plus que cela à apprendre de ces cordes. Par exemple, grâce à elles, il est possible de décrire de façon cohérente comment la gravitation devient quantique. Et pour ce faire, il faut que notre espace-temps ait un nombre déterminé de dimensions. On s'est longtemps interrogé sur la question de savoir pourquoi nous vivons dans un espace à trois dimensions, et c'est la première fois dans l'histoire de l'humanité qu'une réponse possible est proposée qui soit basée sur une idée scientifique ! Malheureusement, cette réponse n'est pas très satisfaisante : l'espace-temps de la théorie des cordes a une dizaine de dimensions.

Examinons deux cas concrets de ce recours absolument nécessaire aux mathématiques en cosmologie primordiale : les *dimensions supplémentaires* et les *défauts topologiques*.

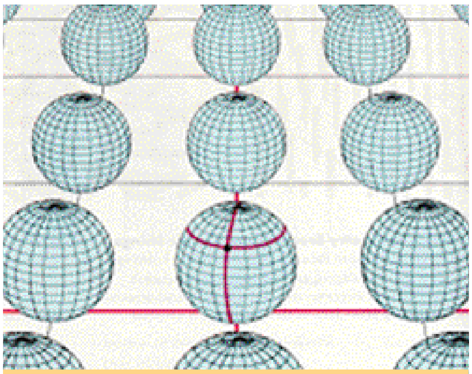


Figure 1: Associer un espace compact bi-dimensionnel tel qu'une sphère en chaque point d'un plan permet de former un espace à 4 dimensions. La théorie des cordes associe de même un espace à 6 dimensions en chaque point de notre espace-temps.

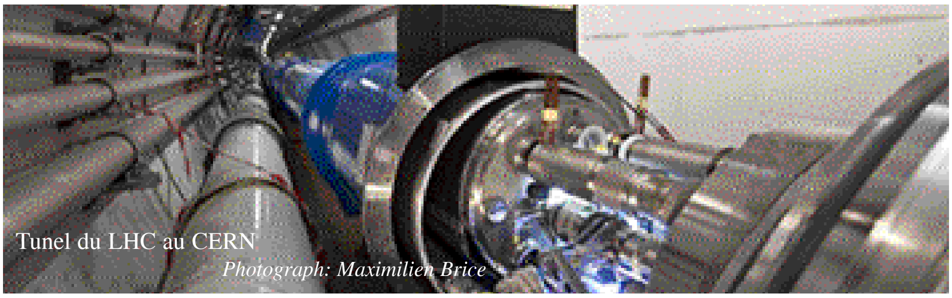
Figure 2: Si le plan est donné, l'espace "interne" à 2 dimensions peut avoir une topologie différente de la sphère, ici le tore. En théorie des cordes, les espaces ayant 6 dimensions et satisfaisant les conditions voulues sont au moins au nombre de 10^{500}.

Dimensions supplémentaires.

Il existe deux manières de repasser de dix à quatre dimensions. La plus facile consiste à supposer que les six dimensions supplémentaires sont, comme les cordes elles-mêmes, trop petites pour être visibles. Pour cela, il faut supposer que ces dimensions forment un espace compact (Figure 1), et dans ce cas, il faut encore savoir lequel, car des espaces compacts à six dimensions, il y en a beaucoup (Figure 2). Une autre option repose sur l'idée que nous n'avons pas forcément accès à tout l'Univers.

De même qu'une fourmi collée au sol ne perçoit pas la troisième dimension, nous pouvons être collés à un objet dynamique de trois dimensions, dont nous ne pouvons pas nous échapper, de sorte que nous ne percevons pas les dimensions supplémentaires.

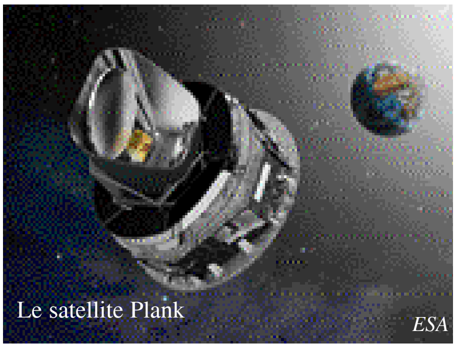
S'il existe plus de quatre dimensions, il doit être possible de les voir. Certains espèrent qu'elles ne sont pas si petites que ça et qu'il sera alors possible que leurs effets se fassent sentir dans les expériences dans les accélérateurs de particules, en particulier le LHC.



Tunel du LHC au CERN

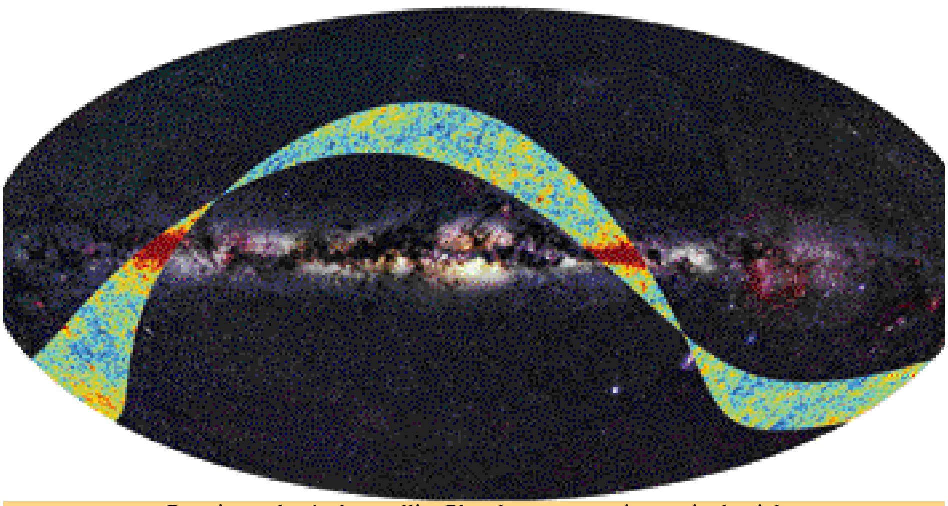
Photograph: Maximilien Brice

D'autres envisagent les conséquences au moment du Big-Bang, comme par exemple la manière dont a pu se dérouler une phase d'inflation, c'est-à-dire d'expansion accélérée nécessaire pour résoudre certains problèmes qui sinon peuvent se poser en cosmologie standard. Dans ce dernier cas, ce sont les données fournies par des observations cosmologiques qu'il faudra étudier de près ; par exemple, celles du satellite Planck qui fournira, en 2012, l'image la plus complète du ciel tel qu'il était très peu de temps après le Big-Bang : on pense que cette image contient une grande quantité d'informations relatives aux tout premiers instants, et peut donc peut-être nous apporter des informations cruciales sur les théories valables à des énergies trop élevées pour être directement accessibles.



Le satellite Plank

ESA



Premiers relevés du satellite Planck sur une petite partie du ciel.
L'image du fond diffus cosmologique est superposée à une image de la Voie Lactée en lumière visible. Les couleurs correspondent à d'infimes variations de température : rouge pour les zones plus chaudes, vert pour les températures moyennes et bleu pour les zones plus froides.

ESA

Défauts topologiques.

L'histoire de l'Univers est celle d'un refroidissement. Lorsque l'eau gèle, elle passe d'un état très symétrique, isotrope (on voit la même chose dans toutes les directions) à un état de cristal moins symétrique (on ne voit les mêmes choses

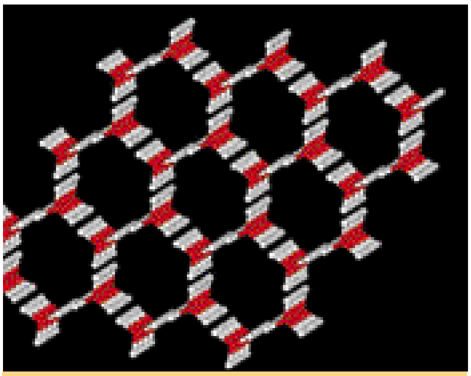


Figure 3: Le cristal de glace avec sa structure hexagonale fait apparaître des lignes et plans de symétrie. C'est un niveau de symétrie bien moindre que celui de l'eau liquide pour laquelle, les molécules n'ayant pas de localisation privilégiée, montrent une image dont les propriétés sont identiques dans toutes les directions.

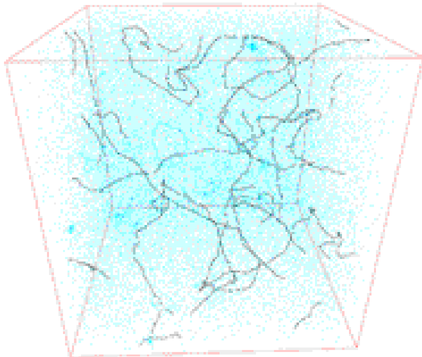


Figure 4: Réseau de défauts topologiques linéaires ("cordes cosmiques") produits à la première transition après le Big-Bang. La boite représente tout le volume observable de notre Univers maintenant, les fils noirs étant ceux qui traversent la boite, les bleus étant des boucles entièrement contenues dedans. D'une masse de 10^{17} tonnes par centimètre, ils se baladeraient dans l'Univers à une vitesse proche de celle de la lumière ! *[Simulation numérique réalisée par C. Ringeval (Louvain) et F. Bouchet (IAP).]*

que suivant des axes privilégiés (Figure 3). De la même manière, lorsque la température décroît au cours de l'expansion, des symétries internes se défont au cours de transitions de phases, à cette différence près que c'est la structure du vide qui change. Et comme dans la glace, des défauts peuvent apparaître, qualifiés de topologiques.

Ces objets sont stables, et quoique produits dans les tous premiers instants de l'Univers, ils devraient encore être visibles maintenant (Figure 4), peut-être dans les futures observations astronomiques : on pourrait voir se refléter dans le ciel des conséquences encore bien actuelles d'une physique qui ne peut se manifester qu'à des énergies telles qu'elles n'ont été mises en jeu que dans les premières fractions de secondes après le Big-Bang ! C'est probablement notre seul espoir d'atteindre de telles énergies.

P.P.

Pour en savoir (un peu) plus

P. Peter et J.-P. Uzan, *Cosmologie Primordiale,* Belin;
P. Peter et A. Gangui, *Des défauts dans l'Univers*, CNRS Éd.;
R. Lehoucq, *L'Univers a-t-il une forme,* Flammarion

Quel avenir pour les mathématiques financières ?

propos recueillis par **Marie-Françoise Roy**

La crise financièe a été l'occasion de prises de position tonitruantes mettant en cause des mathématiques financières, on se souvient par exemple Michel Rocard parlant de *crime contre l'humanité*. Les mathématiciens auraient-ils été des apprentis sorciers ? MATHS A VENIR Express a voulu connaître l'opinion de Philippe Camus, industriel, Michel Grossetti, sociologue et Nicole El Karoui, probabiliste.

Philippe Camus, la responsabilité des mathématiques financières dans la crise financière que nous avons connue est souvent mise en cause ; la créativité mathématique des financiers nous aurait elle placés dans une situation difficile ?

Un des mérites du débat sur les mathématiques financières est qu'elles contraignent à évoquer les mathématiques. Pour l'une des premières fois, les mathématiques ont fait irruption dans la vie publique. Profitons de cette opportunité. Pour moi, la responsabilité des mathématiques financières et des mathématiciens dans la crise financière puis économique n'est pas engagée. Les mathématiciens se sont contentés de construire des modèles. En revanche, nous devons examiner l'utilisation qui a été faite de ces modèles. Ceux qui les ont utilisés n'en ont pas compris les limites. Il ne faut pas omettre le fait que les ingénieurs financiers ont agi sous l'œil avisé des autorités de régulation.

La complexité des produits financiers nécessiteraient que ces autorités recrutent davantage de mathématiciens.

Michel Grossetti, en tant que sociologue, que pensez vous du rôle des mathématiques financières dans la crise que nous connaissons ?

Je pense qu'il ne faut pas le surestimer. De nombreux sociologues ont consacré de nombreux ouvrages au monde de la finance, aux traders ou aux acteurs de cet univers si particulier. Plusieurs de ces sociologues considèrent que la part des modèles mathématiques utilisés n'est pas aussi importante qu'il y paraît. Nombre de traders, à titre d'exemple, recourent à des *modèles* beaucoup plus empiriques. Les sociologues ont souligné, à travers leurs écrits, le chaos qui peut régner en ce domaine.

Nicole El Karoui, pouvez-vous nous dire quelques mots sur l'innovation financière dans la période récente ?

L'innovation financière a concerné, notamment, les marchés à terme qui permettent d'effectuer des transactions dans le futur à un prix fixé *a priori*, mais se réalisant à un horizon prédéterminé. Ce type d'innovation financière, qu'on désigne par le nom de ***produit dérivé*** a été rendue possible par l'évolution de la puissance de calcul informatique : cette évolution reste indissociable de l'évolution des marchés eux-mêmes. Leur premier usage visait à assurer une protection contre les mouvements de marché, à l'occasion des mouvements de dérégulation sur la plupart des grandes places financières à partir de la décennie 1970. Ces produits sont vendus soient dans des marchés organisés (Chicago 1973), soit de gré à gré. Les produits *standards* : les contrats à terme et les contrats *future* sont de type *promesse de vente* : deux contreparties doivent s'échanger un titre donné dans le futur à un prix et à une date fixés d'avance. Dans le monde des taux d'intérêt, cela concerne les *swaps* d'intérêt. Elle entraîne une modification de la nature de la dette : par exemple, au cours de la décennie 2000, le Trésor français a transformé une partie de sa dette à taux fixe en une dette à taux variable. Cette opération a permis de réajuster une partie de la dette, qui avait été souscrite à un moment où les taux d'intérêt étaient relativement élevés. Cette dette a, en quelque sorte, été *swappée*. Ces produits peuvent également prendre la forme d'options d'achat ou de vente, qui sont la version *assurée* de la promesse de vente. Vous ne concrétisez la promesse de vente que si vous la jugez favorable. Sur la place de Paris, cette activité a été multipliée par dix entre 1992 et 2007. Cette croissance concerne, en particulier, les dérivés de crédit.

Quelle est la part des modèles mathématiques dans le monde de la finance ?

Les contrats à terme, qui représentent une large part de ces produits dérivés, ont un prix de marché qui ne dépend pas d'un modèle. Ces prix sont fixés par le marché à partir d'informations disponibles à un moment prédéterminé et d'un certain nombre de paramètres de marché. Sachez, à titre indicatif, que les modèles ne représentent qu'une petite partie de cette activité. Cette partie concernent les seules options, c'est-à-dire la garantie apportée quant à la réalisation de l'opération dans le futur et dans des conditions a priori favorables. Les options ont un prix que Louis Bachelier avait cherché, en 1900, à expliquer par les mathématiques. Prenons un exemple d'option classique : ces options d'achat (de vente) sont utilisées si le cours réel a dépassé ce plancher. Ce type de modèle -si l'on peut le désigner ainsi- ressemble fort à un contrat d'assurance. Il présente cependant deux différences fondamentales avec l'assurance :

- les titres assurés sont échangeables et on peut suivre leurs cours au jour le jour ;

- les risques inhérents à ce type de contrats peuvent être réduits grâce à de fréquents ajustements.

Trois individus ont joué un rôle déterminant dans cette évolution : il s'agit de MM. Black, Scholes et Merton (1973), co-titulaires du Prix Nobel d'économie en 1997. Ils ont introduit le concept des portefeuilles dans le monde des options. L'impact de ce concept sur l'industrie des produits dérivés a été immédiat. Leur théorie avait été conceptualisée en 1973. Bien malgré eux, ils ont entraîné, en 1998, la faillite du fonds LTCM ! Leurs idées étaient totalement novatrices et constituaient une révolution conceptuelle pour trois motifs :

- l'outil d'ajustement considéré est le portefeuille, il est le résultat d'investissements quotidiens autofinancés dans l'actif ;
- la qualité de la stratégie est considérée à travers sa valeur terminale ;
- le problème à résoudre ne consiste plus à estimer les pertes potentielles, mais à les réduire de façon dynamique.

Que penser des produits dérivés ?

Ces produits dérivés ont leurs partisans comme leurs opposants. Les premiers considèrent qu'ils permettent notamment une réduction des risques associés aux opérations dans le futur, c'est-à-dire les fluctuations adverses et les réduisent. Dans le même temps, ils reconnaissent combien ces produits dérivés dépendent des titres sous-jacents. Les seconds évoquent le risque de contreparties et rappellent que les produits dérivés peuvent être considérés comme une composante majeure du risque systémique, car ils peuvent générer de grandes pertes par suite d'un fort effet de *levier* : les produits dérivés génèrent une très forte spéculation.

Nous avons assisté à la constitution d'une bulle qui a éclaté durant l'automne 2008. L'activité en a été durablement affectée. Elle tend actuellement à se rétablir.

Comment voyez vous l'avenir ?

Les marchés ne vont pas disparaître. A contrario, ils vont s'appuyer sur les moyens high tech à leur disposition. Reste à connaître la façon dont la finance sera contrôlée : les médicaments et la nourriture le sont. Les marchés peuvent donc l'être. Il convient, pour cela, de mieux former les personnes aux métiers du risque. Les marchés continueront à utiliser les technologies de pointe : il vaut mieux former les étudiants à haut niveau pour qu'ils aient un regard plus éthique sur leur pratique.

Mathématiques et Sciences

Jean Christophe Yoccoz

Professeur au Collège de France

Jean-Christophe Yoccoz est mathématicien, professeur au Collège de France, membre de l'Académie des Sciences. Ses travaux relatifs aux systèmes dynamiques ont été récompensés par la médaille Fields en 1994. Il a coordonné un rapport commandé par l'Académie des Sciences portant sur " Les Mathématiques dans la science contemporaine ", qui a été essentiellement écrit par des scientifiques qui ne sont pas mathématiciens. MATHS A VENIR Express a souhaité en savoir plus.

Comment distinguer les mathématiques des autres sciences ?

Pour moi, la richesse des interactions des mathématiques avec les autres sciences résulte de leur diversité.

La première distinction entre les mathématiques et les autres sciences réside dans leurs critères de validation différents. Les résultats mathématiques sont démontrés, alors que les résultats des autres sciences sont validés par l'expérience ou l'observation. De ce point de vue, l'informatique est à ranger aux côtés des mathématiques, car on y démontre des théorèmes. Cependant, ses problèmes lui sont propres et sont nés avec les ordinateurs.

Les physiciens théoriciens manipulent des objets mathématiques, mais d'une façon qui n'est pas considérée comme rigoureuse par les mathématiciens. Ainsi, Dirac a utilisé les distributions avant qu'elles ne soient introduites par Laurent Schwartz, Richard Feynman des intégrales de chemin qui ne sont pas encore justifiées de façon rigoureuse, obtenant toutefois par ces moyens des résultats confirmés par l'expérience.

Il faut distinguer la physique théorique du reste de la physique, d'où proviennent de nombreux problèmes mathématiques. Par exemple, la théorie des systèmes dynamiques est issue de la mécanique des corps célestes et de la mécanique statistique. Une question soulevée par ces théories physiques, celle de la stabilité du système solaire, est devenue mathématique ; elle a été en partie résolue au cours des années 1950.

Enfin, l' économie, la biologie, certaines parties de l'informatique sont des sciences pour lesquelles une modélisation complète des phénomènes qu'elles étudient est trop complexe. Il est nécessaire que les modèles proposés soient plus simples que la réalité et, à cette fin, il faut procéder à une simplification conceptuelle. Les outils mathématiques - telle la théorie des jeux - nécessaires à cette tâche font souvent défaut.

Les progrès accomplis en mathématiques pures proviennent-ils des autres sciences ou des applications ?

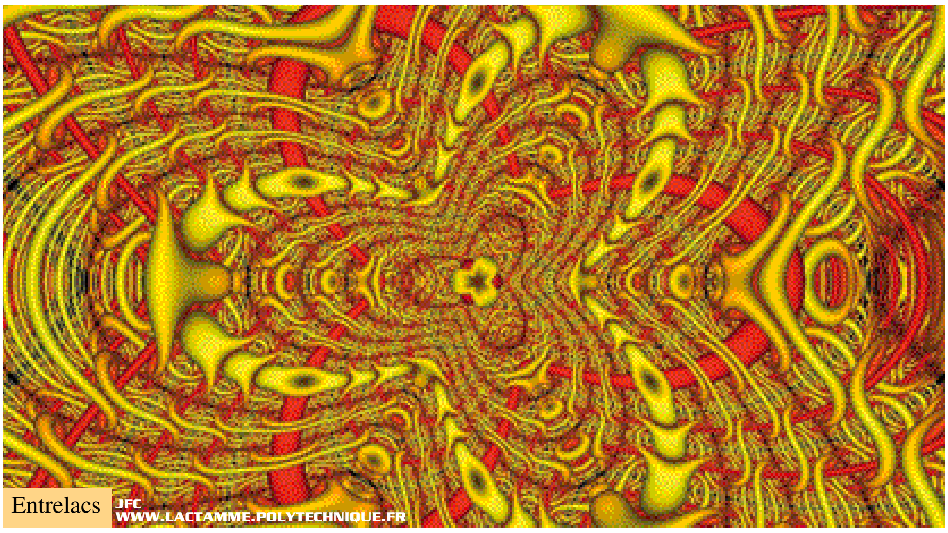
La réponse me semble être oui pour l'analyse. Les concepts importants de cette science - calcul différentiel, équations aux dérivées partielles - sont liés aux applications. Pour la géométrie, la situation est plus complexe. La géométrie euclidienne est directement liée à notre expérience sensible, la géométrie riemannienne à la théorie de la relativité générale. En revanche, la géométrie algébrique ne semble pas entretenir de rapports avec le monde physique. Le programme de Langlands, qui contient des conjectures importantes sur les liens entre la théorie des nombres et la théorie des groupes, s'est développé de façon interne aux mathématiques, même si la notion de nombre entier résulte de l'expérience sensible.

Comment voyez vous l'avenir des interactions entre les mathématiques et les sciences physiques ?

Je crois que la physique continuera de fournir de nouvelles idées aux mathématiciens. Les points de contact entre les mathématiques et la physique se renouvellent sans cesse, de même que le champ des mathématiques s'accroît. Les mathématiques utilisées en physique resteront extrêmement variées.

Certains mathématiciens estiment que les sciences du vivant sont trop complexes pour être appréhendées par les mathématiques. Qu'en pensez-vous ?

La biologie est diverse, et la science mathématique du vivant pourra l'être également.



Entrelacs

En guise de conclusion

Marie-Françoise Roy
MATHS A VENIR

Marie José Pestel
CIJM

Si nous n'avions pas été déjà convaincues que les mathématiques sont au coeur du monde et de la culture, et que former les jeunes générations à les comprendre et à les utiliser est un enjeu stratégique d'importance, les articles rassemblés dans cette brochure nous auraient ouvert les yeux.

En nous appuyant sur le travail entrepris pendant le colloque MATHS A VENIR 2009, nous avons voulu mettre en avant les interactions entre les mathématiques et les autres sciences et montrer l'importance de développer des liens entre le monde des entreprises et celui des mathématiciennes et mathématiciens.

Nous avons sollicité des spécialistes, industriels ou chercheurs, dans les domaines les plus variés allant de la finance à la climatologie en passant par l' énergie, les technologies de pointe ou la biologie, pour qu'ils nous expliquent pourquoi et comment les mathématiques interviennent dans leur champ d'action.

Ils nous disent tous que de nombreux objets et services de notre vie de tous les jours n'existeraient pas sans les mathématiques. Tous les domaines des mathématiques, même ceux qui ont été développés en mathématiques théoriques, sont à la base d'applications fondamentales. Les pavages non périodiques de Penrose, étudiés dans un cadre ludique, ont fourni par exemple les outils nécessaires pour décrire les quasi cristaux observés par les physiciens. La distinction entre mathématiques pures et appliquées tend à s'atténuer. Les utilisateurs de mathématiques sont de plus en plus exigeants et viennent parfois emprunter des modèles et des résultats en mathématiques fondamentales dans des domaines qui semblaient tellement abstraits que l'on pouvait les croire à l'abri d'applications concrètes.

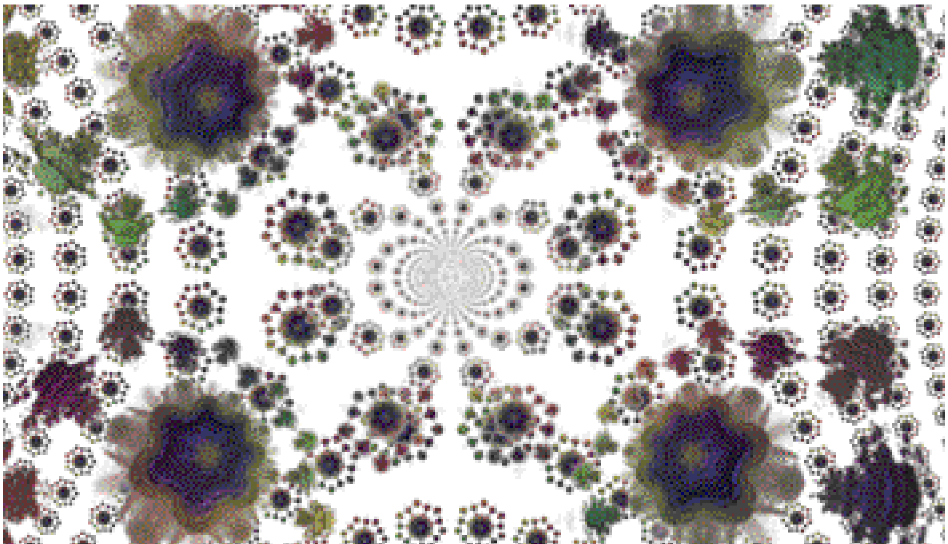
Il y a pourtant un paradoxe bien français en ce qui concerne le rapport aux mathématiques de la grande majorité de la population. La France est un pays d'excellence en mathématiques mais celles ci sont souvent mal aimées, mal comprises et mal connues. Notre pays est en effet un des tous premiers au monde pour le niveau de la recherche, et même le premier du monde si on prend en compte le nombre de ses habitants. Mais s' il a parfaitement réussi dans la formation de chercheurs au plus haut niveau, il s'est trop peu préoccupée de diffuser une culture mathématique pour tous. Le niveau mathématique moyen est plutôt bas, surtout si on prend en compte la possibilité d'utiliser les mathématiques en dehors du contexte scolaire . Pourtant, donner à tous les acteurs sociaux, du simple citoyen au journaliste ou au décideur, l'accès aux outils mathématiques qui lui permettent de comprendre et d'agir est un enjeu fondamental pour notre démocratie.

Cette brochure est donc une tentative pour mieux faire connaître le rôle des mathématiques dans les sociétés modernes, informer sur leurs débouchés et inciter ainsi les jeunes à choisir les carrières scientifiques.

Les modèles mathématiques sont omniprésents et les mathématiciens sont de plus en plus souvent consultés comme experts, sans que le public s'y retrouve toujours. Le climat se réchauffe - t-il ? Les simulations cherchant à décrire l'évolution du climat dans le futur sont basées sur des modèles mathématiques. Les OGM sont-elles dangereuses ? On demande l'avis des statisticiens. Les mathématiques financières permettent-elles la maîtrise des risques ou ont-elles encouragé la spéculation ? Quelles seront les énergies du futur ? Une certitude est que l'énergie fossile (charbon, pétrole) arrivera à son terme, mais par quoi la remplacera t- on ?.

Dans tous les domaines, les mathématiques jouent et joueront un rôle clef dans la définition des politiques publiques. Le rôle du scientifique, essentiel mais modeste, est de donner des avis pertinents sans aller au delà ses compétences.

Et pour maîtriser l'avenir, il faut, il faudra de nouvelles mathématiques.



Vue artistique d'un ensemble de Mandelbrot dans l'ensemble des pseudo-quaternions

JFC
WWW.LACTAMME.POLYTECHNIQUE.FR


Énergie
Disposer d'énergies plus compétitives, non émettrices de gaz à effet de serre et respectueuses de l'environnement
Défense et Sécurité
Garantir la pérennité de la dissuasion nucléaire et la sécurité
Technologies pour l'information et la santé
Valoriser l'industrie grâce à la recherche technologique
Recherche fondamentale
S'appuyer sur une recherche fondamentale d'excellence pour développer les programmes de recherche technologique
Le CEA un acteur clef de la recherche technologique en Europe
Acteur majeur en matière de recherche, de développement et d'innovation, le Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives intervient dans trois grands domaines : l'énergie, la défense et les technologies pour l'information et la santé, en s'appuyant sur une recherche fondamentale d'excellence.
Fort de ses 15 000 chercheurs et collaborateurs, aux compétences internationalement reconnues, il constitue une force de proposition pour les pouvoirs publics. Acteur moteur de l'innovation industrielle, le CEA développe des partenariats avec les industriels français et européens. Il est également garant de la pérennité de la dissuasion nucléaire.
Reconnu comme un expert dans ses domaines de compétences, le CEA est pleinement inséré dans l'Espace européen de la recherche avec une présence croissante au niveau international.
cea
énergie atomique • énergies alternatives

Le CNRS aujourd'hui et demain

**Organisme de recherche de référence en Europe et dans le monde, le CNRS a pour mission première l'accroissement des connaissances, en s'appuyant sur toutes ses disciplines et sur sa capacité à les fédérer.
Le CNRS, désormais organisé en instituts, se projette dans une stratégie à long terme qui dessine son avenir à l'horizon 2020.**

L'Institut des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI)
Parmi les instituts du CNRS, l'INSMI a pour mission essentielle d'animer le réseau des laboratoires avec pour objectif de conforter le rayonnement mondial des mathématiques françaises (au second rang après les États-Unis).
www.cnrs.fr/insmi

Le CNRS dans le nouveau paysage de la recherche

La loi de programme pour la recherche (avril 2006), la loi relative à l'autonomie et aux responsabilités des universités (août 2007), la création d'alliances interorganismes (2009) ont profondément modifié le paysage français de la recherche au cours des dernières années. Le CNRS se saisit de cette nouvelle organisation pour aborder les défis scientifiques.

Le CNRS, une pépinière de talents

Avec ses lauréats du prix Nobel, de la médaille Fields et de nombreux autres prix prestigieux, le CNRS a une longue tradition d'excellence.

Rayonnement industriel

Le CNRS est au premier rang des institutions publiques pour le dépôt de brevets en France, derrière six grands groupes industriels : 3765 brevets principaux fin 2009, 382 nouveaux brevets publiés en 2009 dont 44,5% déjà exploités.

Quelques chiffres

25700 personnels permanents
1067 unités de recherche
25000 publications par an

www.cnrs.fr

Cette brochure a été réalisée par

CIJM et MATHS A VENIR

sous la direction de

Marie José Pestel *et* Marie-Françoise Roy

Comité International des Jeux Mathématiques — MATHS A VENIR

avec le soutien

de la Mairie de Paris et du Festival Sciences sur Seine, du CEA, de l'INRIA, du CNRS et les sponsors du colloque MATHS A VENIR 2009 : Alcatel Lucent, AREVA, Caisse des Dépôts, Crédit Agricole, EADS, EDF, Faurecia, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Schlumberger, SFR.

Elle réunit les signatures de

Claudie Haigneré
Philippe Camus
Etienne Ghys
Michaël Ghil
Bruno Goffinet
Jean-Louis Coatrieux
Alain Berthoz
Philippe Depondt
Fabio Finocchi
Marc Lavielle
Jean-Christophe Trama
Gérard Berry
Michaël Eisermann
Patrick Peter
Jean Christophe Yoccoz
Marie-Françoise Roy
Marie José Pestel

Que ces auteurs soient ici remerciés pour leur patience,
leur gentillesse et leur disponibilité

CIJM

8 rue Bouilloux-Lafont
75015 Paris
tél : 01 40 37 08 95
www.cijm.org

MATHS A VENIR

Fondation Sciences Mathématiques de Paris
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
tél : 01 44 27 67 72
www.maths-a-venir.org

Impression FP Impression 01 39 72 21 72 *maquette de couverture* Elsa Godet - www.sciencegraphique.com *Réalisation* Patrick Arrivetz - CIJM


fondation SCIENCES MATHÉMATIQUES de PARIS
Alcatel·Lucent
AREVA
Société Mathématique de France
SMF
IHES
Caisse desDépôts
partenaire engagé
CA
SFdS
SOCIETE FRANÇAISE DE STATISTIQUE
EADS
SMAI
eDF
faurecia
femmes & mathématiques
Schlumberger
INRIA
SFR
cnrs
ministère éducation nationale
Festival SCIENCES SUR SEINE
culture et jeux mathématiques
CIJM
universcience
cea
îledeFrance
MAIRIE DE PARIS