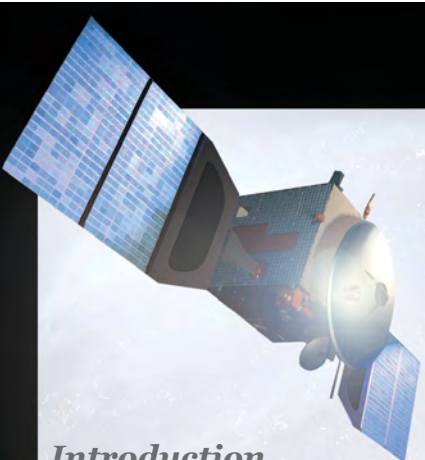


# Mathématiques Astronomie

Express



*Comité international des jeux mathématiques*



# Sommaire

<i>Introduction</i>	1
<i>Gnomon, cadrans solaires et astrolabes</i>	3
<i>Mesure de distance, la quête de la parallaxe</i>	8
<i>Mouvements relatifs et observations astronomiques</i>	13
<i>Les coniques et les trajectoires orbitales des planètes</i>	18
<i>Gravitation, problème des trois corps, chaos</i>	24
<i>Quelle géométrie pour l'espace-temps ?</i>	29
<i>L'univers a-t-il une forme ?</i>	35
<i>Télescopes à ouvertures codées</i>	41
<i>Traitement d'images en astrophysique</i>	47
<i>Les simulations numériques en astrophysique</i>	55



# Introduction

Pierre Léna

Académie des sciences  
Délégué à l'éducation et la formation

Comment se fait-il que, parmi toutes les sciences de la nature, ce soit l'astronomie qui depuis plusieurs millénaires ait eu partie liée si étroite avec les mathématiques, tantôt en suscitant leur développement, tantôt en s'appuyant sur elles pour progresser ? On objectera peut-être que les formes de la nature qu'étudient la botanique ou la zoologie ne sont pas sans rapport avec les mathématiques : la suite de Fibonacci s'observe dans les pommes de pins ou les cœurs de tournesols, la spirale d'Archimède dans la croissance des coquillages. Intéressant certes, mais sans commune mesure avec l'étroit et antique mariage entre astronomie et mathématiques. La raison en est simple : elle tient à la propagation de la lumière en ligne droite. Les rayons de lumière, bien qu'invisibles si une brume ou des poussières ne sont pas présentes pour en matérialiser la trajectoire, furent tôt perçus comme la plus parfaite incarnation de la ligne droite du géomètre - même si, des siècles plus tard, il fut réalisé que ces rayons pouvaient parfois se courber (dans les mirages) ou que la "ligne droite" était une notion relative au type d'espace considéré. Cette ligne droite qui forme des angles, des parallèles, des polygones...

Ainsi, Thalès contemplant l'ombre des pyramides portée au soleil en déduisait la hauteur de celles-ci, mais également établissait son célèbre théorème. Ainsi, Eratosthène mesurait la circonférence terrestre grâce au jeu des ombres portées à des latitudes différentes. Ainsi, Aristarque, par géométrie et par chance, établissait que le Soleil était bien plus loin de nous que la Lune. Et que dire des gnomons, cadrans solaires et autres astrolabes, merveilleux instruments et véritables concentrés de la géométrie antique... Déjà donc, à la naissance de la géométrie, cette invisible ligne droite de la lumière arpentait l'espace et permettait de mesurer le temps. Avant la lunette de Galilée, ce sont encore des alignements, mesures d'angles et d'arcs qui dominent l'astronomie, parfois avec une précision admirable comme celle qu'atteignait Tycho Brahe dans son île de Hven. La quête de la parallaxe des étoiles, pour enfin connaître leurs distance, fut aussi un moteur formidable de l'évolution des instruments astronomiques et source de grandes découvertes.

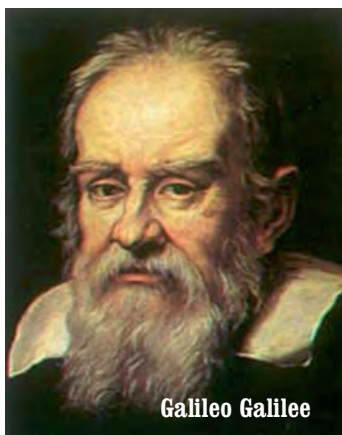


Une fois l'espace arpenté et la géométrie bien assise, l'étude du mouvement devenait possible. Celui des étoiles, entraîné par la rotation terrestre, bien régulier, ne faisait guère problème. Celui des planètes était plein de mystère, mais mesurable avec précision. C'est pour rendre compte de leurs mouvements que Newton, puis Leibniz, développèrent le calcul infinitésimal, adossé à la loi de la gravitation universelle. Il était plus aisé de faire des mesures précises sur les planètes que sur une boule en chute libre sur Terre ! Avec Galilée et Newton, la mécanique, science du mouvement, était née. Elle sera capable de rendre compte des trajectoires régulières des planètes mais aussi du chaos de leur évolution à long terme.

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, la physique révisé nos représentations de l'espace et du temps : ils ne sont plus un cadre absolu aux phénomènes physiques, et l'espace-temps est structuré par la matière. Bouleversements en astrophysique. La géométrie de la vie quotidienne est remplacée par celles, étranges, de la cosmologie ou du voisinage d'un trou noir. L'univers lui-même pourrait nous donner l'illusion de l'infini en étant chiffonné par d'infinis jeux de l'espace.

2009 célèbre une année mondiale de l'astronomie, quatre siècles après que Galilée ait découvert les satellites de la planète Jupiter et ait vu dans leur mouvement un système solaire en miniature, confortant ainsi le modèle de Copernic. C'est aussi le quatre centième anniversaire de la publication par Kepler de ses deux premières lois. N'est-ce pas le moment idéal pour fêter aussi la merveilleuse fécondité des liens entre l'astronomie et les mathématiques ? Celle-là même qu'affirmait Galilée lorsqu'il énonçait que *la nature est un livre écrit en langage mathématique*.

P. L.



# Gnomon, cadrans solaires et astrolabes

Denis Savoie

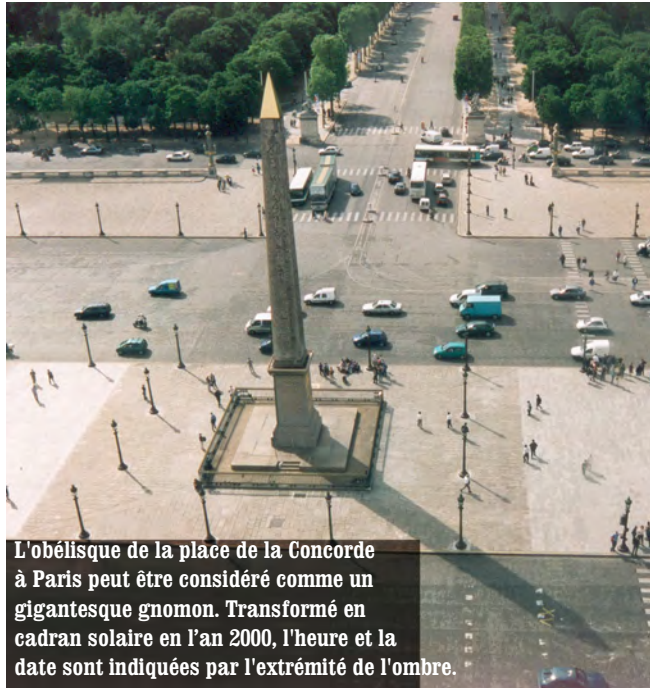
Directeur du Planétarium, Palais de la découverte

## Le gnomon

L'astronome et mathématicien Apollonius de Perge (III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) a écrit plusieurs traités dont un seul nous est parvenu, en partie en grec et en arabe, sous le nom de *Sections coniques*. Avant même que cet ouvrage soit édité partiellement au XVI<sup>e</sup> siècle, il eut une influence considérable puisque les mathématiciens arabes y puisèrent les informations relatives à la propriété des foyers en optique. Quant à Kepler, il y trouva la courbe qui approximait le mieux l'orbite ovale de la planète Mars qu'il cherchait à déterminer, à savoir l'ellipse.

Le traité des *Sections coniques*, dans lequel Apollonius de Perge établit les noms et les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, eut certainement pour point de départ la théorie des cadrans solaires. En effet, le premier

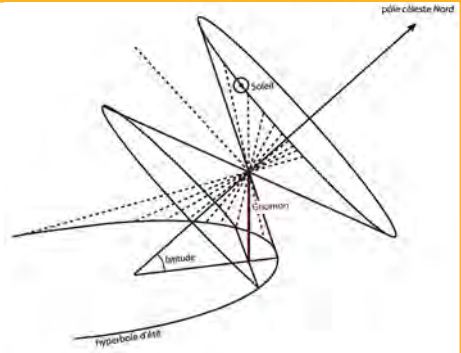
instrument astronomique fut le gnomon, simple bâton planté en terre, dont l'étude de l'ombre permettait de déterminer des paramètres fondamentaux comme la latitude du lieu ou l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre (voir photo). Grâce à l'étude de la trajectoire de l'ombre (voir encadré page suivante), on pût également déterminer les dates des équinoxes et des solstices et mettre ainsi en évidence l'inégalité de la durée des saisons.



L'obélisque de la place de la Concorde à Paris peut être considéré comme un gigantesque gnomon. Transformé en cadran solaire en l'an 2000, l'heure et la date sont indiquées par l'extrémité de l'ombre.

### Etude de la trajectoire de l'ombre

Au cours de la journée, les rayons solaires passant par le sommet du gnomon engendrent un cône dont l'axe est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et dont l'angle au sommet est égal à l'angle qui le sépare du pôle céleste nord. Ce cône intersecte le plan horizontal du gnomon et, sous nos latitudes, la section conique ainsi obtenue est une branche d'hyperbole. Aux équinoxes le cône est dégénéré en un plan (son angle au sommet est égal à  $90^\circ$ ) dont l'intersection avec le plan horizontal engendre une droite. Ainsi, la trajectoire de l'ombre de l'extrémité d'un gnomon résulte de l'intersection d'un cône et d'un plan, lequel peut être vertical ou incliné. En faisant varier l'inclinaison du plan et la date, on peut obtenir sous nos latitudes toute une famille de coniques.



## Les cadrans solaires

Dans l'Antiquité gréco-romaine se développe la technique de construction des cadrans solaires, principalement dans des volumes : cadrans coniques, sphériques, etc. Tous les cadrans antiques ont en commun le fait qu'ils indiquent une heure variable et que c'est l'extrémité seule de l'ombre qui indiquait l'heure. L'heure antique, également appelée inégale ou temporaire, était définie comme la douzième partie de l'intervalle de temps séparant le lever du coucher du Soleil. Sous nos latitudes, l'heure durait 40 minutes en hiver et 80 minutes en été ; il n'y a qu'aux équinoxes où l'heure durait 60 minutes, constituant l'heure équinoxiale.

Au Moyen Age apparaissent sur des édifices le plus souvent religieux des cadrans un peu particuliers, les cadrans canoniaux. Il ne s'agit pas véritablement de cadrans solaires, mais plutôt d'indicateurs de prières ou d'offices religieux. Ils ne comportent aucune indication chiffrée et se composent le plus souvent d'un demi-cercle divisé en 6, 8 ou 12 secteurs égaux. Par convention, lorsque l'ombre d'une tige recouvrait un segment de droite, on devait célébrer un office.

La civilisation arabe, qui hérita en partie des connaissances astronomiques des Grecs, développa la trigonométrie sphérique, et apporta une amélioration majeure dans les cadrans solaires : au lieu d'utiliser des gnomons horizontaux ou verticaux, les Arabes eurent l'idée de placer l'indicateur d'ombre parallèle à l'axe de rotation de la Terre, c'est-à-dire en le pointant vers le pôle céleste. On réserve l'appellation de style polaire à la tige ainsi orientée. Avec ce système, on peut utiliser des heures constantes, égales à 60 minutes toute l'année ; de plus, c'est la totalité de l'ombre qui indique l'heure, et plus seulement

l'extrémité de l'ombre. En d'autres termes, si la longueur de l'ombre change avec les saisons, la direction de l'ombre est la même pour une même heure toute l'année.

En Occident, malgré le développement de l'horlogerie à partir du XIII<sup>e</sup> siècle, les cadrans solaires se répandirent de plus en plus ; la plupart étaient verticaux, tracés sur les églises, sur des châteaux, ou sur de riches demeures. On leur faisait indiquer les dates des saisons, les heures de lever et de coucher du Soleil, etc. Certains de ces cadrans étaient portatifs, utilisant la variation de la hauteur du Soleil au cours de la journée pour déterminer l'heure. D'autres n'indiquaient que midi solaire, et servaient en quelque sorte de repère absolu pour régler les horloges. Ce type de cadran, appelé méridienne, était même parfois construit à l'intérieur des bâtiments, comme la méridienne de l'église Saint-Sulpice à Paris, ou celle de l'Observatoire de Paris. Aux XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles, on rivalisa d'ingéniosité pour construire des cadrans solaires originaux, comme les cadrans analemmatiques où le gnomon est mobile et les cadrans à réflexion utilisant la tache de lumière projetée par un miroir. A partir du XVIII<sup>e</sup> siècle, on fit indiquer à certains cadrans solaires le temps moyen en incorporant l'équation du temps dans le tracé, ce qui donne des courbes en forme de huit. On pouvait ainsi régler les horloges sur un temps uniforme (le temps solaire moyen), le temps solaire vrai indiqué par les cadrans ne l'étant pas.

Pour construire tous ces cadrans solaires, du moins les plus classiques, il existait des cadraniers, c'est-à-dire des artisans qui étaient chargés de calculer le cadran et de le tracer soit en le peignant soit en le sculptant. Pour le calcul, les cadraniers disposaient de tables toutes prêtes où était indiqué l'angle entre chaque ligne horaire en fonction de l'orientation du mur et de la latitude.

Les plus grands géomètres ont traité de gnomonique (Descartes, Kepler, Lalande, Monge...) et même si aujourd'hui cette branche de l'astronomie n'est plus qu'une curiosité, de nouveaux types de cadrans ont été inventés comme les cadrans bifilaires au début du XX<sup>e</sup> siècle. L'informatique a également permis plus récemment de s'attaquer aux tracés des cadrans sur les surfaces non planes complexes.

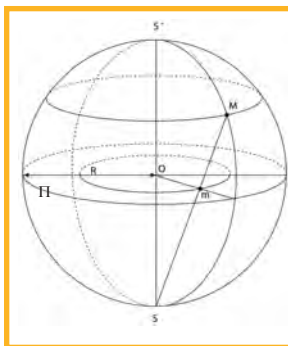


## L'astrolabe

C'est également à Apollonius de Perge que l'on doit d'avoir démontré que tout cône oblique admet deux familles de sections circulaires. A partir de là, on comprit que la projection stéréographique (voir encadré) transformait un cercle de la sphère en un cercle du plan. Cette propriété fondamentale de la projection stéréographique fut mise en application dans un instrument qui connut un succès considérable, l'astrolabe planisphérique (voir photo). C'est un instrument plan qui représente le mouvement diurne de la voûte céleste et le mouvement annuel du Soleil. Si on se perd en conjectures sur son inventeur (Eudoxe, Hipparque, Ptolémée), le plus ancien texte conservé relatif à cet instrument est le *Traité de l'astrolabe* de Jean Philopon (vers 490 - vers 570). Mais ce sont les astronomes arabes qui vont donner à cet instrument grec une très vive impulsion puisque entre 800 et 1100, de très



**Astrolabe persan. On distingue nettement l'araignée ajourée, avec ses crochets qui correspondent à la position des étoiles. Sous l'araignée mobile se trouve le tympan avec ses cercles d'azimut, de hauteur, d'heure, etc.**



### *La projection stéréographique*

Considérons une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , coupée par un plan  $\Pi$  passant par  $O$ . Ce plan, appelé plan de projection, coupe la sphère selon un grand cercle de rayon  $R$ . Le point  $S$  de la sphère est le centre de projection. On appelle projection stéréographique d'un point  $M$  de la sphère le point  $m$  obtenu en prenant l'intersection de  $SM$  avec le plan de projection  $\Pi$ .

La projection stéréographique est aujourd'hui utilisée notamment en cartographie, principalement pour représenter les régions polaires.

nombreux traités verront le jour avec d'importantes innovations et applications. La projection stéréographique présente plusieurs particularités qui la rendent intéressante : d'une part on l'a vu, elle transforme un cercle de la sphère en cercle sur le plan, ce qui simplifie grandement le tracé ; d'autre part, c'est une projection



conforme, ce qui veut dire qu'elle conserve les angles que forment entre eux les cercles de la sphère origine. Ainsi, un angle mesuré entre deux courbes sur l'astrolabe a même valeur que celui que l'on pourrait mesurer dans le ciel. Précisons d'emblée qu'un astrolabe est un instrument de calcul et de pédagogie : en aucune façon il ne sert à faire des observations, sauf de façon anecdotique. L'instrument se compose d'une partie fixe, la mère, dans laquelle on insère des tympan qui constituent la projection stéréographique des cercles de la sphère (cercle d'azimut, de hauteur, de crépuscule...). La partie mobile est appelée araignée : elle figure de façon artistique la position des étoiles et du Soleil.

L'astrolabe permet de résoudre de très nombreux problèmes d'astronomie de position, comme par exemple déterminer l'heure (le jour comme la nuit), la visibilité d'une étoile au-dessus de l'horizon, l'heure de lever ou de coucher d'un astre, son azimut aussi bien que sa hauteur à un instant donné, la durée du jour et de la nuit, etc. L'instrument se révèle également très commode lorsqu'on l'utilise à des fins religieuses : les heures des cinq prières islamiques par exemple sont faciles à déterminer, d'autant plus que l'astrolabe permet de calculer à quel instant le Soleil atteint une certaine hauteur sous l'horizon (aube et crépuscule). Ajoutons que l'utilisation astrologique de l'astrolabe pendant la période de l'apogée arabo-islamique ne doit pas être sous-estimée ; grâce à lui, il était aisé de déterminer et de visualiser l'ascendant d'une constellation zodiacale qui se lève à un instant précis, le signe astrologique ainsi que tous les éléments de l'horoscope. D.S.

**Calcul de la latitude avec un gnomon**

La hauteur  $h$  du Soleil au-dessus de l'horizon lorsqu'il est au méridien, donc au plus haut, se calcule par :

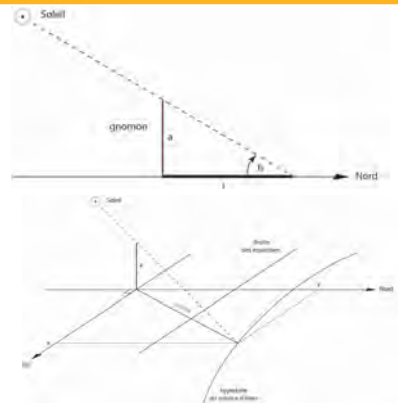
$$h = 90^\circ - \phi + \delta$$

$\phi$  étant la latitude du lieu,  $\delta$  la déclinaison du Soleil (distance angulaire du Soleil à l'équateur : varie de  $-23^\circ 26'$  au solstice d'hiver à  $+23^\circ 26'$  au solstice d'été). En mesurant aussi précisément que possible la longueur de l'ombre d'un gnomon à midi vrai, donc lorsque l'ombre est la plus courte, si  $l$  est la longueur de l'ombre et  $a$  la hauteur du bâton, on a alors :

$$a/l = \tan h.$$

On en déduit la latitude du lieu en faisant :

$\phi = 90^\circ + \delta - h$ . Aux équinoxes (20 mars et 22 septembre), la déclinaison du Soleil est nulle, de sorte que  $\phi = 90^\circ - h$ , ce qui permet d'obtenir directement la latitude du lieu : les astronomes de l'Antiquité procédaient de cette façon. L'extrémité de l'ombre d'un bâton planté verticalement sur un sol parfaitement horizontal décrit sous nos latitudes une courbe appelée hyperbole.



**Pour en savoir plus**

**R. D'Hollander**, *L'astrolabe, Histoire, théorie et pratique*, éd. Institut Océanographique, Paris, 1999  
**D. Savoie**, *Les cadrans solaires*, éd. Belin-Pour la Science, Paris, 2003  
**D. Savoie**, *La Gnomonique*, éd. Les Belles Lettres, Paris, 2007

# Mesure de distance, la quête de la parallaxe

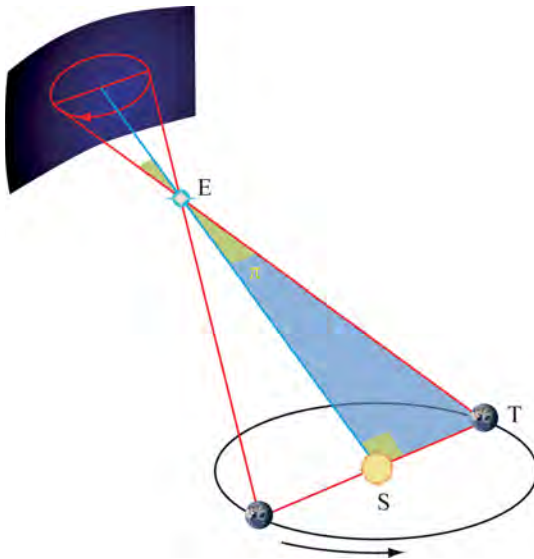
Marc Goutaudier  
Palais de la découverte

*J'étais engagé dans une série d'observations sur la parallaxe des étoiles fixes, lorsque mon attention fut attirée par une étoile qui semblait plus étendue que celles qui l'entouraient.*

En 1781, Herschel découvrait la planète Uranus. Comme beaucoup d'astronomes avant lui puis après lui, il s'était mis en tête de mesurer un insaisissable déplacement annuel qui devait en théorie affecter toutes les étoiles.

Cette quête épique prend sa source en 1543. Copernic, dans l'exposé de son système héliocentrique, propose de mettre la Terre en mouvement. Si comme il l'affirme, elle tourne autour du Soleil, les astronomes devraient détecter dans le ciel le " reflet " de cette révolution terrestre.

L'argument de Copernic pour justifier l'absence de parallaxe dans les observations était d'affirmer que les étoiles étaient trop éloignées pour qu'on puisse mesurer un si infime déplacement. Tycho Brahe, sans conteste le plus fin



## Mesure de la parallaxe

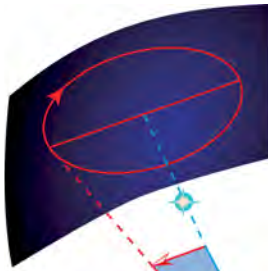
En théorie, alors que la Terre (T) effectue un tour complet autour du Soleil (S), une étoile (E) décrit sur la voûte céleste une ellipse dont le demi grand-axe est vu sous un petit angle  $\pi$  nommé parallaxe. Comme on le voit dans le triangle rectangle TSE,  $\tan \pi = \frac{ST}{SE}$

La parallaxe est d'autant plus petite que l'étoile est éloignée et la mesurer permet d'en connaître la distance si l'on connaît la distance Terre-Soleil. En pratique, étant données les distances phénoménales qui nous séparent des étoiles (même les plus proches), il faut être capable de mesurer un angle minuscule, toujours inférieur à la seconde d'arc.

observateur de la seconde moitié du XVI<sup>e</sup> siècle, balaie cette hypothèse. Il estime que les plus brillantes des étoiles sont vues sous un angle d'une minute d'arc. S'il est impossible d'en déceler la parallaxe cela revient à leur accorder au minimum des dimensions comparables à la distance Terre-Soleil ! Ce fait paraissant inconcevable, il faut se résoudre à l'idée d'une immobilité de la Terre. L'observation du ciel au travers de lunettes au début du XVII<sup>e</sup> rendra caduque cette objection en révélant les limites d'une observation à l'œil nu du ciel.

Au cours du XVII<sup>e</sup> siècle, le géocentrisme vacille. Les astronomes rejoignent progressivement le camp copernicien. Les plus habiles d'entre eux se dotent d'instruments toujours plus précis et recherchent minutieusement la preuve physique de leur conviction : la parallaxe. Mais leur démarche reste vaine et il leur faut reconnaître que les distances qui nous séparent des étoiles surpassent celles à portée de leurs instruments. En 1687, leur appétit est aiguisé par les lois de la mécanique et celles de la gravitation universelle, énoncées par Newton, qui confirment que la Terre est bel et bien en mouvement. C'est d'ailleurs sous l'impulsion de Newton, et pour des raisons étrangères à notre affaire, que le premier astronome royal de l'observatoire de Greenwich, Flamsteed, étudie en 1689 une série d'observations faites sur l'Etoile Polaire. Elle révèle un écart imprévu et systématique de 40 secondes d'arc entre ses positions des mois de juin et de décembre. *Je pris conscience que cela ne pouvait provenir que de la parallaxe.* Flamsteed y voit naturellement l'effet tant recherché. Mais les critiques se font jour. Roemer et Cassini montrent que, si parallaxe il y avait, elle se ferait principalement sentir en mars et en septembre. Dépité et en manque d'argument, Flamsteed ne peut que s'en remettre aux erreurs instrumentales.

Résignation malencontreuse car en 1726, Molyneux constate des écarts similaires sur l'étoile  $\gamma$  Draconis. Bradley reprend le flambeau, étend l'étude à un grand nombre d'étoiles et montre qu'elles semblent toutes affectées par les mêmes errances. Comme dans le cas des observations de Flamsteed, un décalage de six mois est constaté avec l'effet parallactique. En 1728, il apporte une explication à ce phénomène. Roemer avait montré quelques décennies avant le caractère fini de la vitesse de la lumière. Lors de sa révolution autour du Soleil, la Terre possède, elle-même, une vitesse. Bien que nettement plus faible, elle se combine dans nos observations à celle de la lumière et nous amène à voir les étoiles dans des directions différentes de celle attendue. Ce phénomène, nommé aberration stellaire, est similaire à celui observé par temps de pluie. La pluie tombe verticalement, une personne s'en protégeant devra en fonction de sa vitesse incliner son parapluie vers l'avant, et ce, d'autant plus qu'elle se déplace rapidement.



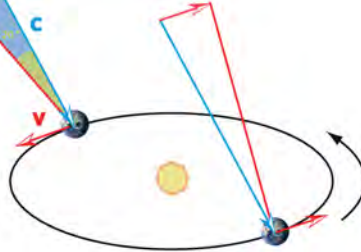
### L'aberration stellaire

Les astronomes en braquant un télescope vers une étoile se voient contraints de modifier légèrement l'orientation du tube de leur télescope pour compenser leur propre mouvement. La Terre est emportée dans son mouvement annuel autour du Soleil à une vitesse  $v$  de 30 km/s. La lumière d'une étoile se propage, elle, à une vitesse  $c$  de 300 000 km/s. Lors de sa révolution, la Terre change constamment de direction et la correction à apporter évolue. Une étoile décrit ainsi chaque année sur la voûte céleste une ellipse dont le demi grand-axe est vu sous un angle  $\alpha$  tel que, comme on le voit dans le triangle rectangle bleu,

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} = 20''$$

triangle bleu,

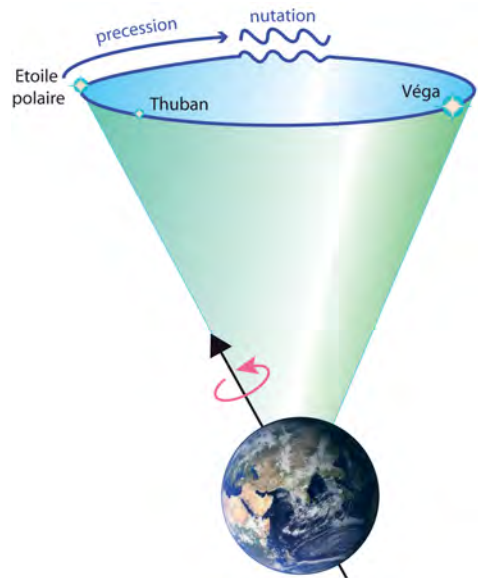
L'aberration stellaire recevra une interprétation légèrement différente après la publication par Einstein de sa théorie de la relativité restreinte, en 1905.



Contre toute attente, l'aberration stellaire constitue donc la première preuve physique du mouvement de notre planète. La quête de la parallaxe perd de sa superbe mais la traque ne s'arrête pas pour autant. Bradley poursuit son étude et, 20 ans plus tard, met en évidence une autre irrégularité dans le mouvement des étoiles. Un mouvement périodique de 18,6 ans et de 9 secondes d'arc qu'il relie au mouvement de la Lune. (voir encadré ci-dessous)

### Mouvements de la Terre

Depuis l'Antiquité, un mouvement d'ensemble de la voûte céleste, nommé précession, avait été mis en évidence. Ce n'est que bien plus tard qu'il reçut une interprétation physique. La Terre n'est pas parfaitement sphérique. Le Soleil et la Lune agissent sur son renflement équatorial et amènent son axe de rotation à changer lentement de direction et à décrire en 25 800 ans un cône, dit de précession. Actuellement l'axe pointe près de l'étoile polaire. L'orbite lunaire étant, de plus, inclinée sur le plan Soleil-Terre, elle engendre un mouvement oscillatoire de 18,6 ans. C'est ce dernier phénomène, appelé nutation, que Bradley mit en évidence.





Au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle, les astronomes devaient donc tenir compte d'une multitude de corrections avant d'espérer entrevoir les effets propres à la distance d'une étoile. Il leur fallait prendre en considération précession, nutation, aberration mais aussi les effets liés à la réfraction atmosphérique et au mouvement propre d'une étoile. Jusque-là, ils s'étaient attachés à mesurer l'évolution des coordonnées absolues d'une étoile. Herschel est l'un des premiers à prôner une méthode différentielle qui consiste à suivre et mesurer les errances d'une étoile rapportées à ses proches voisines. Ces dernières, d'un éclat bien plus faible, sont supposées lointaines, de mouvement propre et de parallaxe négligeables. La dérive relative de la première ne serait alors due qu'aux seuls effets de son mouvement propre et de sa parallaxe. Il sélectionne plusieurs centaines de couples. Vingt années s'écoulent et Herschel doit renoncer. Il démontre que nombre de ces couples sont liés physiquement et constituent des systèmes binaires d'étoiles tournant les unes autour des autres.

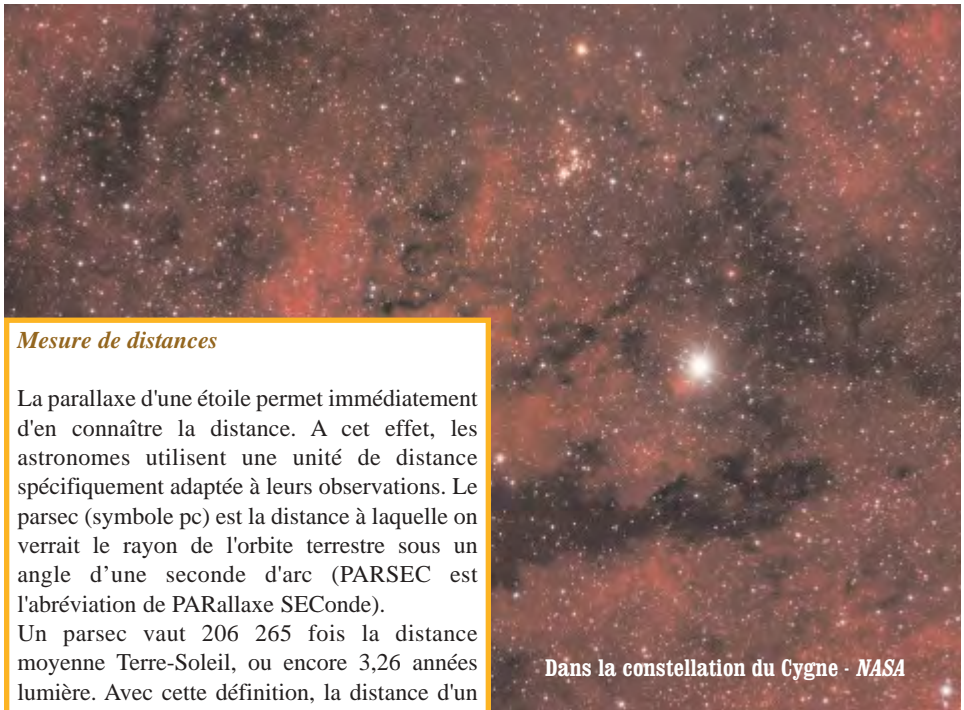
Les conséquences de cette découverte sont considérables. L'universalité de la gravitation newtonienne prend désormais tout son sens. En ce qui nous concerne, deux étoiles d'un couple étant à une même distance de nous, leur forte différence d'éclat montre que certaines étoiles peuvent dans la réalité s'avérer bien plus brillantes que d'autres. Qu'en conséquence, le simple éclat apparent d'une étoile ne peut, à lui seul, constituer un critère de proximité.

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, les télescopes, bien qu'utilisés par Herschel, ne connaissent pas encore leur heure de gloire. Leur miroir se ternit rapidement et leur maniement s'avère délicat. Les plus précis des instruments sont des lunettes dont on sait désormais corriger les effets de l'aberration chromatique. L'école allemande excelle dans leur construction. Les observatoires s'équipent ainsi de lunettes sortant de ces ateliers. Si la parallaxe se dérobe encore, son temps est compté d'autant que tous les obstacles entravant sa détection ont été levés. Struve, à l'observatoire de Doprát, en Russie, jette son dévolu sur l'étoile brillante et de fort mouvement propre, Véga. En Allemagne, à l'observatoire de Königsberg, Bessel concentre quant à lui ses efforts sur un système binaire faible en éclat mais dont le mouvement propre exceptionnel et la forte séparation angulaire retiennent son attention. Ils choisissent tous les deux une méthode différentielle, avec des étoiles repères assez lointaines pour s'assurer qu'elles ne sont pas liées physiquement. En 1837, Struve publie ses résultats, il attribue à l'étoile Véga une parallaxe de  $0,125'' \pm 0,055''$ . Cependant ses observations comptent moins d'une vingtaine de mesures qui sont mal distribuées dans l'année. Ces résultats demandent donc confirmation. Une seconde série d'observations l'amènera d'ailleurs à rehausser son estimation à  $0,262'' \pm 0,025''$ . La valeur exacte étant de  $0,125''$  ! Bessel, quant à lui plus prudent, accumule les observations et de façon

bien plus régulière. Bien qu'à la limite des possibilités de son instrument, la qualité de ses mesures et le soin dans leurs interprétations ne laissent pas de place au doute. Il montre d'une façon implacable que l'étoile 61 Cygni est affectée d'un mouvement parallaxique de  $0,313'' \pm 0,02''$ . Son étude, publiée en 1839, lui attire immédiatement les faveurs de ses pairs. La valeur retenue aujourd'hui est sensiblement plus faible  $0,286''$ .

La quête de la parallaxe constitua ainsi un véritable moteur dans la recherche en astronomie. Après quasiment trois siècles d'effort, Bessel est le premier à la mettre en évidence. Il n'en demeure pas moins que les travaux infructueux des astronomes qui s'étaient attachés au problème ont bien souvent été largement récompensés par d'immenses découvertes.

M.G.



Dans la constellation du Cygne - NASA

### Mesure de distances

La parallaxe d'une étoile permet immédiatement d'en connaître la distance. A cet effet, les astronomes utilisent une unité de distance spécifiquement adaptée à leurs observations. Le parsec (symbole pc) est la distance à laquelle on verrait le rayon de l'orbite terrestre sous un angle d'une seconde d'arc (PARSEC est l'abréviation de PARallaxe SEconde).

Un parsec vaut 206 265 fois la distance moyenne Terre-Soleil, ou encore 3,26 années lumière. Avec cette définition, la distance d'un astre est l'inverse de sa parallaxe exprimée en seconde d'arc.

L'étoile 61 Cygni se trouve donc à une distance

$$d = \frac{1}{0,286} \approx 3,5 \text{ pc}, \text{ soit } 11,4 \text{ années lumière.}$$

C'est l'une de nos plus proches voisines.

### Pour en savoir plus

F . Mignard, *La recherche de la parallaxe des étoiles de Copernic à Bessel*, Cahiers du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences-Université de Nice 1982, no13-14, pp. 1-42

# Mouvements relatifs et observations astronomiques

Jean-François Colonna

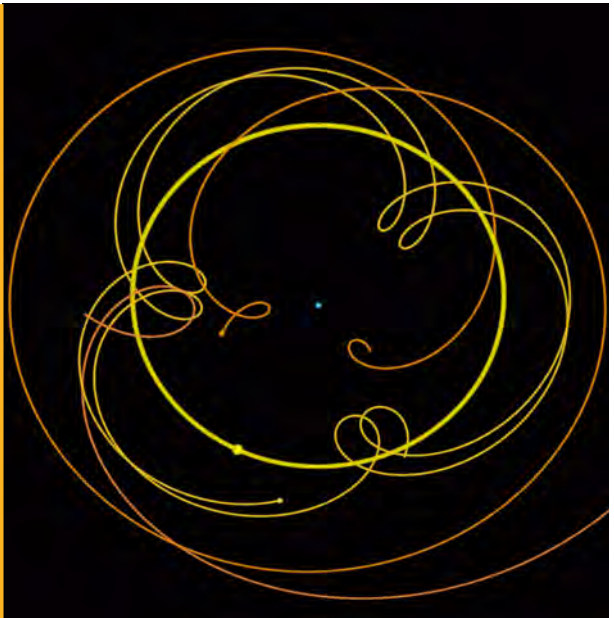
Centre de mathématiques appliquées - Ecole Polytechnique

Nos sens semblent nous dire que notre Terre est immobile dans l'espace : en effet, nous ne sentons pas son mouvement. Cela est d'ailleurs fort heureux car, le temps de lire cette phrase, elle s'est déplacée de plusieurs milliers de kilomètres dans son mouvement autour du Soleil, auquel il convient d'ajouter celui du Soleil autour de la Voie Lactée (notre galaxie), ainsi que le déplacement de celle-ci dans l'Univers ! Ainsi, nos sens nous trompent et c'est pourquoi nos ancêtres ont longtemps cru que notre Terre était immobile au centre du Monde. Or depuis des millénaires l'Homme observe les ciels et ses phénomènes pour la plupart réguliers. En particulier, sur la sphère céleste, plusieurs corps se déplacent nettement tout au long de l'année par rapport aux étoiles (ces dernières paraissant quasiment fixes) : ce sont les planètes. Leur mouvement semble complexe ainsi que le montre la figure 1.

Pendant longtemps cette vision du système solaire (dite *géocentrique*) fut considérée comme la réalité et décrite par le modèle des

## *Le système solaire géocentrique*

*Figure 1* : Le système solaire géocentrique, c'est-à-dire dans lequel la Terre est située au centre et donc immobile (corps bleu). Le mouvement du Soleil (corps jaune le plus gros) est quasiment circulaire, alors que les planètes (pour simplifier seules Mercure, Vénus et Mars sont représentées) décrivent des trajectoires beaucoup plus complexes possédant des boucles dites de rétrogradation. Au cours du temps, leur mouvement est fait d'alternances de grandes avancées et de petits reculs.



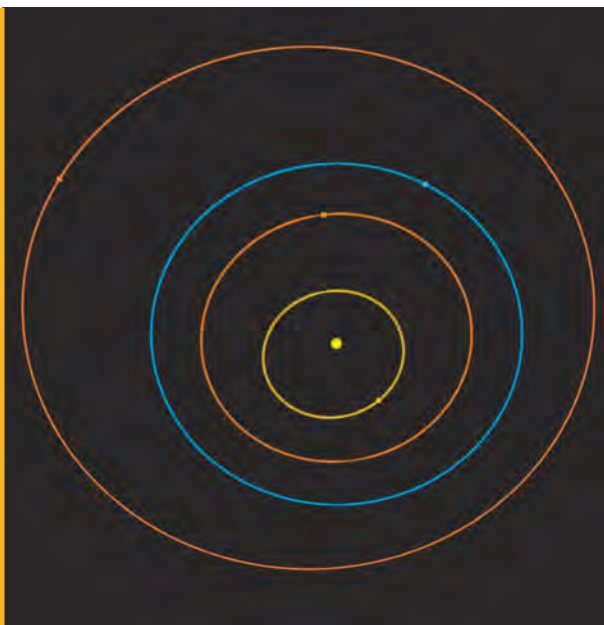
épicycles de Ptolémée, astronome grec du deuxième siècle de notre ère (voir l'annexe 1). Mais les progrès accomplis en matière d'observation (invention de la lunette astronomique) et de mesure (du temps, des positions,...) eurent raison de cette description.

Au XVI<sup>e</sup> siècle, en 1543, une révolution éclata : le moine polonais Nicolas Copernic (*De revolutionibus orbium caelestium libri VI*) mit le Soleil au centre du système solaire, faisant par là-même de notre Terre une planète comme les autres. Puis en 1609, Johannes Kepler (*Astronomia Nova*) décrivit la trajectoire des planètes (y compris celle de la Terre évidemment) par des ellipses dont l'un des deux foyers était le Soleil, ainsi que le montre la figure 2.

Enfin, en 1687, Sir Isaac Newton publia ses fameux *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* dans lesquels les lois de la mécanique classique

### *Le système solaire héliocentrique*

Figure 2 - Le système solaire héliocentrique, c'est-à-dire dans lequel le Soleil est situé au centre et donc immobile. Comme sur la figure 1, seules les quatre premières planètes -Mercure, Vénus, la Terre et Mars- sont représentées. Elles décrivent toutes (la planète bleue -la Terre- y compris) des trajectoires elliptiques (quasiment circulaires).



firent leur apparition : la description mathématique du système solaire qu'elles permirent alors est d'ailleurs celle qui fut utilisée pour calculer les différentes figures qui illustrent cet article (voir l'annexe 2).

Mais la déformation apparente des trajectoires des planètes lors de leur observation depuis la Terre ne doit pas nous étonner. Imaginons une scène plus quotidienne : nous sommes immobiles sous la pluie, un jour sans vent. Nous voyons alors les gouttes d'eau tomber verticalement. Montons maintenant dans une voiture animée d'un mouvement uniforme (c'est-à-dire en ligne droite et à vitesse constante) : les gouttes d'eau semblent maintenant suivre une trajectoire



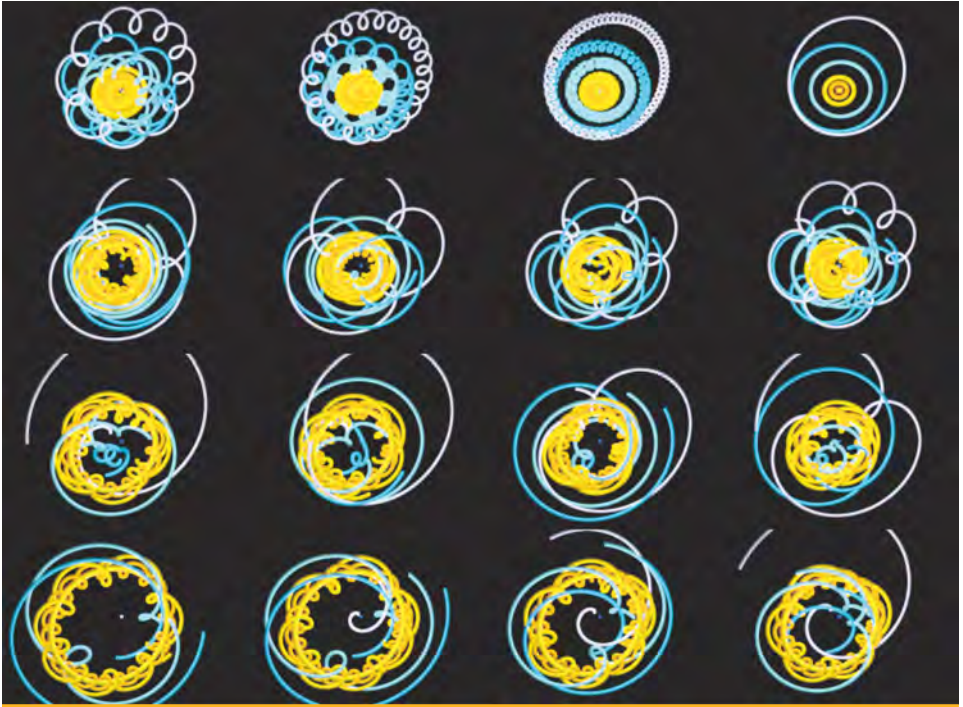
oblique, d'autant plus inclinée que le véhicule se déplace vite. L'expérience peut être ensuite compliquée à loisir : à bord d'un *scenic railway*, les gouttes sembleraient décrire des trajectoires fort complexes donnant même parfois l'illusion qu'elles se jouent de la pesanteur !

Ce " simple " changement de point de vue (déplacer le centre du système solaire de la Terre vers le Soleil) a simplifié et unifié la représentation et la description de notre monde proche, mais au prix de la perte de la place privilégiée que l'Homme croyait y occuper. Depuis, cette révolution n'a fait que se poursuivre et s'amplifier puisqu'il est apparu ensuite que notre Soleil n'était qu'une étoile parmi beaucoup d'autres, que notre galaxie n'était qu'une galaxie parmi beaucoup d'autres,... et aujourd'hui d'ailleurs, certains théoriciens imaginent que notre Univers pourrait n'être qu'un " simple " univers parmi beaucoup d'autres...

Ce problème de mouvement relatif n'est évidemment pas propre aux astronomes de la Terre. Il est donc intéressant de voir le ciel qui serait observé depuis les autres planètes, voire depuis des points de vue très différents. Ainsi la figure 3 montre l'évolution de la perception du système solaire en se déplaçant du Soleil à Pluton, alors que la figure 4 fait appel à une planète fictive éloignée du Soleil et située en dehors du plan de la trajectoire de la Terre (dit *plan de l'écliptique*, qui est aussi le plan des trajectoires des huit planètes).

Plusieurs leçons peuvent être tirées de ces " expériences ". D'une part pour certains systèmes les notions d'*ordre* et de *désordre* peuvent être relatives. En effet, ainsi que le montre la figure 4, les trajectoires des planètes du système solaire sont en réalité des ellipses (la situation est ordonnée et régulière), alors que des trajectoires complexes, entrelacées et irrégulières peuvent être observées (la situation semble alors désordonnée et irrégulière).

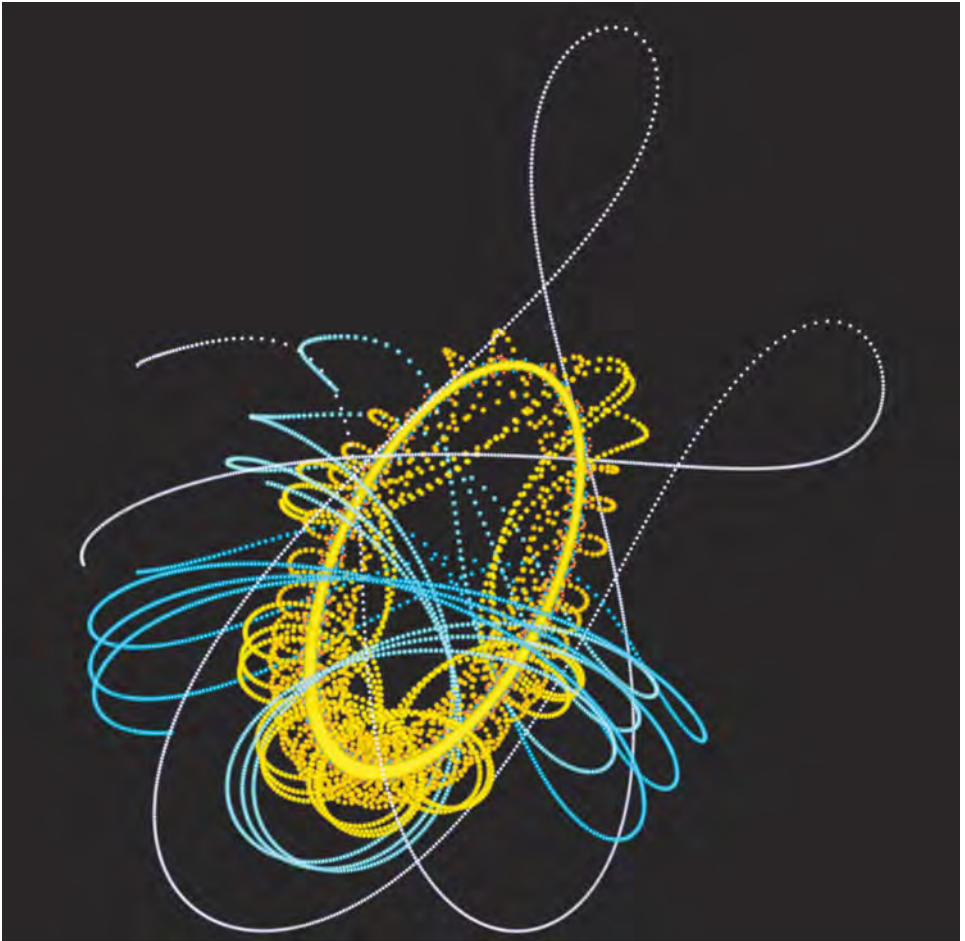
D'autre part, l'observation des cieux a été au cours des millénaires un moteur essentiel de notre évolution en ce qui concerne la science, la philosophie et les religions ; où en serait aujourd'hui notre civilisation si notre Terre avait été située, telle la planète fictive de la figure 4, en dehors du plan de l'écliptique et plus loin du Soleil (en supposant que la vie ait pu s'y développer) ? Enfin, le chercheur (physicien, astronome,...) est avant toute chose un observateur (et aussi un arpenteur) de l'Univers ; il est donc essentiel qu'il sache aller au-delà des apparences car les " choses " ne sont pas toujours ce qu'elles semblent être !



**Figure 3** - En se déplaçant du Soleil (image en haut et à droite) à Pluton (image en bas et à gauche), l'observateur voit les ellipses dites képlériennes se déformer en des courbes de plus en plus complexes et entrelacées. Mais tout cela n'est qu'apparence, les planètes continuant évidemment à décrire leurs trajectoires elliptiques (en se souciant fort peu de la position de l'observateur !).



**Figure 4A** - Dans le système solaire réel (le plan de l'écliptique apparaît nettement, alors que celui de Pluton est incliné par rapport à ce dernier) une planète fictive est introduite (elle est coloriée en vert clair afin d'être distinguée facilement des planètes réelles) en respectant la troisième loi dite de Képler (le carré de la période de révolution est proportionnel au cube de la mesure du grand axe).



**Figure 4B** - Les trajectoires apparentes des planètes réelles du système solaire telles qu'elles seraient observées depuis la planète fictive. Seul le Soleil semble décrire une trajectoire régulière (anneau jaune), alors que pour toutes les planètes le bel ordre des épicycles de Ptolémée disparaît complètement pour laisser la place à une forme de chaos qualifiable de virtuel. Ainsi pour ce système, la notion d'ordre est relative (à la position de l'observateur).

**Annexe 1** : Dans le système de Ptolémée chaque planète décrivait à vitesse constante un petit cercle appelé *épicycle* dont le centre décrivait, lui-aussi à vitesse constante, un cercle plus grand centré sur la Terre et appelé *déférent*.

**Annexe 2** : Les lois de la mécanique newtonienne utilisée dans cet article pour calculer la trajectoire des planètes sont principalement d'une part celle qui énonce que l'accélération est proportionnelle à la somme des forces appliquées et d'autre part celle qui indique que l'attraction gravitationnelle entre deux corps est proportionnelle à leurs masses respectives et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

J.-F. C.

### Pour en savoir plus

consulter le site :  
[www.lactamme.polytechnique.fr](http://www.lactamme.polytechnique.fr).

# Les coniques et les trajectoires orbitales des planètes

P. Rocher  
IMCCE - Observatoire de Paris

## Petites histoires des coniques

Les coniques sont connues depuis près de vingt quatre siècles. Leur découverte est attribuée au grec Ménechme au IV<sup>e</sup> siècle avant J.-C. Elles furent étudiées entre autres par Aristote, Euclide et Archimède. Au début du deuxième siècle avant J.-C. un traité complet intitulé les *Sections coniques* fut écrit par Apollonius de Perge (v. 240 av. J.-C. - v. 170 av. J.-C.). Ce traité se compose de huit livres dont sept nous sont connus. Les quatre premiers nous sont parvenus en langue grecque et les trois derniers dans leurs traductions arabes. On doit à l'astronome britannique Edmund Halley (1656 - 1742) une édition complète de ce traité en latin. Ces sept livres comportent jusqu'à 387 propositions, on y trouve les définitions géométriques de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole.

Il y a de très nombreuses manières de définir les coniques.

La plus géométrique est celle qui définit ces courbes comme intersection d'un plan (P) et d'un cône de révolution ( $\Gamma$ ) de sommet O et d'angle au sommet  $\theta$ .

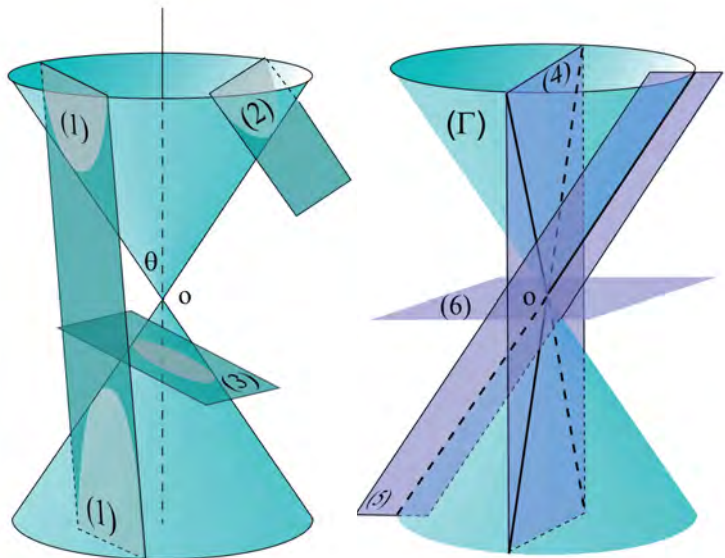


Figure 1 - Définitions géométriques des coniques



Si l'on nomme  $\alpha$  l'angle aigu que fait le plan avec l'axe du cône on a les intersections suivantes :

	si $O \notin (P)$	si $O \in (P)$
$\alpha < \theta$	Hyperbole (1)	Deux génératrices du cône (4)
$\alpha = \theta$	Parabole (2)	Une génératrice du cône (P) est tangente au cône (5)
$\alpha > \theta$	Ellipse (3)	Le sommet O du cône (6)

On retrouve ainsi les trois familles de coniques, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Lorsqu'on les fait tourner autour de leur axe de symétrie ces trois courbes génèrent des surfaces remarquables : l'ellipsoïde, le parabololoïde et l'hyperboloïde.

On peut également définir les coniques comme des ensembles de points vérifiant certaines propriétés, par exemple, à partir d'un foyer et d'une droite directrice. Si l'on se donne dans un plan une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel  $e$  strictement positif, alors l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation

$$\frac{MF}{MH} = e$$

est l'ensemble des coniques,

H étant la projection orthogonale de M sur la droite D.

Si  $e$  est inférieur à un, c'est une ellipse.

Si  $e$  est égal à un, c'est une parabole.

Si  $e$  est plus grand que un, c'est une hyperbole.

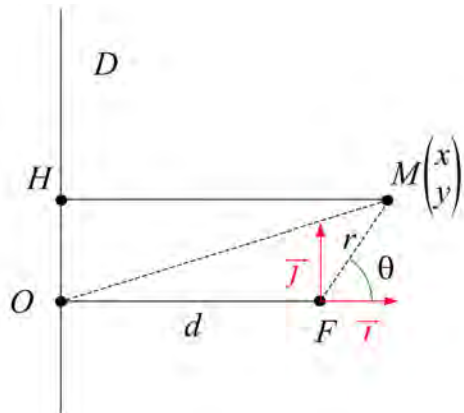


Figure 2 - Définition à partir d'un point et d'une droite directrice.

On donne à  $e$  le nom d'excentricité, D est la directrice de la conique et F est son foyer. La perpendiculaire  $d$  à D passant par F est un axe de symétrie de la conique, c'est son axe focal.

## Le mouvement des planètes

En grec le mot planète signifie astre errant, il n'est donc pas surprenant de trouver, dans l'Antiquité, la Lune et le Soleil parmi les sept planètes connues (la Lune, le Soleil, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne) la Terre étant supposée fixe au centre de l'univers. Très tôt les astronomes comprirent que la voûte étoilée du ciel se déplaçait dans un mouvement circulaire autour d'un axe fixe, mais ils attribuèrent à tort ce mouvement aux astres, alors qu'il s'agissait de la révolution diurne de la Terre sur elle-même. Cela permit de définir un monde sphérique, avec un axe de rotation (l'axe des pôles) et un équateur céleste (le grand cercle perpendiculaire à l'axe de rotation). Ils remarquèrent également que le Soleil parcourait au cours d'une année un autre grand cercle incliné par rapport à l'équateur. Ils appelèrent ce grand cercle *l'écliptique*, car c'est lorsque la Lune est proche de ce cercle qu'il y a des éclipses de Lune et de Soleil. Les directions des intersections de l'écliptique et de l'équateur définissent les directions des équinoxes et les deux directions perpendiculaires définissent les directions des solstices. Le passage du Soleil dans ces directions marque le début de chaque saison astronomique.

Les grecs pensèrent, dans un premier temps, représenter le mouvement du Soleil par un mouvement circulaire uniforme, ce qui devait entraîner des durées de saisons égales. Or ils s'aperçurent dès l'époque de Méton (V<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) que ce n'était pas le cas. Si les durées des saisons ne sont pas égales entre elles, alors la vitesse angulaire du Soleil vue depuis la Terre n'est pas constante. Voulant garder à tout prix des mouvements circulaires uniformes, ils imaginèrent deux solutions équivalentes pour " sauver les apparences " : le cercle excentrique et le système des épicycles. Dans le système excentrique, les astres se meuvent toujours d'une vitesse uniforme sur un cercle, mais la Terre n'est plus au centre de ce cercle, elle est excentrée. Dans le système des épicycles, l'astre décrit à vitesse constante un petit cercle (l'épicycle), dont le centre décrit à la même vitesse, mais de sens inverse, un plus grand cercle (le déférent) centré sur la Terre. La seconde solution a l'avantage de laisser la Terre au centre de l'univers.

L'équivalence de ces deux solutions est de nouveau rattachée au nom d'Apollonius de Perge. Avec ces deux solutions, la distance Terre-Soleil n'est plus constante, il y a deux valeurs extrêmes que l'on nomma *périgée* pour la plus proche et *apogée* pour la plus lointaine.

Les grecs inventèrent un système encore plus complexe, l'équant, dans lequel la Terre est excentrée et où le Soleil décrit un cercle à vitesse angulaire constante non par rapport au centre du cercle mais par rapport à l'équant, point symétrique de la Terre par rapport au centre du cercle ! Ces systèmes furent

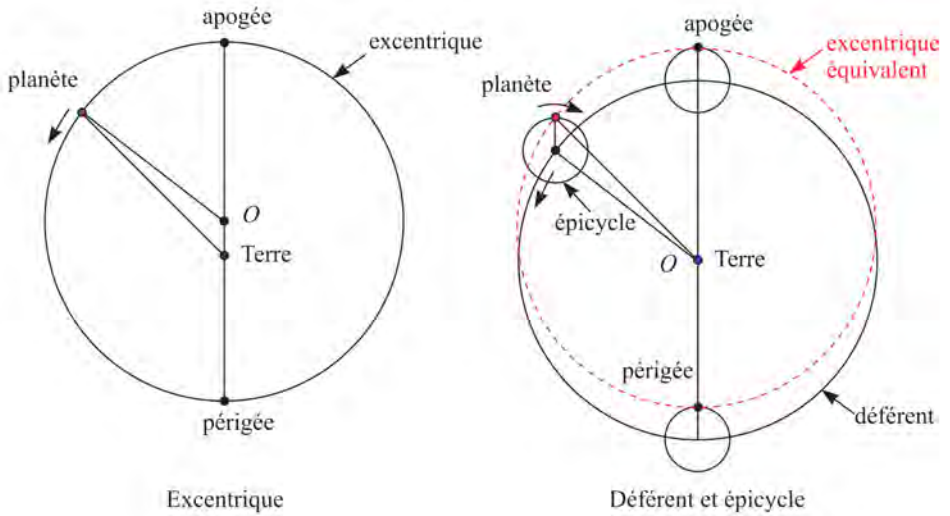


Figure 3 - Le système des excentriques et le système des épicycles.

utilisés pour modéliser le mouvement des planètes. Au milieu du deuxième siècle, l'astronome grec Claude Ptolémée (v. 100 - v. 170) écrit un traité d'astronomie *La grande syntaxe mathématique* - également connue sous le nom de sa traduction arabe, *l'Almageste* - dans lequel les mouvements des sept planètes étaient décrits à l'aide de ces artifices. Ce traité, largement commenté par les astronomes arabes, restera la source des calculs des positions des planètes jusqu'à l'époque de Kepler.

## L'abandon du cercle au profit de l'ellipse

Une première révolution dans le monde de l'astronomie eut lieu au XVI<sup>e</sup> siècle avec la publication en 1543 du *De revolutionibus orbium coelestium* de l'astronome polonais Nicolas Copernic (1473 - 1543) dans laquelle on passa du système géocentrique au système héliocentrique. Cela permettait de simplifier grandement la cinématique du mouvement des planètes élaborée pour tenir compte des rétrogradations observées depuis la Terre. La deuxième révolution fut l'amélioration des observations, notamment celles de la planète Mars, par l'astronome danois Tycho Brahe (1546 - 1601). En science, une théorie reste valide tant qu'elle est conforme avec les observations. Or, les positions, tirées des tables des mouvements, ne permettaient pas de retrouver les observations de Mars faites par Tycho Brahe, les écarts étaient de l'ordre de huit minutes d'arc, ce qui était supérieur aux erreurs de mesure des observations. Il fallait donc renoncer

aux combinaisons de mouvements circulaires et à l'équateur. Ce fut l'œuvre de l'astronome allemand Johannes Kepler (1571 - 1630) qui élabora trois lois pour définir le mouvement des planètes autour du Soleil.

Pour les établir Kepler a bénéficié de deux circonstances favorables. D'une part l'excentricité de l'orbite terrestre est très faible : la trajectoire de la Terre est bien représentée avec un cercle excentrique, ce qui a facilité la transformation des observations géocentriques de Mars en observations héliocentriques. D'autre part les observations de Tycho Brahe étaient suffisamment imprécises pour que l'on puisse les représenter par un mouvement elliptique. En effet l'orbite réelle de Mars n'est pas une ellipse parfaite à cause des perturbations dues aux autres planètes. Si les observations avaient été plus précises la solution purement elliptique n'aurait pas permis de les représenter. Les lois de Kepler résultent de l'observation. Il faudra attendre le savant anglais Sir Isaac Newton (1643 - 1727) pour en avoir une démonstration mathématique fondée sur ses lois de la mécanique et de la gravitation universelle.

### *Les lois de Képler*

**La première loi** stipule que les planètes décrivent des orbites planes et elliptiques autour du Soleil et que le Soleil occupe un des foyers de l'ellipse (1609) ; en fait cette deuxième affirmation n'est pas tout à fait exacte, c'est le centre de gravité des deux corps qui se trouve au foyer de l'ellipse.

**La seconde loi**, appelée loi des aires, stipule que les rayons vecteurs joignant le centre du Soleil à la planète décrivent des aires égales en des temps égaux (1609).

Enfin **la dernière loi** stipule que les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des ellipses (1618).

Dans un premier temps, Newton répond à une question de son ami Edmund Halley qui lui avait demandé qu'elle serait la trajectoire d'une planète soumise à une force centrale dont l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance (ce qui est le cas de la gravitation). Il démontra que la trajectoire est une ellipse contenue dans un plan fixe. Dans cette démonstration *De motu corporum in gyrum*, 1684, Newton n'utilise que des arguments géométriques. Newton est le père de la mécanique moderne dont il définit les principes dans ses *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* publiés en 1687. Le formalisme classique que l'on utilise de nos jours et qui exprime la vitesse comme la dérivée de la position par rapport au temps et l'accélération comme la dérivée de la vitesse, fut formulé en 1698 par le mathématicien français Pierre Varignon (1654 - 1722) lors de deux communications à l'Académie royale des sciences. On peut alors montrer de façon générale que la trajectoire d'un corps soumis à la gravitation est une conique dont la forme dépend de la vitesse initiale du corps.



En fait les lois de Kepler ne sont valables que si on ne considère que deux corps en mouvement, seul cas où le problème est totalement intégrable.

## Le mouvement képlérien sur une orbite elliptique

Pour décrire le mouvement képlérien du corps A sur son orbite on utilise un système de coordonnées polaires ayant pour origine le foyer de l'ellipse occupé par le Soleil. Ce système est formé de deux variables : le rayon vecteur  $r$  et l'anomalie  $v$ .

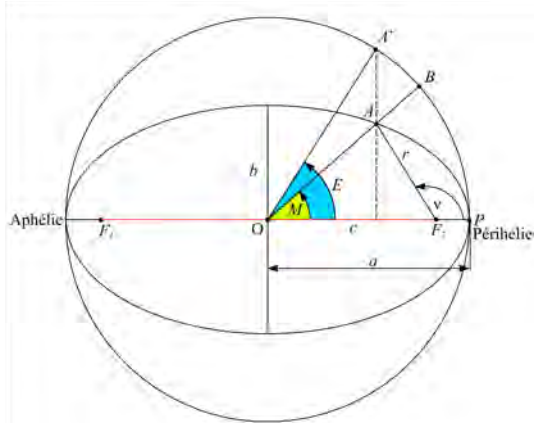


Figure 4 - Mouvement elliptique

On peut également exprimer ces variables en fonction de deux autres angles centrés en O centre de l'ellipse. Soit A la position de l'astre sur son orbite, soit A' la projection normale à l'axe focal du point A sur le cercle de centre O et de rayon a. L'anomalie excentrique E est l'angle entre le point A' et la direction du périhélie ; le moyen mouvement M est l'angle entre le point A et la direction du périhélie. M peut être considéré comme l'angle polaire d'un mobile B qui suit ou qui précède l'astre A sur son orbite et qui est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire  $n = 2\pi/T$ , T étant la période de révolution de l'astre.

## Cas du problème des n corps

Lorsque le nombre de corps est supérieur à deux, le problème n'est plus intégrable, il n'a pas de solution exacte. Dans ce cas on utilise, soit des méthodes d'intégrations numériques des équations du mouvement, soit des méthodes analytiques de perturbations. Dans ce dernier cas on perturbe la solution principale, c'est-à-dire l'ellipse képlérienne du problème des deux corps Soleil-planète, par l'action des autres planètes. Alors l'orientation du plan de l'orbite ainsi que l'orientation et la forme de l'ellipse dans ce plan ne sont plus constants et dépendent du temps. Mais c'est une autre histoire...

### Pour en savoir plus

E. Lindemann, *Mécanique, une introduction par l'histoire de l'astronomie*, 1999, De Boeck Université.

P.R. Sir I. Newton, *de la gravitation, suivi de du mouvement des corps*, 1995, Tel Gallimard.

# Gravitation, problème des trois corps, chaos

Jérôme Perez

ENSTA - Laboratoire de Mathématiques Appliquées

En 1666, Newton eut une intuition géniale : comme les pommes qui tombent des arbres, la Lune est soumise à une force dont la Terre est la source. Cette force oblige la Lune à se départir de son mouvement naturel rectiligne et uniforme pour suivre une orbite quasi-circulaire autour de la Terre. Newton détailla la forme de cette force de gravitation universelle : elle est radiale (la direction de la force passe par le centre des corps qui interagissent) et son intensité est proportionnelle au produit des masses des deux corps et à l'inverse du carré de leur distance. Lorsque seulement deux corps interagissent la situation est relativement simple. Newton démontra que la trajectoire de ceux-ci s'effectuait dans un plan et ne pouvait être qu'une conique (courbe que l'on obtient en faisant l'intersection d'un plan et d'un cône, voir l'article de Patrick Rocher). Le type de conique effectivement emprunté par les corps dépend de leur énergie totale, somme de l'énergie de mouvement (cinétique) et de l'énergie de liaison (gravitationnelle) : trop d'énergie de liaison gravitationnelle et la trajectoire sera fermée (cercle ou ellipse), trop d'énergie cinétique et la trajectoire sera ouverte (parabole ou hyperbole).

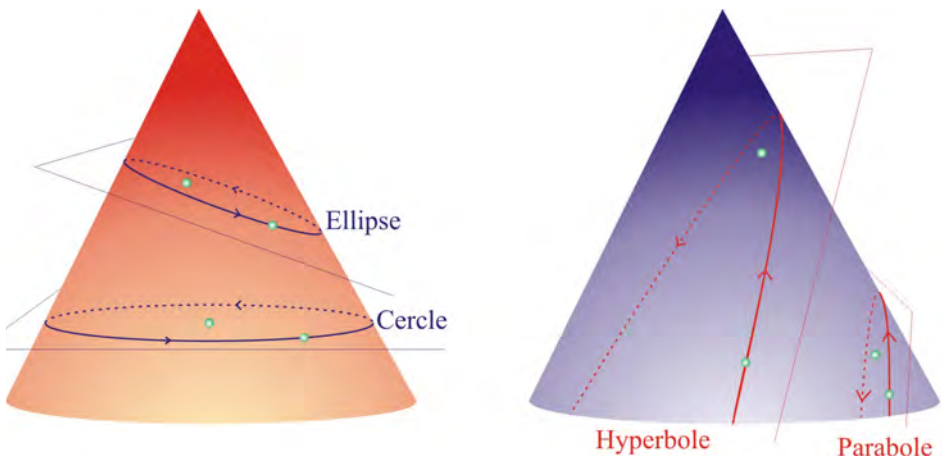


Figure 1 - Coniques et trajectoires du problème à deux corps

Dès qu'un troisième larron entre en scène la situation se complique très fortement. Le cas de la Lune est d'ailleurs emblématique à ce sujet. Si pendant quelques jours on peut rendre compte du mouvement lunaire en invoquant la Terre seule, on constate bien vite que l'ellipse initiale se déforme constamment sous l'influence de perturbations : l'axe de l'ellipse tourne dans un sens, le plan contenant la trajectoire tourne dans l'autre, etc.

L'origine de ces perturbations est claire : même s'il se trouve en moyenne 400 fois plus loin que la Terre, le Soleil est environ 330 mille fois plus massif que notre planète. Un calcul grossier montre donc que si la force de gravitation exercée par la Terre sur la Lune est prise pour unité, celle exercée par le Soleil sur la Lune vaut  $330\,000/400^2$  soit environ 2 ! La Lune ne devrait donc pas être un satellite de la Terre mais plutôt du Soleil, sa trajectoire n'est donc pas une solution du problème à deux mais bel et bien à trois corps !

Le mouvement de la Lune apparaît si finement complexe aux observateurs que d'éminents astronomes, comme Clairaut et d'Alembert, proposent au XVIII<sup>e</sup> siècle de modifier la forme de la force de gravitation de Newton. Mais rien n'y fit et la prévision du mouvement s'avéra toujours imprécise. Comprenant l'inadéquation de ces termes superflus, le génial Lagrange introduisit la notion de perturbation : puisque les paramètres définissant les orbites sont constants dans le cadre du problème à deux corps, l'introduction d'un troisième pourrait être prise en compte en supposant que ces constantes deviendraient des fonctions du temps ! Il suffit pour cela d'être capable d'écrire les équations régissant la dynamique de ces paramètres. Le succès est au rendez-vous, outre la prédiction effective de la valeur de la période du mouvement de la ligne des nœuds (intersection entre le plan orbital de la Lune et celui de la Terre), il pose les bases de la physique moderne en déduisant la mécanique de concepts géométriques.

Lagrange propose aussi l'une des seules solutions simples pour l'équilibre du problème des trois corps dans le cas où l'on suppose que deux de ces masses, notées  $m_1$  et  $m_2$ , sont en orbite circulaire et la troisième est négligeable devant les deux autres. Les fameux points de Lagrange issus de cette analyse sont aujourd'hui bien connus.

$L_1$  et  $L_2$  situés sur l'axe  $m_1 m_2$  sont souvent utilisés comme camp de base pour des missions spatiales (même s'ils sont

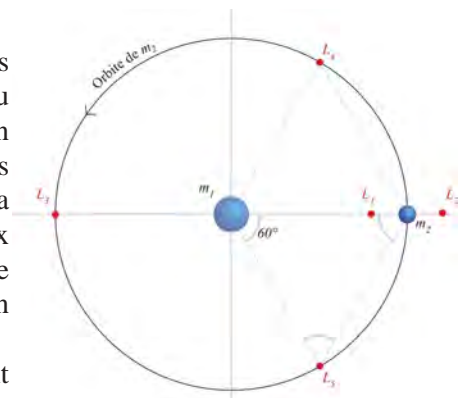


Figure 2 - Points de Lagrange

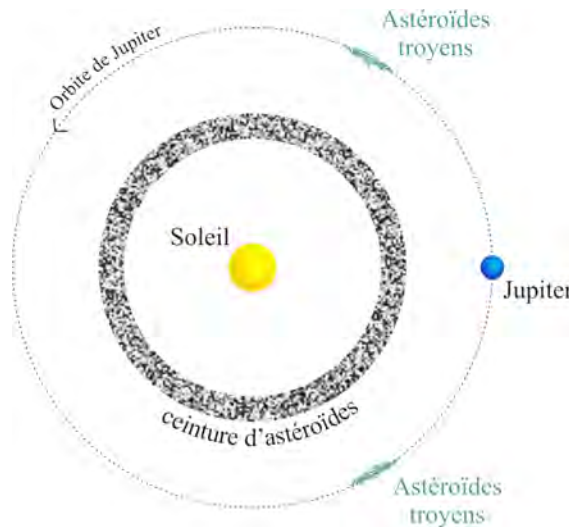
généralement instables dans une direction de l'espace et nécessitent donc un repositionnement périodique). On a longtemps pensé qu'il pouvait y avoir une planète inconnue en  $L_3$ , qui est aussi un point instable. Les points  $L_4$  et  $L_5$ , que la force d'inertie - en les écartant de l'axe de rotation - parvient dans certains cas à stabiliser, se voient le refuge de nombreux corps dans les différentes configurations offertes par les objets cosmiques (satellites troyens situés aux points de Lagrange du système Soleil-Jupiter ; Calypso et Télésto situés aux points de Lagrange du système Saturne-Thétys ; etc.).

Contrairement à ce que l'on croit ou lit un peu partout, le problème des trois corps est maintenant résolu dans un cas très général, même si l'on ne fait pas d'hypothèses simplificatrices !

Cependant Poincaré montra à la toute fin du XIX<sup>e</sup> siècle que la structure géométrique de l'ensemble des points accessibles en position et en vitesse par les trois corps est d'une complexité redoutable. Techniquement, l'illustre mathématicien montra que ce

système n'est pas algébriquement intégrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver suffisamment de grandeurs constantes intervenant dans le problème pour ramener son étude à un cas simple. Il n'en demeure pas moins qu'au tout début du XX<sup>e</sup> siècle le mathématicien finlandais Karl Sundman exhiba une solution générale (analytique) sous la forme d'un développement en série en fonction d'un paramètre qui se substitue au temps. La restriction du nombre trois a même été levée récemment par le mathématicien chinois Q.-D. Wang qui donne en 1991 une solution globale pour le problème à  $n$  corps. Tout le problème réside dans la nature de la fonction venant remplacer le temps qui confère au développement, et donc à la solution, des propriétés de convergence effective mais d'une lenteur irrémédiable ! C'est ce dernier élément qui rend la solution de Wang très complexe voire chaotique ...

Le problème académique de deux corps en interaction gravitationnelle se réduit (dans le cas d'une trajectoire elliptique) à la donnée d'un couple formé



*Figure 3* - Position des astéroïdes troyens

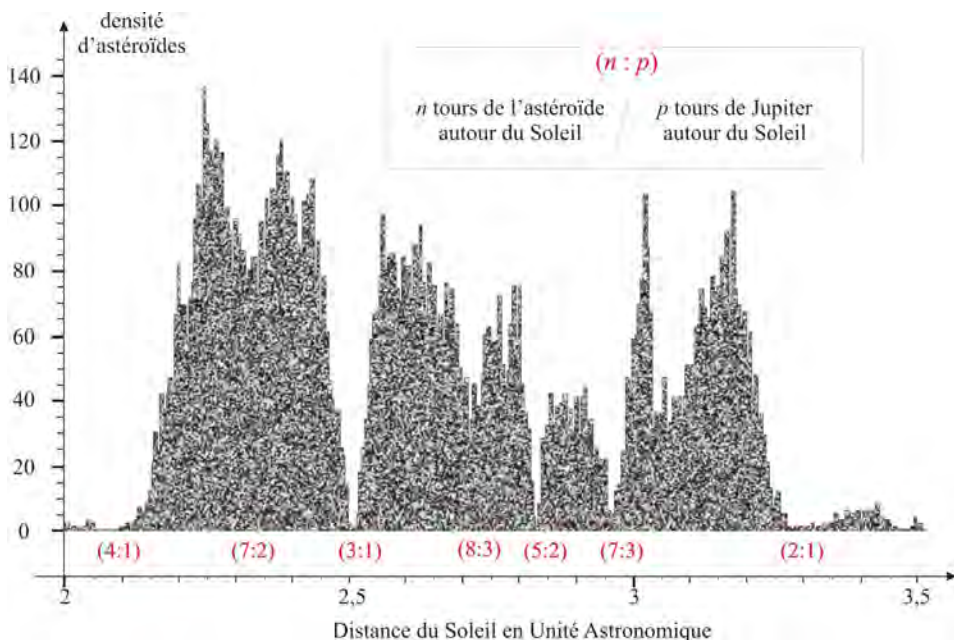


d'une amplitude et d'une période. Pour la trajectoire circulaire cette amplitude est simplement le rayon du cercle et cette période est simplement le temps mis par le corps pour effectuer un tour. Dès l'Antiquité, on comprit que l'on pouvait raffiner la description de ce mouvement dans le cas des planètes en rajoutant des épicycles, c'est-à-dire des cercles tournant autour d'un centre se déplaçant sur le cercle principal. Techniquement cela revient à rajouter des couples amplitude-période secondaires au couple principal. Si les perturbations se rajoutant au problème académique se révèlent de faible ampleur, les amplitudes secondaires décroissent très rapidement et l'approximation est de bonne qualité pendant un temps raisonnable. Si par contre, comme c'est le cas dans le problème général des trois corps et comme le montre la solution de Sundman, l'amplitude associée à chaque mode secondaire ne décroît que très lentement au fur et à mesure du développement, la trajectoire se complique fortement. Dans le cas limite d'une trajectoire décomposable en la somme d'une infinité de périodes d'égales amplitudes on obtient une solution complètement erratique que l'on ne peut décrire que de façon probabiliste : c'est le chaos !

Dans le cas des problèmes gravitationnels tels que l'on peut les rencontrer dans le système solaire, le chaos est donc la règle si l'on cherche à décrire la trajectoire des corps sur de longues échelles de temps (pour la trajectoire des planètes, le temps caractéristique d'apparition du chaos est de l'ordre de la centaine de millions d'années). Il n'en demeure pas moins vrai qu'un certain nombre de mécanismes physiques peuvent toutefois faire apparaître un peu d'ordre dans ce qui semble inextricablement mêlé ! Le principal de ces mécanismes consiste en un couplage entre certains modes basé sur la " commensurabilité " des périodes associées : la résonance. L'exemple de la balançoire est ici très instructif. Il est bien connu des enfants que l'on peut déclencher puis entretenir ou même ralentir le mouvement d'une balançoire sur laquelle on a pris place. Il suffit pour cela d'entreprendre des mouvements de jambes avec une période particulière, adaptée à la balançoire. L'amplitude et la période du mouvement de la balançoire se trouvent alors couplées à celles des jambes.

L'expérience (et le calcul) montre que l'on peut stabiliser certaines périodes, celles correspondant au mouvement apprécié, ou à l'inverse s'éloigner de certains mouvements peu intéressants comme l'immobilité... Dans le contexte de la mécanique céleste il en va de même ! Le couplage inéluctable qui se produit entre les divers couples amplitude-période existant dans le développement des trajectoires des divers objets célestes, conduit tantôt à favoriser certaines configurations (la planète Mercure fait trois tours sur elle-même en faisant deux tours autour du Soleil, les satellites de Jupiter ont des périodes astucieusement reliées, etc.) tantôt à l'éviction de certaines trajectoires (la ceinture d'astéroïdes

possède certaines lacunes - dites de Kirkwood, les bords de l'anneau de la planète Saturne sont nets, etc.).



**Figure 4** - Les lacunes de Kirkwood.

Répartition des astéroïdes en fonction de leur distance au Soleil.

Enfin, certaines configurations stabilisent certaines propriétés de l'orbite des corps : l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre est stabilisée par la rotation synchrone de la Lune. Sans cette dernière, et donc sans cette stabilisation, comme l'a montré Jacques Laskar, le climat terrestre varierait plus fortement et plus rapidement avec des conséquences notables pour le développement de la vie à sa surface. Vous ne seriez peut-être pas là pour lire ce texte !

J.P.

### Pour en savoir plus

**Jérôme Perez** - *Gravitation classique : le problème à N corps de 2 à l'infini*, Les presses de l'ENSTA, 2009

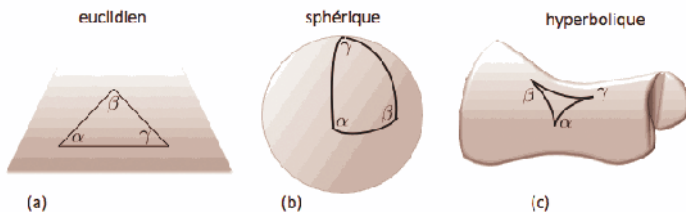
**Ivars Peterson** - *Le chaos dans le système solaire*, Collection sciences d'avenir - Pour La Science, Belin, 1998

**Malte Henkel** - *Sur la solution de Sundman du problème des trois corps*, Philosophia Scientiae, Vol. 5, p. 161-184, 2001 - arxiv:physics/0203001

# Quelle géométrie pour l'espace-temps ?

Jean-Philippe Uzan  
Institut d'Astrophysique de Paris

La géométrie que nous utilisons habituellement est fondée sur un traité rédigé au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère par le mathématicien grec Euclide. La grande originalité du traité d'Euclide fut de proposer un ensemble de cinq propositions, considérées comme vérités simples et évidentes, à partir desquelles il déduisit par le raisonnement toute la géométrie alors connue depuis Thalès. Le cinquième postulat, dit postulat des parallèles, est le plus intéressant pour notre propos. Euclide explique d'abord que deux droites situées dans le même plan sont parallèles si elles ne se rencontrent pas. Il postule ensuite que par un point il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée. Pendant plus de deux mille ans, ce postulat fut considéré comme intuitivement évident même si certains géomètres, dont Euclide lui-même, étaient gênés par l'impossibilité de le vérifier par l'expérience. Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle que les mathématiciens furent assez hardis pour transgresser le postulat des parallèles et construire de nouvelles géométries (figure 1). Afin de disposer de notions de distance et de durée, le physicien, guidé par des principes et des expériences, doit choisir la géométrie la mieux adaptée à notre espace-temps. En choisissant la géométrie euclidienne pour décrire notre espace physique, il fait une hypothèse physique qui n'est en aucun cas une nécessité logique. Examinons quelles furent les raisons qui motivèrent les choix des physiciens.



**Figure. 1 :** (a) Pour un espace euclidien à deux dimensions, les angles d'un triangle satisfont  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0$ . Les géométries sphérique (b) et hyperbolique (c) ne satisfont pas le cinquième postulat d'Euclide. Pour le cas sphérique (b) la somme des angles d'un triangle est reliée à sa surface par  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \text{aire}/R^2$ , où  $R$  est le rayon de la sphère, alors que dans le cas hyperbolique (c), elle satisfait  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = -\text{aire}/R^2$ . Tous ces espaces sont homogènes et isotropes et leurs équivalents tridimensionnels jouent un rôle central en cosmologie.

## L'espace-temps de Galilée-Newton

La physique newtonienne repose sur la notion de simultanéité temporelle absolue : tous les observateurs, quelque soit leur position et leur état de mouvement, peuvent affirmer sans ambiguïté que deux évènements ont lieu en même temps. Le passé, le présent et le futur sont donc des notions absolues.

L'espace physique est représenté par un espace absolu. Chaque point est caractérisé par ses coordonnées, c'est à dire un triplet de nombres réels puisque l'espace a trois dimensions. On postule qu'il existe des systèmes de coordonnées cartésiennes, tels que la distance entre deux points est calculable grâce au théorème de Pythagore. L'espace est donc représenté par un espace euclidien de dimension 3,  $E_3$ . Un repère de l'espace absolu est matérialisé, dans l'espace physique, par un système de référence qui est un trièdre solide, c'est à dire un ensemble d'objets matériels dont les distances sont invariables dans le temps. Il est construit à partir d'instruments que l'expérience permet de considérer comme solides. Ce référentiel est " bon " si, à la précision des mesures, toutes les propriétés euclidiennes des figures sont vérifiées. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'a priori ces instruments ne sont pas vraiment rigides. Des écarts systématiques aux prédictions euclidiennes impliqueraient que cette représentation n'est pas adéquate.

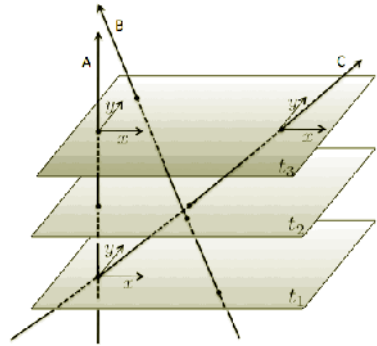
Le temps est représenté par un espace euclidien à une dimension,  $E_1$ . Il est absolu et matérialisé par des horloges. Une " bonne " horloge mesure, quelque soit son état de mouvement, des durées en conformité avec les lois de la dynamique écrites en fonction du temps absolu.

Le référentiel matérialisant le repère absolu doit être au repos afin que les points de  $E_3$  puissent être identifiés à des points matériels qui y sont immobiles. Selon le principe de relativité formulé par Galilée, les lois de la dynamique sont les mêmes dans tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au référentiel absolu (ces référentiels sont dits inertiels). Les lois de la physique ne permettent donc pas de distinguer l'état de repos absolu des mouvements rectilignes uniformes et donc d'associer de façon privilégiée un point de l'espace à un instant donné à un autre point de l'espace à un instant suivant. Nous devons donc considérer une structure à quatre dimensions dans lequel les espaces euclidiens à chaque instant sont indépendants les uns des autres, mais s'assemblent pour former un tout cohérent, l'espace-temps (figure 2).

On appelle événement un point de cet espace-temps. Le mouvement de tout corps est représenté par une ligne d'univers, qui se réduit à une ligne droite pour les mouvements inertiels. Un événement se trouve dans le futur d'un autre s'il est possible de l'atteindre avec une vitesse finie.



**Figure 2 :** L'espace-temps de Galilée-Newton représente l'espace par un espace euclidien à trois dimensions et le temps par un espace euclidien à une dimension. Le principe de relativité galiléenne implique qu'il n'existe pas d'identification privilégiée entre les points de l'espace à deux instants consécutifs. Deux observateurs inertiels qui coïncident à l'instant  $t_1$  (A et C) peuvent se considérer également au repos et " transporter " avec eux leur référentiel.



Soulignons une propriété importante de cette structure. Si deux voyageurs se retrouvent après des périple différents, la durée de leurs voyages sera la même. Leurs montres, synchronisées au départ, doivent indiquer la même heure à l'arrivée. Si ce n'était pas le cas, cela signifierait que les montres ne sont pas " bonnes " mais si un grand nombre d'expériences donnaient systématiquement un écart à cette prédiction, il faudrait conclure que l'espace-temps de Newton n'est pas une représentation correcte de l'univers physique réel.

## La Relativité Restreinte

Cette description a changé au début du XX<sup>e</sup> siècle. La raison se trouve au cœur des lois de l'électromagnétisme qui impliquent que dans le vide la lumière se propage à une vitesse finie. Selon la cinématique galiléenne, si cette vitesse est mesurée avec une valeur  $c$  dans un référentiel, un observateur animé d'une vitesse constante  $v$  par rapport à ce référentiel devrait vérifier que la lumière se propage à une vitesse  $c+v$ . Cependant le principe de relativité galiléenne implique que les lois de l'électromagnétisme sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. On devrait donc y mesurer la même vitesse de la lumière. D'où contradiction !

Ceci mit Albert Einstein sur la voie de sa théorie de la relativité restreinte. Einstein réaffirme le principe de relativité puis postule que la lumière se propage à la même vitesse  $c$  dans tous les repères inertiels, ce qui est expérimentalement vérifié. Les lois de la cinématique galiléenne, testées pour des vitesses petites devant celle de la lumière, ne peuvent donc être qu'une approximation d'une loi plus générale qui doit avoir la propriété que  $c+v = c$  quelque soit la vitesse  $v$  !

Ceci a une implication illustrée par le paradoxe du train. Deux éclairs tombent à l'avant et à l'arrière d'un train en mouvement. Pour un observateur au bord de la voie, au milieu des deux points d'impact, les éclairs apparaissent simultanés. Cependant, une observatrice se trouvant au milieu du train perçoit l'éclair tombé à l'avant du train avant celui tombé à l'arrière puisqu'elle se déplace vers le point

d'impact qui a coïncidé avec l'avant du train. La lumière se propageant à la même vitesse dans tout référentiel inertiel, l'éclair a d'abord dû tomber sur l'avant du train. Pour elle, les deux éclairs ne sont pas simultanés !

La constance de la vitesse de la lumière oblige ainsi à abandonner les notions de simultanéité et de temps absolu, qui ne sont ancrées dans notre intuition que parce que la vitesse de la lumière est extraordinairement grande devant celles rencontrées dans la vie ordinaire. Le principe de relativité galiléenne nous avait déjà forcé à abandonner la notion d'espace absolu, le temps perd à son tour ce statut. La seule façon de rendre compte de toutes ces propriétés est de changer la représentation de l'espace-temps.

En relativité restreinte, les événements sont représentés par un ensemble de points à quatre dimensions, l'espace-temps absolu. Les propriétés, et en particulier la structure du cône de lumière, décrites figure 3, nous amènent à postuler que la distance généralisée entre deux événements de coordonnées respectives :  $(T, X, Y, Z)$  et  $(T + \delta T, X + \delta X, Y + \delta Y, Z + \delta Z)$  est

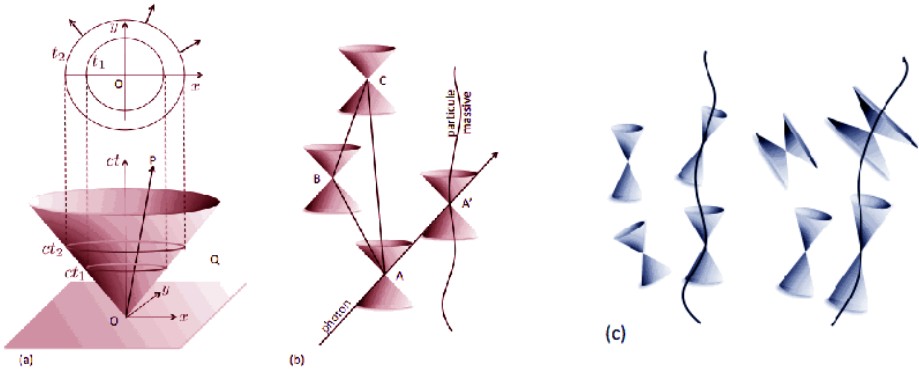
$$\delta s^2 = -c^2 \delta T^2 + \delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2.$$

Cette expression est similaire à la distance euclidienne à l'exception du signe - devant le premier terme. Le temps coordonné  $T$  n'est le temps mesuré par un observateur que s'il est au repos dans notre référentiel. Le temps mesuré dans son référentiel est donnée par  $s$ , qui est toujours plus petit que  $T$  ; il s'agit du phénomène de dilatation du temps. La distance, ainsi définie, est identique pour tout observateur inertiel : des observateurs peuvent mesurer une distance spatiale et une durée différentes entre deux événements mais doivent obtenir la même valeur de la distance généralisée. Cette situation est analogue à celle que l'on rencontre en géométrie euclidienne lors de la rotation du système de coordonnées : les coordonnées des points ont été modifiées mais les distances qui les séparent sont restées inchangées.

## L'espace-temps de la relativité générale

Galilée comprit que si l'on supprimait la résistance de l'air, tous les corps tomberaient de la même façon quelque soit leur masse et leur composition chimique. Ce principe d'universalité de la chute libre, vérifié expérimentalement avec une précision de  $10^{-13}$ , est le fondement de notre compréhension de la gravitation.

Imaginez deux observateurs en chute libre (c'est à dire qu'ils suivent leur trajectoire sous l'effet de la gravitation seule) et n'ayant aucun repère extérieur. Ils concluront qu'ils sont immobiles l'un par rapport à l'autre, comme s'ils n'étaient pas affectés par la gravitation, simplement parce qu'ils tombent avec la même



**Figure 3** : L'existence d'une vitesse universelle a de nombreuses implications pour la structure de l'espace-temps de Minkowski.

(a) En retirant une dimension spatiale pour les besoins de la représentation, un flash de lumière émit en  $O$  décrit un demi cône de sommet  $O$ . Pour toute particule massive ayant une vitesse inférieure à  $c$ , la tangente à sa ligne d'univers doit se trouver à l'intérieur de ce cône de lumière. L'évènement  $P$ , à l'intérieur du cône de lumière de sommet  $O$ , peut être relié par une ligne d'univers :  $P$  est dans le futur de  $O$ . L'intervalle  $OP$  est de genre temps,  $OP^2 < 0$ . Ce n'est pas le cas de l'évènement  $Q$ . L'intervalle  $OQ$  est de genre espace ( $OQ^2 > 0$ ) et il existe alors un référentiel inertielle dans lequel  $O$  et  $Q$  sont des évènements simultanés.

(b) L'inégalité triangulaire ( $AB + BC \geq AC$  en géométrie euclidienne) prend la forme  $AB + BC \leq AC$ , l'égalité n'étant atteinte que si les trois évènements sont alignés, c'est à dire sur la ligne d'univers d'un observateur inertielle. Ainsi, de deux voyageurs joignant  $A$  à  $C$ , celui qui effectue le voyage de façon inertielle mesurera un temps de voyage plus long.

(c) L'espace-temps de la relativité générale est courbe. En chaque point on peut définir un cône de lumière mais ceux-ci diffèrent d'un point à l'autre de l'espace-temps.

accélération. Ainsi, l'universalité de la chute libre implique qu'en se plaçant dans un référentiel en accélération on peut effacer un champ de gravitation. Cet " effacement " de la gravitation, qu'Einstein appellera principe d'équivalence, n'est cependant possible que localement.

Le point de vue d'Einstein sera de considérer les mouvements de chute libre comme des mouvements " naturels ", au même titre que les mouvements inertiels. Il montrera que l'on peut rendre compte de ces mouvements en considérant que l'espace-temps est courbe. Einstein comprendra que l'origine de cette courbure est due à son contenu matériel si bien que la gravitation n'est que la manifestation de cette courbure.

Cette représentation de la gravitation est très différente de celle de Newton. Tant que les champs de gravitation sont faibles et que les vitesses sont petites devant celle de la lumière, les deux théories donnent les mêmes

prédictions. Dans des champs de gravitation intenses ou pour décrire le comportement de la lumière, ce sont celles de la relativité générale qui ont été vérifiées avec une grande précision.

On peut utiliser la théorie d'Einstein pour déterminer la géométrie de notre univers et construire un modèle cosmologique. Par l'observation, l'univers semble isotrope autour de nous. On postule généralement que nous n'occupons pas une place particulière dans l'univers (c'est le principe copernicien) si bien qu'aux plus grandes échelles, l'univers serait spatialement homogène et isotrope. Seules trois géométries satisfont ces critères (fig. 1). La relativité générale implique alors que l'espace doit se dilater au cours du temps, une nouvelle propriété qui peut nous sembler inattendue, mais qui elle aussi est confirmée par l'observation : l'univers est en expansion.

## Conclusion

L'électromagnétisme et la gravitation, avec en filigrane le principe de relativité, nous ont forcé à changer nos représentations géométriques de l'espace et du temps pour les décrire par un espace-temps courbe avec, aux échelles cosmologiques, un espace en expansion.

Les développements de la physique théorique remettent en cause d'autres propriétés de l'espace. Il aurait probablement des dimensions supplémentaires. D'autre part, les distances les plus petites testées en accélérateur sont de l'ordre de  $10^{-17}$  mètres et la cosmologie donne accès à des distances de l'ordre de  $10^{26}$  mètres. Il est probable qu'à plus petite échelle, de l'ordre de  $10^{-35}$  mètres, il soit nécessaire d'abandonner la continuité de l'espace et d'introduire une " distance minimale ". Les mathématiques et la géométrie offrent de nombreuses structures capables de rendre compte du monde physique. La précision des expériences et la compréhension de la nature augmentant, nous devons parfois changer de structure afin de rendre compte des phénomènes. La représentation de l'espace et du temps en est un bon exemple. Aucune structure n'est donnée a priori, le physicien doit toujours faire un choix, guidé par certains principes, et seule l'expérience permet de valider ces choix.

J.P. U.

### Pour en savoir plus

**N. Deruelle** et **J.-P. Uzan**, *Mécanique et gravitation newtoniennes*, Vuibert 2007 (en particulier les sections 1 à 4).

**N. Deruelle** et **J.-P. Uzan**, *Relativité restreinte et électromagnétisme*, Vuibert 2010 (à paraître).

**R. Penrose**, *A la découverte des lois de l'univers*, O. Jacob 2007 (chapitres 17 et 18).



# L'univers a-t-il une forme ?

Roland Lehoucq  
CEA Saclay, Service d'Astrophysique

La cosmologie se fonde sur la constatation que la gravitation est la seule interaction agissant à grande échelle de distance. Ses modèles sont construits dans le cadre de la relativité générale, théorie de la gravitation exposée par Albert Einstein en 1915. Dans celle-ci, la gravité n'est rien d'autre que la manifestation de la courbure de l'espace induite par la matière et l'énergie qu'il contient. Ainsi, pour connaître la géométrie de l'univers, il est suffisant d'en déterminer le contenu et, selon la valeur obtenue, l'espace adopte l'une des trois géométries décrites par Jean-Philippe Uzan dans l'article précédent.

## Que dire de la forme et de l'extension de l'univers ?

Pourtant, cette mesure n'est pas suffisante pour fixer complètement la forme globale de l'univers car la géométrie est une notion purement locale, permettant par exemple de calculer la distance entre deux points. Habitant sur la Terre sphérique, notre voisinage est un plan limité par l'horizon et longtemps l'Homme a imaginé évoluer sur une Terre plate avant de comprendre qu'elle était sphérique. Ce biais mental nous pousse à attribuer à l'espace entier des propriétés que nous ne déterminons que localement et conduit à utiliser les représentations globales les plus simples pour décrire l'espace. Ainsi, nous pensons l'univers comme un espace euclidien à trois dimensions. Si l'on y réfléchit, nous n'avons pas plus de raisons de croire que notre univers est ainsi fait que les anciens n'en avaient de croire que la Terre était plate. De plus, il nous semble qu'une Terre plate ne peut être qu'illimitée ou limitée par un bord ; il en va de même pour notre univers si sa géométrie est euclidienne. Mais l'idée d'un bord nous répugne, car, dira-t-on toujours, qu'y a-t-il derrière le bord ? Un espace de géométrie euclidienne est donc généralement regardé comme illimité, et nous pensons ainsi notre univers.

Pourtant les mathématiciens ont étudié des surfaces à la fois finies et dépourvues de bord : la sphère en est un exemple. Pour en construire une autre, découpez un long rectangle dans une feuille de caoutchouc. En collant l'un contre l'autre ses deux grands côtés vous obtiendrez un tuyau cylindrique terminé à

chaque extrémité par une circonférence formée par le petit côté du rectangle. En collant l'une contre l'autre ces deux circonférences vous voilà avec une sorte de chambre à air de bicyclette, un tore disent les mathématiciens. Une fourmi qui s'y déplace n'est nullement limitée dans ses mouvements. Et pourtant, le domaine qui lui est accessible est d'aire finie, égale à celle du rectangle initial, et ne possède pas de bords. Remarquons que ces opérations de collage et de déformation élastique reviennent à déclarer identiques deux côtés opposés du rectangle. Cela revient à dire qu'une fourmi se déplaçant à la surface du rectangle et atteignant l'un de ses côtés ne sort pas du rectangle, elle y entre par le côté opposé. Il lui est alors impossible de quitter la surface délimitée par les côtés du rectangle.

Il est clair que si la taille de l'univers observable est gigantesque, il est difficile de reconnaître si les lignes que nous appelons droites ne sont pas en réalité des courbes immenses se refermant sur elles-mêmes. Cette idée n'est pas plus paradoxale que ne pouvait l'être pour un homme primitif l'idée qu'en marchant constamment droit devant lui, vers l'est, il finira par retrouver son point de départ, où il arrivera en venant de l'ouest. L'univers pourrait donc " se refermer sur lui-même ", être fini et sans bord.

## Comment la fourmi peut-elle se rendre compte de l'étrangeté de son espace vital sans en quitter la surface ?

En marchant ! Elle repère un point de départ, s'en éloigne et cherche tous les chemins qui y reviennent. Elle peut commencer par avancer dans une direction quelconque avant de rebrousser chemin en faisant un boucle ; c'est le classique " demi-tour ". Mais il existe deux directions remarquables qui la ramèneront à son point de départ. Notre fourmi peut décrire une petite circonférence du tore, c'est-à-dire parcourir en allant toujours tout droit une distance égale à l'un des petits côtés du rectangle. Elle peut aussi décrire une grande circonférence, égale à l'un des grands côtés du rectangle. On peut démontrer que tous les autres chemins qui ramènent la fourmi à son départ se construisent à partir de ces deux-là, en parcourant un certain nombre de petites circonférences et un certain nombre de grandes, dans un sens ou dans l'autre. Une fois ce travail réalisé, la fourmi sait qu'elle n'évolue pas sur un plan infini car dans ce cas il n'y aurait qu'une seule façon de revenir au point de départ : en suivant le classique chemin en boucle.

## Que faire si les distances à parcourir sont trop grandes ?

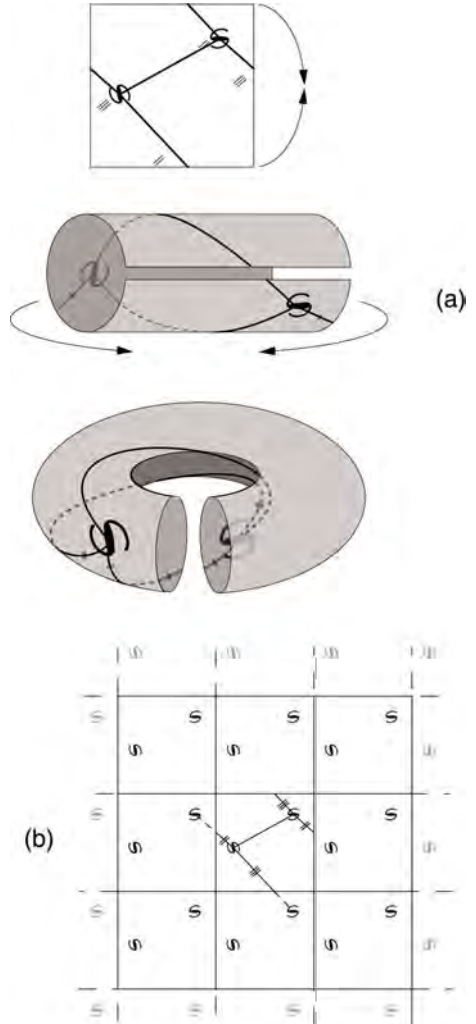
La fourmi va utiliser la lumière en guise de chaîne d'arpenteur. La lumière d'une source placée à la surface du tore doit épouser celle-ci et plusieurs chemins lui permettent d'atteindre la fourmi. Un rayon peut atteindre la fourmi en

suivant le chemin le plus court mais aussi, partant dans la direction opposée, en faisant un tour complet du tore. Il peut aussi s'enrouler un certain nombre de fois autour de la petite circonférence et un certain nombre de fois autour de la grande. Comme dans une pièce remplie de miroirs, il est aisé de comprendre que cette multiplicité de chemins se traduit par une multiplicité des images observées par notre fourmi.

**Quelle est la conclusion de notre fourmi ?**

Une unique hypothèse lui permet d'expliquer toutes ses observations : son espace vital est un plan infini recouvert de rectangles aux contenus identiques, jointifs deux à deux et se déduisant les uns des autres par translation. Quand notre fourmi, se déplaçant en ligne droite, boucle un tour du tore tout se passe comme si elle atteignait le point situé dans un rectangle voisin. De son point de vue, les multiples sources lumineuses observées ne sont pas les images d'une unique source ; elles sont bien réelles, régulièrement placées à l'intérieur de chaque rectangle. La structure particulière de son espace réel donne ainsi à la fourmi l'illusion de vivre dans un espace infini. Non seulement il n'est pas contradictoire pour un espace d'être fini et sans bords, mais il donne à ses habitants l'illusion d'être infini. (Existe-t-il des espaces à trois dimensions finis et sans bords ?

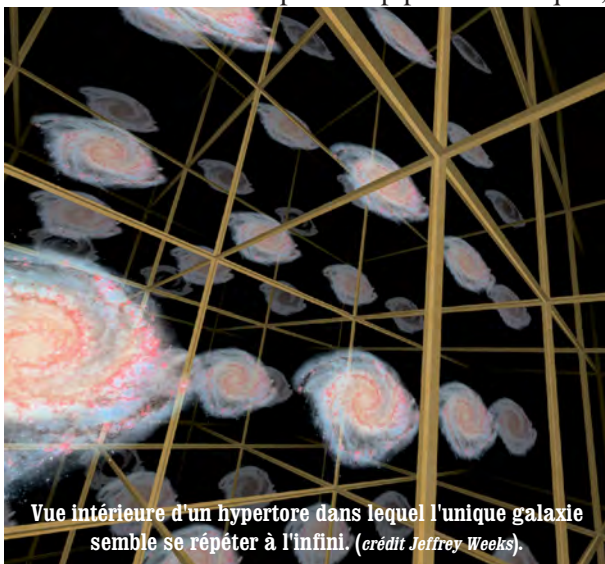
Bien sûr ! Il suffit de généraliser le procédé de construction du tore en remplaçant le rectangle plan initial par un parallélogramme rectangle dont les faces opposées sont collées deux à deux. Pour " voir " le collage des faces équivalentes l'une contre l'autre il



**Univers torique**  
 (a) Construction d'un univers torique à deux dimensions par identification des faces opposées d'un carré.  
 (b) Un être vivant à la surface d'un tore a l'illusion d'évoluer dans un espace infini.

faudrait l'effectuer dans un espace à quatre dimensions, inaccessible à nos sens. Alors, la construction qui consiste à identifier mentalement les paires de faces opposées prend tout son intérêt. Le volume obtenu est un " hypertore " qui, comme le tore, donnerait l'illusion à ses habitants de vivre dans un espace infini qu'ils pourraient se représenter comme un réseau de parallélépipèdes identiques, parfaitement jointifs et copies les uns des autres (voir ci-joint).

L'espace présente ainsi une structure triplement périodique puisqu'il existe trois directions particulières, telles qu'en nous déplaçant en ligne droite selon l'une d'elles, nous trouverons, après avoir parcouru une longueur déterminée, une région de l'espace rigoureusement identique à celle d'où nous sommes partis.



Sous cette forme, l'hypothèse paraît étrange et presque absurde ; elle l'est peut-être moins si l'on admet qu'en réalité, ce n'est pas en un lieu identique que l'on arrive, mais exactement au lieu de départ, c'est-à-dire que la périodicité est du même type que celle constatée par notre fourmi en promenade sur un tore et non celle que constaterait la même fourmi en se déplaçant sur un vaste mur couvert de motifs se répétant périodiquement.

Comme pour le tore la lumière émise par une source peut aussi emprunter plusieurs chemins pour nous atteindre. Une même galaxie sera donc vue de multiples fois dans différentes directions du ciel. Chaque galaxie de notre univers ayant un grand nombre d'images, notre ciel nous apparaîtra peuplé d'une myriade de galaxies, fantômes issus d'une poignée de galaxies réelles (voir photo page suivante).

## Et que dire de notre univers ?

L'une des plus grandes découvertes du XX<sup>e</sup> siècle se résume en une seule phrase : l'univers a une histoire et, dans un passé lointain, il était extrêmement homogène, dense et chaud. Depuis, il est soumis à une expansion et il est le lieu de la formation progressive des structures cosmiques, galaxies et amas de

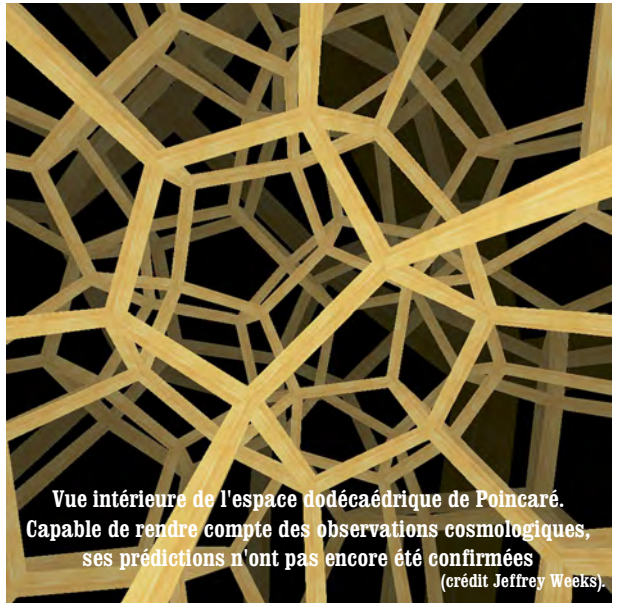
galaxies. Le principal vecteur des informations que nous recevons du ciel est la lumière, qui se déplace à vitesse finie. Ainsi, la lumière met d'autant plus de temps pour nous parvenir que sa source est lointaine : regarder loin dans l'espace c'est regarder loin dans le passé. Comme les marins, les astrophysiciens sont limités par un horizon et en parlant d' "univers " ils pensent d'abord à " l'univers observable ", accessible à leurs instruments,

dont la taille est limitée par la distance parcourue par la lumière depuis sa naissance. Ils pensent aussi aux " univers modèles ", issus de leurs calculs mathématiques, qui doivent donner une description correcte de la zone limitée qui nous est directement accessible ; c'est même le critère que doit impérativement satisfaire un modèle pour être acceptable. Dans la plupart des modèles cosmologiques, l'univers " réel ", assimilé au modèle, est plus vaste que l'univers observable.

Les astrophysiciens adoptent le même parti et considèrent communément que l'univers réel, imaginé à partir d'un modèle qui ne décrit correctement que l'univers observable, est forcément plus vaste que ce dernier, voire infini. Mais nous avons vu qu'un être hypothétique évoluant à la surface d'un tore a l'illusion de vivre à la surface d'un plan infini puisque aucun bord, aucune limite, ne vient



**Un champ de galaxies vu par le télescope spatial Hubble.  
Certaines ne sont-elles que des fantômes ? (crédit NASA/ESA)**



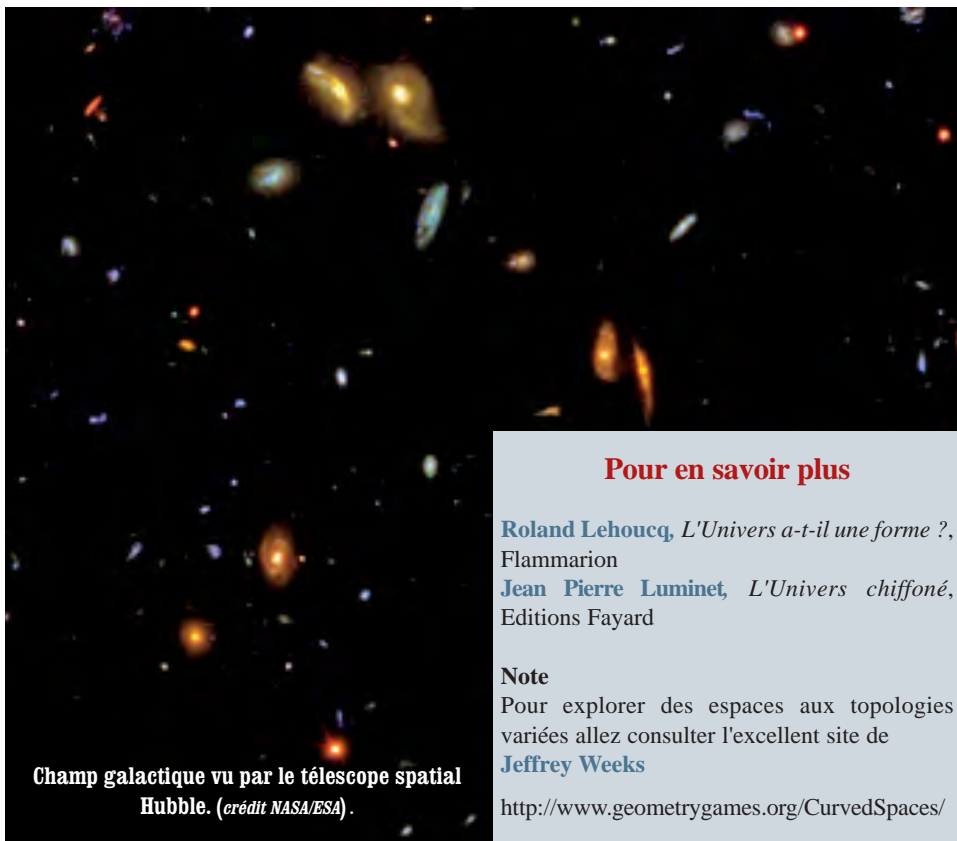
**Vue intérieure de l'espace dodécaédrique de Poincaré.  
Capable de rendre compte des observations cosmologiques,  
ses prédictions n'ont pas encore été confirmées  
(crédit Jeffrey Weeks)**



entraver ses déplacements. Il en conclurait certainement que son univers observable est infini alors que son univers réel est fini.

Spectaculaire renversement de situation. Il faut donc abandonner nos préjugés en cosmologie et tenir compte des univers modèles, aux formes étranges pour notre intuition commune, où c'est au contraire l'univers observable qui est plus grand que l'univers réel.

Alors, l'univers est-il fini ? Aujourd'hui, la réponse peut paraître décevante : aussi loin qu'ils puissent voir, les astrophysiciens n'ont pas encore détecté de signes certains de sa finitude même si un modèle reste encore en course. Cela ne signifie pas forcément que l'univers est infini mais seulement qu'il est plus grand que la taille de notre horizon. Sachez toutefois que, s'il est théoriquement possible de prouver la finitude de l'univers, son infinitude restera, elle, à jamais indémontrable.



Champ galactique vu par le télescope spatial Hubble. (crédit NASA/ESA).

### Pour en savoir plus

**Roland Lehoucq**, *L'Univers a-t-il une forme ?*, Flammarion

**Jean Pierre Luminet**, *L'Univers chiffonné*, Editions Fayard

#### Note

Pour explorer des espaces aux topologies variées allez consulter l'excellent site de

**Jeffrey Weeks**

<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/>

# Télescopes à ouvertures codées

Bertrand Cordier  
CEA Saclay, Service d'Astrophysique

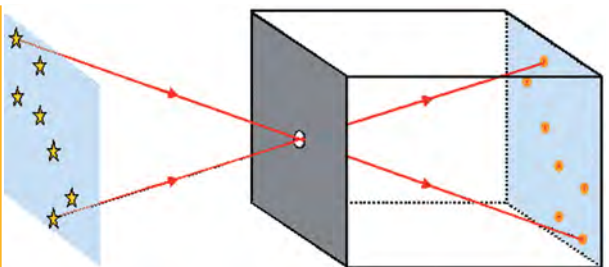
Les astrophysiciens utilisent des détecteurs capables de capter toute la gamme lumineuse, allant du rayonnement radio aux rayons X et gamma. Quand l'énergie des photons est trop grande, ils traversent la matière sans encombre ce qui rend impossible la formation d'images par réflexion ou réfraction. C'est ce qui se passe avec les rayons gamma dont les astrophysiciens ont besoin pour observer les phénomènes célestes les plus violents.

Alors, comment produire des images en rayons gamma, sans miroir ni lentille ? Pour cela il faut utiliser un dispositif nommé " ouverture codée " qui s'inspire de la chambre noire (ou appareil à sténopé) qu'utilisèrent les premiers photographes. En perçant un trou dans la face avant d'une boîte constituée d'un matériau opaque et en disposant une plaque sensible sur la face opposée, on réalise une chambre photographique très primitive permettant néanmoins de former des images d'autant plus nettes que le trou est petit (figure 1).

Pour transposer ce dispositif dans le domaine des rayons gamma il suffit d'utiliser un matériau de numéro atomique élevé (comme le plomb ou le tungstène) capable de bloquer efficacement cette lumière de haute énergie. Il faut aussi remplacer l'émulsion photographique par un détecteur permettant de mesurer la position du point d'impact de chaque photon gamma. On augmente la luminosité des images sans perdre en finesse en perçant la face avant d'un grand nombre de trous. Le plan de détection enregistre alors une superposition de plusieurs images décalées, autant que de trous percés dans le masque, du même objet source. Une méthode de reconstruction est alors nécessaire pour retrouver l'image de la source réelle à partir de celle que reçoit le détecteur.

*Figure 1 : Principe de la chambre noire.*

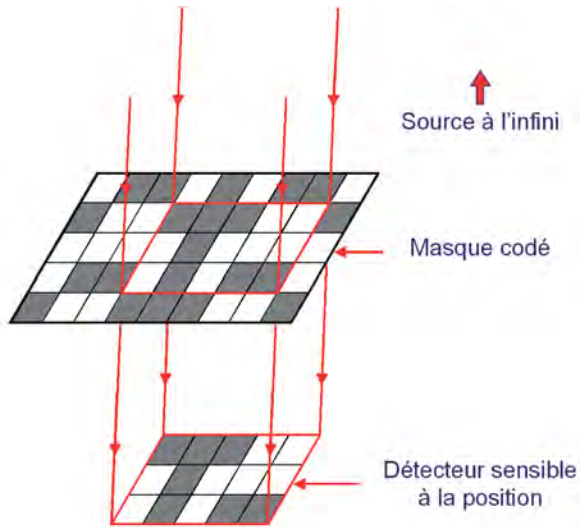
Le problème est que le piqué de l'image, qui nécessite un petit trou, s'obtient au détriment de la luminosité.



Formellement, le problème s'écrit sous forme matricielle  $P = (O * M) + B$  où  $P$  représente l'image enregistrée par le détecteur,  $O$  décrit l'objet céleste réel,  $M$  décrit le masque troué et  $B$  rend compte du bruit instrumental qui parasite le signal. L'opération de déconvolution consiste à reconstruire l'objet  $O$  à partir de  $P$ . Pour la mener à bien, il faut disposer d'une matrice de décodage  $D$  telle que le produit  $M*D$  soit égal à la matrice identité (élément neutre du produit  $*$ ) et on obtient ainsi la reconstruction de l'objet  $O$  qui devient  $O = P*D - B*D$ . En l'absence de bruit  $B$  la reconstruction est parfaite et pour minimiser les effets du bruit reconstruit  $B*D$  il faut que la somme des carrés des éléments de  $D$  soit aussi petite que possible. Intuitivement, on se doute que le choix du motif de masque, traduit par la forme de la matrice  $M$ , est un élément crucial de la reconstruction dans la mesure où il va favoriser un bon choix de la matrice de décodage  $D$ .

## Principe d'un télescope à ouverture codée

L'ouverture codée (dénommée aussi masque codé) est un assemblage d'éléments opaques et transparents (trous) et le rayonnement émis par la source projette son ombre sur un détecteur sensible à la position. Si la taille du détecteur est inférieure à la taille du masque, une source dans l'axe du dispositif projette sur le plan de détection une ombre qui est un sous-ensemble du motif de masque (figure 2). Quand la source est dans une direction hors axe, cela décale l'ombre projetée et le détecteur reçoit un autre sous-ensemble du motif du masque. Idéalement, ce motif est choisi de sorte qu'à chaque ombre projetée soit associée une unique direction de la source dans le ciel. Si cela est possible, l'opération mathématique de reconstruction décrite dans le paragraphe précédent permet de démêler les projections de plusieurs ombres pour retrouver les directions de plusieurs sources célestes.



**Figure 2** - Exemple d'un motif à deux dimensions construit à partir d'un ensemble de taille "5x3".

Mais alors, comment choisir le motif du masque et la matrice M, de façon à retrouver facilement la direction de la source ? Pour assurer à chaque direction du ciel de correspondre à une unique ombre projetée, on sait choisir la matrice M grâce aux travaux que le mathématicien français Jacques Hadamard mena au début du XX<sup>e</sup> siècle sur les ensembles à différence cyclique (voir encadré 1).

**Encadré 1**

Un ensemble à différence cyclique D est un ensemble de k entiers  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  pour lequel chacun des entiers  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  est z fois égal à une différence  $(d_i - d_j)$  modulo n ; k est la taille de l'ensemble, n son modulo et z sa répétition. Prenons un exemple :  $D = \{0,1,2,4\}$  est un ensemble à différence cyclique de taille 4, de modulo 7 et de répétition 2.

$d_4 - d_3 = 4 - 2 = 2$	$d_3 - d_4 = 2 - 4 \pmod{7} = 5$
$d_4 - d_2 = 4 - 1 = 3$	$d_2 - d_4 = 1 - 4 \pmod{7} = 4$
$d_4 - d_1 = 4 - 0 = 4$	$d_1 - d_4 = 0 - 4 \pmod{7} = 3$
$d_3 - d_2 = 2 - 1 = 1$	$d_2 - d_3 = 1 - 2 \pmod{7} = 5$
$d_3 - d_1 = 2 - 0 = 2$	$d_1 - d_3 = 0 - 2 \pmod{7} = 5$
$d_2 - d_1 = 1 - 0 = 1$	$d_1 - d_2 = 0 - 1 \pmod{7} = 6$

Les différences entre éléments de D appartiennent à l'ensemble d'entiers  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et chacun de ces entiers apparaît dans exactement 2 différences. L'ensemble D peut être représenté par la séquence binaire 1110100 dont le i-ème chiffre est égal à 1 si le nombre i appartient à D.

Un masque à une dimension spatiale est construite grâce à cette séquence en plaçant un trou pour chaque 1 et un pavé plein (opaque) pour chaque 0. La répartition des pleins et des trous du masque a des propriétés fixées par celles de l'ensemble à différence cyclique D. Dans notre exemple, le nombre d'éléments de masque qui sépare deux pavés opaques du motif de base (de taille 7), peut prendre toutes les valeurs de 1 à 6 et ceci exactement 2 fois. On peut montrer que ces propriétés garantissent un espacement uniforme des pavés opaques qui minimisera le bruit dans le processus de reconstruction des directions des sources célestes.

Nous montrons ainsi comment fonctionne la méthode de reconstruction en l'appliquant à un masque à une dimension se projetant sur un détecteur ayant 7 éléments sensibles. Pour trouver la direction de la source, on compare le signal enregistré sur le détecteur à celui associé à chacune des 7 directions possibles (la découpe du détecteur en 7 éléments impose 7 valeurs possibles pour les directions célestes). Il suffit pour cela de multiplier terme à terme la séquence enregistrée sur le détecteur et la séquence associée à la direction du ciel testée puis d'additionner tous les nombres obtenus. La direction de la source est celle pour laquelle cette somme est maximum (voir encadré 2). Ce principe peut être étendu à un masque codé à deux dimensions et permet d'engendrer une matrice M remplissant les critères nécessaires à notre processus de reconstruction optimum du ciel.

### Encadré 2

Considérons un masque codé à une dimension représenté par la répétition périodique de la séquence binaire 1110100 (0 pour un élément opaque, 1 pour un trou). Si la source est dans l'axe, elle projette sur le plan détecteur à 7 éléments la séquence binaire d'ombre (0) et de lumière (1) 1110100. La direction de la source est décalée d'un pas de résolution angulaire quand le motif qu'elle projette est décalé d'un pixel, 1101001 par exemple. Pour trouver où est la source, on calcule pour chaque direction la corrélation masque-détecteur obtenue en faisant la somme des produits terme à terme de la séquence enregistrée sur le détecteur et de la séquence associée à la direction du ciel testée. Imaginons que le détecteur capte la séquence 1101001 (voir figure 3). A chacune des 7 directions est associée une séquence : 1110100 (dans l'axe), 1101001/0111010 (décalage d'un pixel à gauche/droite), 1010011/0011101 (décalage de 2 pixels à gauche/droite) et 0100111/1001110 (décalage de 3 pixels à gauche/droite). La corrélation masque-détecteur pour une source dans l'axe est égale à la somme des chiffres du produit terme à terme de 1101001 par 1110100, qui vaut 110000, soit 2. On calcule que cette corrélation vaut aussi 2 pour toutes les autres directions sauf pour celle qui est décalée d'un pixel vers la gauche pour laquelle elle vaut 4. A ce maximum correspond la direction de la source réelle. Notons que le maximum de la corrélation est égal à la taille  $k$  de l'ensemble à différence cyclique qui a permis de calculer le masque et que le minimum est égal à  $z$ , la répétition de cet ensemble (voir encadré 1). Pour faciliter la reconstruction il est avantageux de choisir  $k$  et  $z$  aussi différents que possible.

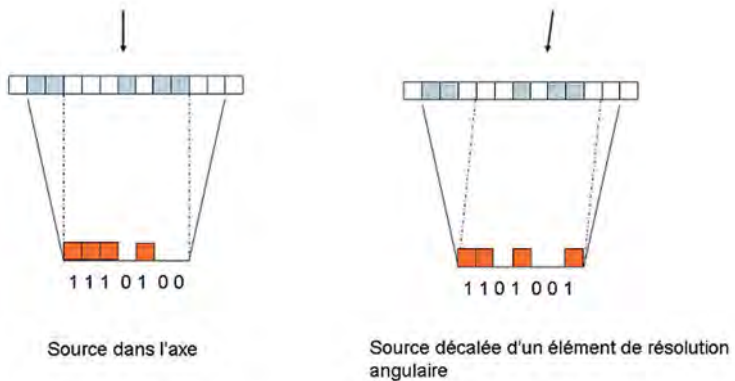


Figure 3 - Ombre projetée du masque codé selon la direction de la source.

## Acuité d'un télescope à ouverture codée

Considérons deux sources dont les directions font entre elles un angle inférieur à celui sous lequel on voit un élément de masque depuis le plan de détection. Ces deux sources projettent le même motif sur le détecteur et le télescope n'est donc pas en mesure de les différencier. Il en résulte que le pouvoir séparateur d'un télescope à ouverture codée dépend donc du rapport  $d/L$  entre la



dimension  $d$  d'un élément de masque et la distance  $L$  qui sépare le masque du plan détecteur. S'agissant d'un télescope spatial, qui doit donc s'accommoder de la capacité d'emport offert par les lanceurs, la plus grande dimension masque détecteur ne peut pas dépasser une dizaine de mètres. Quant aux éléments de masque, leur taille doit être supérieure à la précision avec laquelle le détecteur localise le point d'impact des photons gamma, soit quelques millimètres dans le meilleur des cas. Les télescopes à ouverture codée sont donc aptes à former des images du ciel dont la résolution angulaire est de l'ordre de quelques minutes d'arc. Cette aptitude est du plus haut intérêt pour séparer des sources gamma angulairement proches l'une de l'autre et surtout pour localiser les nouvelles sources gamma avec une précision suffisante pour entreprendre une recherche de contrepartie dans d'autres gammes de longueurs d'onde.

L'autre atout majeur des télescopes à ouverture codée réside dans leur capacité à mesurer simultanément le bruit de fond seul, là où la lumière de la source est bloquée par les zones opaques du masque, et le bruit de fond additionné de la contribution de la source, là où la lumière de la source passe à travers les zones transparentes du masque.

## Et ça marche !

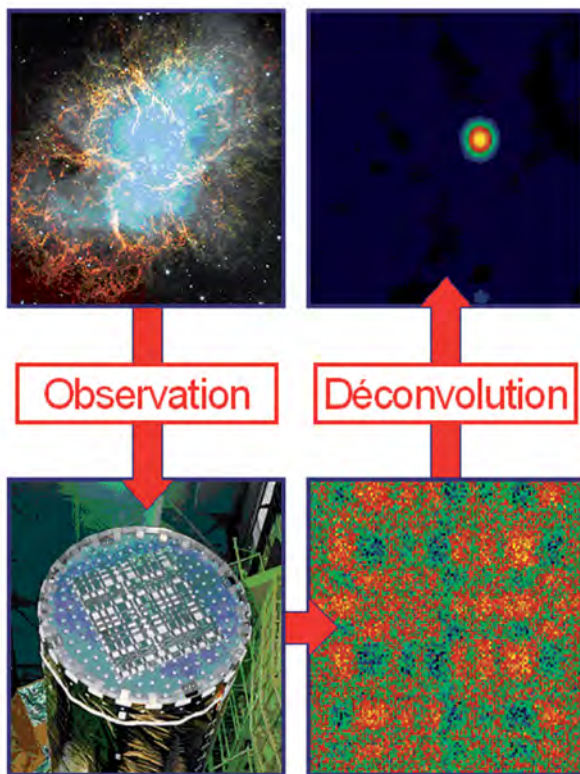
Le télescope français SIGMA à bord du satellite russe GRANAT a démontré que la pratique des ouvertures codées est bien adaptée aux observations dans la bande des rayons gamma de basse énergie. Son masque codé comprenait  $49 \times 53$  éléments disposés à partir d'un tableau de  $29 \times 31$  éléments étendus par permutation circulaire sur les deux axes. Le détecteur gamma sensible à la position est du même principe que les caméras médicales à scintigraphie. La position du point d'impact de chaque photon gamma est mesurée avec une précision de 5 à 6 mm. Compte tenu d'une distance masque détecteur de 2,5 m et de la dimension des éléments du masque (9,4 mm x 9,4 mm), le télescope présente une résolution angulaire théorique de 13 minutes d'angle.

Peu après la mise en orbite du satellite GRANAT, le télescope SIGMA fut pointé en direction de la nébuleuse du Crabe, reste d'une supernova qui a explosé en 1054 et source de référence de toute l'astronomie gamma. La caméra enregistra alors l'image brute reproduite en bas à droite de la figure 4 où l'on reconnaît bien l'empreinte du masque codé du télescope. Une fois transmise au sol, cette image brute a donné, après traitement, l'image du ciel reproduite en haut à droite de la figure 4. La nébuleuse du Crabe se présente alors sous l'aspect d'un excès d'émission à haute énergie dont la taille traduit la résolution angulaire effective du télescope, soit environ 18 minutes d'angle. A noter que le maximum d'émission, au centre de l'excès, coïncide à moins de 30 secondes d'angle près

avec la direction même du centre de la nébuleuse du Crabe observé en lumière visible.

Le concept d'imagerie à masque codé a permis des avancées remarquables en astronomie des hautes énergies, notamment une meilleure compréhension des régions centrales de notre Galaxie. Actuellement la mission INTEGRAL de l'Agence Spatiale Européenne utilise cette technique instrumentale sur les trois instruments embarqués à bord (IBIS,SPI et JEM-X).

Le succès de la mission INTEGRAL et de la mission GRANAT qui l'a précédée repose sur des travaux en théorie des nombres remontant au début du XX<sup>e</sup> siècle, notamment ceux du grand mathématicien français Jacques Hadamard.



*Figure 4* - Processus de reconstruction avec un masque codé. Notez que l'image de la nébuleuse du Crabe située en haut à gauche fut obtenue en lumière visible, tandis que celle située en haut à droite est son image en rayons gamma.

Il est étonnant de constater que des travaux de mathématiques pures, n'ayant a priori aucune application, ont permis l'observation des astres les plus énergétiques de l'Univers.

B.C.



Première observation d'un rayonnement gamma à très haute énergie dans Centaurusa.

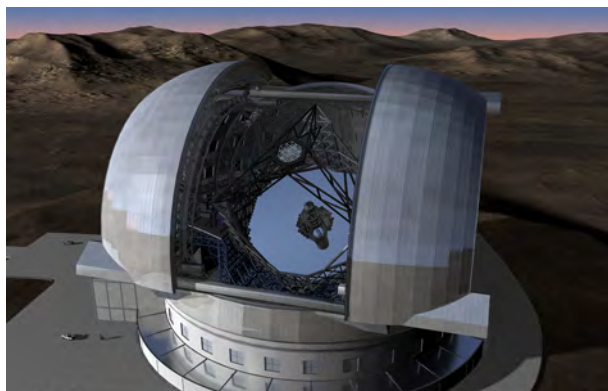
### Pour en savoir plus

[http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_technique.php?id\\_ast=1026](http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_technique.php?id_ast=1026)

# Traitement d'images en astrophysique

Sandrine Pires,  
CEA Saclay, Service d'Astrophysique

L'astrophysique s'intéresse à la dynamique et aux propriétés physiques des objets de l'Univers (les étoiles, les planètes, le milieu interstellaire, les galaxies, les amas de galaxies...). Pour comprendre les phénomènes physiques qui gouvernent ces objets, la principale source d'information est la lumière qui nous en vient.



nous en vient.

Dans l'Antiquité, les observations se faisaient à l'œil nu. Au début du XVII<sup>e</sup> siècle, l'œil fut complété par la lunette astronomique puis les premiers télescopes furent développés dans la deuxième partie du XVII<sup>e</sup> siècle. Pendant des siècles, les astronomes étaient limités à l'observation de la

lumière visible, la qualité des observations augmentant avec la taille des lunettes ou des télescopes. Mais la lumière visible ne représente qu'une partie du spectre lumineux. Dans la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle, l'envoi de ballons, de sondes spatiales et de satellites allié au développement de nouveaux détecteurs de lumière a permis d'accéder à l'ensemble du rayonnement électromagnétique. Désormais, toute la lumière (rayons gamma, rayons X, ultraviolet, infrarouge, micro-ondes, ondes radio et bien sûr lumière visible) témoigne de ce qui se déroule dans l'univers.

De nos jours, les astronomes disposent d'instruments de pointe pour observer le ciel, dans toutes les longueurs



d'onde, depuis le sol ou l'espace, fournissant chaque jour une quantité de plus en plus importante de données. Le traitement de ces données est aujourd'hui l'un des pôles d'activité les plus innovants et des plus prometteurs pour améliorer nos connaissances en astrophysique. En effet, le développement d'instruments de plus en plus précis exige d'améliorer en parallèle les techniques de traitement d'images associées, pour une meilleure exploitation des instruments existants et futurs.

Le traitement d'images permet d'améliorer la qualité des images pour en extraire l'information pertinente et remonter aux paramètres physiques. Les mathématiques appliquées sont à la base du développement des théories du traitement d'images. Mais le véritable essor n'est survenu que dans les années 1960 quand les ordinateurs sont devenus suffisamment puissants pour travailler sur des images. Aujourd'hui le développement des méthodes de traitement d'images est primordial en astrophysique au même titre que le développement de nouveaux instruments d'observation. Les performances des instruments permettent d'optimiser la qualité des observations, tandis que le traitement d'images permet d'améliorer la qualité des images obtenues et ainsi d'en optimiser l'analyse. Nous allons nous intéresser ici à quelques exemples simples couramment rencontrés dans le traitement d'images astrophysiques.

## Les effets atmosphériques et instrumentaux

Les images obtenues au sol ou dans l'espace sont toujours limitées en résolution angulaire par la taille du télescope. Avec une optique parfaite, la résolution est inversement proportionnelle au diamètre de l'instrument. Cela signifie que les détails de l'image, dont la dimension angulaire est inférieure à la résolution de l'instrument, ne sont pas distinguables. Cet effet instrumental, présent dans les images obtenues à l'aide de n'importe quel dispositif optique, résulte de son ouverture finie. Jusqu'au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, les améliorations en résolution s'obtenaient en augmentant le diamètre des instruments. Mais un autre effet empêche les grands télescopes d'atteindre leur résolution angulaire théorique : la turbulence atmosphérique qui, en perturbant la qualité des images en limite la résolution. Pour l'astronome qui observe un objet céleste à travers son télescope, la turbulence atmosphérique se traduit par l'observation d'une image floue dont les détails sont peu ou pas visibles. Dans un premier temps, pour essayer de réduire cet effet, les astronomes ont fait construire des observatoires en altitude afin de diminuer le parcours de la lumière dans l'atmosphère améliorant ainsi la résolution d'un facteur 2 à 3. Une solution plus efficace consiste à placer des télescopes en dehors de l'atmosphère, en orbite autour de la Terre, éliminant ainsi tous les effets atmosphériques. La résolution de l'image est alors limitée par la taille des télescopes que l'on peut envoyer dans l'espace.

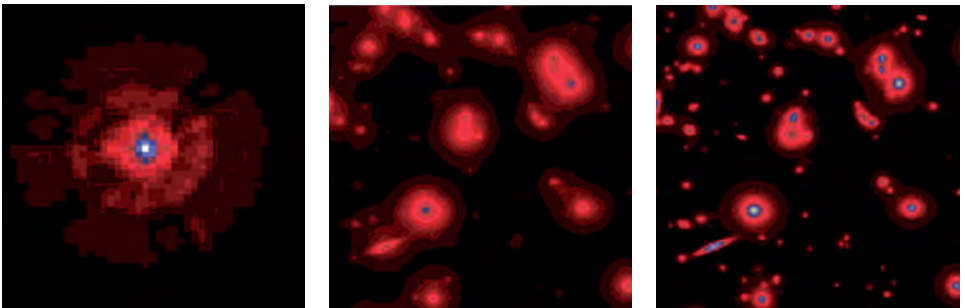
La volonté d'augmenter la résolution des images étant toujours un défi majeur en astrophysique, le traitement d'images est venu proposer une solution élégante à ce problème. Pour comprendre le principe de cette méthode, il faut tout d'abord comprendre le problème de perte de résolution.

## La perte de résolution

La résolution angulaire correspond au plus petit angle séparant deux points que l'on parvient à voir comme distinct l'un de l'autre. Pour l'œil humain, la résolution angulaire est d'environ 1 minute d'arc. Pour un système d'imagerie, la résolution angulaire dépend du diamètre de l'objectif. L'objectif agit comme un filtre qui enlève plus ou moins les hautes fréquences du signal. Cela se traduit par un étalement de l'objet observé et une perte des détails. Mathématiquement, on peut le décrire comme une sorte de produit dit de " convolution " entre l'objet O et une fonction donnée H qui correspond à la réponse du système d'imagerie (incluant les effets instrumentaux et atmosphériques) :  $I = O * H$ . La convolution est le remplacement de chaque pixel de l'objet O par une combinaison linéaire de ses pixels voisins ; les coefficients de pondération étant définis à partir de la fonction H.

## La déconvolution

En pratique, pour connaître la réponse d'un système d'imagerie H, on analyse l'image d'une source ponctuelle, une étoile par exemple. Idéalement, cette image devrait être ponctuelle. En pratique c'est une grosse tache dont la taille est inversement proportionnelle au diamètre du télescope et dépendant de la turbulence atmosphérique au moment de la prise de vue. Cette tache n'est rien d'autre que la réponse du système d'imagerie H (voir la figure 1 à gauche).



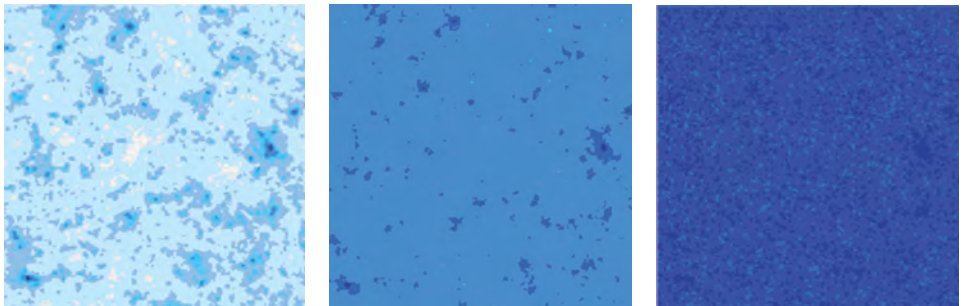
*Figure 1* - A gauche : la réponse du système d'imagerie, au milieu : une simulation de galaxies perturbée par les effets instrumentaux, à droite : le résultat obtenu par la méthode dite de " déconvolution ".



Connaissant la réponse du système d'imagerie  $H$ , on peut alors par une méthode dite de " déconvolution " retrouver l'objet  $O$ . Pour cela, on réalise une sorte de division entre  $I$  et  $H$ . Il existe un certain nombre de méthodes de déconvolution donnant des résultats plus ou moins bons. Mais l'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de se débarrasser de la réponse du système d'imagerie sans avoir à augmenter indéfiniment la taille de l'objectif ou à sortir de l'atmosphère.

## Les bruits de mesure

En plus d'être limitées en résolution angulaire, les images obtenues par les instruments de mesure sont toujours entachées d'une incertitude plus ou moins grande. Toute observation du ciel comporte ainsi, en plus du signal, des perturbations qui se superposent à ce signal et que l'on qualifie de " bruit ". Mathématiquement, l'image observée peut alors s'écrire de la manière suivante :  $I = O * H + N$  où  $N$  représente le bruit de mesure. On définit alors le rapport signal/bruit d'un signal comme le rapport des énergies du signal et du bruit. Ce rapport signal/bruit conditionne la qualité de l'exploitation des données. S'il est faible, on ne voit que le bruit (voir figure 2)



*Figure 2 :* De gauche à droite : la même carte de matière noire simulée avec un rapport signal/bruit respectivement de 2, 0.5 et 0.1

## Amélioration du rapport signal/bruit

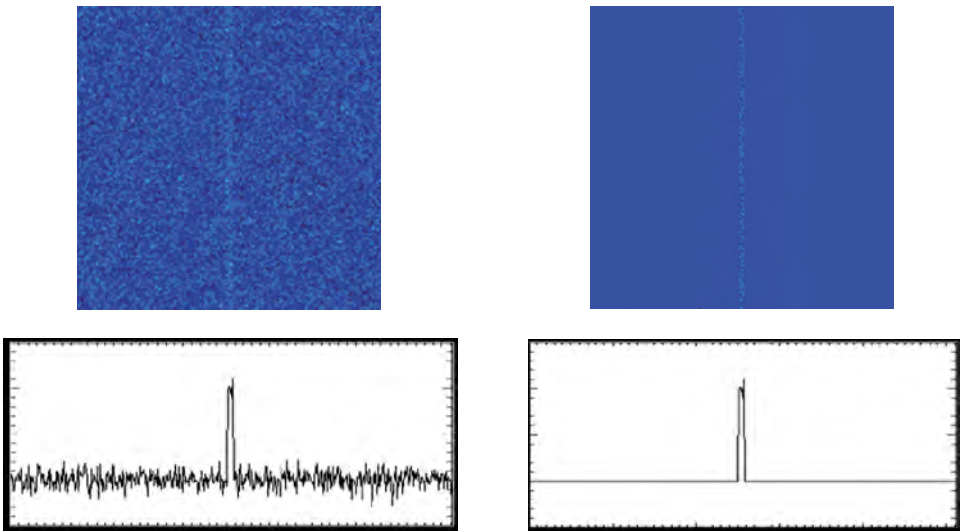
Les méthodes classiques pour améliorer le rapport signal/bruit consiste à essayer d'optimiser les instruments de mesures (en réduisant par exemple le bruit de fond ambiant) ou les caractéristiques d'observations (en jouant sur le temps de pose ou l'ouverture du télescope).

## Le filtrage

Le traitement d'images propose une méthode pour améliorer la qualité de l'image une fois l'acquisition réalisée : le filtrage. L'un des filtres les plus simples

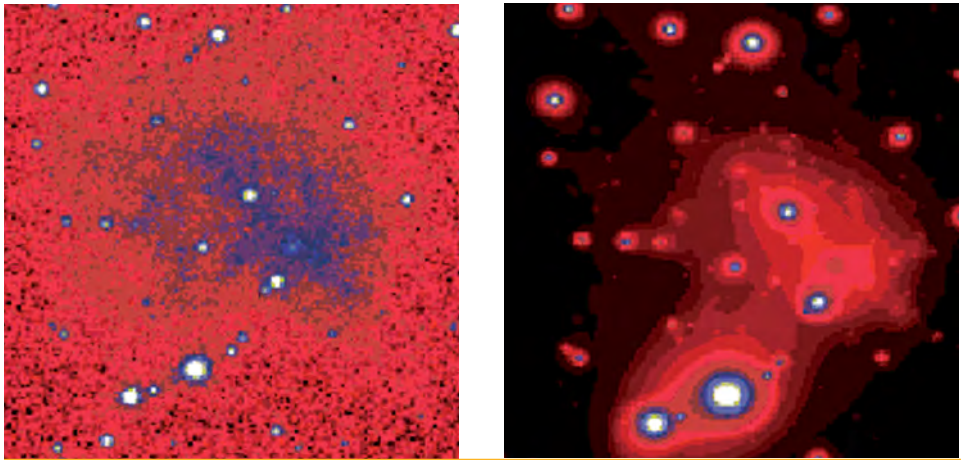
est le filtre *moyenneur* qui consiste à remplacer chaque pixel de l'image par une moyenne arithmétique estimée à partir du pixel considéré et de ses pixels voisins. Un des filtres les plus utilisés est le filtre *gaussien*, basé sur le même principe, où la moyenne est pondérée de sorte à favoriser les pixels les plus proches. Les coefficients de pondération sont calculés à partir de la forme d'une fonction Gaussienne d'où son nom.

Des méthodes plus compliquées de filtrage ont été récemment développées s'appuyant sur la recherche de nouvelles représentations du signal. Le principe de ces méthodes consiste à transformer le signal de sorte que le résultat ait un rapport signal/bruit plus élevé. Par exemple, sur la figure 3, à gauche, on voit bien qu'une représentation qui sommerait tous les pixels d'une même colonne de l'image ferait ressortir la ligne dans cette nouvelle représentation. En bas à gauche, on peut voir le résultat de cette opération. On voit ainsi que dans cette nouvelle représentation, il devient facile de séparer la contribution du signal de celle du bruit. Si on met à zéro tous les coefficients inférieurs à une certaine valeur seuil (voir le résultat en bas à droite) la transformation inverse fournit une image filtrée de l'image de départ (en haut à droite).



**Figure 3** - En haut à gauche : une image représentant une ligne avec du bruit.  
En bas à gauche : la même image dans une nouvelle représentation améliorant le rapport/bruit.  
En bas à droite : le résultat dans cette nouvelle représentation après seuillage.  
En haut à droite : l'image filtrée par cette méthode.

Bien évidemment cette représentation ne va pas permettre d'augmenter le rapport signal/bruit de toutes les images. Il existe pourtant des représentations qui permettent de bien représenter une grande variété d'images : c'est le cas des représentations en " ondelettes " (voir figure 4).



*Figure 4* - L'image à gauche représente le pulsar PSR B0540-69.3 et son nuage. Celle de droite représente le résultat d'un filtrage obtenu par une représentation en ondelettes.

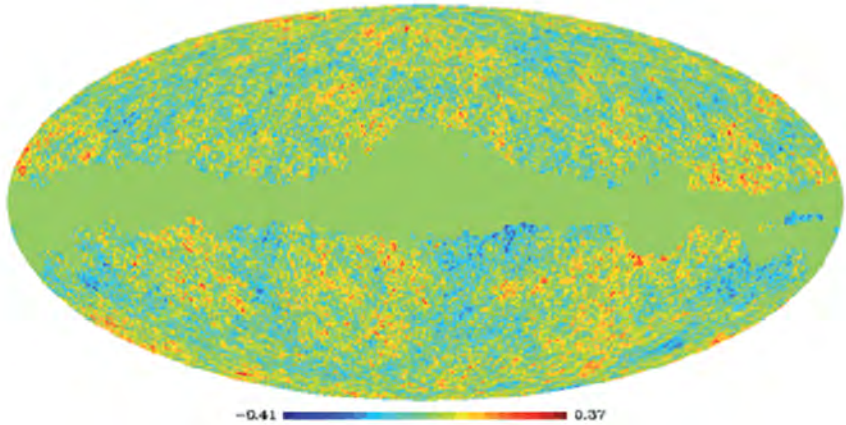
## Les données manquantes

Autre problème qui peut survenir pendant les observations : la perte de certaines données. Cette mutilation de l'information complique souvent son exploitation. Les causes de perte de données sont multiples : défauts sur la caméra CCD, présence d'objets qui font saturer le détecteur (étoiles brillantes ou rayons cosmiques) ou défaillance temporaire des instruments d'observation.

## Impact des données manquantes sur l'exploitation des données

Le problème des données manquantes est vaste et quasiment inévitable ce qui rend indispensable un traitement approprié. Celui-ci dépend à la fois de la quantité de données manquantes et de leur répartition mais aussi de l'information que l'on cherche à extraire des données sauvegardées. La figure ci-dessous

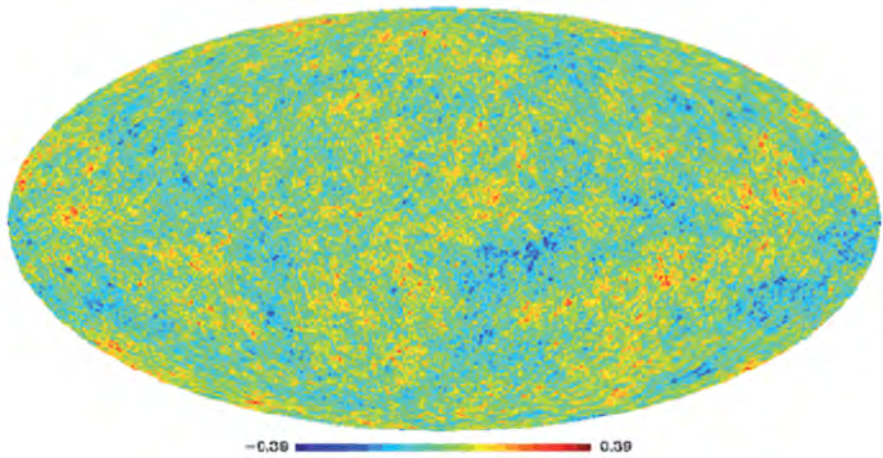
montre le résultat obtenu par le satellite WMAP après 5 ans d'observation du fond diffus cosmologique. Les données masquées au niveau de l'équateur correspondent à une zone où le signal n'a pu être mesuré précisément à cause de l'absorption due aux poussières situées dans le plan galactique. Cette zone masquée pose problème lors de l'analyse de cette carte à l'aide d'opérateurs qui agissent sur l'ensemble des pixels car le masque introduit des erreurs dans l'estimation des paramètres.



*Figure 5* - Résultat obtenu par le satellite WMAP après 5 ans d'observation du fond diffus cosmologique. Le masque au niveau de la zone équatoriale correspond à la zone d'absorption du plan galactique.

## Les méthodes pour corriger la présence de masques

De nombreux travaux ont été réalisés pour corriger la présence de masques. La plupart proposent de corriger les paramètres calculés en présence du masque afin d'estimer la vraie valeur des paramètres. Nous présentons dans la figure ci-dessous, le résultat obtenu à l'aide d'une méthode développée récemment dont le principe est tout autre. Cette méthode est appelée " inpainting " par analogie avec les techniques utilisées autrefois par les peintres pour restaurer les œuvres d'art détériorées.



**Figure 6** : Résultat obtenu par la méthode d'inpainting sur les données de WMAP (voir Figure 5). Les données restaurées dans le masque sont cohérentes avec les données en dehors du masque.

## Conclusion

Le traitement d'images permet de modifier le contenu des images afin d'en tirer l'information utile pour une application donnée. L'Astrophysique qui repose sur l'observation du ciel est une base idéale pour l'application et le développement de nouvelles méthodes dans ce domaine. Nous avons présenté ici plusieurs applications courantes. Mais les possibilités offertes sont très vastes et ces méthodes peuvent également permettre de résoudre des problèmes bien spécifiques.

Aujourd'hui, le traitement d'images est indispensable à l'analyse et à l'interprétation des données astrophysiques et ce domaine est en plein essor.

*S.P.*

### Pour en savoir plus

[http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_technique.php?id\\_ast=423](http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_technique.php?id_ast=423)



# Les simulations numériques en astrophysique

Frédéric Bournaud

CEA Saclay, Service d'Astrophysique

Comment les galaxies et les grandes structures de l'Univers se sont-elles formées ? Qu'est ce qui déclenche la formation de nouvelles étoiles dans les nébuleuses gazeuses du milieu interstellaire ? Ces questions fondamentales de l'astrophysique moderne reposent sur des lois physiques, a priori simples à décrire mathématiquement : la principale force est la force de gravité, et l'on sait calculer de manière exacte les forces de gravité qu'un objet exerce sur un autre. Toutefois, le nombre d'étoiles dans une galaxie comme notre Voie Lactée approche les cent milliards, et le nombre de galaxies dans l'Univers est encore plus grand.

Les équations qui gouvernent ces phénomènes astrophysiques sont donc relativement simples, mais elles sont extrêmement nombreuses. Pour les résoudre, les astrophysiciens ont donc recours à la " simulation numérique " sur des supercalculateurs, qui permettent de calculer l'évolution de régions d'Univers, de galaxies, ou de nuages de gaz interstellaire au cours du temps.

## La gravité dans les simulations numériques

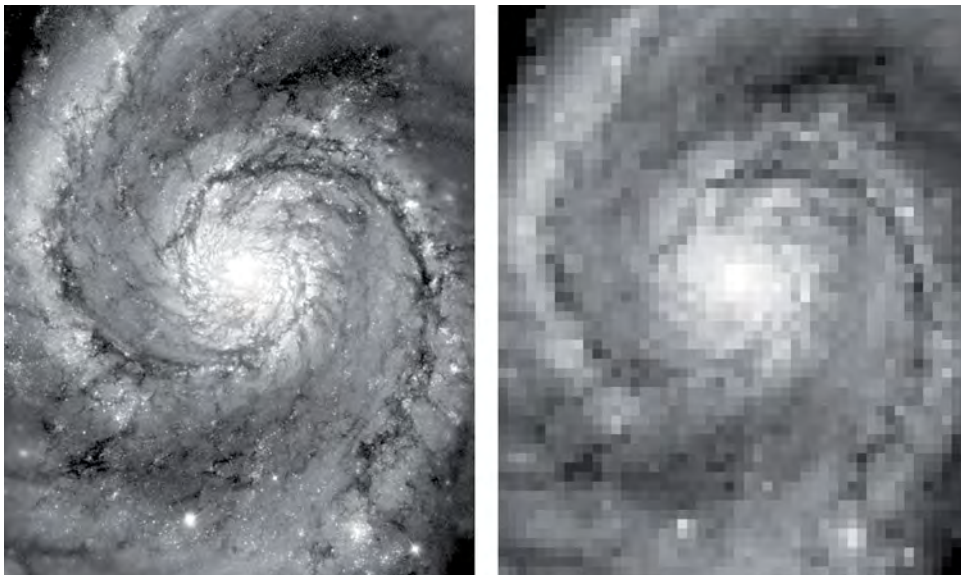
### *L'Univers dans un ordinateur*

Aucun ordinateur, même les plus puissants supercalculateurs au monde, ne peuvent traiter exactement les cent milliards d'étoiles d'une galaxie : sans parler même de calculer les forces et mouvements, il serait impossible de stocker la position et la vitesse de chaque particule en mémoire. Une galaxie est donc modélisée avec un certain nombre de particules, qui représentent chacune un groupe d'étoiles. Les premières simulations dans les années 1970 ne reposaient que sur quelques dizaines de particules, et ne pouvaient donc décrire que les plus importantes des sous-structures. Les simulations numériques modernes emploient plusieurs millions de particules et peuvent donc " résoudre " des structures de plus en plus fines jusqu'aux régions de formation de nouvelles étoiles au sein des galaxies.

Malgré l'utilisation de particules moins nombreuses que les étoiles dans

une galaxie, le calcul des forces gravitationnelles doit être accéléré par l'emploi d'algorithmes astucieux pour raccourcir le temps de calcul. En appliquant la formule de Newton, la force exercée par une particule sur une autre est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui les sépare. L'emploi de cette formule est néanmoins extrêmement coûteux : d'une part, il nécessite d'effectuer le calcul pour toutes les paires de particules, soit  $n(n-1)$ , environ  $n^2$  pour  $n$  particules. D'autre part, chaque calcul de force nécessite le calcul d'un carré, c'est-à-dire une multiplication, opération bien plus coûteuse qu'une addition pour un ordinateur. Pour conserver des temps de calcul raisonnables (quelques semaines sur un supercalculateur, soit des décennies sur un ordinateur de bureau), il faudrait réduire le nombre de particules à quelques milliers, et non quelques millions, dégradant d'autant la possibilité de résoudre la formation de petites structures dans l'objet simulé.

Pour calculer les forces de gravité et l'évolution du système en un temps raisonnable, la technique la plus rapide consiste à découper l'espace selon une grille la plus fine possible (figure 1), et de calculer la densité de masse contenue dans chaque cellule de cette grille : opération rapide, puisqu'il s'agit d'additionner



**Figure 1** - A gauche, la galaxie spirale Messier 51, observée par le télescope spatial Hubble. A droite, représentation d'une carte de densité sur une grille numérique.

L'emploi de telles grilles permet de calculer les forces gravitationnelles de manière très rapide. Par contre, pour décrire les structures fines d'une telle galaxie, il est nécessaire d'employer des grilles très fines (plus que sur cet exemple), de modéliser les étoiles avec plusieurs millions de particules, et donc de disposer de puissants calculateurs. (NASA/HST)

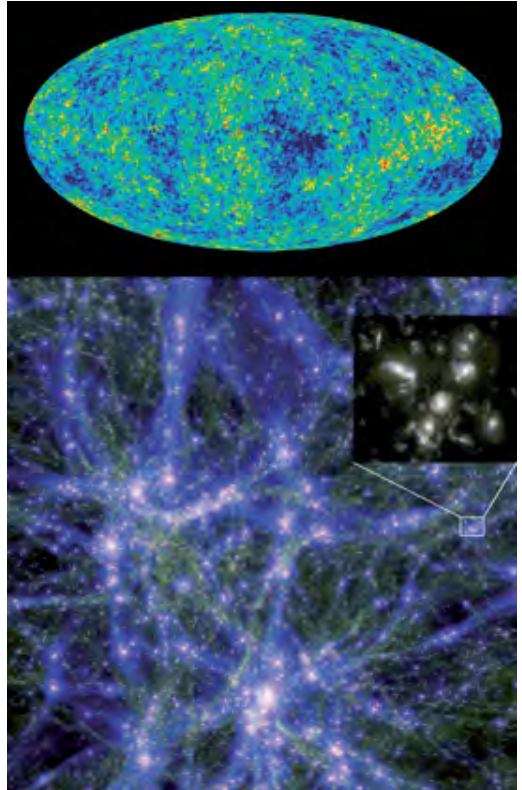
la masse des particules se trouvant dans chaque cellule.

On obtient alors une carte de la densité, que l'on peut transformer en carte de l'énergie potentielle gravitationnelle. Pour connaître la force subie par une particule de la part de toutes les autres, il suffit alors de calculer la dérivée de cette énergie à l'endroit où se trouve cette particule, en calculant la différence d'énergie entre deux cellules voisines. Cet algorithme semble plus complexe que le calcul direct des forces entre chaque paire de particules, mais il est nettement plus efficace, car il nécessite  $n \log(n)$  opérations pour  $n$  particules. Lorsque  $n$  est grand (des millions),  $n \log(n)$  est bien plus petit que  $n^2$ .

### *La formation des galaxies dans l'Univers*

Une radiation micro-ondes, le " rayonnement fossile ", baigne l'ensemble de l'Univers et donne une image très précise de son état 300 000 ans après le Big Bang - un instant comparé aux 13 milliards d'années de l'Univers actuel. Cette image montre des régions plus denses et d'autres moins denses, mais sans organisation spécifique.

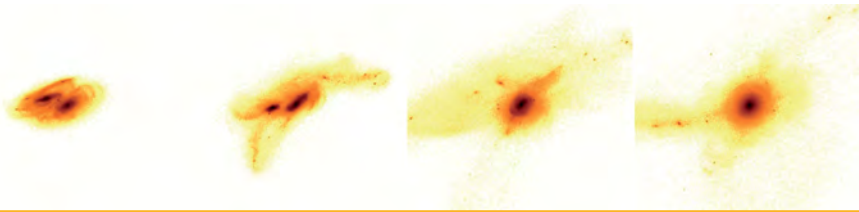
En utilisant cette image comme point de départ, ou " condition initiale " d'une simulation numérique, les astrophysiciens ont pu reconstituer l'ensemble de l'évolution de cet Univers très jeune jusqu'à l'Univers actuel, sous l'effet des forces de gravité : les sur-densités initiales attirent à elles de plus en



**Figure 2** -Les fluctuations primordiales de l'Univers vue dans le rayonnement fossile (en haut).

L'Univers primordial était presque homogène, avec des petites fluctuations plus massives (jaune/rouge) ou moins massives (bleu/noir). La simulation numérique permet d'expliquer la formation des galaxies à partir de cette carte initiale, et sous l'effet des forces de gravité. La simulation vue ici reproduit l'Univers après plusieurs milliards d'années d'évolution. Chaque point brillant est une galaxie, le plus souvent avec une structure spirale similaire à notre Voie Lactée. Les galaxies s'alignent le long de filaments cosmologiques, et des amas de galaxies se forment aux intersections de filaments. (R. Teyssier/CEA)

plus de masse, et se contractent de plus en plus, prenant la forme de galaxies naines. Ensuite, lorsque deux petites galaxies naines se trouvent suffisamment proches l'une de l'autre, elles vont s'attirer, entrer en collision puis fusionner en galaxies de plus en plus massives, jusqu'aux grandes galaxies spirales (comme la Voie Lactée) et elliptiques de l'Univers actuel. Ces simulations numériques montrent donc une origine " hiérarchique " des galaxies, les premières formées étant relativement petites, puis croissant par fusions successives. Les simulations montrent également que les galaxies ont tendance à s'aligner en de longs filaments, au croisement desquels se forment les amas de galaxies.



*Figure 3* - Simulation d'une collision de deux galaxies spirales. Les deux galaxies fusionnent en une seule galaxie plus massive. Les spirales (disques en rotation) ont ici été transformées en une galaxie elliptique. Des filaments de matière ont été arrachés sous l'effet des marées exercées par chaque galaxie sur sa voisine. La durée de cette séquence est de 700 millions d'années. (F. Bournaud/CEA)

## Physique du gaz et hydrodynamique

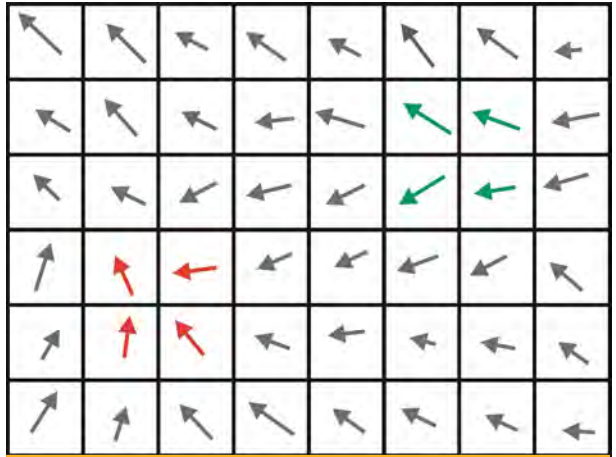
### *Gaz, chauffage et refroidissement*

Les étoiles sont des corps quasi-ponctuels à l'échelle de l'Univers, elles n'interagissent donc que par gravité, et les collisions entre elles sont extrêmement rares. Par contre, le gaz interstellaire est plus diffus, et ses atomes entrent en collisions mutuelles, si bien que son évolution est régi comme celle de tout gaz terrestre, par exemple l'atmosphère : la gravité n'est pas la seule force qui agit sur le gaz ; les forces de pression hydrodynamique jouent également un rôle important dans l'évolution du gaz. Les forces de pressions dépendant de la température, les simulations numériques doivent donc déterminer à tout instant et en tout point la température du gaz.

Par exemple, un gaz interstellaire comprimé verra sa température, et donc sa pression, augmenter - exactement comme un gaz comprimé dans un piston sur Terre. Pour modéliser ces phénomènes, la simulation numérique a de nouveau recours à la discrétisation sur une grille : dans chaque cellule, la masse de gaz et la vitesse du gaz sont stockées en mémoire. L'algorithme identifie les

zones de convergence des vitesses (Figure 4), et la température du gaz dans ces zones augmente. À l'inverse, dans les zones de divergence, le gaz se décompresse donc se refroidit.

Un second processus de refroidissement intervient : lorsque le gaz devient très dense, ses atomes interagissent fortement les uns avec les autres, ce qui conduit à l'émission de photons lumineux, qui emportent donc une partie de l'énergie de ce gaz, lui permettant à nouveau de se refroidir. L'évolution du gaz interstellaire est donc complexe : la compression du gaz augmente sa température, mais une fois qu'il est très fortement comprimé, le gaz se refroidit spontanément en rayonnant son énergie sous forme de lumière.

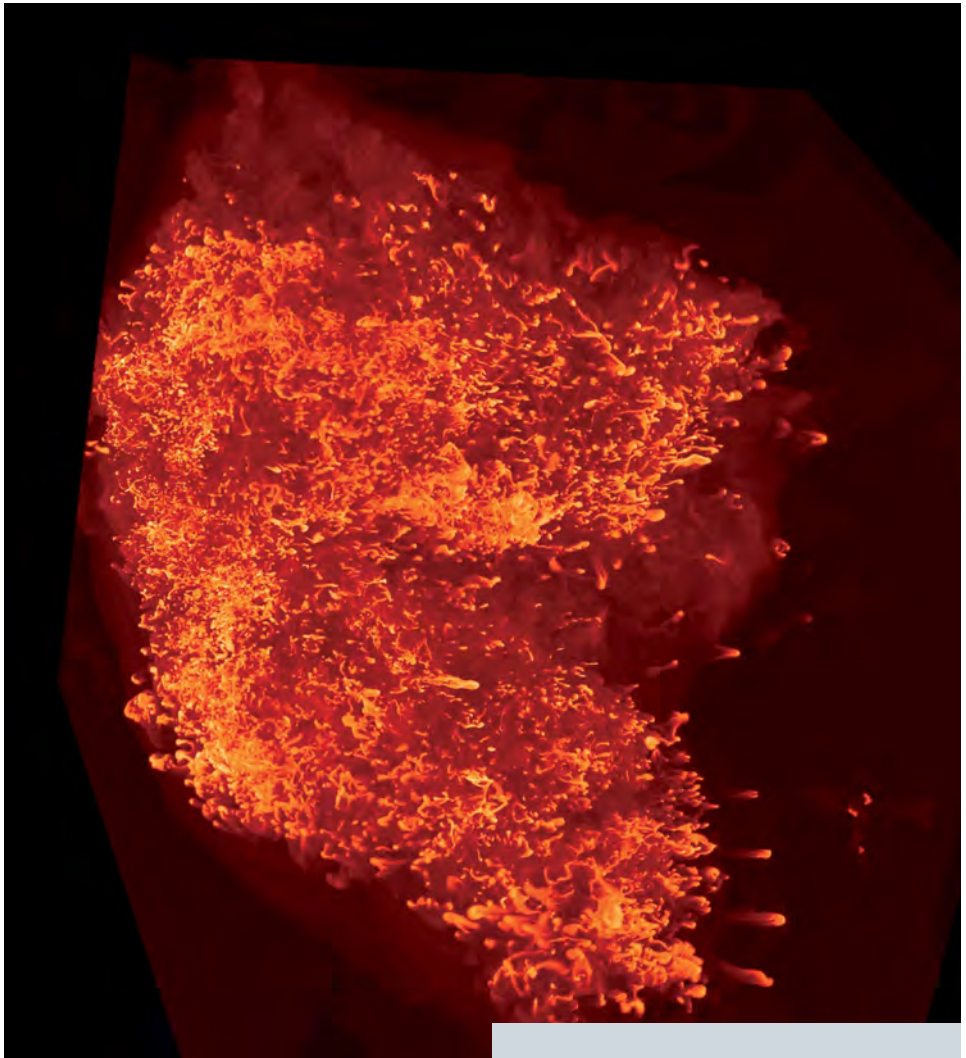


*Figure 4* - Principe des simulations hydrodynamiques sur grille : l'espace est découpé en cellules, et le vecteur représente la vitesse du gaz dans chaque cellule. Dans les zones de convergence, comme celle indiquée en rouge, le gaz est comprimé et chauffé. Dans les zones de divergence (en vert), le gaz se détend et se refroidit.

### **Formation d'étoiles**

Les simulations numériques modélisant les phénomènes de refroidissement et chauffage du gaz permettent d'étudier la formation de nouvelles étoiles dans le milieu interstellaire. Ces simulations montrent entre autres qu'un processus important de la formation d'étoiles est l'instabilité de refroidissement. Lorsqu'une région un peu plus dense apparaît dans le gaz interstellaire, elle se refroidit plus rapidement que le gaz environnant. Sa pression diminue, et devient donc plus faible que la pression du gaz plus diffus et chaud qui entoure cette région. Cette pression extérieure contracte donc la région dense, qui devient ainsi encore plus dense, se refroidit encore plus vite, et le processus s'emballe. Ce processus conduit à la formation de cœurs très denses dans le gaz interstellaire : des proto-étoiles. (Figure 5)



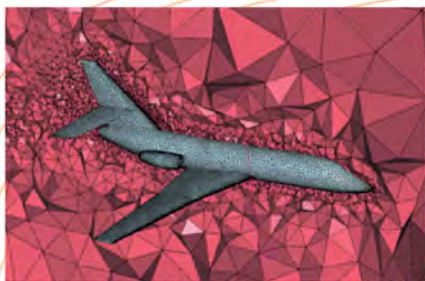


*Figure 5* : Simulation hydrodynamique du gaz interstellaire dans une petite région d'une galaxie. Des régions plus denses se sont formées, refroidies, et devenues de plus en plus denses. Ces régions sont des cœurs pré-stellaires où de nouvelles étoiles vont se former. L'ensemble de l'image montre ici la naissance d'un amas d'étoiles. (E. Audit/CEA)

### Pour en savoir plus

[http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_visu.php?id\\_ast=2551](http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_visu.php?id_ast=2551)

L'Institut national de recherche en informatique et en automatique (INRIA) est le seul institut public français entièrement dédié à la recherche en sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC).



Modéliser  
Programmer  
Communiquer  
Interagir

Ingénierie numérique  
Sciences numériques  
Médecine numérique



[www.inria.fr](http://www.inria.fr)

INSTITUT NATIONAL  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE  
ET EN AUTOMATIQUE





## Énergie

Disposer d'énergies plus compétitives, non émettrices de gaz à effet de serre et respectueuses de l'environnement

## Défense et Sécurité

Garantir la pérennité de la dissuasion nucléaire et la sécurité

## Technologies pour l'information et la santé

Valoriser l'industrie grâce à la recherche technologique

## Recherche Fondamentale

S'appuyer sur une recherche fondamentale d'excellence pour développer les programmes de recherche technologique

# Le CEA un acteur clef de la recherche technologique en Europe

Acteur majeur en matière de recherche, de développement et d'innovation, le Commissariat à l'énergie atomique intervient dans trois grands domaines : l'énergie, la défense et les technologies pour l'information et la santé, en s'appuyant sur une recherche fondamentale d'excellence.

Fort de ses 15 000 chercheurs et collaborateurs, aux compétences internationalement reconnues, il constitue une force de proposition pour les pouvoirs publics. Acteur moteur de l'innovation industrielle, le CEA développe des partenariats avec les industriels français et européens. Il est également garant de la pérennité de la dissuasion nucléaire.

Reconnu comme un expert dans ses domaines de compétences, le CEA est pleinement inséré dans l'Espace européen de la recherche avec une présence croissante au niveau international.

cea

www.cea.fr



www.cnrs.fr



## Le CNRS aujourd'hui et demain

Organisme de recherche de référence en Europe et dans le monde, le CNRS a pour mission première l'accroissement des connaissances, en s'appuyant sur toutes les disciplines et sur sa capacité à les fédérer. Le CNRS désormais organisé en instituts, se projette aujourd'hui dans une stratégie à long terme qui dessine son avenir à l'horizon 2020.

## Quelques chiffres

26000 personnels statutaires (11600 chercheurs et 14400 ingénieurs, techniciens et personnels administratifs) et environ 6500 non permanents (doctorants, post-doctorants, chercheurs associés, contrats de courte durée, boursiers, ...).

1100 laboratoires implantés sur l'ensemble du territoire national dont plus de 80% sont en partenariat avec des établissements d'enseignement supérieur et de recherche, des organismes nationaux, européens et internationaux et des entreprises privées.

25000 publications par an, dont plus de la moitié est cosignée avec au moins un laboratoire étranger.

## Le CNRS, une pépinière de talents

Avec quinze lauréats du prix Nobel, neuf de la médaille Fields (la plus haute distinction internationale en mathématiques) et un prix Alan Turing (équivalent du prix Nobel en informatique), le CNRS a une longue tradition d'excellence.

Le CNRS figure aussi parmi les dix premiers déposants de brevets de l'Hexagone.





Le **CIJM** est une association créée en 1993 par des professeurs de mathématiques désireux de proposer une autre réflexion sur leur discipline.

Le **CIJM** met à la disposition de tous ses membres son savoir faire dans le domaine des jeux mathématiques et sa base d'informations pratiques.

Le **CIJM** édite *Panoramath*, annales corrigées de ses compétitions.

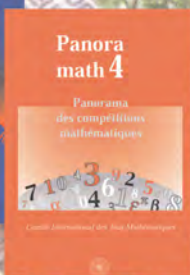
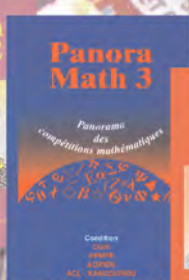
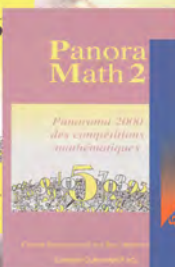
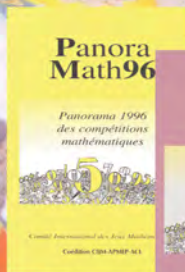
Le **CIJM** fédère plus de trente compétitions intéressant ainsi plusieurs millions de personnes tant en France qu'à l'étranger. Toutes unissent leurs énergies pour proposer des activités mathématiques vivantes et créatives.

Le **CIJM** est une plateforme internationale de réflexion et d'échanges sur une pratique dynamique des mathématiques. Il propose à tous une approche nouvelle de la culture scientifique.

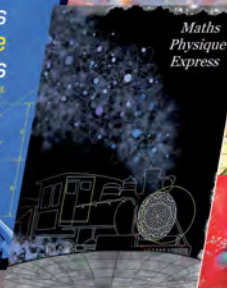
Le **CIJM** organise tous les ans fin mai à Paris, une grande manifestation ouverte au public :

le **salon de la culture et des jeux mathématiques**, lieu de rencontre de nombreux pays et espace privilégié de vulgarisation et de promotion de la culture mathématique.

le **CIJM** édite expositions, jeux et brochures.



[www.cijm.org](http://www.cijm.org)





## *Grâce au soutien*

du CEA, de l'INRIA, du CNRS, de la SMF, de la SMAI, de la SFdS, de Femmes et Mathématiques, d'Animath et de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, de la Mairie de Paris et de la Région Ile de France.

## *Sous la direction de*

Roland Lehoucq  
CEA-Saclay

*et*

Marie José Pestel  
Comité International  
des Jeux Mathématiques

## *Cette brochure a réuni les signatures de*

Pierre Léna  
Denis Savoie  
Marc Goutaudier  
Jean-François Colonna  
Patrick Rocher  
Jérôme Pérez  
Jean-Pierre Uzan  
Roland Lehoucq  
Bertrand Cordier  
Sandrine Pires  
Frédéric Bournaud

Qu'ils soient ici tous remerciés pour la patience et la gentillesse dont ils ont fait preuve pour écrire cette brochure.

## *Illustrations de couverture*

Elsa Godet - [www.sciencegraphique.com](http://www.sciencegraphique.com)

## *Illustration des titres*

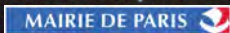
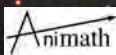
photo Thierry Demange - [www.capnature.com](http://www.capnature.com)

## *Réalisation*

Patrick Arrivet - CIJM

# **CIJM**

8 rue Bouilloux-Lafont 75015 Paris  
*tél :01 40 37 08 95*      [www.cijm.org](http://www.cijm.org)



Galaxie M104 - Le Sombrero - Source ESO