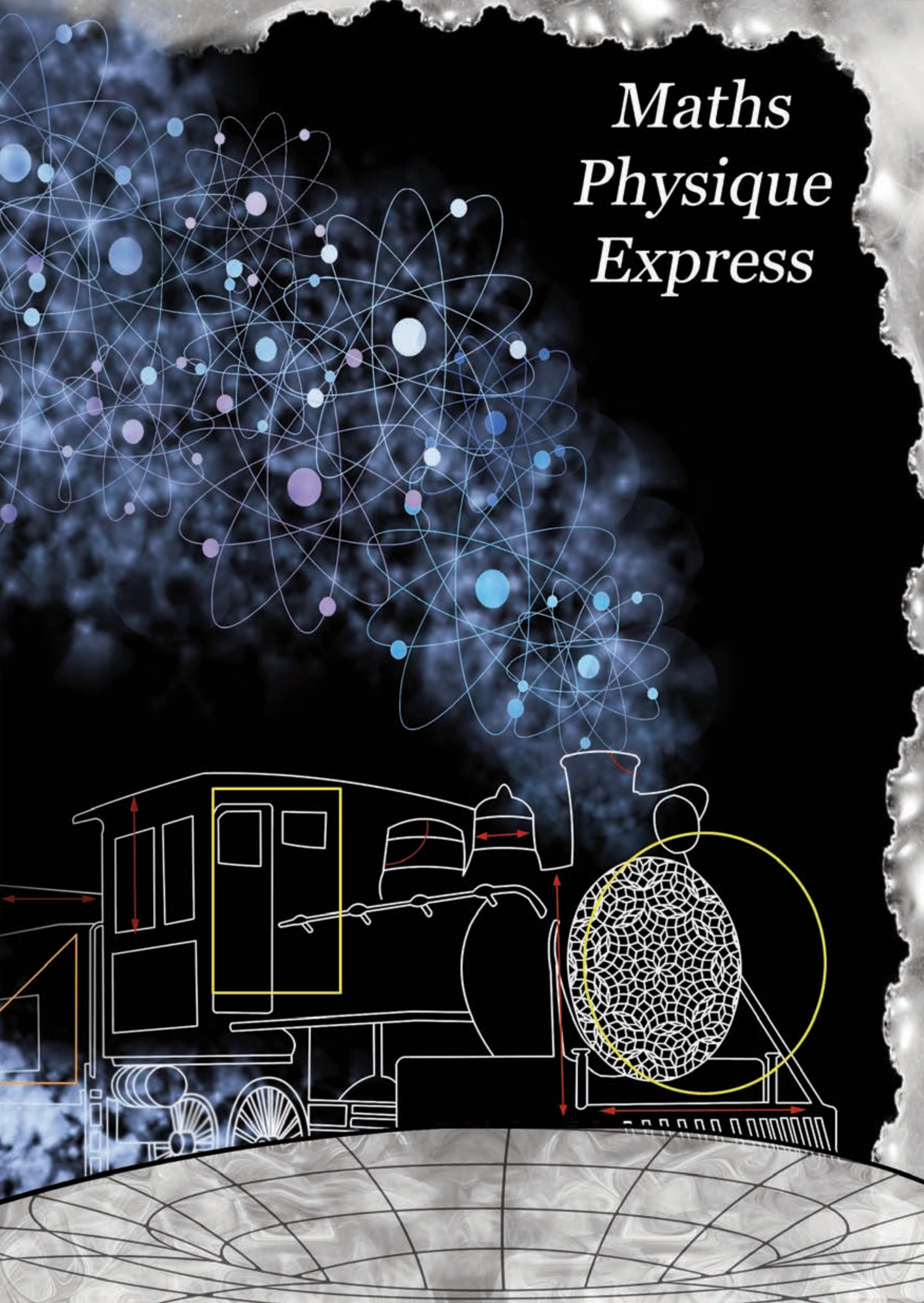
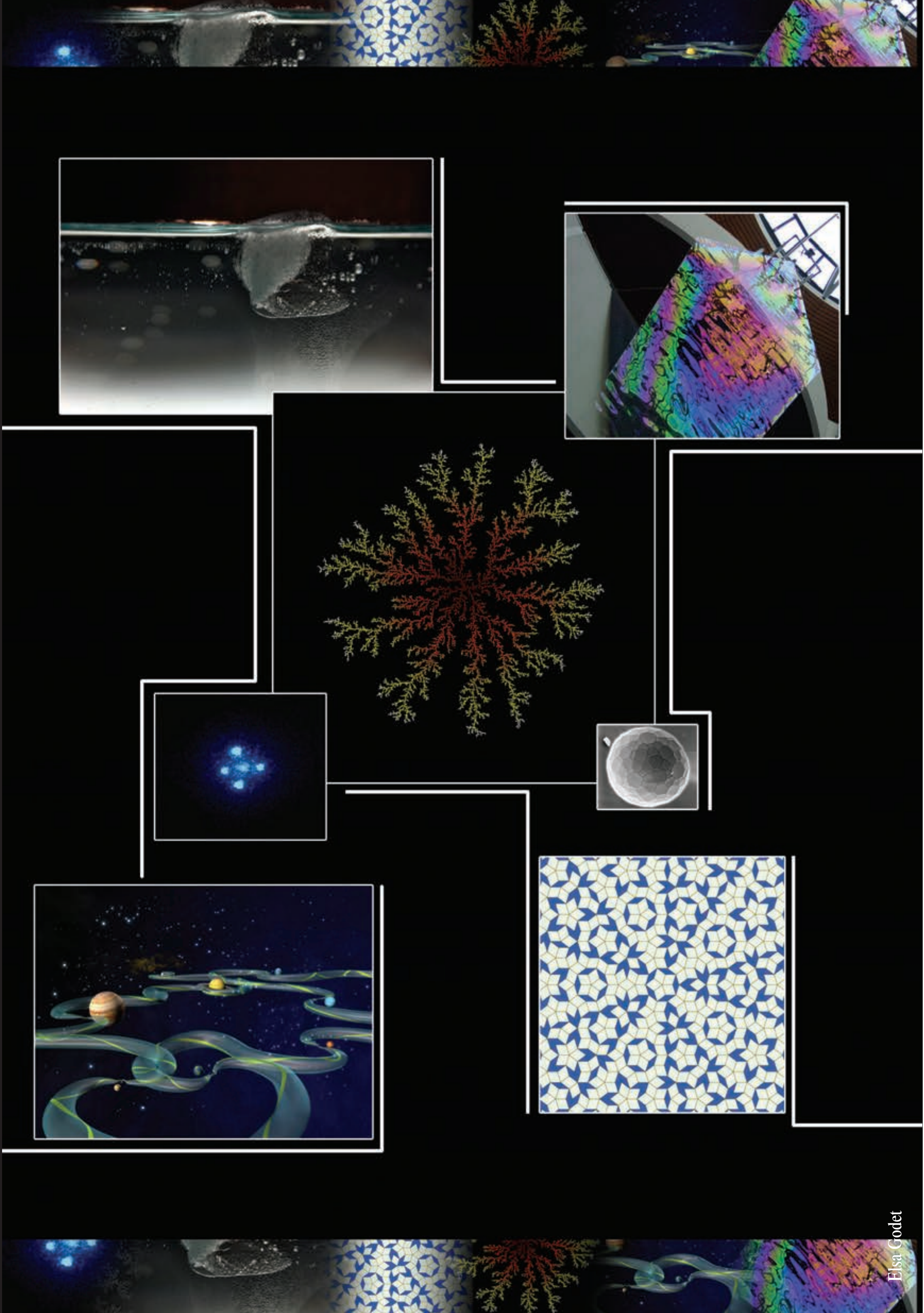
Maths Physique Express




Elsa Godet

2000, Année Mondiale des Mathématiques, le Comité International des Jeux Mathématiques organise au cœur de Paris le Salon de la culture et des jeux mathématiques et permet ainsi à des milliers de visiteurs, jeunes ou moins jeunes, spécialistes ou non initiés de devenir de vrais acteurs de la culture mathématique.

2005, Année Mondiale de la Physique, la Société Française de Physique accompagne plusieurs centaines d'initiatives qui toutes veulent participer à cette grande fête de la Science.

Cette fête, au-delà d'une commémoration de l'année miraculeuse qui, avec Einstein, a vu la naissance de la physique moderne, est un événement tourné vers l'avenir.

Deux dates, deux disciplines, une rencontre, une même volonté de mettre la culture scientifique à la portée de tous et de porter un regard croisé sur quelques grands thèmes qui font notre présent.

Mathématique et Physique ont un passé commun, au point que, jusqu'au XIXe siècle, il est impossible ou presque de dire à laquelle de ces deux disciplines appartenaient les plus grands noms qui ont façonné notre savoir scientifique.

Aujourd'hui, où chacun revendique sa spécialité, il faudrait même dire ses spécialités, ces approches communes sont plus rares.

Cette brochure cherche à montrer que Mathématiques et Physique avancent souvent ensemble, explorent les mêmes chemins même si les outils diffèrent. Les avancées et les questionnements de l'une profitent à l'autre.

Ecrire cette brochure nécessita plusieurs choix. Seul, celui de notre public ne se posait pas. Etant donné les objectifs des manifestations dans lesquelles nous étions placés : Fête des Mathématiques, Année Mondiale de la Physique, nous nous devions d'essayer d'intéresser le plus grand nombre.

Choisir les thèmes fut plus difficile : certains étaient inévitables, tant sur le plan historique que scientifique (mouvement brownien , espace courbe, chaos…), d'autres trop difficiles pour être évoqués en si peu de pages et puis la science est si vaste que l'on ne peut pas tout dire, tout explorer.

Nous espérons que ce travail montrera à la fois la richesse de la science physique et mathématique, l'enchevêtrement des disciplines et à travers elles celui des thèmes entre eux.

Il n'en reste pas moins que le choix fait entre les thèmes est subjectif. Nous espérons qu'il invitera les lecteurs à se mettre sur la piste de tous ceux que nous avons du écarter.

Essayons de comprendre pour mieux appréhender le monde dans lequel nous vivons et l'avenir.

La symétrie

Ce mot emprunté en 1529 au latin "symmetria", lui-même venu du grec, veut dire " mesure, proportion ". Il prend ensuite le sens de " régularité et harmonie dans les parties d'un objet ".

De l'Antiquité jusque vers la fin du 18ème siècle, la symétrie désigne plutôt une situation d'harmonie dans les proportions. Puis la définition s'est étendue à des notions plus formelles : mise en coïncidence d'un objet avec lui-même (ou un autre), par déplacement (translation ou rotation) ou par réflexion dans un miroir. Puis apparaît la notion d' " invariance " par symétrie , de recherche d'ordre dans la diversité. L'étude de la symétrie devient outil de raisonnement pour simplifier les problèmes.

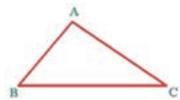
Les symétries sont tout autant observables dans la Nature que dans les productions des êtres humains lorsque ceux-ci traduisent leurs émotions, ou leur vision du monde. Ayant évolué au cours des temps, et dans des disciplines différentes, la notion même de symétrie est difficile à définir d'une façon qui en englobe tous les aspects.

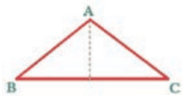
La pertinence du concept s'est affirmée dans les sciences au cours des deux derniers siècles, au point qu'il occupe aujourd'hui une place centrale, universelle. En physique, nous le verrons, c'est plus encore au couple " symétrie-brisure de symétrie " qu'il faut prêter attention pour comprendre le monde qui nous entoure.

Du côté des mathématiciens

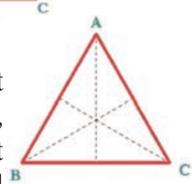
Les symétries dont nous allons parler sont pour les mathématiciens des isométries c'est à dire des transformations ponctuelles qui conservent les distances. Une figure possède une symétrie si l'identité (opération qui consiste à ne rien faire) n'est pas la seule transformation à la laisser invariante.

Regardons les trois triangles. Le premier, un triangle quelconque, ne possède aucune symétrie. Le triangle isocèle, au centre, est symétrique par rapport à la bissectrice en A, il est invariant sous l'effet de deux opérations : l'identité I et la symétrie M_A par rapport à la bissectrice issue de A.





Le triangle équilatéral est invariant sous l'effet de trois symétries M_A, M_B et M_C par rapport aux trois bissectrices. Il l'est également par une rotation d'un tiers de tour ($R_{120°}$) et de deux-tiers de tour ($R_{240°}$).



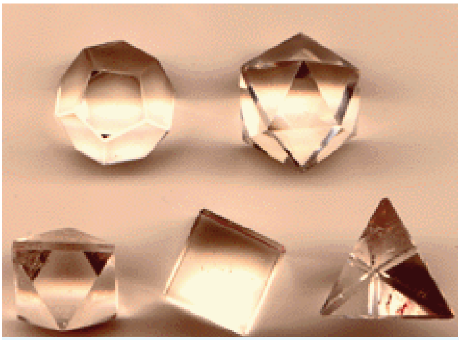
Reconnaître, énumérer et composer les symétries d'un objet (abstrait ou naturel) revient alors à former son " groupe de symétrie ".

Le groupe de symétrie du triangle

équilatéral contient six éléments. On peut le présenter dans une table de multiplication .

	I	R_{120}	R_{240}	M_A	M_B	M_C
I	I	R_{120}	R_{240}	M_A	M_B	M_C
R_{120}	R_{120}	R_{240}	I	M_B	M_C	M_D
R_{240}	R_{240}	I	R_{120}	M_C	M_A	M_B
M_A	M_A	M_C	M_B	I	R_{240}	R_{120}
M_B	M_B	M_A	M_C	R_{120}	I	R_{240}
M_C	M_C	M_B	M_A	R_{240}	R_{120}	I

Dans ce tableau, on remarque que le résultat de la composition de deux symétries miroirs dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées, en revanche l'ordre n'intervient plus quand on compose deux rotations.
Dans l'espace, le cube est invariant par 48 isométries, parmi elles on peut citer les trois rotations de 90°, dont les axes passent par les centres des trois paires de faces opposées. Ces rotations de l'espace ne commutent pas. Nous laissons au lecteur le soin de trouver toutes les autres isométries du cube et plus généralement, le groupe fini de symétrie de chacun des cinq polyèdres réguliers de Platon.

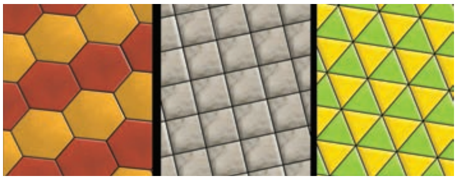


Solides de Platon - Crédit Chrystal Energy

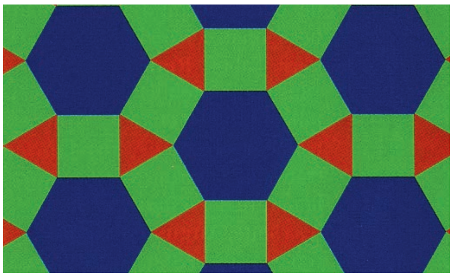
Un grand succès des mathématiques du 20ème siècle est la classification de tous les groupes de symétrie ayant un nombre fini (mais qui peut être gigantesque) d'éléments.

Symétries à l'Alhambra

Les pavages (du plan ou de l'espace) sont des exemples de structures régulières dont le groupe de symétrie a un nombre infini d'éléments (on trouve dans ce cas de nouvelles isométries, les translations).



Triangle équilatéral, carré et hexagone sont les 3 seuls polygones réguliers qui peuvent paver le plan.



Voici un des 11 assemblages que l'on peut réaliser avec les 3 formes pavantes.

D'autres objets ont des symétries " continues ", que l'on ne peut pas énumérer ; c'est le cas de la sphère ou du cylindre, invariants par des rotations d'angles quelconques .

La symétrie

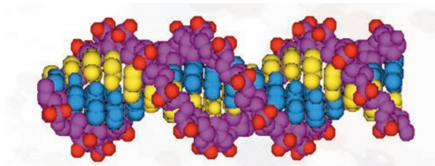
Du côté des physiciens

La description de la Nature invite à disposer d'outils conceptuels qui puissent rendre compte, d'un côté de ce qui paraît stable, et d'un autre, de ce qui se modifie. En schématisant ainsi, on sera amené à se référer, dans le premier cas à des propriétés de symétrie, intimement associées à des notions d'invariance, et dans le second aux brisures de symétrie du type de celles que l'on rencontre dans les changements de phase.

L'invariance des grandes lois de la physique face à certaines transformations géométriques de l'espace a fait l'objet d'études fines. C'est entre autres choses pour résoudre le paradoxe d'une invariance différente des lois de la mécanique et de l'électromagnétisme, qu'Einstein a proposé de remplacer la mécanique de Newton par la relativité restreinte en 1905. De ces invariances découlent des grandes lois de conservation, comme pour l'énergie, la quantité de mouvement, le moment cinétique.

Glossulaire
Crédit Laboratoire de cristallographie de Paris VI

Lorsqu'un phénomène naturel présente une certaine régularité, il est tentant pour le physicien de chercher à " remonter " à des causes régulières. C'est ainsi que le minéralogiste Haüy, à la fin du 18ème siècle, constatant qu'un cristal facetté, cassé jusqu'à des tailles très petites, conserve constants les angles entre ses faces, aura l'intuition de la disposition périodique de la matière aux échelles encore plus petites, qui lui étaient alors invisibles. On peut aussi citer Pasteur, qui relie l'activité optique des acides tartriques à la nature chirale (c'est-à-dire non identique à leur image dans un miroir) de leur structure. Il défendra ensuite une vision du vivant dans laquelle la chiralité tient une place essentielle.



La double hélice de l'ADN
Crédit : CNRS Photothèque/Université de Montpellier2

Pierre Curie enfin, à la fin du 19ème siècle, posera un principe général reliant les symétries manifestées par les phénomènes physiques aux symétries de leurs causes.

Les propriétés des matériaux peuvent être très sensibles à la forme précise des arrangements atomiques. Peut-on imaginer matériaux plus différents que le graphite (friable, opaque et conducteur électrique) et le diamant (très dur, transparent et isolant) ? Pourtant ils sont faits des mêmes atomes de carbone, et diffèrent seulement par la façon dont ceux-ci sont disposés dans l'espace.

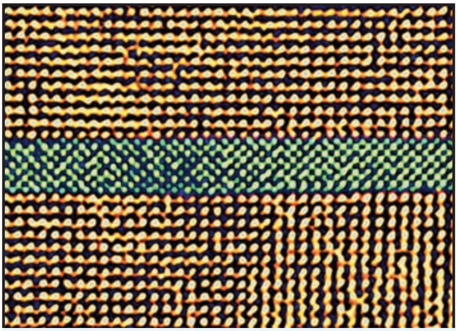
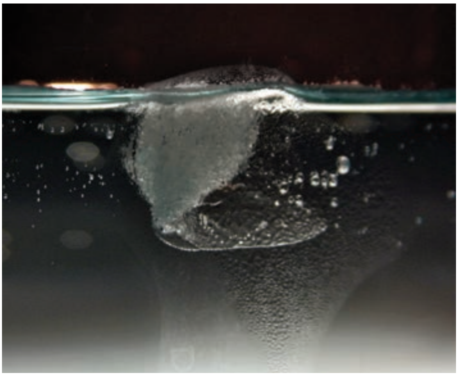
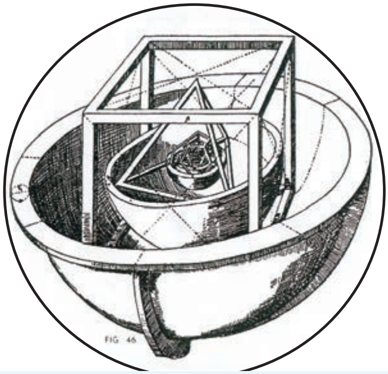


Image au microscope électronique haute résolution d'une interface entre structures cristallines différentes. L'ordre périodique des atomes est clairement visible.
crédit : Jean-Luc Maurice, CNRS Phototéque/ THALES

Venons-en aux changements de phases. Que se passe-t-il donc entre + 0,1°C et − 0,1°C, pour que les molécules d'eau, soumises aux mêmes forces, décident de ne plus se mouvoir librement, mais s'assemblent très symétriquement, et par milliards de milliards, sous forme de glace ? On sait maintenant comment relier ces brisures de



Glaçon dans l'eau - Crédit Jérôme Nicolle



Depuis longtemps, les symétries se mêlent à la description de la nature. Ainsi Képler voulait ordonner les orbites des différentes planètes selon un emboîtement des cinq polyèdres réguliers.

symétrie aux conditions de stabilité d'une phase, résultant d'un équilibre subtil entre la tendance à l'ordre, qui gagne à basse température, à la tendance au désordre, qui finit par l'emporter à haute température.

Rappelons enfin que les théories les plus récentes concernant la nature des forces, ou bien celle des particules élémentaires (jusqu'aux fameux quarks) regorgent de considérations de symétrie, dont la complexité ne permet pas qu'elles soient exposées ici. Notons simplement ce résultat surprenant, datant d'un demi-siècle, découvert par des physiciens qui ont montré que l'une des forces fondamentales de la Nature, l' interaction " faible ", faisait la " différence " .

Pour en savoir plus

L'univers ambidextre
Martin Gardner -Edition du Seuil

La symétrie en mathématique, physique et chimie
Jean Sivardière - Presses Universitaires Grenoble 1995

Symétrie et brisure de symétrie
EDP Sciences 1998

Symétrie et jeux de miroirs
Editions POLE

L'ordre quasipériodique

Dans un cristal, les atomes sont organisés de façon périodique, ce qui se traduit de façon spectaculaire dans le phénomène de " diffraction ". Un faisceau (de rayons X ou d'électrons) qui balaye un cristal est renvoyé dans une série de directions très particulières qui témoignent de cet ordre. Ces faisceaux interceptent un récepteur plan en des points très bien résolus, ce qu'on appelle un cliché " ponctuel ".
On connaît également des solides désordonnés (comme le verre de vitre) dont l'image de diffraction est beaucoup plus floue.
Les mathématiciens ont classifié depuis longtemps tous les ordres périodiques possibles à trois dimensions. La Nature, décidément bonne géomètre, a su utiliser toutes ces possibilités, comme l'ont montré les cristallographes qui ont étudié, par diffraction, des centaines de milliers de structures solides.
Au début du 20ème siècle, une nouvelle forme d'organisation régulière a été définie, baptisée " quasipériodique ", intermédiaire entre l'ordre périodique parfait et le désordre. Plus récemment, on a montré que cet ordre permet la présence de symétries pentagonales. Il y a 20 ans, des physiciens ont découvert, à la surprise générale, que certains alliages métalliques adoptent cet ordre.

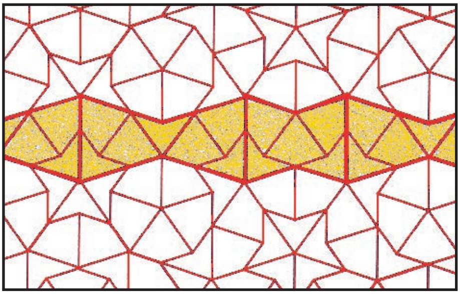
Du côté des mathématiciens

Les suites de 0 et de 1 périodiques, comme 0 1 0 1 0 1 … peuvent être considérées comme des suites " simples ". C'est aussi le cas des suites périodiques à partir d'un certain rang, comme 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 … On peut imaginer des suites non-périodiques, mais qui ressemblent à des suites périodiques : c'est le cas par exemple de la suite binaire de Fibonacci, présentée dans l 'encadré.

Que deviennent ces considérations en dimension 2 ?

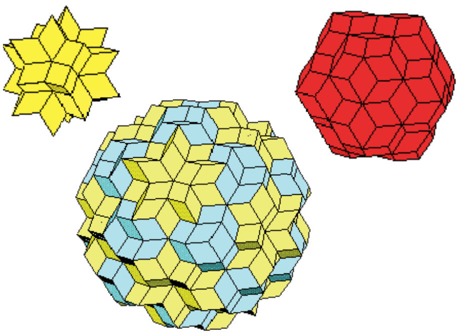
Une des façons de généraliser la périodicité est de paver le plan, c'est-à-dire de recouvrir régulièrement et sans chevauchement le plan par des copies d'une figure donnée. On peut ainsi paver le plan par des carrés, des triangles équilatéraux ou des hexagones (un peu comme les carrelages de salle de bain). Un théorème stipule que les trois types de polygones ci-dessus sont les seuls polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan. Aussi la figure proposée par Penrose au début des années 70, pour régulière qu'elle semble, ne peut pas être périodique. Cette figure est réalisée avec des morceaux de pentagones. En noircissant certaines pièces du pavage de Penrose pour obtenir une ligne de nœuds papillons courts ou longs, parfois appelée des vers, on peut démontrer que l'on obtient une suite de symboles (court-long) qui n'est autre que la suite de Fibonacci.

Plusieurs propriétés du pavage de Penrose en reflètent la quasi-régularité. Par exemple, le nombre d'or est caché derrière. De nombreux auteurs ont éudié ce pavage ou ses généralisations : citons par exemple de Bruijn pour plusieurs propriétés géométriques.

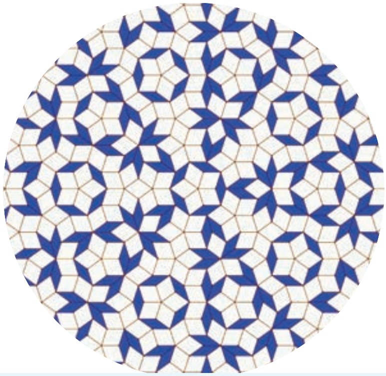


Pavage de Penrose et son " ver "

Les propriétés harmoniques (qui sont aux mathématiques ce que la diffraction des rayons X est à la physique) se trouvent entrer dans une théorie due à Yves Meyer qui relie nombres algébriques, séries trigonométriques et analyse harmonique, et qui, par une de ces coïncidences dont les mathématiques ont le secret, remonte aussi au début des années 70.



On peut aussi faire des pavages de Penrose à 3 dimensions, avec des rhomboèdres. Inspirez-vous des dessins ci-dessus pour essayer de les construire. Crédit : I. Hafner



Pavage de Penrose, Crédit : Jos Leys
Visitez son superbe site : www.josleys.com

Suite binaire de Fibonacci

Notons f la substitution définie par :
f(0)= 01, f(1)= 0, et si a, b, c,… sont des lettres valant 0 ou 1, alors
f(abc…)=f(a) f(b) f(c)…
Par exemple : f(010) = f(0) f(1) f(0) = 01001.

Si l'on itère f en partant de 0, on obtient successivement 0, f(0) = 01,
f(f(0)) = f(01) = 010, f(f(f(0))) = f(010) = 01001, ...
c'est-à-dire des mots (0, 01, 010, 01001, ...) tels que chacun d'eux commence par le mot précédent, et dont les longueurs respectives (1, 2, 3, 5, ...) sont les premiers termes de la suite de Fibonacci. Si l'on itère f une infinité de fois, on obtient une suite infinie de 0 et de 1 : 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 … appelée suite (binaire) de Fibonacci.

De même que le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci (2/1, 3/2, 5/3, ...) tend vers le nombre d'or

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...,$$

on peut montrer que la proportion de 0 dans la suite binaire de Fibonacci est égale à $1/\phi$

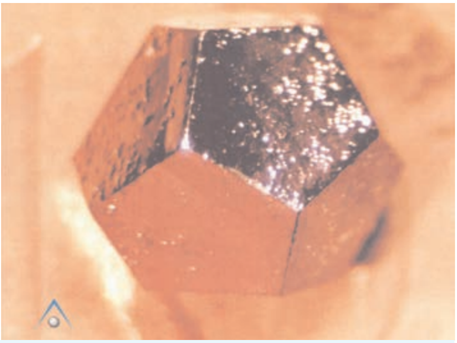
L'ordre quasipériodique

Du côté des physiciens

Après près d'un siècle de cristallographie triomphante, on comprend la surprise du physicien israélien Daniel Schechtman, lorsqu'il analyse au début des années 80 l'image de diffraction d'un alliage, apparemment banal d'aluminium et de manganèse. Sur un cliché de diffraction ponctuelle, il découvre une symétrie pentagonale, dont on sait depuis le 19ème siècle qu'elle est incompatible avec la périodicité. La symétrie totale du cliché correspond même précisément à celle de l'icosaèdre, l'un des cinq polyèdres réguliers de Platon.

Avec trois autres physiciens (dont le Français Denis Gratias), bien sûr conscients de ce qu'allait être la réaction à leur travail, ils tournent et retournent la question dans tous les sens, cherchant à débusquer l'artéfact qui invaliderait le fait expérimental. Mais nos quatre chercheurs finissent par se convaincre que celui-ci est solide, quand bien même ils ne peuvent alors l'expliquer (c'est-à-dire proposer une structure microscopique correspondante). Rien n'excite plus la curiosité et l'imagination des scientifiques qu'un paradoxe, surtout lorsque celui-ci remet en cause des principes bien établis. En l'espace de quelques mois, ils sont des centaines à s'attaquer au problème, dans un contexte pluridisciplinaire original, qui va des mathématiciens aux métallurgistes.

Dans le cas présent, quel que soit le niveau où on les observe, depuis l'échelle atomique jusqu'à celle de microcristallites, ces matériaux présentent des symétries pentagonales.



Grain quasicristallin à forme dodécaédrale. Le fond est une (vieille) pièce de 10 centimes!
Crédit : P. Canfield , Ames Lab, USA

Une première étape sera rapidement franchie, en référence aux pavages du plan, inventés 10 ans plus tôt par Roger Penrose qui prouvent qu'il est possible de réconcilier l'ordre et les symétries interdites (ici

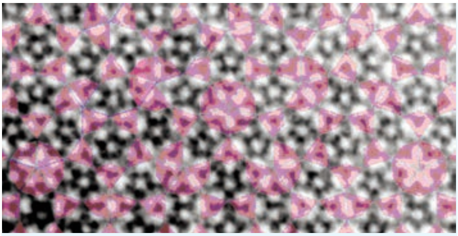
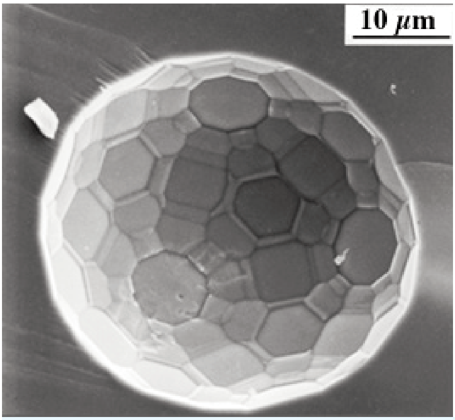
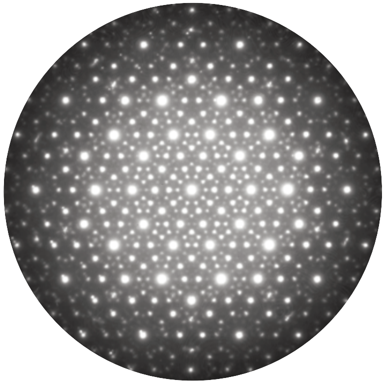


Image de microscopie à très haute résolution d'un alliage quasicristallin (l'échelle est pratiquement celle des atomes). Surimposée à l'image, en mauve, des bouts de pavage de type Penrose montrent comment ceux-ci rendent plutôt bien compte de l'arrangement des atomes - Crédit : Abe

pentagonales et icosaédriques) en se limitant pour le premier à une forme plus faible, la quasipériodicité.
Ces pavages donnent alors une image approximative du type d'arrangement atomique dans ces nouveaux alliages, baptisés " quasicristaux ". Entre temps, de nouveaux alliages, d'une qualité structurale toujours accrue, ont permis des études toujours plus fines. Le physicien du solide entend toujours pouvoir relier la structure atomique d'un matériau et ses propriétés. On pouvait donc s'interroger sur les propriétés des quasicristaux. Et, de fait, les dix dernières années ont vu attacher à ces matériaux quelques propriétés très originales, autant sur le plan électrique que mécanique, dont la compréhension est loin d'être achevée. L'avenir nous dira si ces propriétés pourront trouver des applications industrielles.



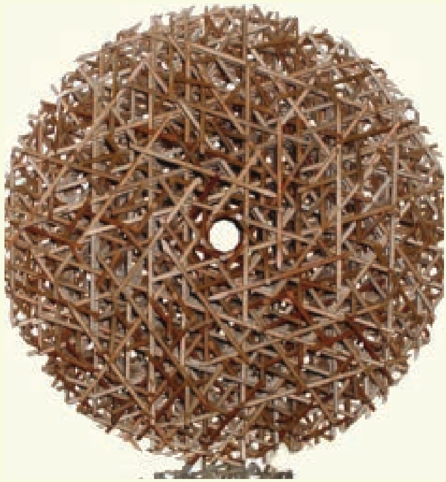
Microcavité à facettes de symétrie icosaédrale dans un alliage quasicristallin.
Crédit : C. Beelli, T. Goedecke, R. Lück



Diffraction d'un quasicristal dans cinq directions
Crédit Demange - Dubois

Une application inédite de l'ordre des quasicristaux

Avoir bataillé pendant des années pour comprendre l'ordre si particulier des matériaux quasicristallins peut donner des idées à des échelles très différentes. Les physiciens Marc Audier et Michel Duneau ont proposé le superbe empilement de fibres que l'on peut voir sur la photo. Au-delà de l'aspect purement esthétique, ce système pourrait avoir des propriétés mécaniques originales, encore à vérifier.



Les graphes

Le problème fondateur : Promenade impossible à Königsberg

" Est-il possible de trouver un trajet passant une fois et une seule par les 7 ponts de la ville ? "

Leonhart Euler, le mathématicien le plus prolixe de l'histoire, en 1736, en évitant aux habitants de Königsberg des recherches inutiles, fonde la théorie des graphes qui entrera dans notre quotidien plus de deux siècles plus tard.

Cette théorie, utilisée d'abord dans des domaines de mathématiques fonda-mentales, est présente dans les travaux de Kirchhoff sur la description du courant qui circule dans un circuit électrique. Depuis les années 50, la théorie des graphes a trouvé des applications dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et offre un outil de choix en modélisation et en recherche opérationnelle : problèmes de cheminements et de trafic, l'ordonnancement des tâches.

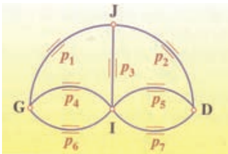
Les graphes trouvent également de nombreuses applications en physique, chimie ou biologie .

On retrouve aussi des graphes dans des domaines très différents comme la littérature ou le cinéma. Le mouvement littéraire OULIPO s'en est emparé sous l'impulsion de Claude Berge. BD, romans ou films peuvent avoir construit leur intrigue avec un graphe.

Du côté des mathématiciens

Comment les graphes sont-ils entrés dans le paysage du mathématicien ?

Le problème d'Euler se trouve simplifié en le traduisant en terme de graphe, c'est-à-dire un ensemble de points, nommés sommets, et de segments, nommés arêtes, les reliant. Pour trouver une solution à ce problème il faudrait tracer une chaîne eulérienne, c'est-à-dire un chemin qui passe une fois et une seule par chacune des arêtes symbolisant les ponts dans l'exemple précédent. Ceci est possible si le degré de chaque sommet, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont il est une des extrémités, est pair pour chaque sommet (on doit pouvoir y arriver par une arête et partir par une arête différente) sauf éventuellement pour deux d'entre eux (celui dont on part et celui où l'on arrive). Sur le graphe on voit que chaque sommet est de degré impair. Euler, en prouvant sur ce dessin épuré que ce problème n'a pas de solution, fonde la théorie des graphes. Cependant, après Euler en 1737, il faudra attendre plus d'un siècle pour que la théorie des graphes fasse son retour dans l'actualité scientifique. Mais c'est encore par le jeu que le problème s'élargit. En 1859 le mathématicien William Hamilton



graphe des ponts de Köenigsberg

propose le " jeu icosien ". Il s'agit de visiter les sommets d'un icosaèdre une fois et une seule. Un chemin hamiltonien sur un graphe est donc un tracé où les sommets (et non plus les arêtes) sont visités une fois et une seule. Apparemment peu différent du chemin eulérien, le problème des chemins hamiltoniens est beaucoup plus difficile et reste de nos jours encore sans solution générale. Au milieu du 20ème siècle le concept de graphe est inconnu en France et n'existe à l'étranger que de manière éparse. Il revient à Claude Berge, mathématicien français d'unifier les notions et d'en faire une vraie théorie mathématique. Il est passionnant de chercher à comprendre comment à partir de notions aussi simples, points et segments, des problématiques aussi complexes ont pu être engendrées, des théorèmes aussi profonds être énoncés et toute une théorie mathématique se développer. Utile dans de nombreux domaines, elle va sans cesse s'enrichir et se développer, sollicitée par de nombreuses disciplines et élargir son champ d'applications.

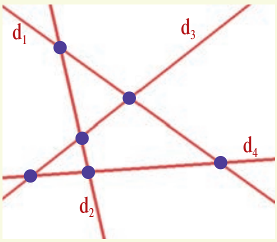
Relation d'Euler

Si la théorie des graphes semble peu sensible aux concepts de la géométrie euclidienne, et en particulier à la notion de distance, elle ne peut s'abstraire complètement de la "topologie" de la surface sur laquelle le graphe est inscrit.
Ainsi, sur une sphère, un polyèdre doit toujours satisfaire la "relation d'Euler" entre ses nombres F de faces, A d'arêtes et S de sommets : S-A+F=2. Sur des surfaces plus compliquées caractérisées par leur nombre g de "trous" la formule devient 2-2g = 0. Notons que la sphère est une surface à "zéro trou".

Ville de Königsberg - Crédit Ministère des Affaires Etrangères

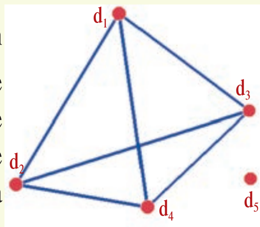
Un résultat très simple de théorie des graphes,
"Sur un graphe, la somme des degrés de tous les sommets est toujours un nombre pair",
permet de résoudre de jolis problèmes...

Par exemple :
"Peut-on tracer 5 droites, chacune coupant 3 d'entre elles et 3 seulement ?



Le problème est résolu pour 4 droites. Peut-on construire la 5ème?

Les 5 droites du problème sont représentées par les 5 sommets de ce graphe. Une arête entre 2 sommets indique que les droites correspondantes se coupent.



La construction de la 5ème droite est impossible puisque le graphe qui illustrerait la situation aurait :
3 x 5 soit 15 pour somme de degrés de ses sommets.

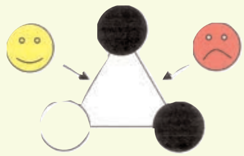
Les graphes

Du côté des physiciens

Le scientifique doit, afin de mieux décrire le monde réel, chercher constamment à en simplifier la description pour n'en garder que les propriétés pertinentes à son niveau. Ainsi le chimiste symbolise-t-il une molécule par un graphe, où les atomes sont aux nœuds et les liaisons chimiques sur les arêtes. La force de cette notation vient de ce qu'elle résume une information essentielle, la directionnalité des liaisons entre des noyaux, et les cycles formés par les atomes (comme le fameux anneau hexagonal du benzène). De même le graphe d'un circuit électrique ignore-t-il la complexité du matériau qui le compose pour ne retenir que la connexité entre ses composants.

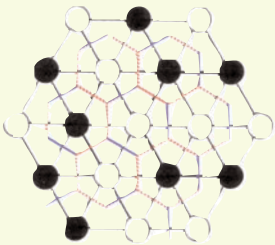
Les arêtes d'un graphe peuvent simplement signifier une relation existante entre deux sommets, ou bien porter une information quantitative, numérique comme pour la résistance d'un élément dans un circuit électrique, ou directionnelle si les arêtes sont orientées. Le physicien peut alors, à la suite de Kirchhoff et sa célèbre loi des nœuds, prédire la circulation du courant dans le réseau électrique. Le biologiste pourra aussi coder les multiples événements qui président à la réalisation d'une fonction biologique, à travers des " réseaux métaboliques " toujours plus complexes.

Illustrons par un exemple cet intérêt des physiciens pour les graphes, en considérant un alliage bidimensionnel (hypothétique) constitué de deux types d'atomes, A et B, dont nous supposerons qu'ils cherchent à se lier entre eux, c'est-à-dire préférer les proximités A-B plutôt que A-A et B-B. Si l'alliage est métallique, on sait que sa structure est plutôt compacte ; les atomes chercheront donc à s'assembler sur un réseau triangulaire. Or, il n'est pas possible d'alterner des atomes A et B sur un triangle .



Le cas le plus simple de "frustration ", dans un alliage à deux dimensions. La solution la plus compacte correspond à des triangles équilatéraux. Mais si l'alliage abaisse son énergie en favorisant les voisinages entre atomes différents, cela ne peut être assuré pour toutes les liaisons.

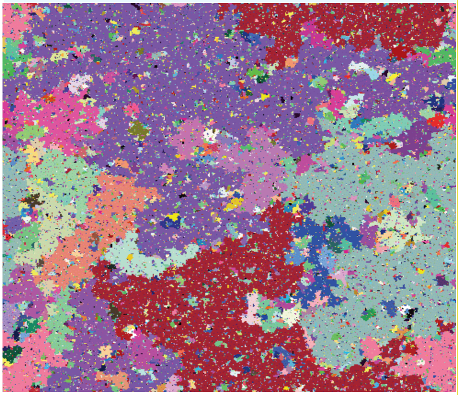
Cette situation met en scène le concept, plutôt récent en physique, de " frustration ", qui s'applique à la description de nombreux systèmes désordonnés. Pour chercher à minimiser son énergie, l'alliage va s'organiser de façon à maximiser le nombre de liens AB. La solution n'est pas unique, et le physicien souhaite pouvoir les énumérer toutes. On peut le faire en calculant, problème classique en théorie des graphes, le nombre de " couverture par dimères " du graphe dual.



Sur un réseau triangulaire, on peut minimiser le nombre de liaisons entre atomes de même nature de multiples façons, que l'on souhaite énumérer. A chaque solution correspond une " couverture par dimères " (ici en bleu) différente du pavage hexagonal dual (en pointillé rouge)

Le dual d'un réseau triangulaire est hexagonal. La couverture par dimère consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes du graphe, les dimères, tel que chaque sommet n'appartienne qu'à un seul dimère. A chaque configuration de dimère correspond une structure possible minimisant l'énergie de notre alliage. Notons enfin, sans la développer ici, l'utilisation massive des graphes en physique pour simplifier l'écriture et la résolution de calculs complexes. Un exemple célèbre est donné par les fameux graphes de Feynman en physique des interactions fondamentales.

Cette image représente un gros réseau carré dont on a coupé 51% des liens au hasard; il contient des amas de sites connectés (représentés par des couleurs différentes), dont aucun ne va d'un bord à l'autre. Crédit : Raphaël Cerf



Juste au seuil de percolation, lorsque 50% des liens sont coupés, un amas de couleur mauve connecte les bords droit et gauche.
Crédit : Raphaël Cerf

La percolation

La percolation en mathématique et physique évoque la battue d'un labyrinthe : suivant le nombre de liens d'un réseau incomplètement connecté, il existera ou non un chemin qui relie les extrémités d'un réseau de grande taille. Prenons l'exemple d'un réseau carré de grande taille où l'on coupe des liens au hasard ; au début, ceci n'empêche pas le réseau défectueux de rester lié à grande distance. Lorsque le taux de liens coupés atteint les 50%, on se trouve juste au pourcentage où, statistiquement, on a une chance sur 2 de pouvoir établir une telle connexion entre des points très éloignés. Ce taux correspond au seuil de percolation pour ce réseau (pour un réseau triangulaire il faudrait couper environ 65% des liens pour atteindre le seuil). Malgré ces taux différents, les caractéristiques de la percolation pour des concentrations de liens actifs voisines du seuil sont dites "universelles", c'est à dire qu'elles ne dépendent pas des détails et de la géométrie du réseau. Elles rentrent dans la catégorie générale des phénomènes critiques, comme par exemple l'apparition du magnétisme d'un métal lorsqu'on le refroidit au-dessous d'une température critique, ou température de Curie. La percolation est un problème très fin pour les mathématiciens, mais il a trouvé des applications très variées en sciences physiques. Par exemple : à partir de quelle concentration de liens chimiques entre des chaînes polymériques, une gelée " prend " ? Comment se propage un feu de forêt ? Comment un liquide envahit un sol poreux ? ...

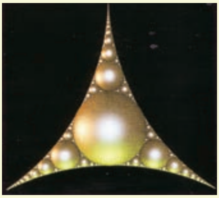
Pour en savoir plus

Hors Série Tangente 12

Les fractales

Curiosité géométrique depuis longtemps, théorie mathématique depuis peu, la géométrie fractale est un outil précieux pour analyser, comprendre et même prévoir divers phénomènes naturels ou industriels.

Nous devons certainement la première fractale à Apollonius de Perge (3 siècles avant J.C) avec sa " baderne ", ce curieux triangle curviligne bourré de cercles de plus en plus petits.



Le carrelage de la cathédrale d'Agnani en Italie, réalisé en 1104, montre des mosaïques construites comme des tamis de Sierpinski.

Vers la fin du 19ème siècle, quelques mathématiciens s'intéressent à des courbes continues sans tangente, vite qualifiées de " monstres " par les contemporains. Et pourtant ceux-ci ne font qu'anticiper ce que l'on va nommer la géométrie fractale, développée par Benoît Mandelbrot. L'informatique sera l'outil clé pour son développement. Les fractales gagnent en universalité, et attirent le grand public, d'autant plus que les images qu'elles engendrent sont d'une esthétique envoûtante.

Du côté des mathématiciens

Au milieu du 19ème siècle, pour un mathématicien, une courbe est continue et possède une tangente en chacun de ses points sauf certains points dits " singuliers " et elle est de dimension 1. Tout tracé qui n'entre pas dans ce modèle est "pathologique". Charles Hermite en 1872 écrit " Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée ".

Dans ce contexte, la poussière de Cantor, les courbes de Peano et de von Koch, les triangles et éponges de Sierpinski sont des créations de l'esprit humain, très éloignées de la nature et qui faisaient dire au grand Poincaré, pourtant traducteur de Cantor, que l'on ne devrait pas exhiber ces exemples qui " *mettent en défaut les raisonnements de nos pères et n'utilisent aucune théorie*".

Pourtant des mathématiciens, comme Jordan qui essaie de trouver une définition du mot "courbe" mieux adaptée à la diversité des modèles mathématiques ou Cantor qui établit la bijection entre les points d'un segment et ceux d'un carré, montrent la nécessité d'élargir la notion de dimension d'un objet ; dès 1935 on a su attribuer une dimension fractionnaire d'environ 1,26 au flocon de von Koch.

(voir encadré)

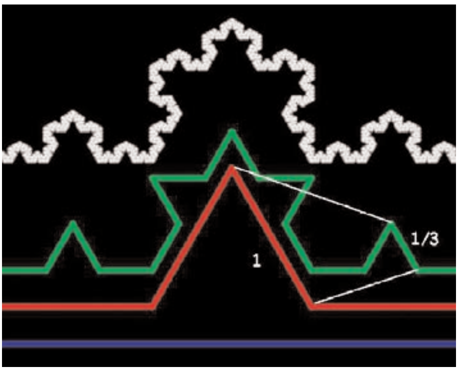
En 1975, Benoît Mandelbrot dans son ouvrage "Les objets fractals" réhabilite ces "monstres" car il y voit un nouvel alphabet pour décrire la Nature :

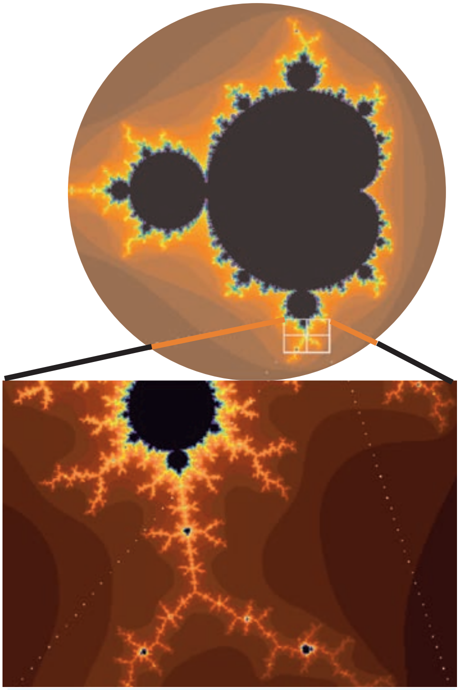
"Mais non, la nature n'est pas analytique, lisse, dérivable, elle est fractale. Ces objets que Cantor, Peano, von Koch, Sierpinski ont inventés..., en croyant s 'émanciper de la nature, décrivent mieux la nature que les fonctions analytiques des physiciens du XIX^{ème} siècle ".

Dans ce premier ouvrage, Mandelbrot ne définit pas explicitement le mot " fractal " car il craint que toute définition soit réductrice de la notion. Nous pouvons nous arrêter à la définition d'Adrien Douady :

"Un fractal est un objet irrégulier, dont l'irrégularité est la même à toutes les échelles et cela partout"

Après Mandelbrot, bien d'autres mathématiciens et informaticiens ont utilisé les possibilités immenses, en terme de calcul et d'imageries, offertes par l'informatique pour développer cette théorie. Les fractales sont toutes définies de façon constructive et itérative. Cela implique que l'on ne peut en présenter que des approximations obtenues grâce à des calculs numériques.





Ensemble de Mandelbrot - JF Colonna

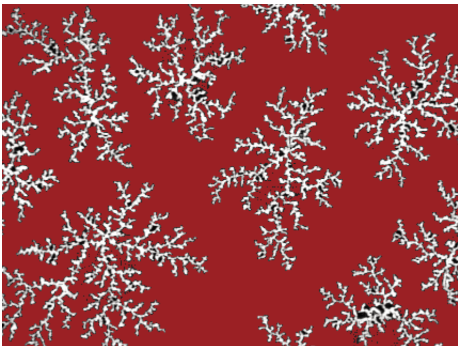
Dimension de la courbe de von Koch

En géométrie, on connaît des objets de dimension entière : la courbe de dimension 1, la surface de dimension 2, l'espace de dimension 3. Les fractales sont des objets géométriques dont la dimension peut être non entière. Dans le cas d'une courbe, on le démontre en cherchant à mesurer sa longueur à l'aide d'une unité de mesure de taille décroissante. Pour une courbe ordinaire, à partir d'une finesse suffisante, la longueur mesurée ne change pas. Une courbe fractale contient des irrégularités à toutes les échelles qu'un instrument de plus en plus fin nous fera découvrir. Ainsi dans le flocon de von Koch, lorsque l'instrument de mesure est trois fois plus fin, la longueur mesurée s'accroît d'un facteur 4/3. Sa dimension fractale vaut log(4)/log(3), environ 1,26.

Les fractales

Du côté des physiciens

Certains physiciens ont reconnu très tôt l'intérêt des courbes fractales pour décrire les phénomènes naturels. C'est le cas, au début du 20ème siècle, de Jean Perrin lorsqu'il étudie, au microscope, le mouvement brownien, dont il décrit les trajectoires dans l'introduction de son superbe ouvrage "Les Atomes", publié en 1905 : *" Observons, par exemple, un des flocons blancs-un colloïde-, qu'on obtient en salant de l'eau de savon. De loin, son contour peut sembler net, mais sitôt qu'on s'approche un peu, cette netteté s'évanouit. Si l'on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande car, chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles, sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que*



Dépôt d'agrégats sur une surface, qui se collent les uns aux autres pour former des structures fractales.
Crédit: Laboratoire Aimé Cotton

donne par exemple, une bille d'acier poli… "

Benoit Mandelbrot, en multipliant les exemples dans la nature, a rendu le concept opérationnel, et a par là influencé des générations de scientifiques. L'observation des phénomènes naturels regorge de situations où une apparente irrégularité semble associée à la répétition de phénomènes semblables à différentes échelles.

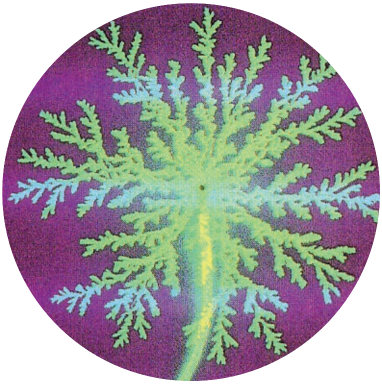
Cette " invariance d'échelle " se retrouve abondamment dans ce que l'on appelle les phénomènes critiques, comme les transitions de phases. Mais les géométries fractales savent parfois se nicher dans des situations plus inattendues. Ecoutons Bernard Sapoval, physicien des solides, *" Il y a une vingtaine d'années, j'étudiais la conduction de l'électricité dans des solides par des ions très mobiles et je devais réaliser des contacts métalliques par soudure. Avec des collègues nous avions découvert que le front de diffusion d'une soudure était une ligne fractale de dimension 7/4…*

Par ailleurs en observant de nombreux phénomènes aléatoires, la géométrie fractale m'est apparue comme un concept unificateur très puissant pour décrire les irrégularités géométriques liées à ces phénomènes.

A l'aide des fractales, j'ai exploré plusieurs domaines. J'ai, par exemple, travaillé sur les systèmes d'échanges à travers des surfaces *irrégulières comme les électrodes poreuses,les catalyseurs ou les poumons…*

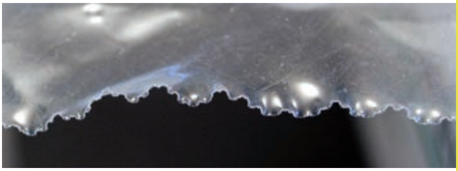
Puis je me suis intéressé aux propriétés des résonateurs aux formes irrégulières et notamment à leur amortissement. On savait empiriquement que les structures irrégulières sont de bons amortisseurs de vibration… Toutes ces études sur les propriétés amortissantes des cavités acoustiques nous ont conduits à la mise au point avec la société Colas, d'un nouveau type de mur routier anti-bruit extrêmement performant…"

Extrait d'un entretien avec Raquel Azran e



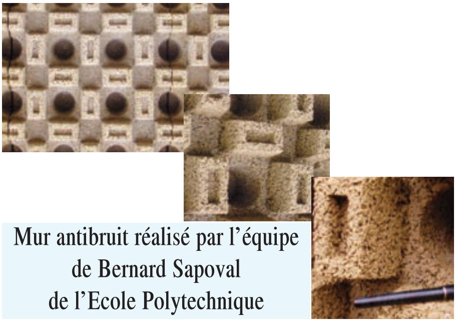
Digitation visqueuse analogue au claquage diélectrique - H van Damme

Dissolution chimique d'un bloc de plâtre obtenue après injection d'eau sous pression. G.Daccord et R.Lenormand



Feuille de plastique déchirée. Des fronces fractales apparaissent spontanément le long du bord créé par la déchirure. On peut expliquer le caractère fractal des motifs à partir de la théorie des plaques minces élastiques.

E. Sharon, B. Roman, B. Audoly, A. Boudaoud



Mur antibruit réalisé par l'équipe de Bernard Sapoval de l'Ecole Polytechnique

Pour en savoir plus

B. Mandelbrot Flammarion : *Les objets fractals*

B.Sapoval Flammarion : *Universalités et Fractales*

Etienne Guyon et Eugène Stanley : *Les formes fractales*

Bibliothèque Tangente : Les Fractales HS n°18

Jean-François Colonna

site : www.lactamme.polytechnique.fr

Le mouvement brownien

Au XIX[e] siècle, les progrès de la microscopie, permirent de mettre en évidence l'agitation incessante et désordonnée subie par de minuscules particules en suspension dans un fluide. L'explication de ce phénomène était un défi théorique car le botaniste Robert Brown démontra que le mouvement des grains de pollen en suspension ne devait rien à une activité vivante. Si l'agitation brownienne diminue quand la taille des particules croît (ce qui est intuitif), elle est en revanche indépendante de leur composition, ce qui est beaucoup plus choquant ! L'énigme fut résolue il y a tout juste cent ans, indépendamment par Einstein et Smoluchowski. C'est l'un des triomphes de la physique statistique inventée par Maxwell et Boltzmann.

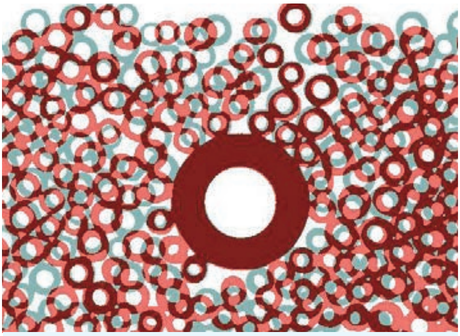
Einstein établira, dans un des quatre articles géniaux qu'il écrivit il y a juste cent ans, la relation qui existe entre cette agitation moléculaire et le mouvement de particules observé par Brown : "selon la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, des corps en suspension dans un fluide, d'une taille visible au microscope, doivent, du fait de l'agitation thermique des molécules, effectuer des mouvements d'une ampleur telle qu'ils puissent être aisément mis en évidence au microscope. Il se peut que le mouvement dont il est question ici soit identique à ce que l'on appelle mouvement moléculaire brownien´".

Du côté des mathématiciens

La théorie d'Einstein-Smoluchowski est basée sur le concept de statistique gaussienne et de l'équation de Fourier qui régit la propagation de la chaleur par diffusion . Ces lois générales avaient déjà été pressenties en 1900 par le mathématicien Louis Bachelier dans sa modélisation des lois de la finance, dans un travail fondateur sur les fluctuations boursières qui ne sera apprécié qu'un demi-siècle plus tard.

C'est seulement en 1921 que Wiener, un des meilleurs mathématiciens de son temps, "invente" le mouvement brownien, ou plus précisément son idéalisation mathématique.

Il démontre que l'on peut introduire, sur l'ensemble de toutes les trajectoires possibles, des lois de probabilité qui sont compatibles avec les statistiques gaussiennes prédites par Einstein et Smoluchowski.



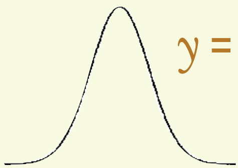
Superposition de deux images distantes de 1/25 de seconde d'un tas de particules mises en vibration. Le mouvement de la plus grosse peut rappeler celui des grains de pollen du mouvement brownien

Crédit : E. Clément

De manière surprenante, il n’est pas nécessaire d'imposer le caractère gaussien : c'est automatique si l'on suppose que les trajectoires sont continues et sans mémoire d'une collision à la suivante. Une fois formalisé en tant qu'objet abstrait par Wiener, le mouvement brownien a pu envahir les domaines les plus divers des mathématiques : analyse réelle et complexe, équations aux dérivées partielles, géométrie... Bien sûr, dans de nombreuses situations physiques on est amené à sortir du cadre idéal des statistiques gaussiennes et des trajectoires continues ; cependant, c'est grâce à ses propriétés statistiques merveilleuses que le mouvement brownien est devenu un outil indispensable et omniprésent en mathématiques, permettant de résoudre les problèmes les plus divers.

Robert Brown, médecin anglais naturaliste 1773-1858, il rentrera dans la postérité en découvrant le mouvement désordonné des particules en suspension dans un liquide, auquel on donnera son nom.

La courbe de Gauss



$$y = e^{-x^2}$$

La courbe gaussienne, ou courbe en cloche, est une célèbre fonction qui apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique.

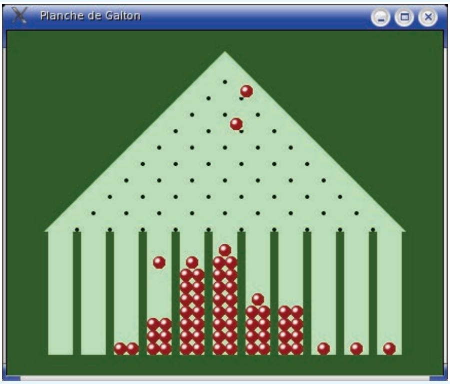
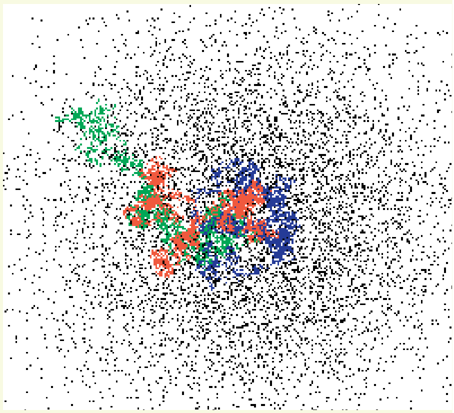


Planche de Galton : Le processus aléatoire de descente des billes donne des empilements qui fait penser à une courbe gaussienne.



Sur ce graphique on a représenté les positions de nombreuses particules qui ont évolués par diffusion, selon un mouvement brownien, partant toutes d'une origine donnée.

Les trajectoires de trois de ces particules ont été matérialisées en couleurs. La densité de présence des particules en fonction de leur distance à l'origine est approchée par une courbe gaussienne.

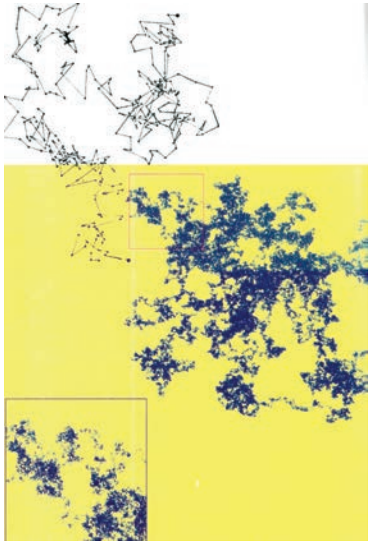
Crédit : C. Villani et Y. Ollivier

Le mouvement brownien

Du côté des physiciens

Le mouvement brownien s'applique à des édifices moléculaires (colloïdes) ou à de tous petits grains de matière en suspension dans un liquide. Si ces objets sont plus denses que le liquide, leur sédimentation sera limitée par l'agitation thermique qui tend à les remettre en suspension. La mesure de cet équilibre dynamique a conduit Jean Perrin à la mesure du nombre d'Avogadro des molécules dans un gaz, ce qui lui valut le prix Nobel de physique en 1926.

" On ne peut non plus fixer une tangente, même de façon approchée, à aucun point de la trajectoire, et c'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regarderait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque la nature les suggère aussi bien que les fonctions à dérivée... On a réuni sur la figure ci-jointe ... les projections horizontales des segments qui joignent les positions consécutives d'un même grain.. Incidemment, une telle figure, et même le dessin suivant, où se trouvent reportés à une échelle arbitraire un grand nombre de déplacements, ne donnent qu'une idée bien affaiblie du prodigieux enchevêtrement de la trajectoire réelle... On voit assez comment s'évanouit pratiquement en de pareils cas la notion de tangente à une trajectoire."
Jean Perrin *"Les Atomes"*



Une simulation numérique d'une marche aléatoire programmée sur ordinateur reproduit, en haut à gauche, le dessin original de Jean Perrin du mouvement aléatoire d'une minuscule particule en suspension, observée sous microscope.

Ce mouvement d'agitation n'est plus perceptible pour des objets de taille supérieure au micromètre. L'énergie cinétique d'agitation à une température absolue T donnée est la même quelle que soit la taille de l'objet. La vitesse spontanée est ainsi de quelques centaines de mètres par seconde pour les molécules d'un gaz, du micron par seconde pour un grain de 100 nanomètres de diamètre ; mais elle est totalement négligeable pour un grain de sable de 100 microns de diamètre.
En soulevant des gros grains par un écoulement d'air, ce que l'on nomme

fluidisation, on a une image approchée de cette agitation. Mais les chocs entre grains sont alors inélastiques à la différence des particules browniennes. On doit alors entretenir le mouvement pour compenser la perte d'énergie dans les chocs. Des grains de sable qui tombent individuellement sur une butte ont aussi un mouvement aléatoire qui évoque un mouvement brownien irrégulier superposé à la chute moyenne. On parle de dispersion toutes les fois qu'un phénomène d'écoulement moyen se combine à de la diffusion. Si la diffusion reste le mécanisme fondamental pour mélanger ou séparer à des courtes distances, c'est la convection qui assure le transport à grande distance (pensez aux fumées d'une cheminée d'usine ou à la dispersion d'un polluant dans une rivière).

Le mouvement brownien intervient dans la compréhension de nombreux problèmes dans la physique de la matière en désordre.. Ainsi un polymère est constitué de chaînons élémentaires où les monomères sont attachés ensemble comme les éléments d'un mètre d'arpenteur en désordre. On a rapproché depuis longtemps la configuration instantanée de cette chaîne avec la trajectoire d' un grain brownien. Ce modèle affiné, en particulier par les recherches de Pierre -Gilles de Gennes, Prix Nobel 1991, prend en compte le fait que le chemin ne peut repasser exactement par le même point ou encore que la présence de nombreuses chaînes qui font plutôt penser à un plat de nouilles nécessite des traitements plus sophistiqués, telles que la reptation d'une chaîne au milieu des autres. De fait les physiciens dans le dialogue avec les mathématiciens ainsi qu'avec la réalité des systèmes naturels, proposent ou réclament des modèles de plus en plus complexes. Le plus connu d'entre eux est le vol de Lévy celui

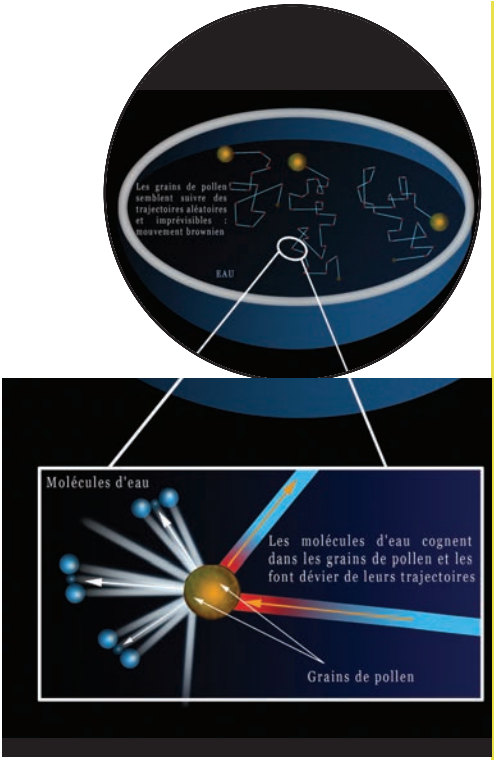


Illustration du phénomène physique qui occasionne le mouvement brownien. Les mouvements, apparemment erratiques, des grains de pollen, sont le résultat des chocs incessants par les atomes et les molécules du fluide, à une échelle très petite, invisible à l'observateur.
Dessin d'Elsa Godet inspiré de Science et Vie Junior spécial Einstein, 2005.

d'une marche au hasard dont les pas ont des longueurs extrêmement variables comme ce voyageur qui après avoir fait les cent pas dans une salle d'attente ferait un vol transatlantique et dont on voudrait garder trace de tous les pas successifs, De nombreux phénomènes naturels qui font intervenir des événements au hasard avec des distributions de probabilité très larges reposent sur une telle approche. Mais la référence de base restera toujours notre image d'une marche brownienne.

Les surfaces minimales

Des bulles de savon aux surfaces minimales.

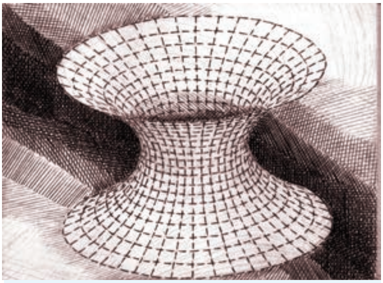
Qui est le plus sérieux : un enfant qui souffle des bulles de savon, un physicien qui multiplie les observations ou un mathématicien qui met en équation ?

La fascination pour la droite et le cercle a peut-être permis de résoudre l'un des premiers problèmes d'optimisation de l'histoire de la pensée humaine.
Tout le monde sait que la droite est le plus court chemin d'un point à un autre et permet de décrire le chemin de la lumière, que l'arc de grand cercle est le plus court chemin sur la sphère et que, à périmètre donné, le cercle délimite la plus grande surface. Depuis toujours les esquimaux savent que la sphère est la meilleure forme qu'ils puissent donner à leur maison pour minimiser sa surface extérieure et donc les pertes de chaleur.
A la recherche des surfaces minimales, depuis trois siècles, les savants se sont livrés à un dialogue fructueux : les physiciens multiplient les expériences les plus imaginatives, les mathématiciens aidés aujourd'hui des informaticiens cherchent les équations et les théories les mieux adaptées et des artistes, comme Patrice Jeener, en font des œuvres d'art…

Du côté des mathématiciens

En utilisant les travaux d'Archimède, des savants comme Galilée, Stevin et Torricelli ont tenté d'établir une théorie de la statique.
Les travaux des frères Bernoulli sur l'équilibre des systèmes mécaniques puis ceux de Dirichlet sur l'énergie potentielle permirent de comprendre que l'énergie emmagasinée par une surface liquide dépend de son aire…
Au 17ème siècle, Newton et Leibnitz, indépendamment l'un de l'autre, formalisent le calcul infinitésimal et jettent les bases d'une science moderne : " le calcul des variations " . Depuis Euler, pour déterminer minima et maxima, le mathématicien recherche géométriquement à trouver des tangentes horizontales ou algébriquement à résoudre des équations différentielles.
Lagrange, successeur d'Euler, établit en 1760 une équation des surfaces minimales et le physicien belge Joseph Plateau réalise un travail expérimental et théorique considérable : le problème qu'il posa alors défia les plus grands mathématiciens du 19ème et 20ème siècle : " *une courbe fermée dans l'espace peut-elle toujours servir de support à des surfaces minimales et si oui à combien et de quelle forme ?* "
Bulles de rêve et films de lumière permettent de visualiser ces formes minimales. Mais quelles sont -elles ? Les frères Bernoulli, en étudiant la forme d'équilibre d'une chaîne pesante fixée à ses extrémités, découvrent la

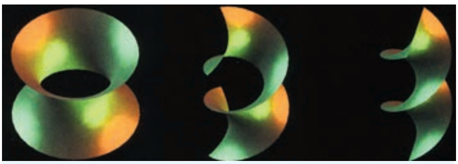
" chaînette " , cette courbe en cosinus hyperbolique qui engendre, par rotation, une des deux surfaces minimales types : la caténoïde . Elle fut étudiée par Euler en 1752. Pour la voir apparaître, il suffit de tremper dans une solution savonneuse, deux boucles de fil dans des plans proches et parallèles pour former un film de savon correspondant à un minimum relatif de l'aire. En découpant une caténoïde selon une de ses méridiennes et écartant progressivement les deux bords, tout en vrillant légèrement la surface, on obtient l'hélicoïde découverte par Meunier en 1776. L'hélicoïde définit sur le cylindre dans lequel



Caténoïde, gravure de Patrice Jeener

elle est inscrite deux hélices qui forment ensemble une double hélice. En collant un mince ruban de papier le long de chaque courbe de la double hélice on obtient le modèle de la molécule d'ADN qui porte le code génétique.

Ainsi, bien plus que de simples modèles pour les formes minimales, les films de



Déformation de la caténoïde en hélicoïde
Crédit Tangente 90

savon peuvent servir à résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

H.A. Schwarz fut le premier à résoudre le

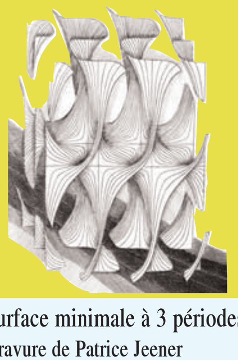
Les bulles de savon - Chardin
Crédit National Gallery of Art - Los Angeles

problème de Plateau dans un cas où le contour n'était pas plan. Il avait observé que les films de savon s'appuyant librement sur une surface forment avec elle un angle de 90° le long de l'arête. Schwarz découvrit aussi deux importants principes de symétries par rapport à une ligne ou un plan. Il obtient ainsi de magnifiques surfaces minimales périodiques qui existent dans la nature.

Le jeune Américain, Jesse Douglas, réussit à résoudre le problème de Plateau, ce qui lui valu entre autres travaux, en 1936, la médaille Fields.

Depuis, de nombreux autres résultats ont été démontrés et le problème de Plateau généralisé : " *Pour chaque courbe fermée simple, il existe une surface d'aire minimale qui s'appuie sur ce contour* " est résolu. On a même pu préciser la nature de ces surfaces mais ... on ne sait toujours pas combien elles sont !

En conclusion, pour le mathé-maticien, rien de moins simple qu'une bulle de savon !



Surface minimale à 3 périodes
Gravure de Patrice Jeener

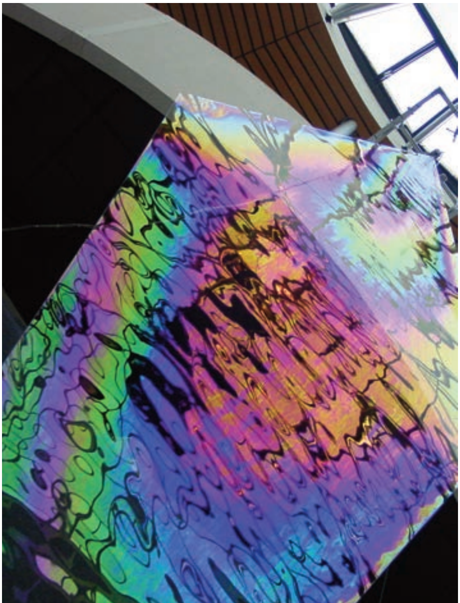
Les surfaces minimales

Du côté des physiciens

Une goutte liquide adopte toujours les configurations les plus compactes compatibles avec les contraintes auxquelles elle est soumise. Sous l'action des seules forces de cohésion (attractives), c'est la sphère qui est privilégiée. Comme la sphère est la forme qui, pour un volume donné, a la plus petite surface, c'est dans cette configuration que les molécules interagissent le plus. Augmenter la surface d'un liquide coûte une énergie qui, ramenée à l'unité de surface, est appelée tension superficielle. On peut aussi bien dire qu'un volume de liquide cherche spontanément à rendre sa surface la plus petite possible. Ainsi, le brouillard est formé de gouttelettes d'eau sphériques. La pluie également, tout au moins lorsque les gouttes sont suffisamment petites pour ne pas être déformées par le frottement de l'air. De même, les gouttes de rosée sur les feuilles d'une plante forment une calotte sphérique. Lorsqu'elles dépassent quelques millimètres de rayon, elles s'aplatissent sous l'action de la pesanteur, et c'est encore l'action de la pesanteur qui fait que la surface d'un liquide dans un verre est plane. Les liquides en impesanteur dans un satellite artificiel se “mettent en boule”.

Lorsqu'on ajoute une petite quantité de détergent à l'eau, on diminue la tension superficielle, et l'on peut alors placer le liquide dans des configurations éphémères, métastables, comme les films de savon, les bulles, les mousses. Les mousses font toujours l'objet de recherches actives, tant fondamentales qu'appliquées. Les parois de ces films s'amincissent au cours du temps car le liquide s'y écoule par gravité, et l'on prolonge la durée de vie des films en ajoutant de la glycérine qui freine l'écoulement. On peut alors tendre des films spectaculaires d'un mètre de haut, ou former des bulles géantes garnies de belles irisations. Le site de François Graner donne d'excellentes recettes et propose des illustrations photographiques étonnantes.

On peut également tendre des films prenant appui sur des contours fermés de fil



Film de savon géant, entre science et art !
Les couleurs sont dues à des interférence de la lumière sur les deux faces du film.
Crédit : F. Mondot, F. Graner

métallique de formes diverses. Ces films ont une particularité basée sur le fait que le liquide recherche de façon spontanée à rendre son énergie de surface minimale : ils réalisent la surface la plus petite prenant appui sur le contour fermé, et fournissent ainsi la solution expérimentale d'un problème de mathématique difficile. De nombreux mathématiciens se sont passionnés pour ce problème : existence de solution pour tout contour, nombre de solutions etc.

Amateurs de bulles à la fête de la science
Crédit : F. Mondot, F. Graner

Les amateurs de bulles peuvent s'en donner à coeur joie en appliquant, avec un peu d'entraînement, la recette suivante :

25% d'eau : La propreté de l'eau est importante. Dans certaines régions, l'eau du robinet suffit. Une eau en bouteille peu minéralisée peut convenir. L'eau désionisée, celle pour les batteries de voiture, est facile à trouver. L'eau ultra-pure, encore meilleure, n'est disponible qu'en laboratoire.

5% de sucre : Bien mélanger. Le sucre diminue l'évaporation et épaissit la sauce, donc permet de garder plus longtemps l'eau dans le film de savon.

20% de liquide vaisselle : Bien mélanger.

Les liquides vaisselle sont presque tous décevants. Sans vouloir faire de publicité, nous avons trouvé que les meilleurs détergents sont le Dreft bleu, bleu-vert ou vert ; à la rigueur Fairy-Dreft vert, voire Dawn-Fairy. Ce sont des liquides vaisselle vendus couramment au Benelux ; en France, on ne les trouve que dans les circuits professionnels. Ils contiennent de l'aminoxyde (brevet Procter & Gamble)

10% glycérine : Bien mélanger. La glycérine se trouve pour pas cher en pharmacie. Elle permet d'épaissir la sauce. On peut en mettre moins que 10% si on veut.

40 % d'eau : Verser et mélanger doucement, sans faire mousser. Pourquoi ne pas avoir mis toute l'eau dès le début ? C'est que quand il y a peu d'eau, on mélange mieux, et ça mousse moins.

Laisser reposer quelques heures, bouchon ouvert ainsi, l'alcool contenu dans le détergent s'évapore. Certains laissent même reposer quelques semaines : faites vos propres essais.

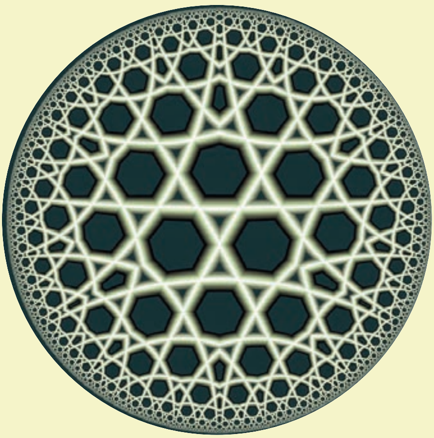
Crédit : F. Graner

Pour en savoir plus

Site de François Graner
http://www-Lsp.ujf-grenoble.fr/vie_scientifique/fete_de_la_science/bulles_geantes/recette.htm

Les espaces courbes

Les géométries non euclidiennes ont vu le jour au 19ème siècle après des siècles d'efforts pour démontrer le Postulat d'Euclide selon lequel " par un point il passe une parallèle et une seule à une droite donnée ". Démontrer ce que tout le monde sait, semblait un jeu stérile de mathématiciens. En tentant une démonstration par l'absurde et en faisant défiler toutes les conséquences possibles de sa négation aucune contradiction n'apparaît ! Alors pourquoi ne pas s'en passer ? Lobatchevski inventa alors des mondes où la somme des angles d'un triangle ne vaut pas 180°. Dans ces espaces courbes, avec ces objets mathématiques ayant peu d' applications pratiques, Einstein allait trouver les outils pour fonder sa théorie de la Relativité Générale !



Pavage sur un plan hyperbolique
Crédit : Jos Leys

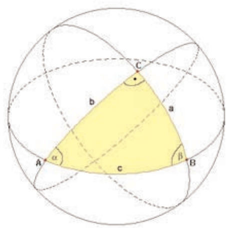
Du côté des mathématiciens

En 1851, le mathématicien allemand Bernhardt Riemann généralisa les idées développées par Lobatchevski en 1829 et montra que les géométries non euclidiennes pouvaient représenter des surfaces courbes.
Ancien élève de Gauss, Riemann posa mathématiquement le principe des systèmes de coordonnées relatifs les uns par rapport aux autres. Il formalise au niveau microscopique le concept d'espace courbe, ces mêmes espaces qui prendront réalité dans la théorie d'Einstein.

Comment définir la courbure d'une surface ?

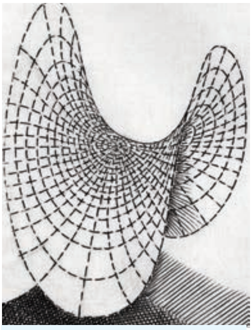
Sur un plan, pour fabriquer une droite, il suffit de disposer d'une corde et de deux piquets : plantez les deux piquets et tendez la corde.
Avec la même méthode et trois piquets, vous pouvez fabriquer un triangle. Mesurez les angles et faites-en la somme. Le résultat est connu depuis Euclide (IIIème siècle avant Jésus-Christ). Il est égal à 180°.
Mais que se passe-t-il si l'expérience est faite à la surface de la Terre et non sur un plan ?
Le plus court chemin entre deux points est obtenu en suivant l'arc de grand cercle entre eux. Il est alors possible de tracer des triangles.

Sur une Terre parfaitement sphérique, la somme des angles est supérieure à 180°.



Si nous nous plaçons sur une surface différente comme un col de montagne ou une selle de cheval, elle devient inférieure à 180°.

Les surfaces comme les plans, les cylindres ou les cônes sur lesquelles la somme des angles d'un triangle est égale à 180° sont dites de courbure nulle, celles comme la sphère ou les ellipsoïdes où la somme des angles est supérieure à 180°, de courbure positive et celles comme la selle de cheval où la somme des angles est inférieure à 180°, de courbure négative.

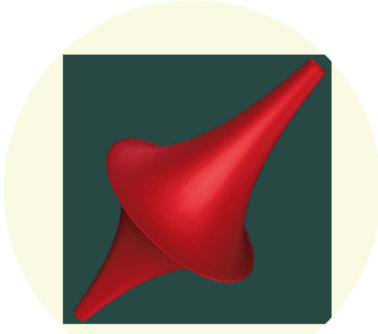


Cardioïde
Gravure de Patrice Jeener

Les physiciens disent que notre espace tridimensionnel est courbe ! Comment le représenter ?

Notre vision en trois dimensions nous permet d'admettre facilement ces résultats. Imaginons des êtres plats " collés " sur une surface de dimension deux pour lesquels elle serait l'univers entier. Incapables d'en sortir, ils ne verraient pas sa courbure. Ils pourraient cependant tracer un triangle, mesurer ses angles et déterminer ainsi si leur univers a une courbure positive, négative ou nulle.
De même, un extraterrestre vivant et voyant dans un monde en dimension quatre pourrait "voir" la courbure de notre univers. Nous y sommes trop englués pour la voir.

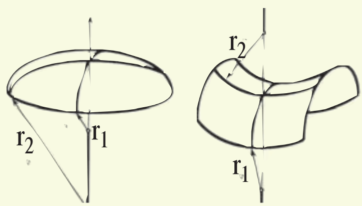
Le même phénomène existe pourtant et nous pouvons le tester : par exemple en calculant la somme des angles d'un triangle.



Pseudosphère : surface qui représente une portion du plan hyberbolique de Lobatchevski dans notre espace euclidien. Crédit " The Geometric Center 1995"

Comment définir la courbure d'une surface ?

Pour mieux observer, comprendre et prédire les films de savon, le mathématicien cherche à décrire géométriquement les surfaces minimales et définit la notion de courbure.
La courbure d'un cercle est constante et est égale à l'inverse de son rayon.
Pour définir la courbure d'une courbe plus complexe, on cherche localement à l'approcher le mieux possible par un cercle (encore du calcul infinitésimal en perspective).
Pour les surfaces on se place dans des plans normaux à la surface et on définit la courbure de la courbe qui est à l'intersection de la surface et du plan. De plus, en orientant la surface, donc la normale, on peut attribuer un signe à cette courbure
En se plaçant dans plusieurs plans de section, on trouve une courbure maximale $1/r_1$ et minimale $1/r_2$; on peut alors calculer la courbure moyenne $(1/2)(1/r_1 + 1/r_2)$ qui intervient dans cet article et la courbure gaussienne $1/r_1 \times 1/r_2$ de la surface.



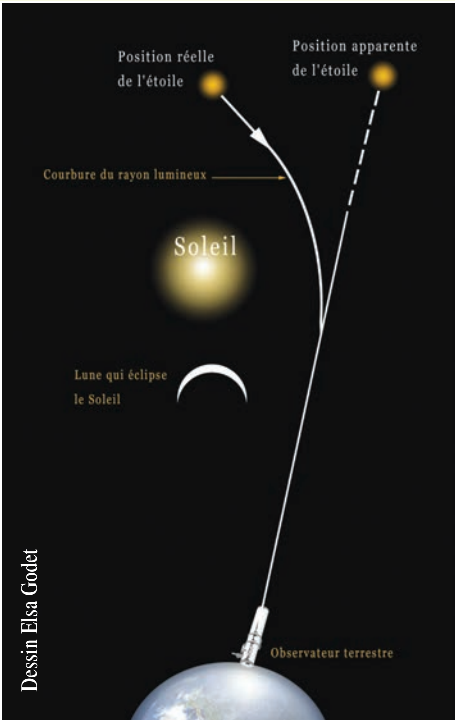
Les espaces courbes

Du côté des physiciens

En 1905, la relativité restreinte conduit les physiciens à considérer de façon solidaire les coordonnées spatiales et temporelles d'un événement dans un espace-temps quadri-dimensionnel où distances et vitesse de la lumière ne sont pas indépendantes.

En 1915, la relativité générale invite à bouleverser plus encore la représentation de l'espace. Il est courbé d'autant plus que la quantité de matière ou d'énergie qui se trouve au voisinage est importante. Les trajectoires des particules (même celle des " grains " de lumière, les photons) suivent les géodésiques de l'espace courbe. L'image classique, à deux dimensions, est celle d'un objet massif posé sur une feuille de caout-chouc. La feuille est déformée par le poids de l'objet, et le quadrillage original sur la feuille est courbe: les lignes de plus court chemin ne sont plus des droites.

La théorie prédit donc que les trajets lumineux s'écartent de la ligne droite de façon notable au voisinage des corps très pesants, comme le Soleil. Une première confirmation de cette théorie se fait lors de l'éclipse du 29 mai 1919, quand Sir A. Eddington peut mesurer l'écart entre la position apparente d'une étoile, à partir d'observations faites loin du Soleil (ce qui revient à oublier le Soleil), et la position observée au voisinage de celui-ci.

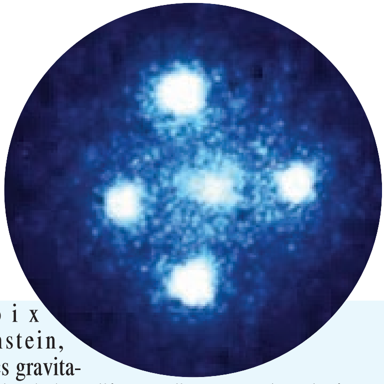


Autre conséquence de la théorie, les lentilles gravitationnelles. Un objet massif situé sur l'axe reliant une source de lumière à un observateur, courbe les trajectoires des rayons lumineux. Pour l'observateur : la source apparaît comme un cercle et la luminosité est amplifiée par la convergence des rayons lumineux. Dans certains cas, on voit d'autres géométries : la croix d'Einstein, mirage de 4 (ou 5) images d'un même objet lointain, est le plus célèbre exemple.

Lorsque la densité de masse dépasse localement une certaine limite, la structure de l'espace-temps se modifie de façon très sensible. Cela a pour conséquence, au cœur de cette région, la création d'un trou noir duquel la lumière ne peut plus s'échapper. Les rayons passant à proximité du trou noir sont très fortement courbés, et peuvent même faire un ou plusieurs tours du trou avant de parvenir à l'observateur.

La liste des phénomènes associés à la structure particulière de l'espace-temps est bien longue. Ainsi, le temps s'écoule plus lentement près d'une concentration de masse ; même si l'effet reste très faible, le système de positionnement des GPS doit en tenir compte. Des " déformations " de l'espace temps, sous forme d'ondes gravitationnelles, sont également prédites, et l'on espère bien en mesurer les effets lors d'expériences menées sur Terre et dans l'espace (comme dans le projet VIRGO).

Qu'en est-il de la géométrie globale de l'Univers? On sait qu'il est en expansion, depuis le big bang initial, mais l'on ne sait pas encore prédire son devenir, entre expansion perpétuelle et contraction (jusqu'à l'hypothétique big crunch). La réponse à cette question dépend assez directement d'une bonne mesure de la masse totale de l'univers, et en particulier de cette masse noire, invisible, mais objet de toutes formes de spéculation.



Croix d'Einstein, ou arcs gravitationnels répétant l'image d'un amas de galaxies qui se trouve à 8 milliards d'années-lumière derrière une galaxie lentille, ici, l'objet diffus central de l'image, située à 400 millions années-lumière. Crédit Nasa

VIRGO à Cascina, près de Pise. Ce gigantesque interféromètre, dont les bras font plusieurs kilomètres, est un détecteur d'ondes gravitationnelles. Crédit CNRS

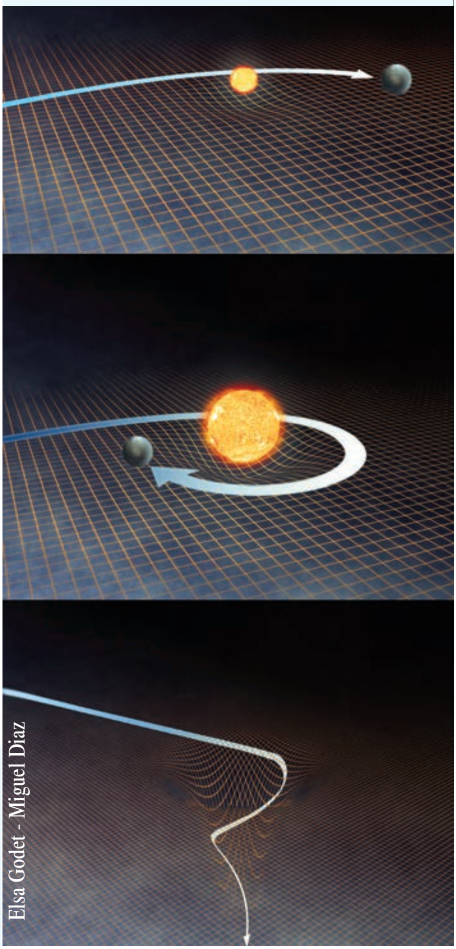


Illustration simplifiée du rapport entre masse et courbure de l'espace : Les deux dessins du haut représentent des trajectoires différentes pour un corps passant à proximité d'une étoile, simple déviation ou capture orbitale. Le troisième dessin est une image d'artiste de l'effet d'un trou noir. Dans tous les cas, les trajectoires suivent les géodésiques de l'espace ainsi courbé.

Le chaos

Pour étudier la dynamique des corps, il faut d'abord savoir définir le système de coordonnées dans lequel ils évoluent. Depuis Newton on sait étudier la dynamique d'un système à deux corps. C'est Henri Poincaré qui comprend pour la première fois la dynamique d'un système à trois corps en y introduisant la notion de chaos.

Pour les mathématiciens et les physiciens, une des signatures du chaos correspond à des trajectoires partant de conditions initiales très proches et qui finissent par diverger d'une façon extrèmement rapide. Aujourd'hui les études menées autour du chaos sont très fécondes ; le mathématicien découvre de nouvelles propriétés des fonctions mises en jeu et l'astrophysicien observe des astéroïdes du système solaire au comportement chaotique.

Le chaos intervient dans la turbulence qui est omniprésente dans tout ce qui est fluide : mouvement des masses d'air qui amènent giboulées, nuages ou cyclones, tourbillons d'eaux aux pieds des piles des ponts et trombes d'écume blanche des cascades, mouvement de l'air dans les tuyaux d'orgue, gerbes de laves qui jaillissent des volcans…

Du côté des mathématiciens

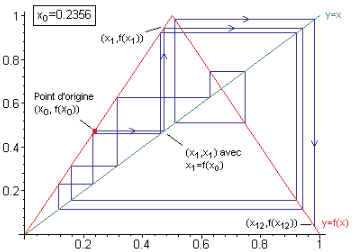
Pour bien commencer, écoutons Henri Poincaré (1854 - 1912), le père du chaos nous expliquer dès 1908 : " *Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Un petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit... Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard* ".

Essayons plus modestement de comprendre.
Si l'état du système solaire est connu à l'instant où vous lisez ces lignes, on peut le déterminer à tout instant postérieur. Il n'en est pas de même pour le climat. Pour le mouvement des planètes, les prévisions sont crédibles à long terme pour plusieurs milliers d'années alors que, pour le climat, elles ne le sont guère pour plus de quatre ou cinq jours. Bien sûr, on peut espérer améliorer les prévisions météorologiques mais on ne pourra jamais aller au-delà d'une certaine limite.

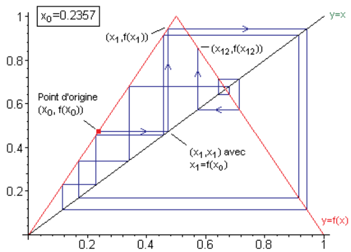
Un modèle mathématique. Pour préciser ce phénomène, examinons la loi d'évolution très simple que nous avons illustrée.
Sur ces deux graphiques, nous avons étudié le comportement d'une suite de nombres

obtenue par 12 itérations calculées à partir de la fonction f, définie par sa " courbe en toile de tente " et une valeur initiale x_0 comprise entre 0 et 1.

On peut lire les valeurs successives de : $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $x_1=f(x_2)$...en plaçant les points (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3)...qui sont alternativement situés sur la courbe et sur la droite d'équation y=x dont le rôle est de reporter en abscisse une valeur lue en ordonnée. Sur le premier graphique, la valeur initiale est $x_0 =$ 0,2356 puis nous lisons x_1, puis x_2 et ainsi de suite…A la douzième itération nous avons $x_{12} = 0{,}9824$ et en continuant ainsi pour x_{29} on trouve 0,8672. La liste des nombres obtenus ne reflète pas un ordre évident.



Le deuxième graphique met en évidence la sensibilité extrême à un changement même infime de la condition initiale. Prenons $x_0 =$ 0,2357, nous obtenons alors $x_2 = 0{,}4714$ et nous lisons $x_{12} = 0{,}5728$ puis pour x_{29} on trouve 0,0416 . Au départ, le comportement des deux suites n'est guère différent mais pourtant les deux suites bifurquent très vite.



Henri Poincaré 1854 -1912
Crédit Bib M@th

L'application logistique $x_{n+1}= a\, x_n(1-x_n)$ présente une grande diversité de comportements lorsque le paramètre a (ici en abscisse) est varié. Le graphe représente la valeur asymptotique que prend alors x ; on passe d'une valeur à deux, puis quatre , puis huit …Puis vient un intervalle de valeur de a pour lequel x parcourt des intervalles continus de façon chaotique pour recouvrir finalement [0,1].

Des orbites au milieu du chaos

En fait, les suites précédentes ne sont pas aussi désordonnées que cela. En effet, chaque nombre comporte quatre chiffres, ainsi parmi les 10 000 premiers, il en existe au moins deux égaux soient $x_p = x_n$ avec $p < n$. La loi de formation de la suite implique alors qu'elle se reproduit de la même façon après n et après p. Autrement dit, elle reproduit indéfiniment la même orbite x_p , x_{p+1}, … x_{n-1}.

Cet ordre au milieu du désordre se retrouve souvent dans les phénomènes chaotiques.

Le chaos

Du côté des physiciens

Le chaos s'est invité en force en physique dans la seconde moitié du $20^{\text{ème}}$ siècle. On le retrouve depuis les échelles microscopiques (on rencontre même du chaos quantique), jusqu'à l'échelle de notre univers. Plutôt que d'en résumer toutes ses manifestations, nous avons choisi de l'illustrer sur un exemple précis, plutôt original, et qui pourrait même inspirer un auteur de science-fiction, qui sait?

Per chaos ad astra

Bien que le manège des planètes autour du Soleil semble immuable, elles dessinent dans leur sillage un paysage complexe de zones d'attraction et de répulsion pour les corps pesants qui se meuvent dans l'espace. Ces derniers se retrouvent dans une situation typique qui peut, par la multiplication des zones d'équilibre instable, engendrer des comportements chaotiques. Faut-il s'en inquiéter ou cela peut-il même s'avérer utile? Le chaos peut-il provoquer la chute abrupte de la Lune sur la Terre ou de la Terre sur le Soleil ? Plus généralement, faut-il avoir peur que les planètes quittent leurs orbites et que, comme le craignaient les anciens, le ciel nous tombe sur la tête ?

Cette crainte est sans fondement scientifique, mais certes, le chaos existe et on s'en sert ! Qu'est-ce donc que ce chaos dans les orbites ? Dans la mécanique céleste, ce qui est chaotique est imprévisible, du moins, à long terme. Mais attention : même si un processus est imprévisible, cela ne veut pas forcément dire que le corps concerné va faire n'importe quoi.
D'où vient donc cette imprévisibilité, et comment s'en sert-on ?
Imaginons un vaisseau spatial en orbite stable autour de la Terre, du Soleil ou d'une planète. Son orbite est prévisible, on peut la calculer précisément longtemps en avance. Tout changement important de l'orbite du vaisseau spatial nécessite une grande énergie, fournie par des moteurs puissants.

Maintenant, imaginons une région où plusieurs corps célestes tournent, par exemple la Terre et la Lune. Evidemment, chacun des corps exerce une attraction gravitationnelle. Si on passe entre ces deux corps, on est attiré simultanément par les deux. Forcément, il peut y avoir des cas où ces deux forces de gravitation s'égalisent : s'il y a deux forces d'amplitude égale mais de sens opposés, le résultat net sera nul. Avec la Terre et la Lune, ce cas existe. Cependant, comme la Lune est moins massive que la Terre, ce point n'est pas à égale distance des deux astres, mais plus proche de la Lune.

Si le vaisseau spatial entre dans cette zone, il va effectivement subir un effet d'équilibre. Or, c'est un équilibre instable - tout comme il suffit d'un tout petit coup pour faire tomber un funambule, si on pousse ce vaisseau un tant soit peu dans la bonne direction, il va quitter l'équilibre et s'approcher lentement de la Lune. Celle-ci va l'attirer de plus en plus fort - l'attraction de la Terre, dans le sens opposé, ne suffisant plus pour le retenir et il va tomber irrémédiablement. Donc, contrairement aux orbites stables, une toute petite impulsion suffit pour changer complètement la trajectoire du vaisseau. C'est précisément là qu'intervient le chaos : dans l'équilibre instable, les causes minimes, voire imperceptibles, peuvent provoquer des effets majeurs. D'où en général l'imprévisibilité.

Ces zones chaotiques sont évidemment très utiles : elles permettent de naviguer dans l'espace en faisant d'importantes économies de carburant ! Cependant, cette brève explication masque la complexité des calculs qui se cachent derrière ce phénomène : comment aller vers cette région chaotique, comment y rester, comment choisir de quel côté on veut basculer ? Autant de questions qui nécessitent des calculs et le contrôle de trajectoires très complexes.

Un jour, de telles techniques pourraient nous permettre de nous déplacer dans tout le système solaire à moindre coût : ce que l'on appelle les "super-autoroutes interplanétaires" est un exemple de l'utilisation intelligente du chaos.

Pour en savoir plus

L'ordre du chaos, Pour la Science, Belin

Hasard et chaos, David Ruelle, Odile Jacob

http://math.bu.edu/INDIVIDUAL/bob/

http://www.cnes.fr

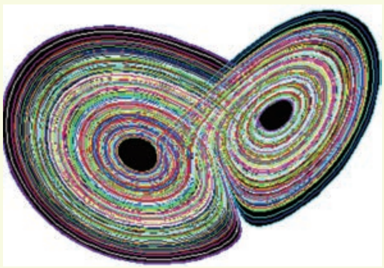
http://www.esa.int

http://www.iap.fr

Vue d'artiste de la "super autoroute interplanétaire"
Crédit : ESA

Les attracteurs étranges

Les systèmes dynamiques présentent des comportements divers, qui peuvent se lire sur des représentations graphiques dans les cas les plus simples. On s'intéresse au régime permanent, c'est à dire aux trajectoires débarrassées du régime transitoire. Ne parlons pas des systèmes simples conduisant à un point fixe unique, ou bien à un régime périodique, pour nous occuper de certains systèmes chaotiques dont la dynamique se déploie sur un attracteur étrange, concept introduit par David Ruelle et Floris Takens en 1971. Illustrons-le sur l'exemple célèbre étudié par le météorologue Edward Lorenz pour décrire la convection atmosphérique. Deux situations initiales voisines donneront des trajectoires fort divergentes dans leurs détails, mais qui s'appuieront bien sur l'attracteur de Lorenz représenté sur le dessin.

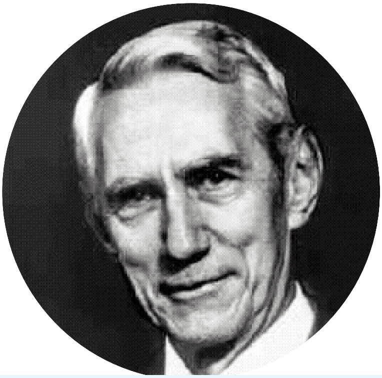


L'information

S'il est un concept partagé par des disciplines scientifiques très diverses, c'est bien celui d'Information, qui y prend d'ailleurs des sens différents suivant que l'on s'intéresse simplement au débit et à l'exactitude de l'information véhiculée ou bien également à son contenu sémantique. Née à la fin des années 40 du travail de Claude Shannon, la Théorie de l'Information a rencontré beaucoup de succès, en ce qu'elle permet de donner un sens précis au concept et donne une approche quantitative des réseaux qui transportent cette information.
Cela est d'autant plus important que nous sommes en pleine ère numérique : les échanges à travers la planète se font sous la forme de nombres. Messages électroniques, téléphonie mobile, transactions bancaires, téléguidage de satellites, transmissions d'images, de sons ..., transmettre des informations numériques, c'est bien le mot clé de ce début de 21ème siècle !
En 1948, un câble de téléphone permettait de passer 1800 messages simultanément. 25 ans plus tard, ce nombre dépassait les 200 000, et aujourd'hui, grâce aux fibres optiques, il se compte en millions. Mathématiciens et physiciens travaillent pour améliorer et rendre plus fiables ces transmissions. C'est là que les codes correcteurs d'erreur prennent toute leur importance.

Du côté des mathématiciens

Comment définir la quantité d'information apportée par un message ou bien une mesure ? Une façon " objective " est de mesurer de combien son acquisition diminue notre méconnaissance d'un phénomène. Supposons que l'on tire à pile ou face, ou que l'on lance un dé, tout en cachant le résultat. Quelle information, notée I, gagnons-nous lorsque celui-ci est dévoilé ? Il est naturel de supposer que I dépende du nombre W de résultats possibles, supposés dans un premier temps équiprobables. Avec la pièce de monnaie, on a W = 2, avec un dé, W = 6. Il est également souhaitable que cette mesure soit additive, c'est-à-dire que pour deux lancers indépendants, la quantité d'information obtenue soit la somme des informations individuelles associées à chaque lancer. Lorsque l'on lance 2 pièces de monnaie, le nombre de résultats possibles est 4 (2x2), avec deux dés, ce nombre vaut 36 (6x6). La fonction qui s'additionne lorsque ses arguments se multiplient est bien connue, c'est le logarithme (que nous prendrons en base 2 par convention). On conviendra donc de définir l'information par $I = Log(W)$. Mais bien souvent, les résultats attendus ne sont pas tous équiprobables. Ainsi, et c'était un problème bien concret pour un ingénieur des communications comme Shannon, les lettres de l'alphabet n'ont pas toutes la même probabilité d'occurrence dans un texte. Shannon propose une définition plus générale de l'information, construite sur les logarithmes de ces probabilités. Il s'intéresse ensuite à chiffrer la quantité d'information qu'il est possible de transmettre dans un canal donné, sachant que celui-ci n'est jamais parfait. Le " grand théorème " de Shannon donne une limite supérieure à la capacité d'un canal de transmission, une quantité liée au nombre de signaux distincts, transférés par seconde et mesurée en bps, des " bits par seconde ". Cette capacité est d'autant plus grande que le signal est codé dans une large gamme de fréquence, et que le " bruit " sur la ligne est faible. Mais pour se rapprocher de cette limite supérieure, encore faut-il trouver le mode de codage optimal, cadre dans lequel s'inscrivent les nombreuses et fructueuses recherches de codes correcteurs.



Claude Eldwood Shannon 1916 -2001
Crédit : site de Saint-Andrews

Les codes correcteurs

Dans les opérations de transmission et de stockage de documents numérisés, codés sous la forme d'une suite de 0 ou de 1 (des bits), il faut pouvoir réparer les erreurs susceptibles d'apparaître. Le codage correcteur d'erreur consiste à ajouter au document initial une redondance, c'est-à-dire des bits supplémentaires de contrôle.

Une première manière élémentaire (mais cependant efficace) consiste à répéter chaque bit du message 3 fois. Par exemple, si on veut transmettre le message 01101, on envoie 000 111 111 000 111. Si un des 3 symboles est modifié pendant la transmission, on peut corriger l'erreur. En contrepartie, le message à transmettre est 3 fois plus long. Il existe des codages plus sophistiqués. Un des plus utilisés est le code de Hamming: il s'agit de coder un message de 4 bits en un mot de longueur 7 en ajoutant 3 bits de redondance.On voit sur le tableau qui suit que lorsqu'un bit du message a été modifié par suite d'une erreur, on peut retrouver le message émis en cherchant l'unique message de la liste qui ne lui diffère que d'un bit.

0000 *000*	0100 *111*	1000 *101*	1100 *010*
0001 *011*	0101 *100*	1001 *110*	1101 *001*
0010 *110*	0110 *001*	1010 *011*	1110 *100*
0011 *101*	0111 *010*	1011 *000*	1111 *111*

Les techniques de décodage sont très diverses et dépendent de la manière dont les mots sont construits. Ces trois dernières années, en combinant des idées simples sur les codages avec de l’electronique numérique, Alain Glavieux et Claude Berrou ont mis au point une méthode révolutionnaire dans ce domaine "les turbo décodeurs". Le principe du turbo-décodage repose sur l'utilisation simultanée de deux encodages indépendants du même message. Chaque décodeur corrige séparément certaines erreurs, puis envoie son résultat à l'autre décodeur qui réitère le processus en tenant compte de cette information supplémentaire. Cette méthode de décodage itératif peut être comparée à la technique de résolution des mots croisés qui consiste à compléter la grille en commençant par les lignes, puis par les colonnes, puis à nouveau par les lignes et ainsi de suite jusqu'à la solution. La mise en oeuvre fait appel à des notions subtiles d'information.

L'information

Du côté des physiciens

Ce qui a frappé les physiciens qui ont pris connaissance des travaux de Claude Shannon, c'est la grande similitude entre la formule définissant l'information et celle de l'entropie statistique, donné par Boltzmann au 19ème siècle. Il s'en est suivi de longs débats, où l'on a cherché également à clarifier d'autres concepts, comme ceux de complexité ou bien de désordre qui participent également à la description de la Nature.

Concentrons nous ici plutôt sur des contraintes qui limitent la quantité d'information que l'on peut avoir sur un système physique, en exorcisant au passage deux démons célèbres de la physique, coupables de vouloir utiliser une connaissance infinie pour aboutir à des conséquences paradoxales.

Au début du 19ème siècle, alors que la mécanique, forte de ses nombreux succès, est une discipline reine, Pierre Simon Laplace propose que pour *" Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent… rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux "*. Ainsi ce démon de Laplace, en renversant au même instant les vitesses

Pierre-Simon Laplace
1749 -1827

de toutes les particules de l'univers, pourrait, par le calcul, " remonter " le temps.

Mais, en se limitant à la mécanique de Newton, la théorie du chaos implique dans ce cas une sensibilité extrême du résultat du calcul à la précision des conditions initiales (le fameux effet papillon). Or la physique moderne nous apprend que, plus une distance est courte plus le rayonnement qui nous permet d'y être sensible est d'énergie élevée, ce qui donne une première limite (à moins de disposer d'une énergie infinie !). Ensuite, contrainte probablement plus sévère, la physique quantique, à travers les célèbres relations d'incertitudes d'Heisenberg, fixe une limitation intrinsèque à la connaissance simultanée de la position et de la vitesse d'une particule. Le démon de Laplace peut donc reposer en paix !

Le démon de Maxwell avait en ligne de mire le second principe de la thermodynamique, celui de l'accroissement de l'entropie au cours du temps. Ce principe, qui implique par exemple une tendance à l'homogénéisation des mélanges, porte en germe les phénomènes d'irréversibilité, et donc la flèche du temps que la mécanique semblait ignorer. En utilisant la théorie de l'Information, le physicien Léon Brillouin a montré comment, pour opérer un tri, le démon doit accroître, d'une quantité au moins équivalente, l'entropie totale, levant par là le paradoxe. Des études plus récentes, en particulier par Charles Bennett, ont précisé les conditions de ce nouvel exorcisme.

James-Clerk Maxwell
1831- 1879

Extrait d'une lettre de Maxwell à son ami Strutt, le futur Lord Raileigh, en 1870, qui présente pour la première fois ce que l'on appellera plus tard le paradoxe du démon de Maxwell.

" Car s'il existe une quelconque vérité dans la théorie dynamique des gaz, les différentes molécules d'un gaz à température uniforme se déplacent à des vitesses très différentes. Mettons un tel gaz dans un récipient avec deux compartiments et faisons un petit trou dans la paroi entre A et B, de la dimension nécessaire pour laisser passer une molécule.

Fournissons un bouchon et un couvercle pour ce trou et engageons un portier très intelligent et excessivement rapide, avec des yeux microscopiques, mais qui soit encore un être essentiellement fini. Chaque fois qu'il voit une molécule arriver à grande vitesse vers la porte donnant entre A et B, il doit la laisser passer, mais si la molécule arrive lentement il doit garder la porte fermée. Il doit également laisser passer les molécules lentes de B vers A, mais pas les rapides (si nécessaire, ceci peut se faire avec un autre portier et une autre porte). Il faut bien sûr qu'il soit très rapide, car les molécules changent sans cesse de direction et de vitesse.

On pourra élever ainsi la température de B et abaisser celle de A, sans aucune dépense d'énergie, grâce uniquement à l'action intelligente d'un guide (comme un aiguilleur sur un chemin de fer avec des aiguillages parfaits qui enverrait les express sur une voie et les trains de marchandises sur une autre). Je ne vois pas pourquoi on ne pourrait pas se dispenser de l'intelligence et le faire agir de façon autonome.

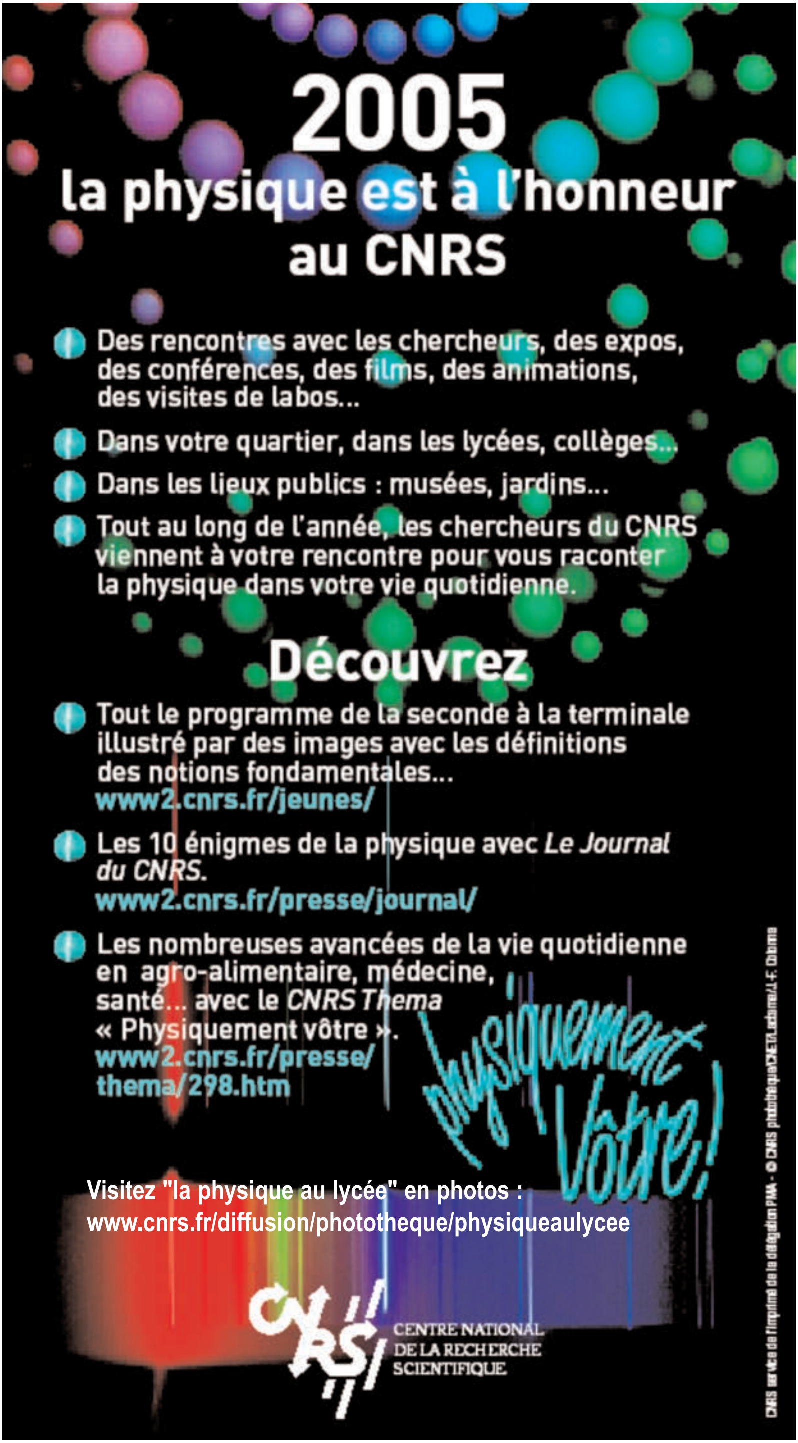
Moralité: Le second principe de la thermodynamique a le même degré de vérité que l'affirmation selon laquelle si l'on jette un verre d'eau dans la mer, on ne peut pas en retirer le même verre d'eau ".

Pour en savoir plus

Histoire des codes secrets, Simon Sigh, JC Lattés

Le Zéro et le Un, Jérôme Segal, Syllepse

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/


2005
la physique est à l'honneur
au CNRS
Des rencontres avec les chercheurs, des expos, des conférences, des films, des animations, des visites de labos...
Dans votre quartier, dans les lycées, collèges...
Dans les lieux publics : musées, jardins...
Tout au long de l'année, les chercheurs du CNRS viennent à votre rencontre pour vous raconter la physique dans votre vie quotidienne.
Découvrez
Tout le programme de la seconde à la terminale illustré par des images avec les définitions des notions fondamentales...
www2.cnrs.fr/jeunes/
Les 10 énigmes de la physique avec *Le Journal du CNRS.*
www2.cnrs.fr/presse/journal/
Les nombreuses avancées de la vie quotidienne en agro-alimentaire, médecine, santé... avec le *CNRS Thema* « Physiquement vôtre ».
www2.cnrs.fr/presse/thema/298.htm
physiquement Vôtre!
Visitez "la physique au lycée" en photos :
www.cnrs.fr/diffusion/phototheque/physiqueaulycee
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CNRS service de l'imprimé de la délégation PIMA

L'Année Mondiale de la Physique

L'ensemble des physiciens fête le centième anniversaire de cette année particulière, parfois dénommée l' année miraculeuse , qui a vu Albert Einstein révolutionner la physique moderne, avec la théorie de la relativité restreinte, l'explication de l'effet photoélectrique par la réintroduction d'une composante particulaire à la lumière (le photon), et enfin l'explication du mouvement brownien. Au-delà de cet aspect commémoratif, c'est une communauté scientifique bien mobilisée qui entend faire de cette année un événement largement tourné vers l'avenir afin de relever un triple défi.

Défi intellectuel et culturel, pour faire savoir que des territoires entiers restent à découvrir, au cœur de la physique comme dans ses rapports avec d'autres disciplines, telles les sciences du vivant ou l'environnement.

Défi économique, car nos espoirs majeurs de développement sont à rechercher du côté de l'Innovation. Il faut alors former, en nombre suffisant, des jeunes tournés vers les carrières scientifiques.

Défi citoyen enfin, au vu des choix importants que nous sommes amenés à faire, directement ou par l'intermédiaire de nos élus. Une condition de l'exercice démocratique est alors qu'aux arguments et débats d'experts fasse écho, dans la société, une culture scientifique plus développée.

Cette Année Mondiale de la Physique est largement ouverte aux interfaces avec les autres disciplines, et c'est donc avec enthousiasme que nous avons répondu à cette proposition de comparer des regards complémentaires à des thématiques communes aux mathématiques et à la physique.

Pour en savoir plus sur l'AMP en Ile de France : www.physique 2005-idf.com

Le CIJM

Le CIJM est une association créée en 1993 par des professeurs de mathématiques désireux de proposer une autre réflexion sur leur discipline et fédère trente deux compétitions intéressant ainsi plusieurs millions de personnes tant en France qu' à l'étranger.

Le CIJM édite " Panoramath ", annales corrigées de ses compétitions et crée des jeux élaborés à partir de ces textes pour permettre à tous de connaître la joie de la recherche mathématique ! Il propose des expositions avec animations pour mettre la culture mathématique à la portée du plus grand nombre.

Le CIJM dynamise son site internet, www.cijm.org, pour développer à travers le monde des liens forts entre ses associations membres, ses nombreux partenaires et son public.

Le CIJM organise une grande fête des mathématiques,

le salon de la culture et des jeux mathématiques,

début juin à Paris, lieu de rencontre de nombreux pays et plate-forme unique de vulgarisation et de promotion de la culture mathématique.

Grâce au soutien
du CEA et du CNRS

Cette brochure a été réalisée par

Marie José Pestel
pour le Comité International des Jeux Mathématiques

Etienne Guyon (ESPCI Paris) et Rémy Mosseri (CNRS Jussieu)
pour l'Année Mondiale de la Physique et la Société Française de Physique

Avec la participation de

Jean Paul Allouche (CNRS, Université d'Orsay)
Thierry Berger (Université de Limoges)
Claude Berrou (ENST Bretagne)
Jean François Colonna (CMA de l'Ecole Polytechnique, France Télécom R&D)
Mickael Khan (ESA Allemagne)
Hervé Lehning
Martin Lemoine (IAP)
Bernard Sapoval (LMC de l'Ecole Polytechnique)
Jacques Treiner (UPMC)
Alexandre Vidal (Université Pierre et Marie Curie)
Cedric Villani (ENS de Lyon)

Réalisation graphique
Patrick Arrivetz

Maquette de couverture
Elsa Godet (IUP Versailles)

La symétrie
L'ordre quasipériodique
Les graphes
Les fractales
Le mouvement brownien
Les espaces courbes
Les surfaces minimales
Le chaos
L'information

Ecrite à l'occasion de l'Année Mondiale de la Physique et du salon de la culture et des jeux mathématiques, cette brochure parle de la vision que mathématiciens et physiciens portent sur neuf grands thèmes partagés par les deux disciplines.

Elle témoigne que mathématique et physique avancent souvent ensemble, que leurs chemins se croisent et que les avancées et les questionnements de l'une profitent à l'autre.

CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Région Ile de France

MAIRIE DE PARIS

PHYSIQUE 2005 Année internationale

Société Française de Physique

culture et jeux mathématiques CIJM